

11. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter, egy. ts.; Tarnai Gábor, mérnöktanár)

Összetett szerkezetek statikája (három csuklós ív, Gerber tartó)

11.1. Példa:

Adott az ábrán látható szerkezet méretei és terhelése:

$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ m}, \\ q &= 3 \text{ kN/m} \rightarrow F_q = 6 \text{ kN}, \\ F_1 &= 10 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Feladat:

Támasztó- és belsőerők meghatározása számítással.

Megoldás:

A támasztóerők az ábra alapján az egyensúlyi egyenletekből számíthatók:

Az 1-es jelű rúdra:

$$F_x = 0 = F_{Ax} + F_q + F_{21x} \quad (1),$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{21y} \quad (2),$$

$$M_C = 0 = 2F_{Ax} - 1F_q \quad (3).$$

A 2-es jelű rúdra:

$$F_x = 0 = F_{12x} + F_{Bx} \quad (4),$$

$$F_y = 0 = F_{12y} - F_1 + F_{By} \quad (5),$$

$$M_C = 0 = -1F_1 + 2F_{Bx} + 2F_{By} \quad (6).$$

$$(3) \Rightarrow F_{Ax} = \frac{1}{2}F_q = 3 \text{ kN}(\rightarrow),$$

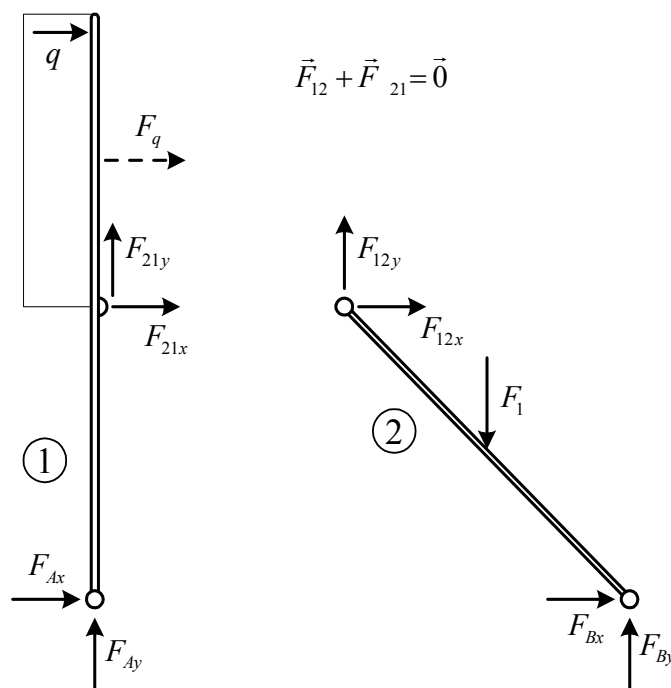
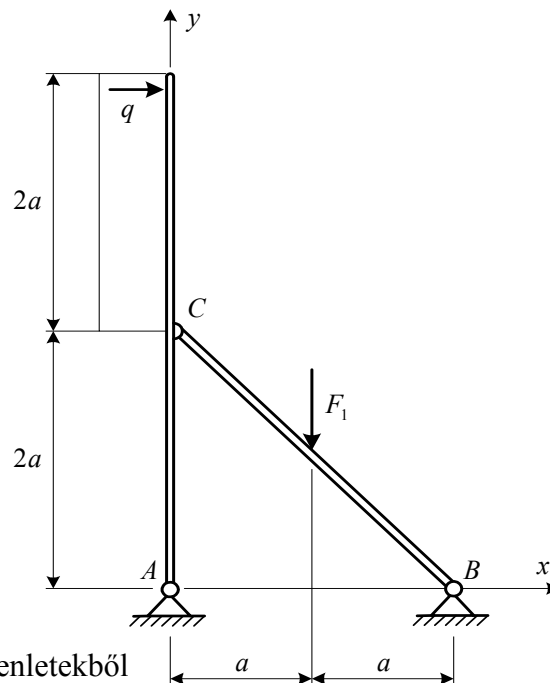
$$(1) \Rightarrow F_{21x} = -F_q - F_{Ax} = -9 \text{ kN}(\leftarrow),$$

$$(4) \Rightarrow F_{Bx} = -F_{12x} = F_{21x} = -9 \text{ kN}(\leftarrow),$$

$$(6) \Rightarrow F_{By} = \frac{1}{2}F_1 - F_{Bx} = 14 \text{ kN}(\uparrow),$$

$$(5) \Rightarrow F_{12y} = F_1 - F_{By} = -4 \text{ kN}(\downarrow),$$

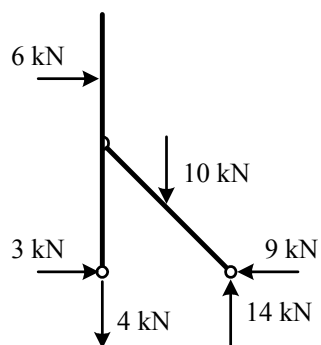
$$(2) \Rightarrow F_{Ay} = -F_{21y} = F_{12y} = -4 \text{ kN}(\downarrow).$$



$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (3\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ kN}}}, \underline{\underline{\vec{F}_B = (-9\vec{i} + 14\vec{j}) \text{ kN}}}, \underline{\underline{\vec{F}_{21} = (-9\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ kN}}}$$

