

8. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter, egy. ts.; Tarnai Gábor, mérnök tanár)

Párhuzamos erőrendszerek eredője, súlypontszámítás

8.1. Példa

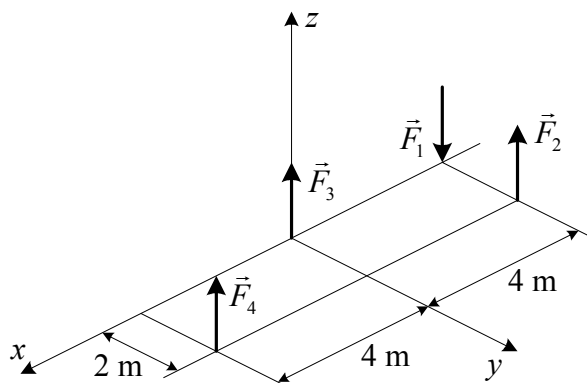
Adott:

Az ER iránya: $\vec{e} \equiv \vec{k}$

$$F_1 = F_4 = 4 \text{ kN}$$

$$F_2 = 6 \text{ kN}$$

$$F_3 = 2 \text{ kN}$$



Feladat:

- Határozza meg az erőrendszer origóba redukált vektorkettősségét!
- Számítsa ki az eredő erő helyének koordinátáit!

Megoldás:

- Az erők vektorai és a támadáspontjainak koordinátái.

$$\begin{array}{llll} \vec{F}_1 = (-4\vec{k})\text{kN} & \vec{F}_2 = (6\vec{k})\text{kN} & \vec{F}_3 = (2\vec{k})\text{kN} & \vec{F}_4 = (4\vec{k})\text{kN} \\ \vec{r}_1 = (-4\vec{i})\text{m} & \vec{r}_2 = (-4\vec{i} + 2\vec{j})\text{m} & \vec{r}_3 = \vec{0} & \vec{r}_4 = (4\vec{i} + 2\vec{j})\text{m} \end{array}$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = (8\vec{k})\text{kN} = F \vec{e}, \text{ ahol } \vec{e} = \vec{k}.$$

$$\vec{r}_1 F_1 = (16\vec{i})\text{kNm},$$

$$\sum_i \vec{r}_i F_i = (8\vec{i} + 20\vec{j})\text{kNm},$$

$$\vec{r}_2 F_2 = (-24\vec{i} + 12\vec{j})\text{kNm},$$

$$\vec{r}_3 F_3 = \vec{0} \text{ kNm},$$

$$\vec{r}_4 F_4 = (16\vec{i} + 8\vec{j})\text{kNm},$$

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left(\sum_i \vec{r}_i F_i \right) \times \vec{e} = (20\vec{i} - 8\vec{j})\text{kNm}.$$

-

$$\vec{r}_k = \frac{\sum_i \vec{r}_i F_i}{\sum_i F_i} \Rightarrow \begin{cases} x_k = \frac{\sum_i r_{xi} F_i}{\sum_i F_i} = \frac{-M_{0y}}{F} = \frac{8}{8} = 1 \text{ m} \\ y_k = \frac{\sum_i r_{yi} F_i}{\sum_i F_i} = \frac{M_{0x}}{F} = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ m} \end{cases}$$

8.2. Példa

Az ábrán látható test tömegeloszlása homogén.

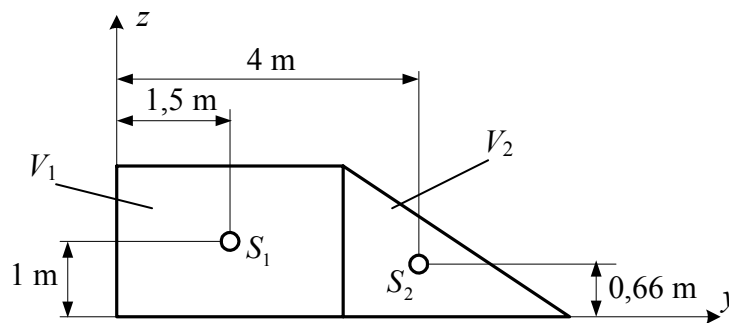
Adott a test geometriája.

