

13. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Triesz Péter, egy. ts.; Tarnai Gábor, mérnök tanár)

Rácsos tartók

13.1. Példa

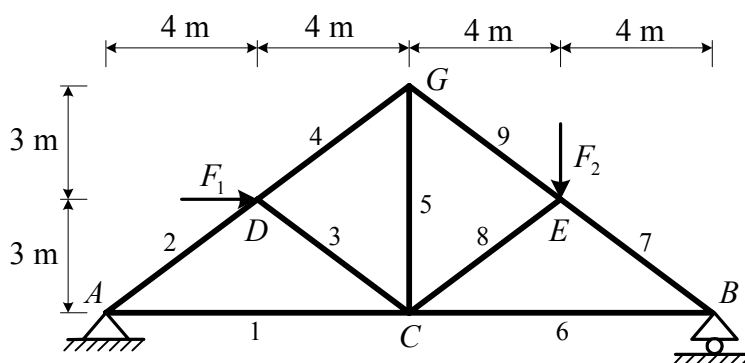
Adott:

Az ábrán látható rácsos tartó méretei és terhelése.

$$F_1 = 8 \text{ kN}, F_2 = 10 \text{ kN}.$$

Feladat:

Határozza meg a támasztóerőket, ill. a rúderőket!



Megoldás:

$$\sum M_b = 0 = -16 \cdot F_{Ay} - 3 \cdot 8 + 4 \cdot 10$$

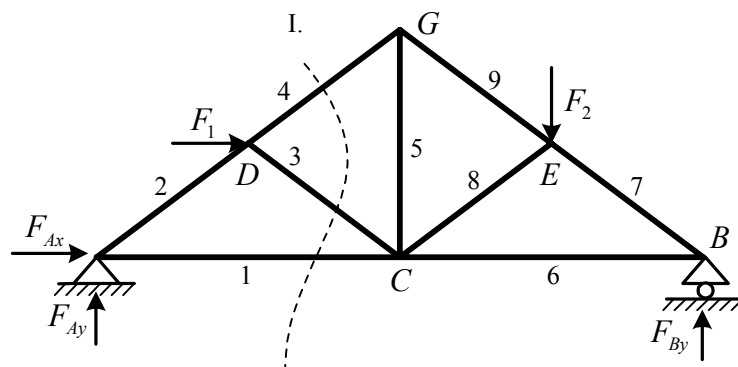
$$\Rightarrow F_{Ay} = 1 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 = F_{Ay} - F_2 + F_{By}$$

$$\Rightarrow F_{By} = 9 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 = F_{Ax} + F_1$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = -8 \text{ kN} \leftarrow$$



Az I. átmetszéssel az N_1 , N_3 és N_4 rúderők számíthatók.

$$\sum M_a = 0 = -6 \cdot N_{3x} - 3 \cdot F_1 \Rightarrow N_{3x} = -4 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum M_a = 0 = -8 \cdot N_{3y} - 3 \cdot F_1 \Rightarrow N_{3y} = -3 \text{ kN} \uparrow$$

$$N_3 = -\sqrt{N_{3x}^2 + N_{3y}^2} = -5 \text{ kN} \swarrow \text{ ③}$$

$$\sum M_c = 0 = -6 \cdot N_{4x} - 3 \cdot F_1 - 8 \cdot 1$$

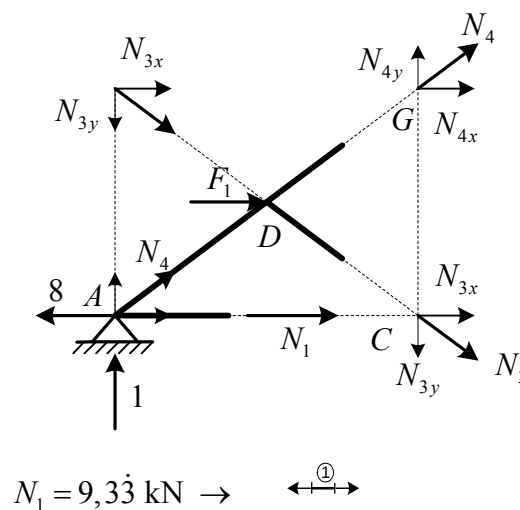
$$\Rightarrow N_{4x} = -5,33 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum M_c = 0 = -8 \cdot N_{4y} - 8 \cdot 1 - 3 \cdot F_1$$

$$\Rightarrow N_{4y} = -4 \text{ kN} \downarrow$$

$$N_4 = -\sqrt{N_{4x}^2 + N_{4y}^2} = -6,66 \text{ kN} \searrow \text{ ④}$$

$$\sum F_x = 0 = -8 + F_1 + N_1 + N_{3x} + N_{4x} \Rightarrow$$



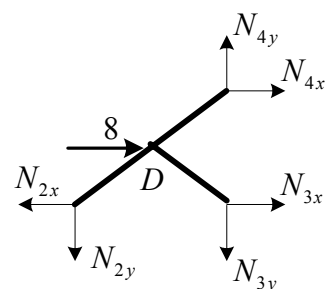
$$N_1 = 9,33 \text{ kN} \rightarrow \text{ ①}$$

