

6. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter, egy. ts.; Tarnai Gábor, mérnöktanár)

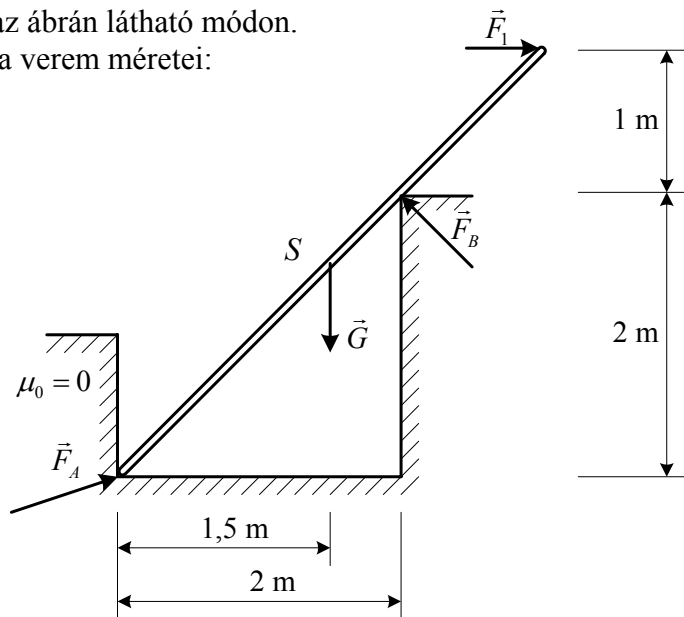
*Négy erő egyensúlya, Culmann-szerkesztés,
Ritter-számítás*

6.1. Példa

Egy létrát egy verembe letámasztunk az ábrán látható módon.
Adott a létra súlya, valamint a létra és a verem méretei:

$$\vec{G} = (-100\vec{j})\text{N}.$$

A testek érintkező felülete sima.



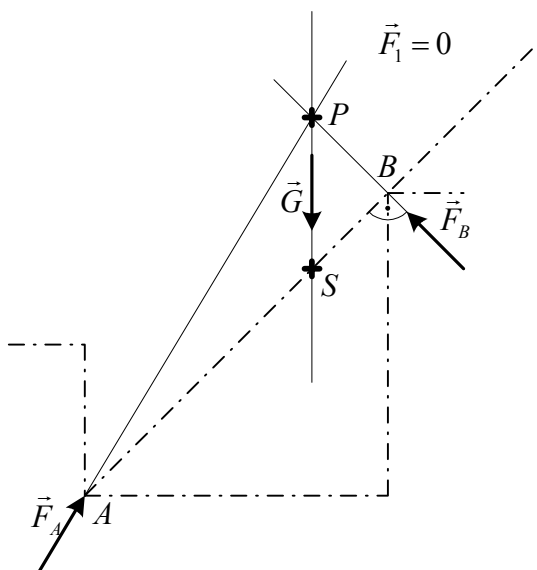
Feladat:

Határozza meg azt az $\vec{F}_{1\max}$ erőt, amelynek hatására a létra még éppen nem mozdul el!

- Szerkesztéssel és
- számítással!

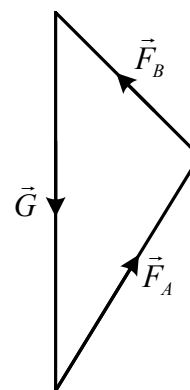
Megoldás:

- Elsőként** vizsgáljuk meg azt az esetet, mikor a létrára nem hat vízszintes erő, vagyis $\vec{F}_1 = \vec{0}$. Ekkor három erő egyensúlyát vizsgálhatjuk a már tanult módon.