Feladat:

Határozza meg a test súlypontjának helyét!

Megoldás:

Az egyes testek térfogatai és súlypontjaik koordinátái:



$$V_1 = abc = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ m}^3,$$

$$V_2 = \frac{abc}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 9 \text{ m}^3.$$

$$x_{S1} = x_{S2} = 1,5 \text{ m},$$

$$y_{S1} = 1,5 \text{ m},$$

$$z_{S1} = 1 \text{ m},$$

$$y_{S2} = 4 \text{ m},$$

$$z_{S2} = 2/3 \text{ m}.$$

Súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\sum x_{Si} V_i}{\sum V_i} = \frac{x_{S1} V_1 + x_{S2} V_2}{V_1 + V_2} = \frac{1,5 \cdot 18 + 1,5 \cdot 9}{27} = 1,5 \text{ m},$$

$$y_S = \frac{\sum y_{Si} V_i}{\sum V_i} = \frac{y_{S1} V_1 + y_{S2} V_2}{V_1 + V_2} = \frac{1,5 \cdot 18 + 4 \cdot 9}{27} = \frac{7}{3} = 2,33 \text{ m},$$

$$z_S = \frac{\sum z_{Si} V_i}{\sum V_i} = \frac{z_{S1} V_1 + z_{S2} V_2}{V_1 + V_2} = \frac{1 \cdot 18 + \frac{2}{3} \cdot 9}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9} = 0,88 \text{ m}.$$

8.3. Példa

Adott az ábrán látható síkidom jellemző mérete:

$$a = 10 \text{ cm},$$

$$\left(y_{\text{félkör}} = \frac{4R}{3\pi} \right).$$

Feladat:

Határozza meg a síkidom súlypontjának helyét!

Megoldás:

A síkidom felbontható egyszerű alakzatokra, egy négyzetre és egy félkörre. Ezeknek a területei, illetve súlypontjaik koordinátái:

$$A_1 = \frac{R^2 \pi}{2} = \frac{a^2 \pi}{8} = 39,27 \text{ cm}^2, \quad A_2 = a^2 = 100 \text{ cm}^2,$$

$$x_{S1} = x_{S2} = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm},$$

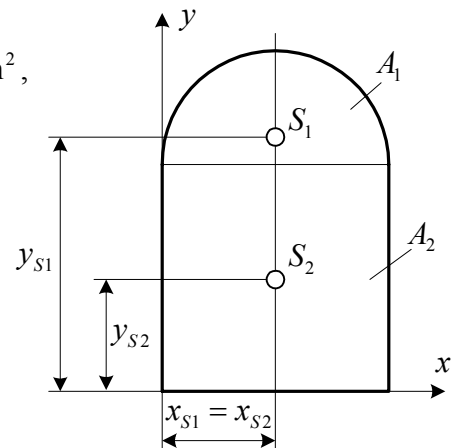
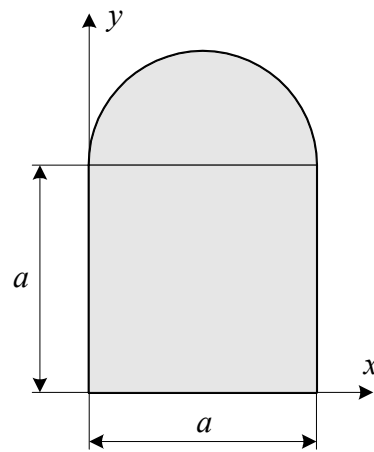
$$y_{S1} = a + \frac{4R}{3\pi} = a + \frac{2a}{3\pi} = 12,122 \text{ cm},$$

$$y_{S2} = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm}.$$

A síkidom súlypontjának koordinátái:

$$x_S = \frac{x_{S1}A_1 + x_{S2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 39,27 + 5 \cdot 100}{39,27 + 100} = 5 \text{ cm},$$

$$y_S = \frac{y_{S1}A_1 + y_{S2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{12,122 \cdot 39,27 + 5 \cdot 100}{39,27 + 100} = 7,01 \text{ cm}.$$