Ⓓ csomópont vizsgálata: N_2 meghatározása.

$$\sum F_x = 0 = -N_{2x} + N_{3x} + N_{4x} + 8 \Rightarrow \underline{N_{2x} = -1,33 \text{ kN} \rightarrow}$$

$$\sum F_y = 0 = -N_{2y} + N_{3y} + N_{4y} \Rightarrow \underline{N_{2y} = -1 \text{ kN} \uparrow}$$

$$N_2 = -\sqrt{N_{2x}^2 + N_{2y}^2} = -1,66 \text{ kN} \nearrow \quad \text{②}$$



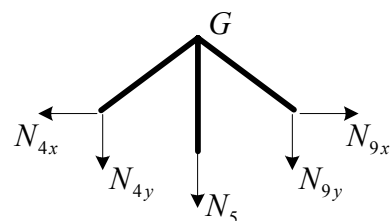
Ⓔ csomópont vizsgálata: N_5 és N_9 rúderők számítása.

$$\sum F_x = 0 = -N_{4x} + N_{9x} \Rightarrow \underline{N_{9x} = -5,33 \text{ kN} \leftarrow}$$

$$\frac{|N_{9x}|}{|N_{9y}|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{N_{9y} = -4 \text{ kN} \uparrow}$$

$$N_9 = -\sqrt{N_{9x}^2 + N_{9y}^2} = -6,66 \text{ kN} \nwarrow \quad \text{③}$$

$$\sum F_y = 0 = -N_{4y} - N_5 - N_{9y} \Rightarrow \underline{N_5 = 8 \text{ kN} \downarrow} \quad \text{⑤}$$



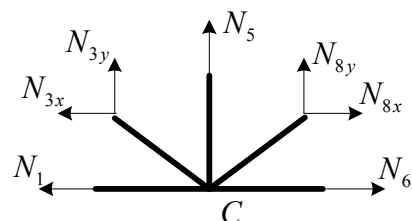
Ⓒ csomópont vizsgálata: N_6 és N_8 számítható.

$$\sum F_y = 0 = N_{3y} + N_5 + N_{8y} \Rightarrow \underline{N_{8y} = -5 \text{ kN} \downarrow}$$

$$\frac{|N_{8y}|}{|N_{8x}|} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{N_{8x} = -6,66 \text{ kN} \leftarrow}$$

$$N_8 = -\sqrt{N_{8x}^2 + N_{8y}^2} = -8,33 \text{ kN} \swarrow \quad \text{④}$$

$$\sum F_x = 0 = -N_{3x} - N_1 + N_{8x} + N_6 \Rightarrow \underline{N_6 = 12 \text{ kN}} \quad \text{⑥}$$

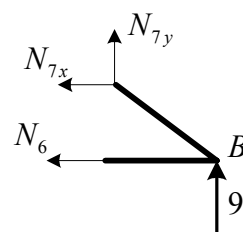


Ⓕ csomópont vizsgálata: N_7 számítható.

$$\sum F_y = 0 = 9 + N_{7y} \Rightarrow \underline{N_{7y} = -9 \text{ kN} \downarrow}$$

$$\frac{|N_{7y}|}{|N_{7x}|} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{N_{7x} = -12 \text{ kN} \rightarrow}$$

$$N_7 = -\sqrt{N_{7x}^2 + N_{7y}^2} = -15 \text{ kN} \searrow \quad \text{⑦}$$



Ellenőrzés:

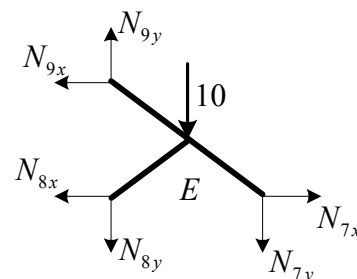
Ⓔ csomópont vizsgálata:

$$\sum F_x = -N_{9x} - N_{8x} + N_{7x} =$$

$$= -(-5,33) - (-6,66) + (-12) = 0$$

$$\sum F_y = 0 = N_{9y} - 10 - N_{8y} - N_{7y} =$$

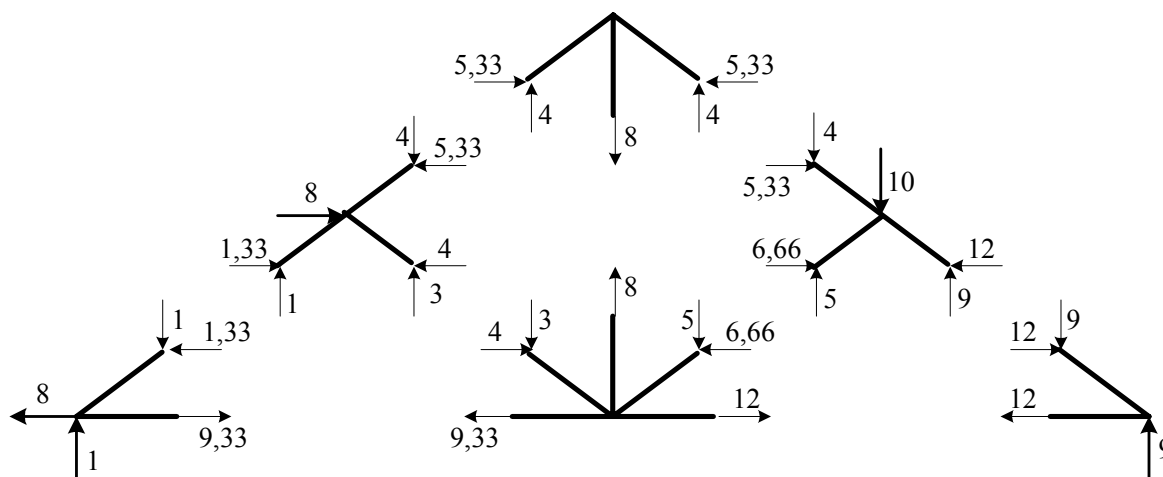
$$= (-4) - 10 - (-5) - (-9) = 0$$



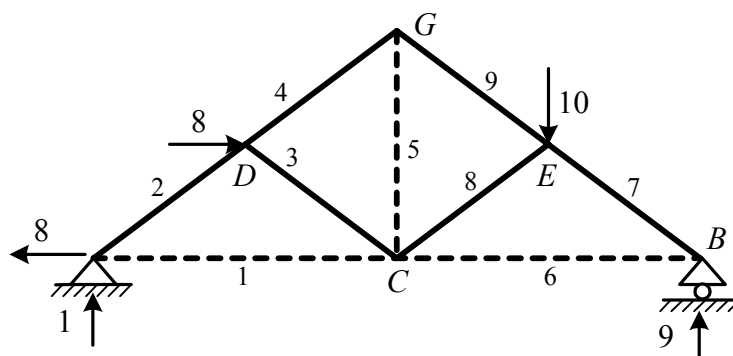
A támasztóerők illetve a rúderők számított értékei (kN):

Húzott rudak: 1, 5, 6 sorszámúak. A rúderők értéke pozitív. (>0.)

Nyomott rudak: 2, 3, 4, 7, 8, 9 sorszámúak. A rúderők értéke negatív. (<0.)



Végül ábrázolhatjuk a szerkezetet leegyszerűsítve, ahol a nyomott rudak vastagon (eredeti), a húzott rudak szaggatottan („kötél”) szedettek.



13.2. Példa

Adott:

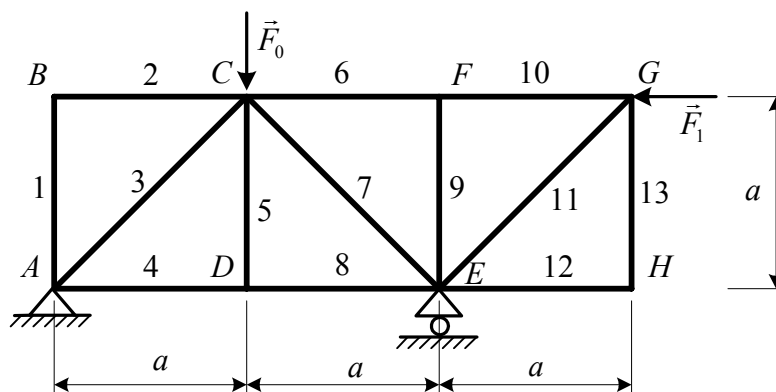
Az ábrán látható rácsos tartó méretei és terhelése.

$$F_0 = 15 \text{ kN}, F_1 = 5 \text{ kN},$$

$$a = 1 \text{ m}.$$

Feladat:

Határozza meg a rúderöket!



Megoldás:

Elsőként a támasztó erőket határozzuk meg.

$$\sum M_a = 0 = -a \cdot F_0 + 2a \cdot F_{Ey} + a \cdot F_1 \Rightarrow F_{Ey} = 5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_e = 0 = a \cdot F_0 - 2a \cdot F_{Ay} + a \cdot F_1 \Rightarrow F_{Ay} = 10 \text{ kN} \uparrow$$

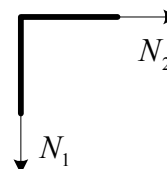
$$\sum F_x = 0 = F_{Ax} - F_1 \Rightarrow F_{Ax} = 5 \text{ kN} \rightarrow$$

Jelöljük ki a „vakrudakat” ($N=0$), melyek számítás nélkül is láthatóak.