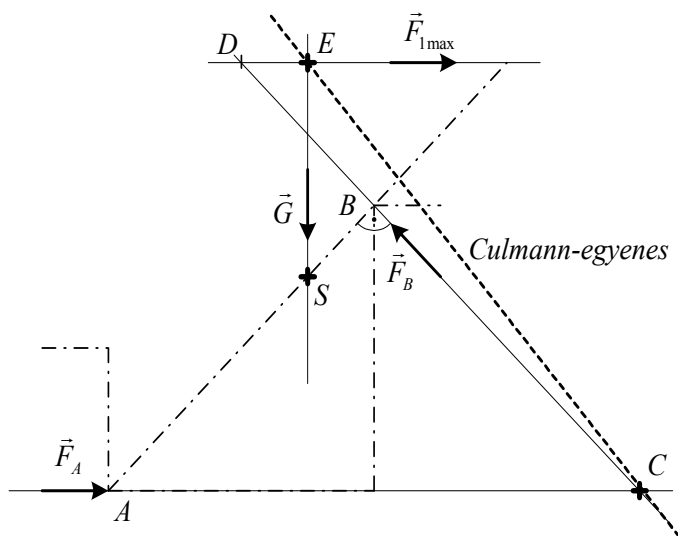
Szerkezeti ábra

$$\vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

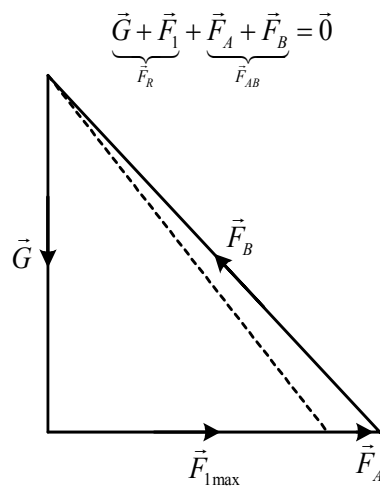


Erőábra

A **másik határeset**, mikor a legnagyobb vízszintes erő működik a létra felső végében. Ebben az esetben a létra még éppen nem mozdul meg, vagyis az A pontban ébredő támasztóerő függőleges összetevője éppen nullává válik. Tehát ismert mind a négy erőnek az iránya, egy erő – a súlyerő ismeretében az ún. Culmann-módszer segítségével megszerkeszthetők az ismeretlen támasztóerők, illetve a szintén ismeretlen $\underline{\vec{F}_{1\max}}$ terhelés.



Szerkezeti ábra



Erőábra

- b. A B támasznál minden esetben a létra hossz tengelyére merőleges támasztóerő ébred, míg az A sarokban ébredő támasztóerő nagysága és iránya függ az $\vec{F}_1$ erő nagyságától. A statika alapegyenleteit és az $\vec{F}_B$ erőre vonatkozó geometriai összefüggést fel lehet írni:

$$\begin{aligned}
M_a = 0 &= -1,5G - 3F_1 + 4F_{By}, \\
M_c = 0 &= -4F_{Ay} + 2,5G - 3F_1, \\
M_d = 0 &= -0,5G + 3F_{Ax} - 1F_{Ay},
\end{aligned}$$

és ismerjük az $\vec{F}_B$ erő irányát:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{|F_{By}|}{|F_{Bx}|} = 1 \Rightarrow |F_{By}| = |F_{Bx}|.$$

A fenti egyenletekben az F_1 erő, mint változó paraméter szerepel.

Vizsgáljuk meg először azt az esetet, mikor ez az erő zérussal egyenlő. Ekkor

$$\begin{aligned}
M_a = 0 &= -1,5G + 4F_{By}, \\
M_c = 0 &= -4F_{Ay} + 2,5G, \\
M_d = 0 &= -0,5G + 3F_{Ax} - 1F_{Ay}, \\
|F_{By}| &= |F_{Bx}|.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_A &= (37,5\vec{i} + 62,5\vec{j})\text{N}, \\
\vec{F}_B &= (-37,5\vec{i} + 37,5\vec{j})\text{N}.
\end{aligned}$$

A másik eset az, amikor az F_1 erő eléri maximális értékét, vagyis amikor a létra elveszti stabilitását és megmozdul. Ez az a pillanat, mikor az $\vec{F}_A$ erő függőleges összetevője zérussá válik, vagyis $F_{Ay} = 0$. Az egyenletrendszer ebben az esetben:

$$\begin{aligned}
M_a = 0 &= -1,5G - 3F_1 + 4F_{By}, \\
M_c = 0 &= 2,5G - 3F_1, \\
M_d = 0 &= -0,5G + 3F_{Ax}, \\
|F_{By}| &= |F_{Bx}|.
\end{aligned}$$

A megoldás:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{1\max} &= (83,33\vec{i})\text{N}, \\
\vec{F}_A &= (16,66\vec{i})\text{N}, \\
\vec{F}_B &= (-100\vec{i} + 100\vec{j})\text{N}.
\end{aligned}$$

6.2. Példa

Egy hasáb-jellegű testet az ábrán látható módon egy verembe helyezünk.