Ellenőrzés: (a függőleges rúd legfelső pontjára felírt nyomatéki egyenletből)

$$6 + 12 - 10 + 28 - 36 = 0 .$$



11.2. Példa:

Adott az ábrán látható szerkezet méretei és terhelése:

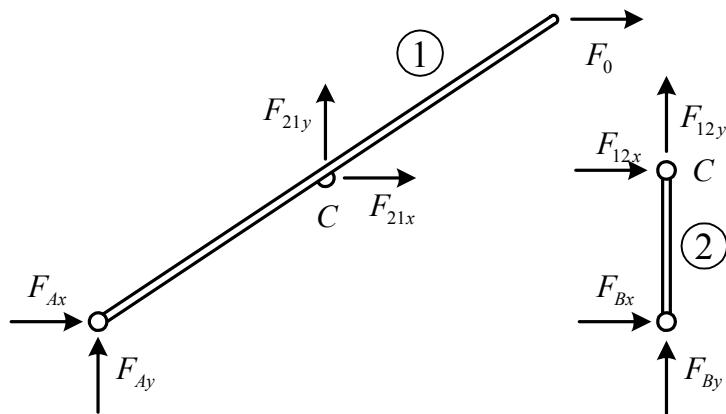
$$F_0 = 12 \text{ kN}.$$

Feladat:

- Támasz- és belsőerők meghatározása
a. számítással,
b. szerkesztéssel.

Megoldás:

- a. Az egyensúlyi egyenletek az ábra alapján:



$$F_x = 0 = F_{Ax} + F_{21x} + F_0,$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{21y},$$

$$M_C = 0 = 2F_{Ax} - 3F_{Ay} - 2F_0,$$

$$F_x = 0 = F_{12x} + F_{Bx} \Rightarrow F_{12x} = 0,$$

$$F_y = 0 = F_{12y} + F_{By},$$

$$M_C = 0 = 2F_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldásai, figyelemmel arra, hogy $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$F_{Ax} = -F_0 = -12 \text{ kN}(\leftarrow),$$

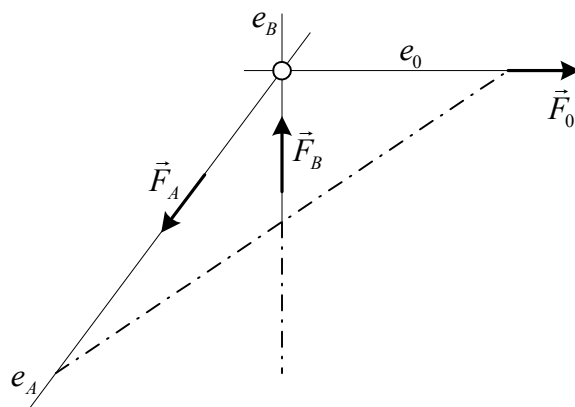
$$F_{Ay} = \frac{2}{3}F_{Ax} - \frac{2}{3}F_0 \Rightarrow F_{Ay} = -16 \text{ kN}(\downarrow),$$

$$F_{21y} = -F_{Ay} = 16 \text{ kN}(\uparrow),$$

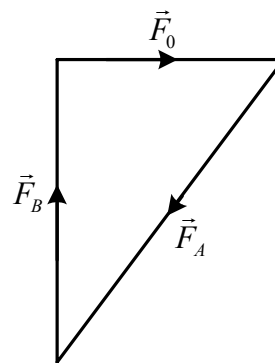
$$F_{By} = -F_{12y} \equiv F_{21y} = 16 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (-12\vec{i} - 16\vec{j}) \text{ kN}}}, \underline{\underline{\vec{F}_B = (16\vec{j}) \text{ kN}}}, \underline{\underline{\vec{F}_{21} = (16\vec{j}) \text{ kN}}}$$

- b. A támaszerők meghatározása a már megismert módszer alapján, a három erő egyensúlyának megszerkesztésével történik:



Szerkezeti ábra



Erőábra

11.3. Példa:

Adott az ábrán látható szerkezet méretei és terhelése:

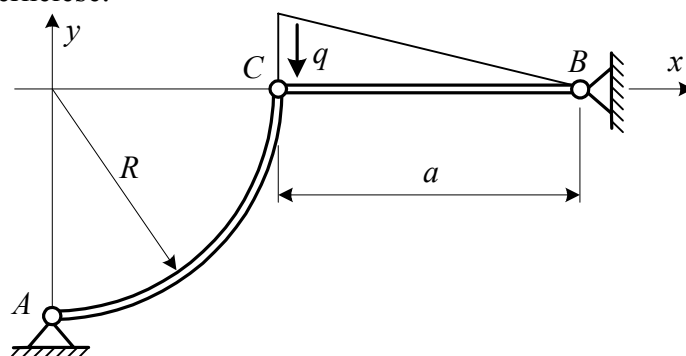
$$a = 4 \text{ m}, R = 3 \text{ m}$$

$$q = 3 \text{ kN/m} \Rightarrow F_q = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ kN}.$$

Feladat:

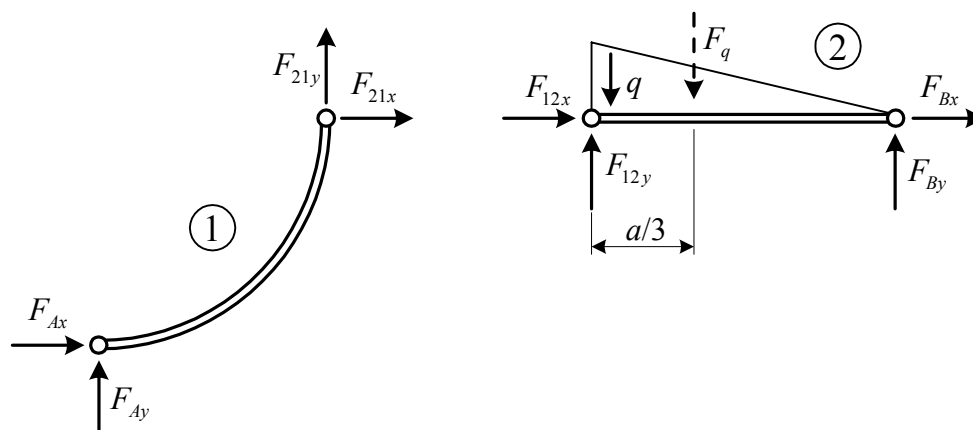
A támasz- és belsőerők meghatározása

- számítással,
- szerkesztéssel.



Megoldás:

- A megoszló erőrendszer nem állandó, hanem lineárisan csökkenő, az eredője a háromszög súlypontján halad keresztül, amely egyharmad – kétharmad arányban osztja a vízszintes befogót:



Az egyensúlyi egyenletek és a megoldások:

Az 1-es jelű rúdra:

$$F_x = 0 = F_{Ax} + F_{21x},$$

$$F_y = 0 = F_{Ay} + F_{21y},$$

$$M_C = 0 = 3F_{Ax} - 3F_{Ay}.$$

A 2-es jelű rúdra:

$$F_x = 0 = F_{12x} + F_{Bx} \Rightarrow F_{Bx} = -F_{12x} = -4 \text{ kN}(\leftarrow),$$

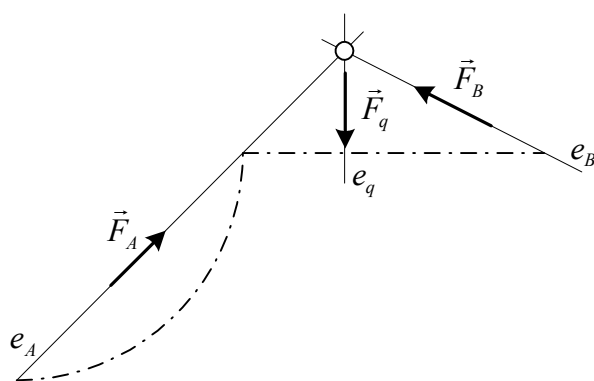
$$F_y = 0 = F_{12y} + F_{By} - F_q \Rightarrow F_{12y} = F_q - F_{By} = 4 \text{ kN}(\uparrow),$$

$$M_C = 0 = -\frac{4}{3}F_q + 4F_{By} \Rightarrow F_{By} = \frac{1}{3}F_q = 2 \text{ kN}(\uparrow).$$

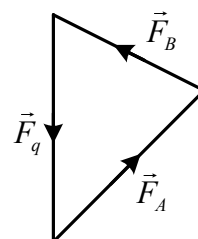
$$F_{Ay} = -F_{21y} = 4 \text{ kN}(\uparrow), F_{Ax} = F_{Ay} = 4 \text{ kN}(\rightarrow), F_{21x} = -F_{Ax} = -4 \text{ kN}(\leftarrow).$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (4\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ kN}}}, \underline{\underline{\vec{F}_B = (-4\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ kN}}}, \underline{\underline{\vec{F}_{12} = (4\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ kN}}}.$$

- b. A támaszerők meghatározása a már megismert módszer alapján, a három erő egyensúlyának megszerkesztésével történik:



Szerkezeti ábra



Erőábra

11.4. Példa:

Adott az ábrán látható szerkezet méretei és terhelése:

$$q = 4 \text{ kN/m} \Rightarrow F_q = 12 \text{ kN}.$$

Feladat:

A támasz- és belsőerők meghatározása

- számítással,
- szerkesztéssel.

Megoldás:

- Számítással

Az egyensúlyi egyenletek és a megoldások:

Az 1-es jelű rúdra:

2

$$(1) \quad F_x = 0 = F_q + F_{Ax} + F_{21x},$$

$$(2) \quad F_y = 0 = F_{Ay} + F_{21y},$$

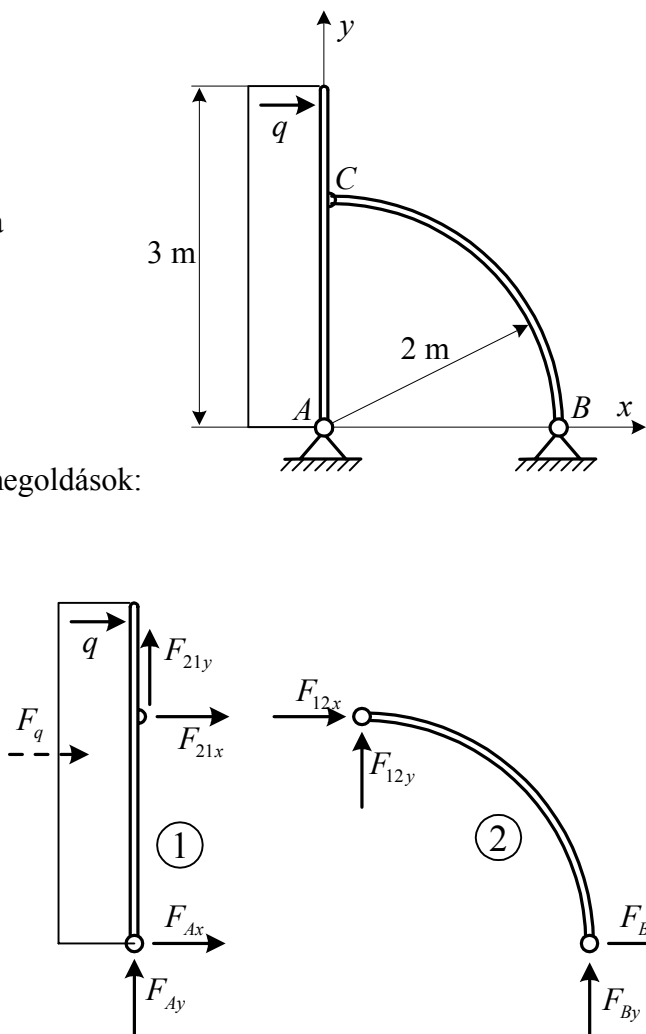
$$(3) \quad M_C = 0 = 0,5F_q + 2F_{Ax}.$$

A 2-es jelű rúdra:

$$(4) \quad F_x = 0 = F_{12x} + F_{Bx},$$

$$(5) \quad F_y = 0 = F_{12y} + F_{By},$$

$$(6) \quad M_C = 0 = 2F_{Bx} + 2F_{By}.$$



$$(3) \Rightarrow F_{Ax} = -\frac{0,5F_q}{2} = -3 \text{ kN}(\leftarrow)$$

$$(1) \Rightarrow F_{21x} = -F_q - F_{Ax} = -9 \text{ kN}(\leftarrow)$$

$$(4) \Rightarrow F_{Bx} = -F_{12x} \equiv F_{21x} = -9 \text{ kN}(\leftarrow)$$

$$(6) \Rightarrow F_{By} = -F_{Bx} = 9 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$(5) \Rightarrow F_{12y} = -F_{By} = -9 \text{ kN}(\downarrow)$$

$$(2) \Rightarrow F_{Ay} = -F_{21y} \equiv F_{12y} = -9 \text{ kN}(\downarrow)$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (-3\vec{i} - 9\vec{j}) \text{ kN},}}$$

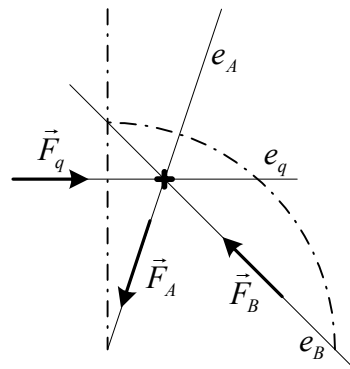
$$\underline{\underline{\vec{F}_B = (-9\vec{i} + 9\vec{j}) \text{ kN}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_{12} = (9\vec{i} - 9\vec{j}) \text{ kN},}}$$

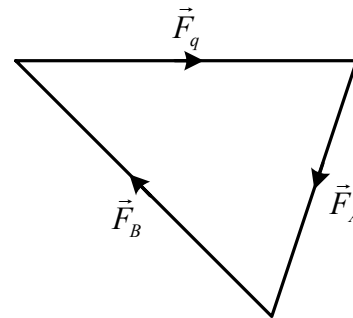
$$\underline{\underline{\vec{F}_{21} = (-9\vec{i} + 9\vec{j}) \text{ kN}}}$$

Tehát $\Rightarrow \vec{F}_{21} \equiv \vec{F}_B$, hiszen a 2. jelű rúd terheletlen.