B csomópont egyensúlya:

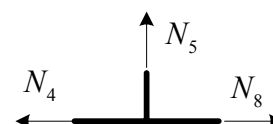
$$\sum F_x = 0 = N_2 \Rightarrow N_2 = 0 \text{ vakrúd}$$

$$\sum F_y = 0 = -N_1 \Rightarrow N_1 = 0 \text{ vakrúd}$$



D csomópont egyensúlya:

$$\sum F_y = 0 = N_5 \Rightarrow N_5 = 0 \text{ vakrúd}$$

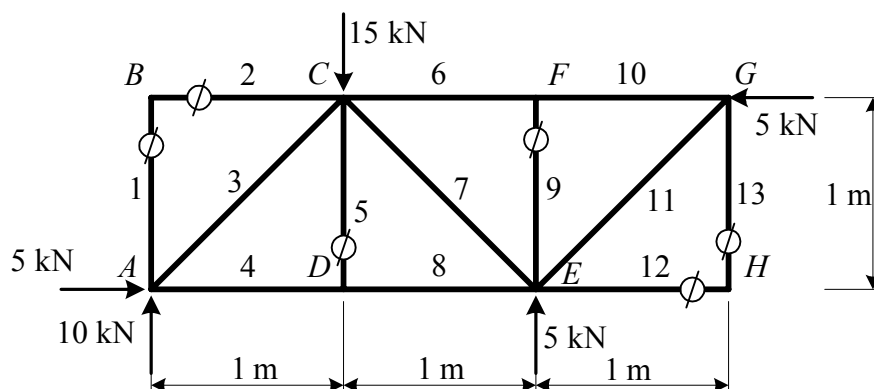


Ugyanígy **H** ill. **F csomópontok** egyensúlyaiból:

$$\sum F_x = 0 = -N_{12} \Rightarrow N_{12} = 0 \text{ vakrúd},$$

$$\sum F_y = 0 = N_{13} \Rightarrow N_{13} = 0 \text{ vakrúd, ill.}$$

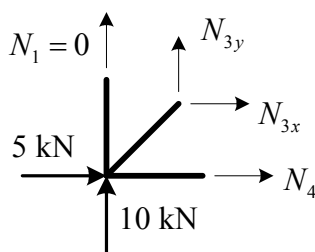
$$\sum F_y = 0 = -N_9 \Rightarrow N_9 = 0 \text{ vakrúd.}$$



A számítást ott kezdjük, ahol erőbevezetés van, és maximum 2 rúderő ismeretlen.

Kezdhethük tehát az A vagy a G csomópontnál, és legutoljára hagyjuk a C ill. E jelű csomópontokat.

A csomópont egyensúlya: N_3 és N_4 meghatározása.



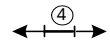
$\sum F_y = 0 = N_{3y} + 10 \Rightarrow N_{3y} = -10 \text{ kN} \downarrow$, tehát az y összetevő a keresztmetszetbe mutat, ezért az x összetevőnek is befelé kell mutatnia.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1} = \frac{|N_{3y}|}{|N_{3x}|} \Rightarrow N_{3x} = -10 \text{ kN} \leftarrow$$

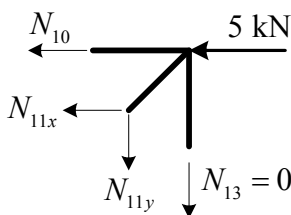
$$N_3 = -\sqrt{(N_{3x})^2 + (N_{3y})^2} \Rightarrow \underline{N_3 = -10\sqrt{2} \text{ kN}}$$



$$\sum F_x = 0 = 5 + N_{3x} + N_4 \Rightarrow N_4 = -5 - N_{3x} = -5 - (-10) = 5 \text{ kN} \rightarrow, \underline{N_4 = 5 \text{ kN}}$$



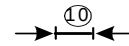
G csomópont egyensúlya: N_{10} és N_{11} számítása.



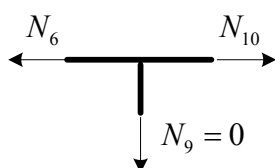
$$\sum F_y = 0 = -N_{11y} - N_{13} \Rightarrow N_{11y} = 0 \text{ kN}, \text{ így } \Rightarrow N_{11x} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 = -N_{11x} - N_{10} - 5 \Rightarrow N_{10} = -5 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\underline{N_{11} = 0 \text{ kN}} \text{ vakrúd, ill. } \underline{N_{10} = -5 \text{ kN}}$$

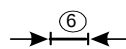


F csomópont egyensúlya: N_6 az alábbiak szerint adódik.



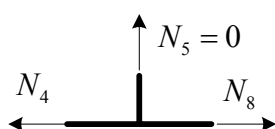
$$\sum F_x = 0 = -N_6 + N_{10} \Rightarrow N_6 = -5 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\underline{N_6 = -5 \text{ kN}}$$



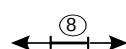
$$\sum F_y = 0 \text{ -ből látható, hogy } N_9 \text{ vakrúd.}$$

D csomópont egyensúlya: N_8 rúderőt kapjuk.