8.4. Példa

Adott:

$$a = 80 \text{ mm}$$

$$b = 60 \text{ mm}$$

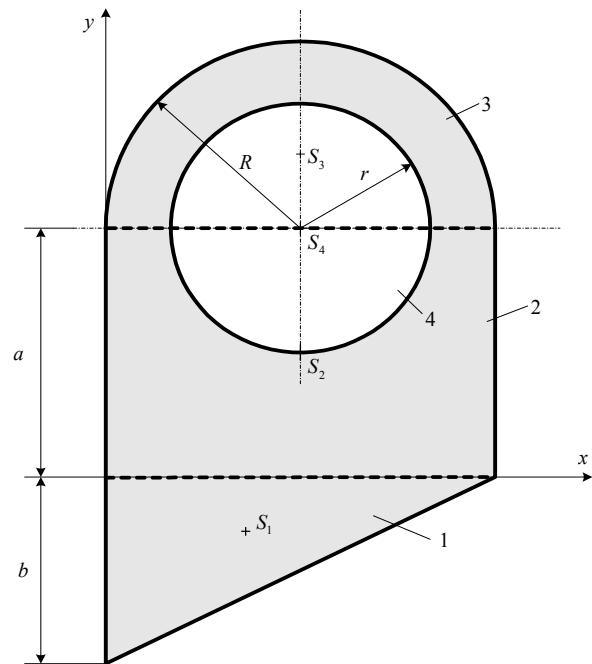
$$R = 60 \text{ mm},$$

$$r = 40 \text{ mm},$$

$$\left(y_{\text{félkör}} = \frac{4R}{3\pi} \right).$$

Feladat:

Határozza meg a síkidom súlypontjának helyét!



Megoldás:

A síkidom felbontható egyszerű alakzatokra: egy derékszögű háromszögre (1), egy téglalpra (2), egy félkörre (3) és egy egész körre (4), mely az üres (kivágott) rész. Ezeknek a területei, illetve súlypontjaik koordinátái:

$$A_1 = \frac{2Rb}{2} = 3600 \text{ mm}^2 = 36 \text{ cm}^2, \quad x_{s1} = \frac{2R}{3} = 40 \text{ mm}, \quad y_{s1} = -\frac{b}{3} = -20 \text{ mm},$$

$$A_2 = 2Ra = 9600 \text{ mm}^2 = 96 \text{ cm}^2, \quad x_{s2} = R = 60 \text{ mm}, \quad y_{s2} = \frac{a}{2} = 40 \text{ mm},$$

$$A_3 = \frac{R^2\pi}{2} = 5654,8 \text{ mm}^2 = 56,5 \text{ cm}^2, \quad x_{s3} = R = 60 \text{ mm}, \quad y_{s3} = a + \frac{4R}{3\pi} = 105,48 \text{ mm},$$

$$A_4 = r^2\pi = 5026,5 \text{ mm}^2 = 50,3 \text{ cm}^2, \quad x_{s4} = R = 60 \text{ mm}, \quad y_{s4} = a = 80 \text{ mm}.$$

A síkidom súlypontjának koordinátáit az alábbiak szerint számítjuk ki:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^3 x_{si} A_i - x_4 A_4}{\sum_{i=1}^3 A_i - A_4} = \frac{36 \cdot 40 + 96 \cdot 60 + 56,5 \cdot 60 - 50,3 \cdot 60}{36 + 96 + 56,5 - 50,3} = \frac{7578}{138,3} = 54,8 \text{ mm},$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{si} A_i - y_4 A_4}{\sum_{i=1}^3 A_i - A_4} = \frac{36 \cdot (-20) + 96 \cdot 40 + 56,5 \cdot 105,48 - 50,3 \cdot 80}{36 + 96 + 56,5 - 50,3} = \frac{5063,6}{138,3} = 36,6 \text{ mm}$$