b. Szerkesztéssel

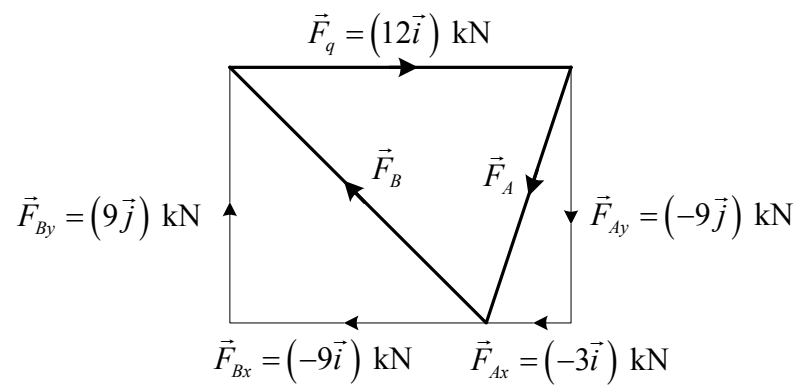


Szerkezeti ábra



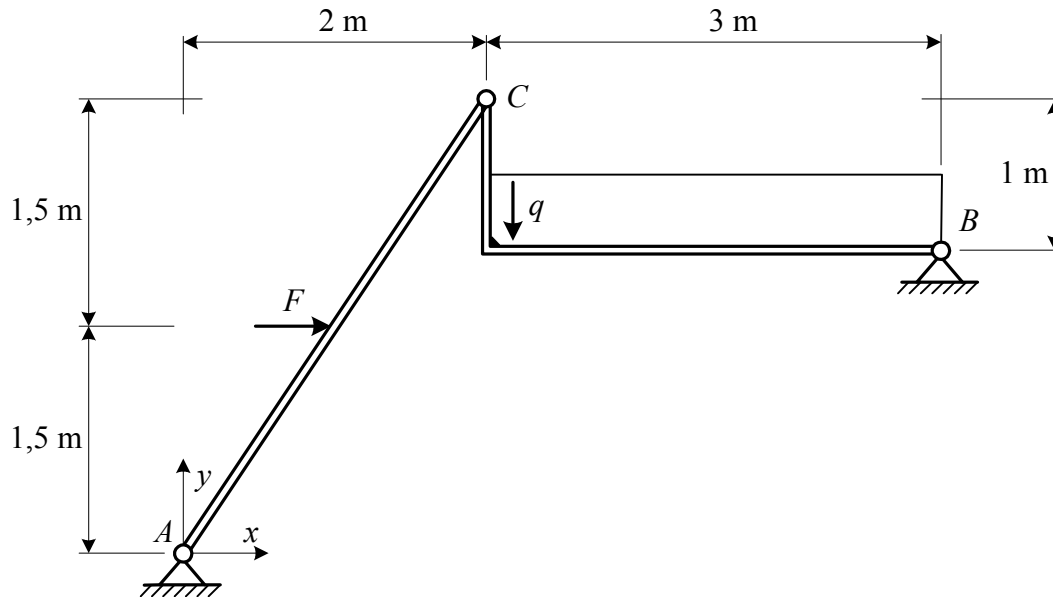
Erőábra

Ellenőrzés:



11.5. Példa:

Adott az ábrán látható szerkezet méretei és terhelése: $q = 2 \text{ kN/m}$, $F = 8 \text{ kN}$.



Feladat:

Támasz- és belsőerők meghatározása

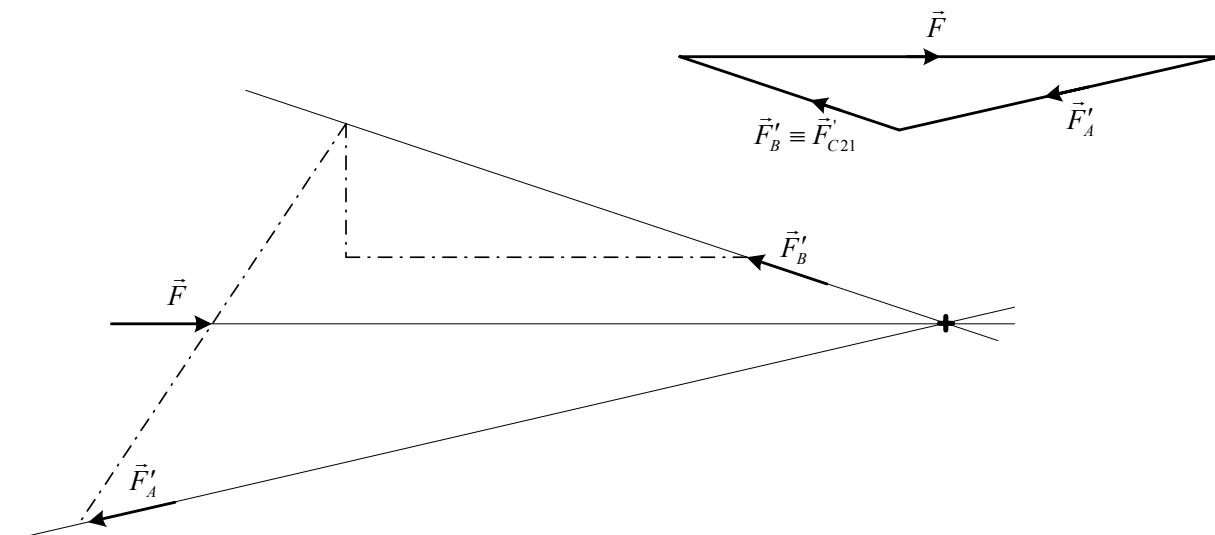
- szerkesztéssel,
- számítással.

Megoldás:

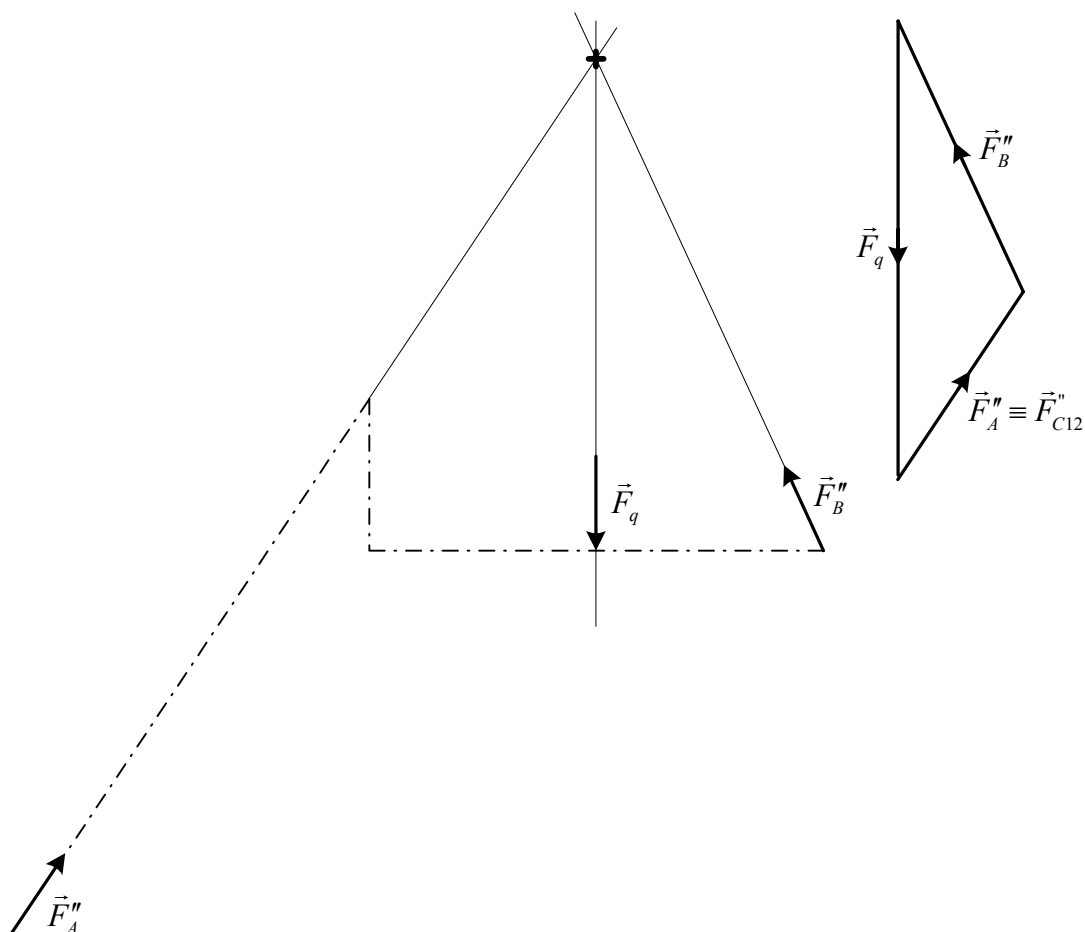
a. Szerkesztéssel

A feladatot két részre osztjuk úgy, hogy a terheléseket egymástól függetlenül külön vizsgáljuk, végül összegezzük azok hatását. (*Superpozíció elve*)

1. terhelési eset: csak az F erő hatását vizsgáljuk.



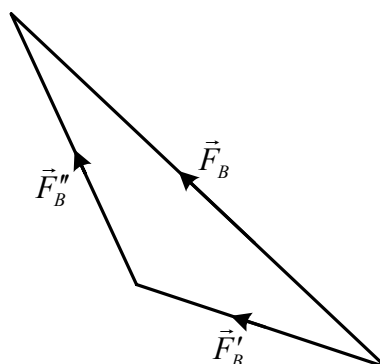
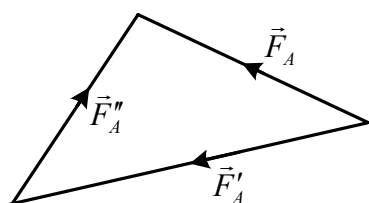
2. terhelési eset: csak a megoszló erőrendszer hatását vizsgáljuk



Az 1. és a 2. terhelési eset egyesítésével kapjuk a támasztó erőket:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_A' + \vec{F}_A''$$

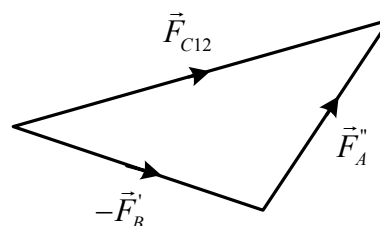
$$\vec{F}_B = \vec{F}_B' + \vec{F}_B''$$



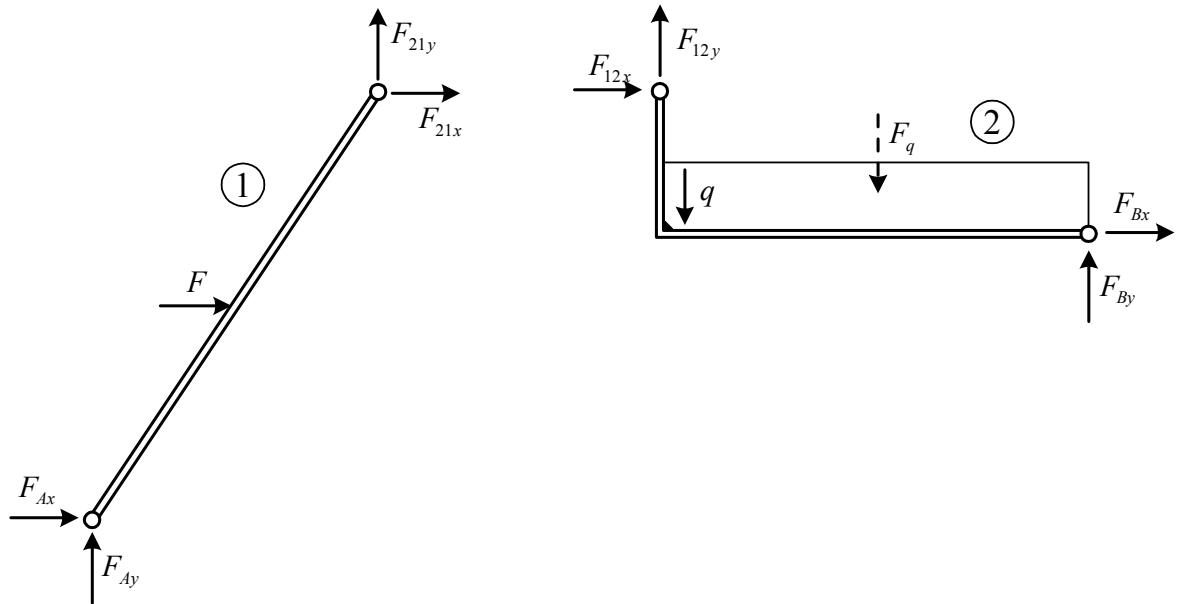
A belső erő szintén az összegzéssel határozható meg:

$$\vec{F}_{C12} = \vec{F}_{C12}' + \vec{F}_{C12}'' = -\vec{F}_B' + \vec{F}_A''$$

$$\vec{F}_{C21} = \vec{F}_{C21}' + \vec{F}_{C21}'' = \vec{F}_B' - \vec{F}_A'' = (-\vec{F}_{C12})$$



b. Számítással



$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &= F_{Ax} + F_0 + F_{21x} \\ \sum F_y = 0 &= F_{Ay} + F_{21y} \\ \sum M_c = 0 &= 3 \cdot F_{Ax} + 1,5 \cdot F - 2 \cdot F_{Ay}\end{aligned}$$

$$F_{12x} = -F_{21x} \text{ és } F_{12y} = -F_{21y}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$F_{Ax} = -3,09 \text{ kN} \leftarrow, F_{Ay} = 1,36 \text{ kN} \uparrow$$

$$F_{Bx} = -4,91 \text{ kN} \leftarrow, F_{By} = 4,64 \text{ kN} \uparrow$$

$$F_{12x} = 4,91 \text{ kN} \rightarrow, F_{12y} = 1,36 \text{ kN} \uparrow$$

$$F_{21x} = -4,91 \text{ kN} \leftarrow, F_{21y} = -1,36 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum F_x = 0 = F_{12x} + F_{Bx}$$

$$\sum F_y = 0 = F_{12y} - F_0 + F_{By}$$

$$\sum M_c = 0 = -1,5 \cdot F_q + 3 \cdot F_{By} + 1 \cdot F_{Bx}$$

$$\vec{F}_A = (-3,09\vec{i} + 1,36\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_B = (-4,91\vec{i} + 4,64\vec{j}) \text{ kN}$$

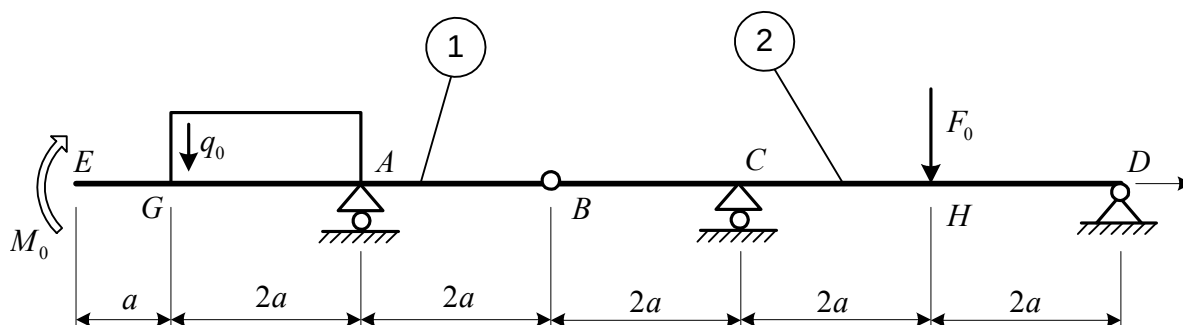
$$\vec{F}_{12} = (4,91\vec{i} + 1,36\vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_{21} = (-4,91\vec{i} - 1,36\vec{j}) \text{ kN}$$

11. 6. Példa:

Adott az ábrán látható Gerber tartó méretei és terhelése:

$$a = 1 \text{ m}, q_0 = 2 \text{ kN/m}, F_0 = 4 \text{ kN}, M_0 = 8 \text{ kNm}.$$

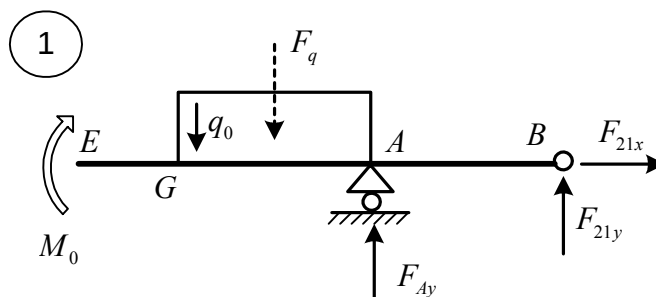


Feladat:

Határozza meg az A , C , D pontokban a támasztó erőket, valamint a B csuklóban ébredő belső erőket.

Megoldás:

Gerber tartó esetén a feladatot mindig a „fityegő” rész vizsgálatával kezdjük.