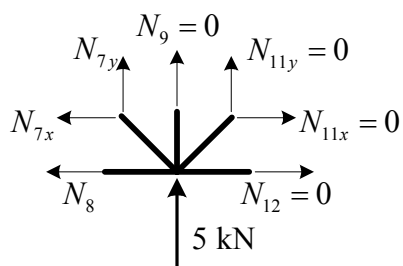
$$\sum F_x = 0 = -N_4 + N_8 \Rightarrow N_8 = 5 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\underline{N_8 = 5 \text{ kN}}$$



$$\sum F_y = 0 \text{ -ből látható, hogy } N_5 \text{ vakrúd.}$$

E csomópont egyensúlya: N_7 rúderő meghatározható.

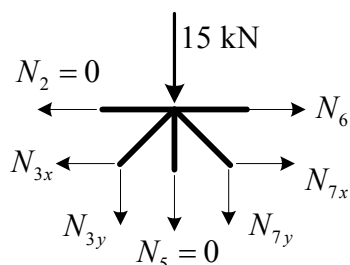


$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &= -N_8 - N_{7x} \Rightarrow N_{7x} = -5 \text{ kN} \rightarrow \\ \sum F_y = 0 &= N_9 + N_{7y} + N_{11y} + 5 \Rightarrow N_{7y} = -5 \text{ kN} \downarrow \\ N_7 &= -\sqrt{(N_{7x})^2 + (N_{7y})^2} = -\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = -5\sqrt{2} \text{ kN} \\ \underline{N_7 = -5\sqrt{2} \text{ kN}}\end{aligned}$$



Ellenőrzés:

C csomópont egyensúlya:



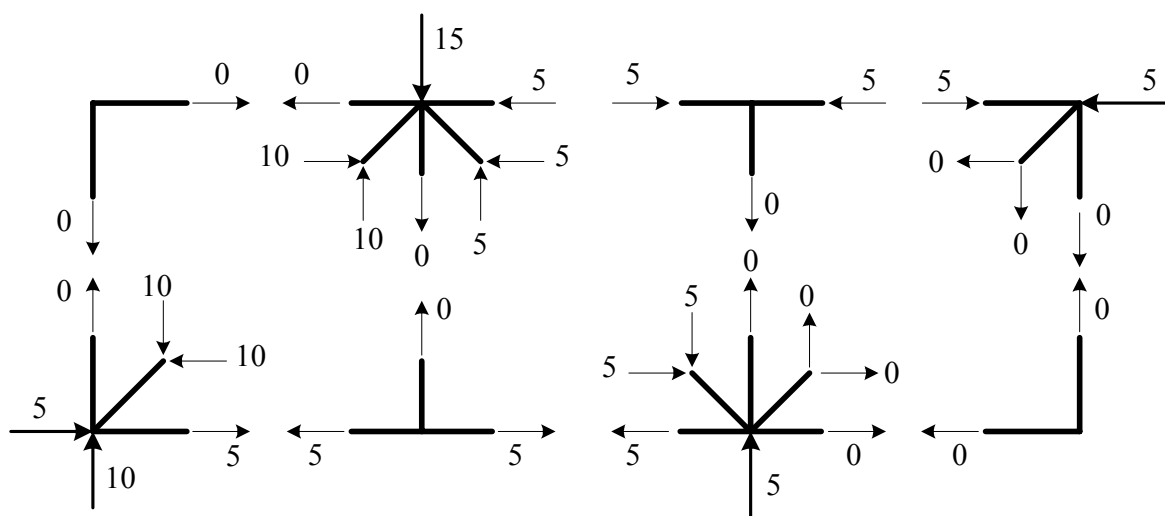
$$\begin{aligned}\sum F_x &= -N_2 - N_{3x} + N_6 + N_{7x} = \\ &= 0 - (-10) + (-5) + (-5) = 0 \\ \sum F_y &= -15 - N_{3y} - N_5 - N_{7y} = \\ &= -15 - (-10) + 0 - (-5) = 0\end{aligned}$$

A támasztóerők, illetve a rúderők számított értékei (kN):

Vakrudak: 1, 2, 5, 9, 11, 12, 13 sorszámúak. A rúderők értéke nulla. (=0.)

Húzott rudak: 4, 8 sorszámúak. A rúderők értéke pozitív. (>0.)

Nyomott rudak: 3, 6, 7, 10 sorszámúak. A rúderők értéke negatív. (<0.)