8.5. Példa

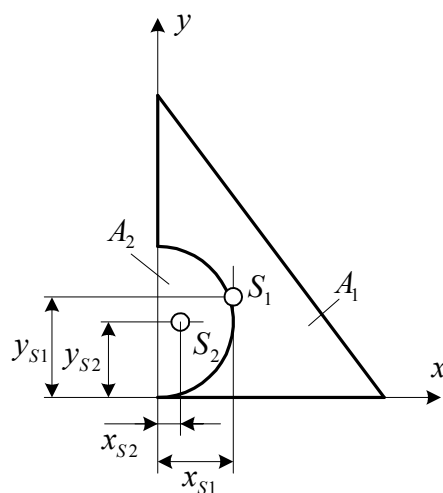
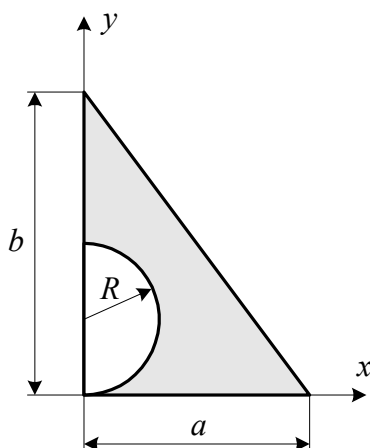
Adott:

$$\begin{aligned} a &= 30 \text{ cm}, \\ b &= 40 \text{ cm}, \\ R &= 10 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Feladat:

Határozza meg a síkidom súlypontjának helyét!

Megoldás:



$$A_1 = \frac{ab}{2} = 600 \text{ cm}^2,$$

$$A_2 = \frac{R^2 \pi}{2} = 157,08 \text{ cm}^2,$$

$$x_{S1} = \frac{a}{3} = 10 \text{ cm},$$

$$x_{S2} = \frac{4R}{3\pi} = 4,244 \text{ cm},$$

$$y_{S1} = \frac{b}{3} = 13,33 \text{ cm},$$

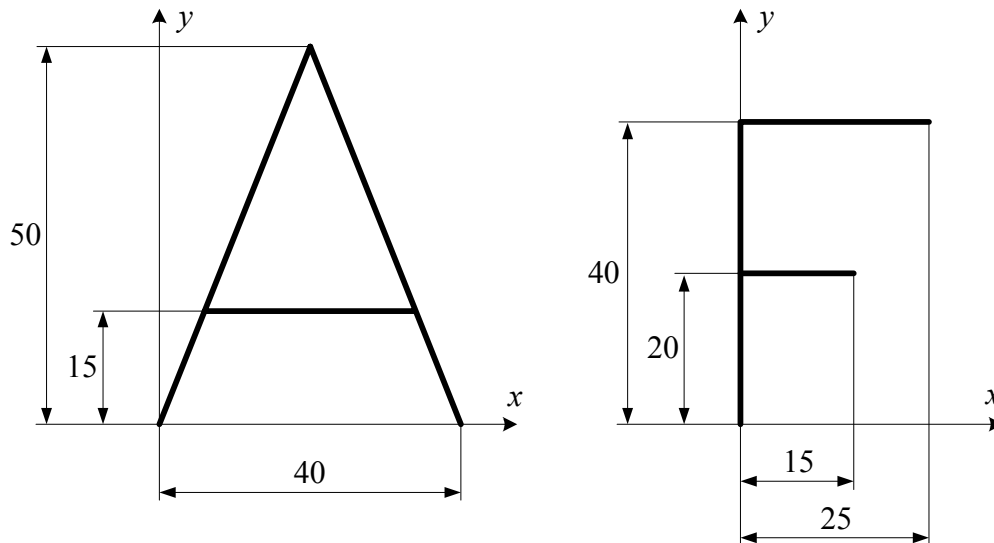
$$y_{S2} = R = 10 \text{ cm}.$$

$$x_S = \frac{x_{S1}A_1 - x_{S2}A_2}{A_1 - A_2} = \frac{10 \cdot 600 - 4,244 \cdot 157,08}{600 - 157,08} = 12,04 \text{ cm},$$