Adott a hasáb súlya és az ábráról leolvasható geometria méretek. A hasáb és a verem érintkezéseinél a súrlódás elhanyagolható:

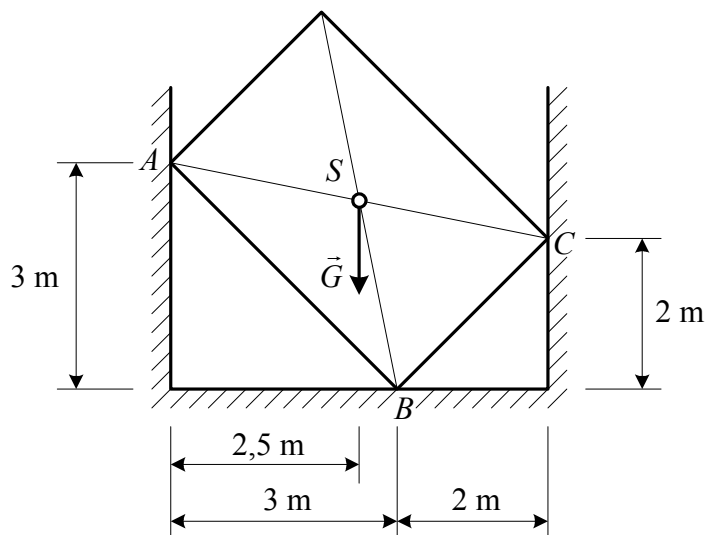
$$\vec{G} = (-400\vec{j})\text{ N},$$

$$\mu_0 \approx 0.$$

Feladat:

Határozza meg a támasztóerőket

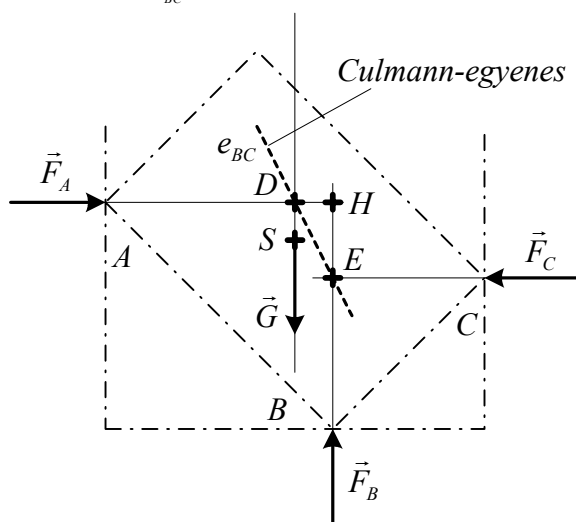
- szerkesztéssel,
- számítással.



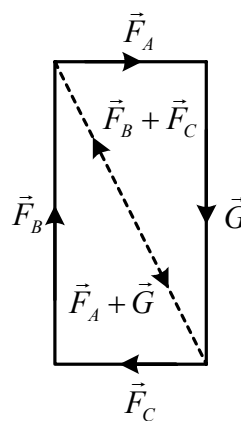
Megoldás:

- A támasztóerők megszerkesztéséhez a Culmann-módszert alkalmazzuk.

$\vec{G} + \vec{F}_A + \underbrace{\vec{F}_B + \vec{F}_C}_{\vec{F}_{BC}} = \vec{0}$. Az ábrán az $\vec{F}_{BC}$ erő hatásvonalára a Culmann-egyenes.