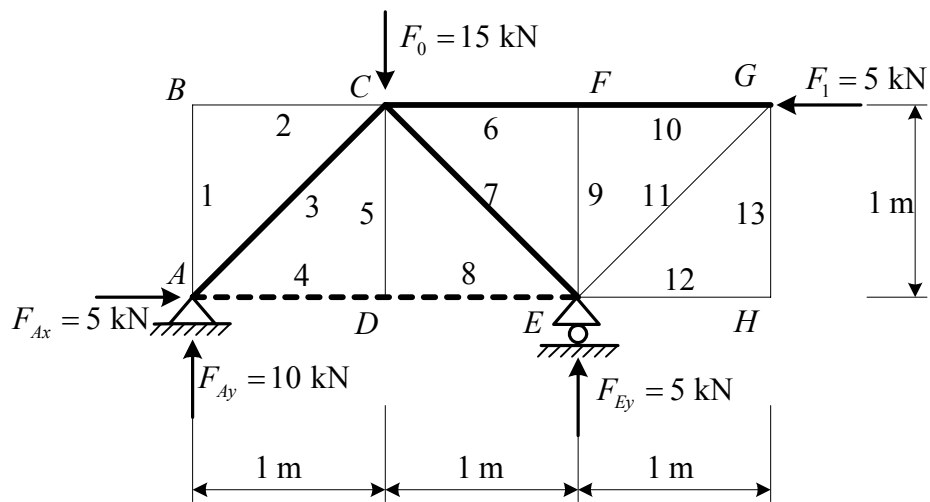


Ábrázolhatjuk a szerkezetet leegyszerűsítve, ahol a nyomott rudak vastagon (eredeti), a húzott rudak szaggatottan („kötél”), a vakrudak pedig vékonyan („hurkapálca”) szedettek. Figyeljük meg a terhelő erők, illetve a támasztóerők irányát és nagyságát, valamint azoknak a rudakban ébredő hatását (az erők „lefutását”)!

$$N_3 = -10\sqrt{2} \text{ kN}, N_7 = -5\sqrt{2} \text{ kN}, (\text{nyomott rudak})$$

$$N_6 = -5 \text{ kN}, N_{10} = -5 \text{ kN}, (\overline{CG} \text{ végig nyomott})$$

$$N_4 = 5 \text{ kN}, N_8 = 5 \text{ kN}, (\overline{AE} \text{ végig húzott}).$$



13.3. Példa

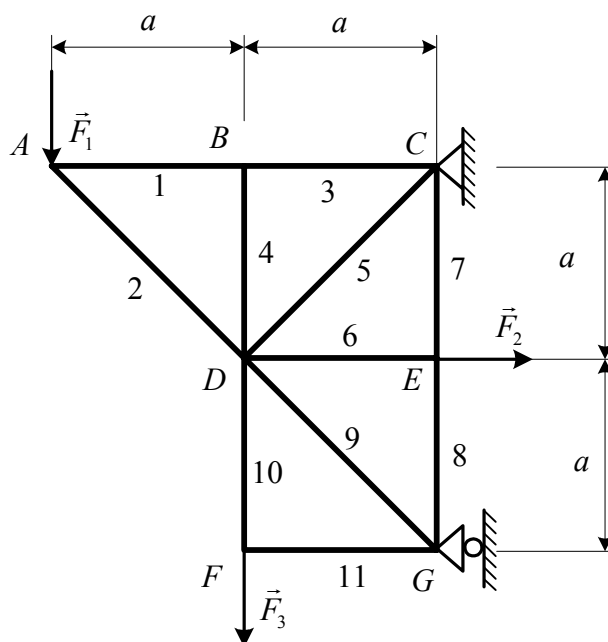
Adott:

Az ábrán látható rácsos tartó méretei és terhelése.

$$F_1 = 2 \text{ kN}, F_2 = 4 \text{ kN}, \\ F_3 = 6 \text{ kN}, a = 1 \text{ m}.$$

Feladat:

Határozza meg a támasztó erőket illetve a rúderőket!



Megoldás:

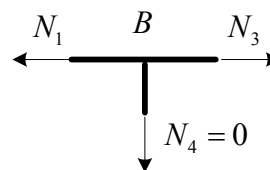
A támasztó erők meghatározása:

$$\begin{aligned} \sum M_g = 0 &= 2a \cdot F_1 + a \cdot F_3 - a \cdot F_2 - 2a \cdot F_{Cx} \Rightarrow F_{Cx} = 3 \text{ kN} \rightarrow \\ \sum M_c = 0 &= a \cdot F_3 + 2a \cdot F_1 + a \cdot F_2 + 2a \cdot F_{Gx} \Rightarrow F_{Gx} = -7 \text{ kN} \leftarrow \\ \sum F_y = 0 &= -F_1 - F_3 + F_{Cy} \Rightarrow F_{Cy} = 8 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

Jelöljük ki a „vakrudakat” ($N=0$), melyek számítás nélkül is láthatóak.

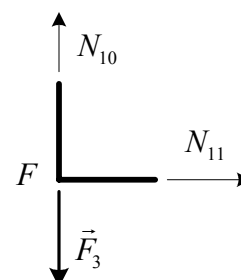
B csomópont egyensúlya:

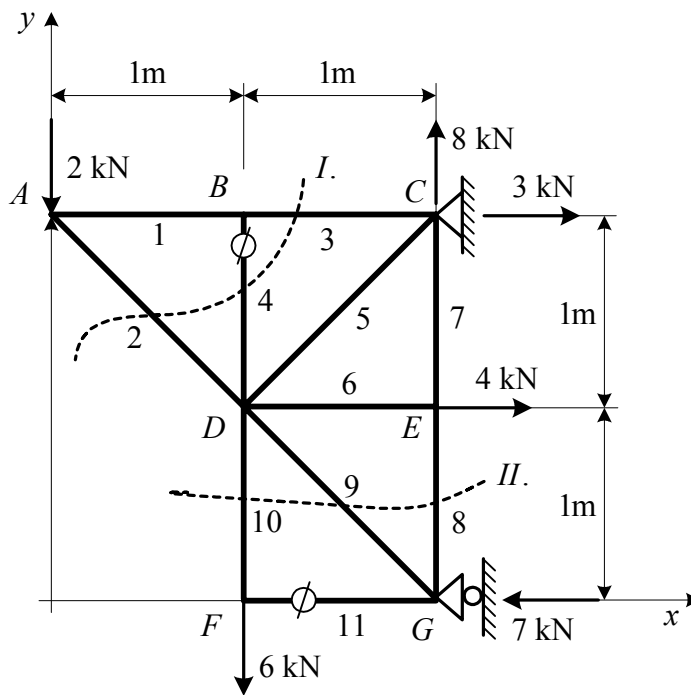
$$\sum F_y = 0 = -N_4 \Rightarrow \underline{N_4 = 0 \text{ vakrúd}}$$



F csomópont egyensúlya:

$$\sum F_x = 0 = N_{11} \Rightarrow \underline{N_{11} = 0 \text{ vakrúd}}$$



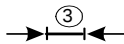


Az I. átmetszéssel az N_2 , N_3 és N_4 rúderök számíthatók.

$$\sum M_a = 0 = -4 \cdot N_4 \Rightarrow N_4 = 0 \text{ kN vakrúd}$$

$$\sum M_d = 0 = -a \cdot N_3 + a \cdot 2$$

$$\Rightarrow N_3 = 2 \text{ kN} \rightarrow \text{húzott}$$



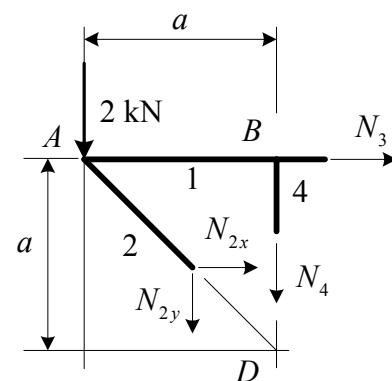
N_2 -t A-be tolva:

$$\sum M_b = 0 = a \cdot N_{2y} + a \cdot 2 \Rightarrow N_{2y} = -2 \text{ kN} \uparrow \text{ rúd}$$

N_2 -t D-be tolva:

$$\sum M_b = 0 = a \cdot N_{2x} + a \cdot 2 \Rightarrow N_{2x} = -2 \text{ kN} \leftarrow \text{rúd}$$

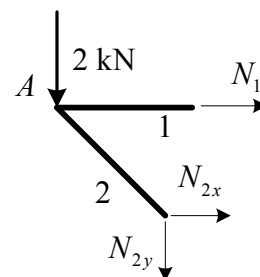
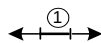
$$N_2 = -\sqrt{N_{2x}^2 + N_{2y}^2} = -2\sqrt{2} \text{ kN} \searrow \text{nyomott}$$



A csomópont egyensúlya: N_1 ismeretlen

$$\sum F_x = 0 = N_1 + N_{2x} = N_1 + (-2)$$

$$\Rightarrow N_1 = 2 \text{ kN} \rightarrow \text{húzott}$$



A II. átmetszéssel az N_8 , N_9 és N_{10} rúderők számíthatók.

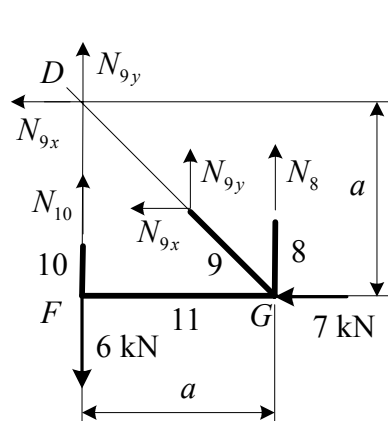
$$\sum M_g = 0 = -a \cdot N_{10} + a \cdot 6 \Rightarrow \underline{N_{10} = 6 \text{ kN} \uparrow \text{ húzott}}$$

$$\sum M_d = 0 = a \cdot N_8 - a \cdot 7 \Rightarrow \underline{N_8 = 7 \text{ kN} \uparrow \text{ húzott}}$$

$$\sum F_y = 0 = N_{10} + N_{9y} + N_8 - 6 \Rightarrow \underline{N_{9y} = -7 \text{ kN} \downarrow \text{ rúd}}$$

$$\sum F_x = 0 = -N_{9x} - 7 \Rightarrow \underline{N_{9x} = -7 \text{ kN} \rightarrow \text{ rúd}}$$

$$N_9 = -\sqrt{N_{9x}^2 + N_{9y}^2} = -7\sqrt{2} \text{ kN} \searrow \text{ nyomott}$$



D csomópont egyensúlya: N_5 és N_6 ismeretlen.