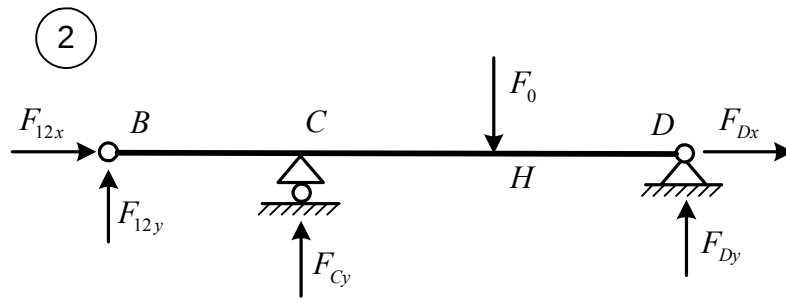
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{21x} = 0$$

$$\sum M_b = 0 = -M_0 + 3a \cdot F_q - 2a \cdot F_{Ay} \Rightarrow F_{Ay} = 2 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_a = 0 = -M_0 + a \cdot F_q + 2a \cdot F_{21y} \Rightarrow F_{21y} = 2 \text{ kN} \uparrow$$

Valamint tudjuk, hogy

$$F_{21x} = -F_{12x} \text{ és } F_{21y} = -F_{12y}.$$



$$\sum F_x = 0 = F_{12x} + F_{Dx} \Rightarrow F_{Dx} = 0$$

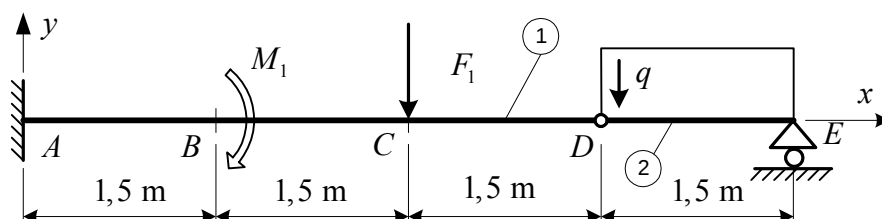
$$\sum M_d = 0 = -6a \cdot F_{12y} - 4a \cdot F_{Cy} + 2a \cdot F_0 \Rightarrow F_{Cy} = 5 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum M_c = 0 = -2a \cdot F_{12y} - 2a \cdot F_0 + 4a \cdot F_{Dy} \Rightarrow F_{Dy} = 1 \text{ kN } \uparrow$$

11.7. Példa:

Adott az ábrán látható egyik végén befalazott Gerber tartó méretei és terhelése:

$$q = 2 \text{ kN/m}, F_1 = 3 \text{ kN}, M_1 = 3 \text{ kNm}.$$

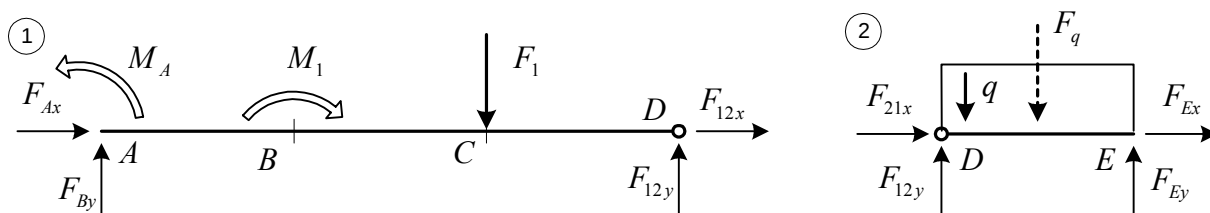


Feladat:

Határozza meg az A , E pontokban a támasztó erőket, valamint a D csuklóban ébredő belső erőket.

Megoldás:

Gerber tartó esetén a feladatot mindig a „fityegő” rész vizsgálatával kezdjük.



②

$$\sum F_x = 0 = F_{12x} = 0$$

$\Rightarrow$

$$F_{12x} = 0$$

$$\sum F_y = 0 = F_{12y} - F_q + F_{Ey}$$

$\Rightarrow$

$$F_{12y} = F_q - F_{Ey} = 1,5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_d = 0 = -0,75 \cdot F_q + 1,5 \cdot F_{Ey}$$

$\Rightarrow$

$$F_{Ey} = \frac{1,5 \cdot F_q}{3} = 1,5 \text{ kN} \uparrow$$

①

$$\sum F_x = 0 = F_{Ax} + F_{12x} = 0$$

$\Rightarrow$

$$F_{Ax} = -F_{12x} = 0$$

$$\sum F_y = 0 = F_{Ay} - F_1 + F_{21y}$$

$\Rightarrow$

$$F_{Ay} = F_1 - F_{21y} = 4,5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_a = 0 = M_A - M_1 - 3 \cdot F_1 + 4 \cdot F_{21y}$$

$\Rightarrow$

$$M_A = 18,75 \text{ kNm} \uparrow$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = (4,5\vec{j}) \text{ kN}}}, \quad \underline{\underline{\vec{M}_A = (18,75\vec{k}) \text{ kNm}}}, \quad \underline{\underline{\vec{F}_E = (1,5\vec{j}) \text{ kN}}}, \quad \underline{\underline{\vec{F}_{12} = (1,5\vec{j}) \text{ kN}}}.$$