Szerkezeti ábra



Erőábra

- A statika alapegyenleteit felhasználva, az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$M_e = 0 = 0,5G - 1F_A \quad (1),$$

$$M_h = 0 = 0,5G - 1F_C \quad (2),$$

$$F_y = 0 = -G - F_B \quad (3).$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$(1) \Rightarrow F_A = 0,5G = 200 \text{ N } (\rightarrow)$$

$$(2) \Rightarrow F_C = 0,5G = 200 \text{ N } (\leftarrow),$$

$$(3) \Rightarrow F_B = G = 400 \text{ N } (\uparrow).$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (200\vec{i}) \text{ N},}}$$

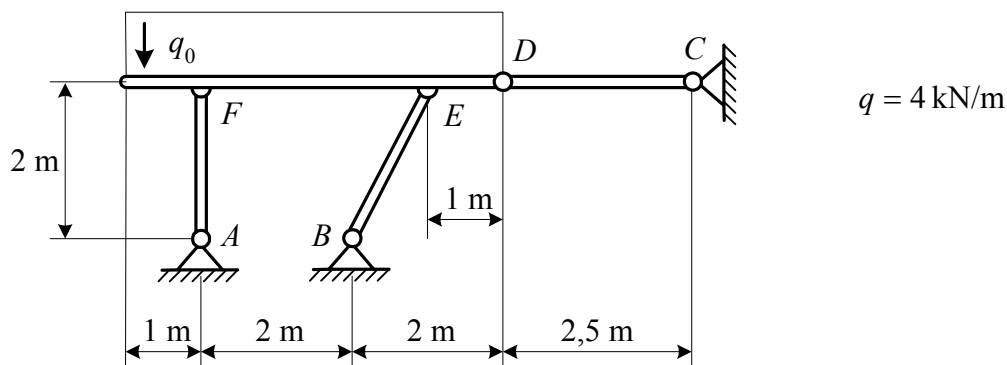
$$\underline{\underline{\vec{F}_B = (400\vec{j}) \text{ N},}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_C = (-200\vec{i}) \text{ N}.}}$$

6.3. Példa

Az ábrán látható merev FED rudat három másik merev rúddal (AF , BE és CD) támasztottunk meg. Az FED rudat egy vonal mentén egyenletesen megoszló erőrendszer terheli.

Adott a szerkezet méretei és terhelése.



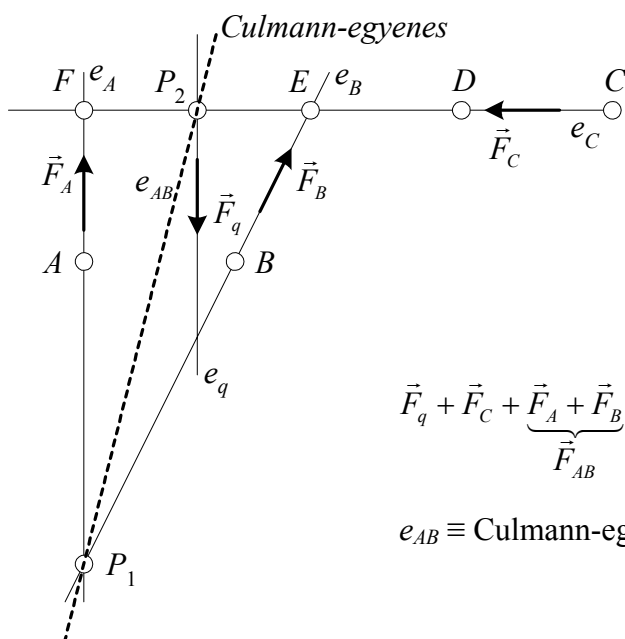
Feladat:

Határozza meg az A , a B és a C csuklóban ébredő támasztóerőket

- szerkesztéssel és
- számítással!

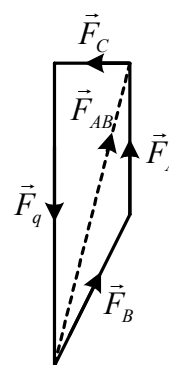
Megoldás:

- A megoszló terhelő erőrendszer eredője: $F_q = ql = 4 \cdot 5 = 20 \text{ kN}$, ahol l a megoszló terhelés hossza, az eredő helye konstans megoszló terhelésnél a hossz felénél van. A támasztóerők meghatározása a Culmann-szerkesztéssel történik.



$$\vec{F}_q + \vec{F}_C + \underbrace{\vec{F}_A + \vec{F}_B}_{\vec{F}_{AB}} = \vec{0}$$

$e_{AB} \equiv \text{Culmann-egyenes}$



- b. A támasztóerők kiszámíthatók az ún. Ritter-módszerrel, melynek lényege az, hogy a nyomatéki egyenleteket olyan keresztmetszetekre írjuk fel, amelyek a támasztóerők hatásvonalainak metszéspontjaiban helyezkednek el. A támasztó rudakban, így a csuklóknak is csakis rúdírányú erők ébrednek, tehát a rudak iránya meghatározza a támasztóerők hatásvonalát.