$$y_S = \frac{y_{S1}A_1 - y_{S2}A_2}{A_1 - A_2} = \frac{13,33 \cdot 600 - 10 \cdot 157,08}{600 - 157,08} = 14,52 \text{ cm}.$$

8.6. Példa

Adott az ábrákon látható két betű.



Feladat:

Határozza meg a merev rudakból álló betűk súlypontjának helyét!

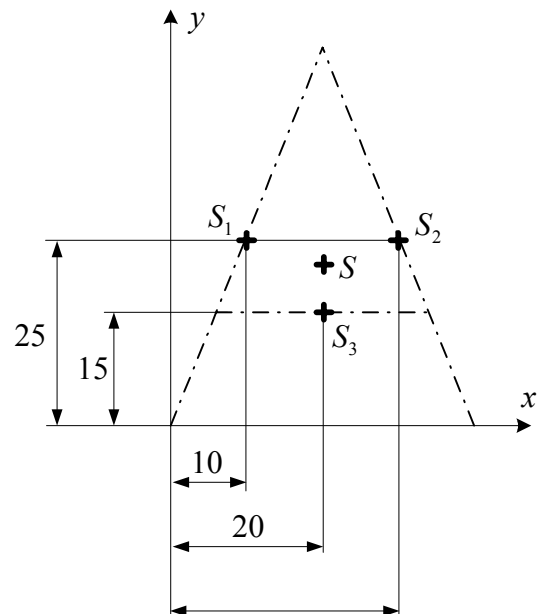
Megoldás:

a. Az ábráról leolvashatók az egyes rudak hossza illetve súlypontjainak helyei:

$$l_1 = l_2 = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53,85 \text{ mm},$$

$$\frac{40}{50} = \frac{l_3}{35} \Rightarrow l_3 = 35 \cdot \frac{4}{5} = 28 \text{ mm}.$$

$$\begin{aligned} x_{S1} &= 10 \text{ mm}, & y_{S1} &= 25 \text{ mm}, \\ x_{S2} &= 30 \text{ mm}, & y_{S2} &= 25 \text{ mm}, \\ x_{S3} &= 20 \text{ mm}, & y_{S3} &= 15 \text{ mm}. \end{aligned}$$



A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{x_{S1}l_1 + x_{S2}l_2 + x_{S3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{(10 + 30) \cdot 53,85 + 20 \cdot 28}{2 \cdot 53,85 + 28} = 20 \text{ mm},$$

$$y_S = \frac{y_{S1}l_1 + y_{S2}l_2 + y_{S3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 53,85 + 15 \cdot 28}{2 \cdot 53,85 + 28} = 22,94 \text{ mm}.$$

b.

$$\begin{array}{lll} l_1 = 40 \text{ mm}, & x_{S1} = 0 \text{ mm}, & y_{S1} = 20 \text{ mm}, \\ l_2 = 25 \text{ mm}, & x_{S2} = 12,5 \text{ mm}, & y_{S2} = 40 \text{ mm}, \\ l_3 = 15 \text{ mm}, & x_{S3} = 7,5 \text{ mm}, & y_{S3} = 20 \text{ mm}. \end{array}$$

$$x_S = \frac{\sum x_{Si} l_i}{\sum l_i} = 5,31 \text{ mm},$$

$$y_S = \frac{\sum y_{Si} l_i}{\sum l_i} = 26,25 \text{ mm}.$$