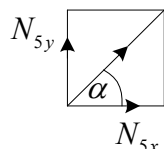
$$\sum F_y = 0 = N_{2y} + N_4 + N_{5y} - N_{10} - N_{9y}$$

$$N_{5y} = -N_{2y} - N_4 + N_{10} + N_{9y} =$$

$$= -(-2) + (0) + (6) + (-7) = 1 \text{ kN}$$

$$N_{5y} = +1 \text{ kN} \uparrow \text{ a rúdból kifelé mutató összetevő.}$$

Mivel:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a} = \frac{|N_{5y}|}{|N_{5x}|} = 1 \Rightarrow |N_{5x}| = +1 \text{ kN} \rightarrow \text{ hiszen a rúdból szintén kifelé mutathat csak.}$$

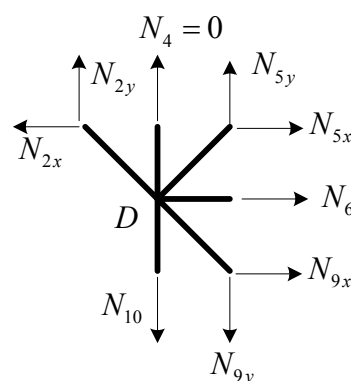
$$N_5 = \sqrt{N_{5x}^2 + N_{5y}^2} = +1 \cdot \sqrt{2} \text{ kN} \Rightarrow \underline{N_5 = 1 \text{ kN} \nearrow \text{ húzott}}$$



$$\sum F_x = 0 = -N_{2x} + N_{5x} + N_{9x} + N_6$$

$$N_6 = N_{2x} - N_{5x} - N_{9x} = (-2) - (1) - (-7) = +4 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \underline{N_6 = 4 \text{ kN} \rightarrow \text{ húzott}}$$

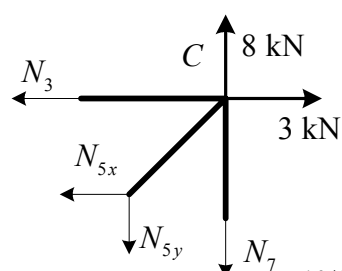


C csomópont egyensúlya: N_7 ismeretlen

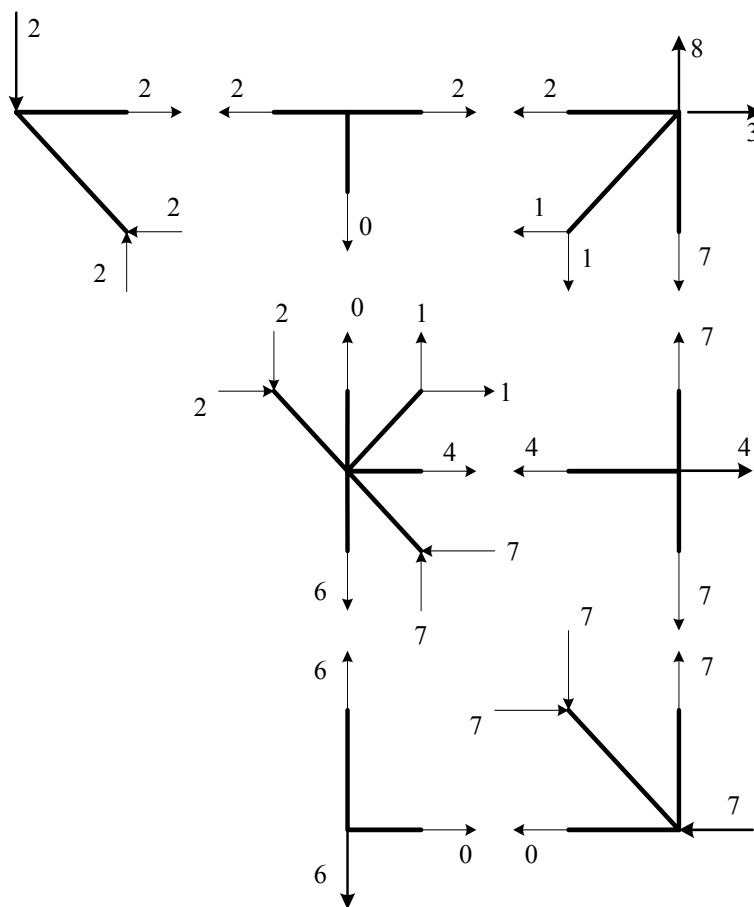
$$\sum F_y = 0 = -N_{5y} - N_7 + 8$$

$$\Rightarrow N_7 = -N_{5y} + 8 = -(1) + 8 = 7 \text{ kN}$$

$$\underline{N_7 = 7 \text{ kN} \downarrow \text{ húzott}}$$



A támasztóerők, illetve a rúderők számított értékei kN-ban:



Elemző ábra: a nyomott rudak vastagon (eredeti), a húzott rudak szaggatottan („kötél”), a vakrudak pedig vékonyan („hurkapálca”) szedettek. Figyeljük meg az erők „futását”!