A hatásvonalak az F az E , illetve egy távolabbi P pontban metszik egymást (ld. a fenti szerkezeti ábrát). A nyomatéki egyenletek rendre:

$$M_f = 0 = 3 \cdot F_{By} - 1,5 \cdot F_q \Rightarrow F_{By} = \frac{1,5 \cdot F_q}{3} = 10 \text{ kN } (\uparrow),$$

$$M_f = 0 = 6 \cdot F_{Bx} - 1,5 \cdot F_q \Rightarrow F_{Bx} = \frac{1,5 \cdot F_q}{6} = 5 \text{ kN } (\rightarrow),$$

$$M_e = 0 = -3 \cdot F_A + 1,5 \cdot F_q \Rightarrow F_A = \frac{1,5 \cdot F_q}{3} = 10 \text{ kN } (\uparrow),$$

$$M_{p1} = 0 = 6 \cdot F_C - 1,5 \cdot F_q \Rightarrow F_C = \frac{1,5 \cdot F_q}{6} = 5 \text{ kN } (\leftarrow).$$

Az F keresztmetszetre felírt nyomatéki egyenleteknél azt a tételt lehet kihasználni, hogy egy erő a hatásvonala mentén bárhova eltolható, így ha az E pontba toljuk először, akkor csak az y irányú összetevőjének, ha pedig a P_1 pontba toljuk, akkor az x összetevőjének lesz nyomatéka, mert a másik összetevő hatásvonala keresztülmegy az F keresztmetszeten.

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (10\vec{j})\text{kN}}},$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_B = (5\vec{i} + 10\vec{j})\text{kN}}},$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_C = (-5\vec{i})\text{kN}}}.$$

6.4. Példa

Az ábrán látható szerkezetet egy koncentrált nyomaték, és egy vonal mentén egyenletesen növekvő, megoszló erőrendszer terheli.

Adott a szerkezet méretei és terhelése.

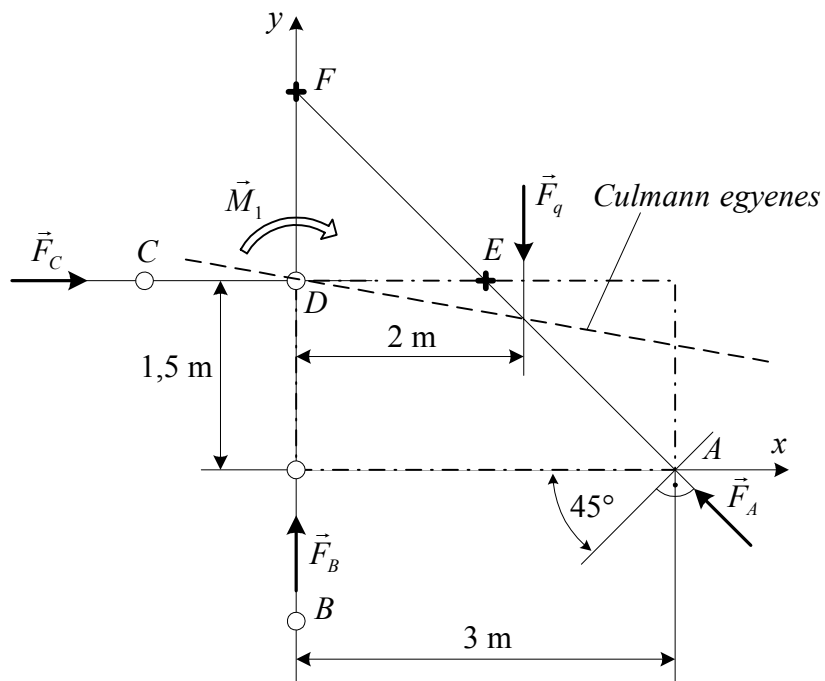
$$q_{0\max} = 4 \text{ kN/m},$$

$$M_1 = 3 \text{ kNm}.$$

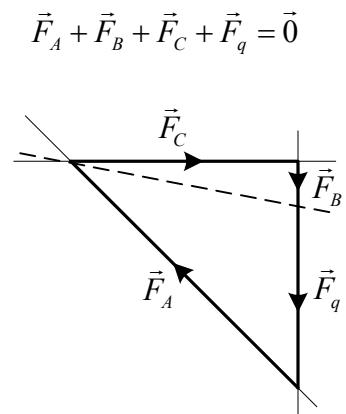
Feladat:

Számítsa ki az A , a B és a C csuklóban ébredő támasztóerőket!

Megoldás:



Szerkezeti ábra



Erőábra

Elsőként a megoszló erőrendszer eredőjét és az eredő helyét kell meghatározni. Ebben az esetben az eredő nagysága egyenlő a háromszög területével. Természetesen definíció szerint, a már ismertetett módon felírva a határozott integrált ugyanerre az eredményre jutunk, tehát

$$F_q = \frac{q_{0\max} l}{2} = 6 \text{ kN}.$$

Az eredő hatásvonala áthalad a háromszög súlypontján, ami derékszögű háromszögek esetében a befogókat $1/3 - 2/3$ arányban osztják (lásd a fenti ábrát).

A feladat Ritter-módszerrel megoldható. A nyomatéki egyenleteket a D , az E és az F keresztmetszetekre írjuk fel. Az A keresztmetszetenél ébredő támaszerő az érintkező felületek közös normálisával megegyező irányú. Esetünkben a támasztó síkra merőleges irányú, vagyis 45° -os szöget zár be a vízszintessel, ez az egyenletek felírásánál is figyelembe vehető.

$$M_d = 0 = 1,5 F_{Ay} - M_1 - 2 F_q \Rightarrow F_{Ay} = \frac{M_1 + 2 F_q}{1,5} = 10 \text{ kN} (\uparrow),$$

$$\tan 45^\circ = \frac{|F_{Ay}|}{|F_{Ax}|} \Rightarrow F_{Ax} = F_{Ay} = 10 \text{ kN} (\leftarrow),$$

$$M_e = 0 = -1,5 F_B - M_1 - 0,5 F_q \Rightarrow F_B = \frac{-M_1 - 0,5 F_q}{1,5} = -4 \text{ kN} (\downarrow),$$

$$M_f = 0 = 1,5 F_C - M_1 - 2 F_q \Rightarrow F_C = \frac{M_1 + 2 F_q}{1,5} = 10 \text{ kN} (\rightarrow).$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (-10\vec{i} + 10\vec{j})\text{kN}}}, \quad \underline{\underline{\vec{F}_B = (-4\vec{j})\text{kN}}}, \quad \underline{\underline{\vec{F}_C = (10\vec{i})\text{kN}}}.$$

6.5. Példa

Az ábrán látható kötélrendszeret egy m tömegű test terheli.

Adott:

a szerkezet méretei és terhelése.

$$m = 100 \text{ kg}$$

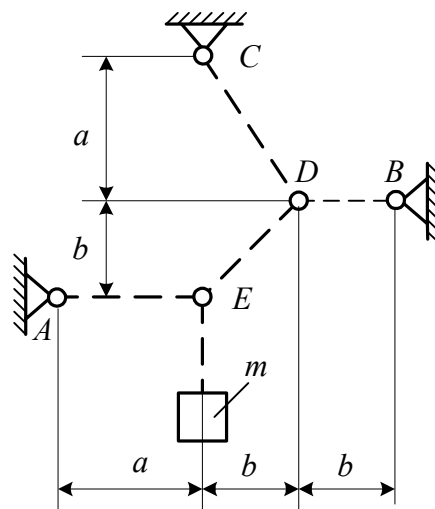
$$a = 3 \text{ m}$$

$$b = 2 \text{ m}$$

Feladat:

Az $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$ támasztóerők meghatározása:

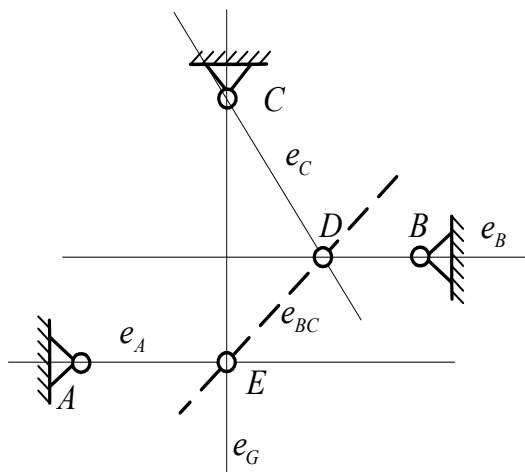
- szerkesztéssel,
- számítással.



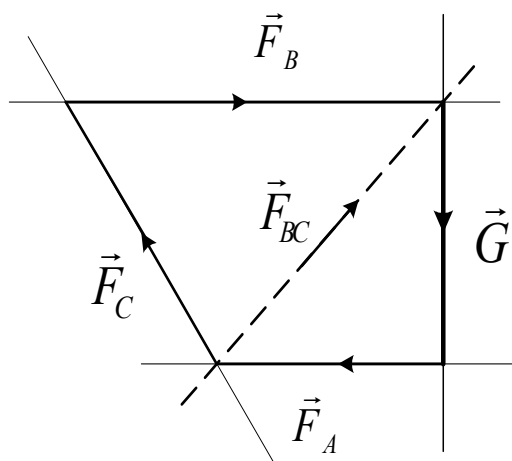
Megoldás:

- Szerkesztéssel

Szerkezeti ábra

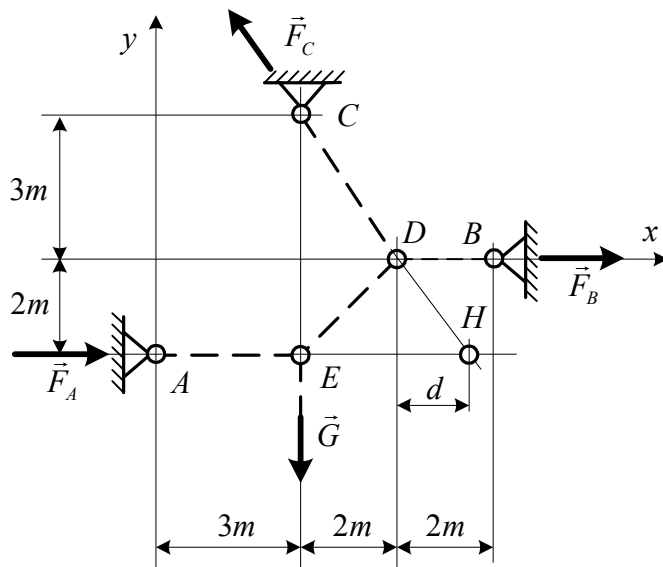


Erőábra



$e_{BC} \equiv$ Culmann egyenes

c. Számítással



$$\frac{3}{2} = \frac{2}{d} \Rightarrow d = \frac{4}{3} \text{ m}$$

$$\vec{F}_A = F_{Ax} \vec{i}$$

$$\vec{F}_B = F_{Bx} \vec{i}$$

$$\vec{F}_C = F_{Cx} \vec{i} + F_{Cy} \vec{j}$$

$$\vec{G} = -G \vec{j}$$

$$M_d = 0 = 2F_{Ax} + 2G \Rightarrow F_{Ax} = -G = -1000 \text{ N} (\leftarrow)$$

$$M_h = 0 = -2F_{Bx} + \frac{10}{3}G \Rightarrow F_{Bx} = \frac{10}{6}G = \frac{5}{3}1000 = 1666,6 \text{ N} (\rightarrow)$$

$$Y = 0 = F_{Cy} - G \Rightarrow F_{Cx} = G = 1000 \text{ N} (\uparrow) \Rightarrow F_{Cx} (\leftarrow)$$

$$\frac{|F_{Cy}|}{|F_{Cx}|} = \frac{3}{2} \Rightarrow |F_{Cx}| = \frac{2}{3}|F_{Cy}| = 666,7 \text{ N}$$

$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = 1202 \text{ N} (\nearrow)$$

$$\underline{\underline{F_{Ax} = -1000 \text{ N} (\leftarrow)}}$$

$$\underline{\underline{F_{Bx} = 1666,6 \text{ N} (\rightarrow)}}$$

$$\underline{\underline{F_C = 1202 \text{ N} (\nearrow)}}$$