

14. MECHANIKA-STATIKA GYAKORLAT
(kidolgozta: Tarnai Gábor, mérnök tanár)

Érdes testek - súrlódás

14.1. Példa.

Adott:

Az ábrán látható lejtőn elhelyezett test
méretei és terhelése.

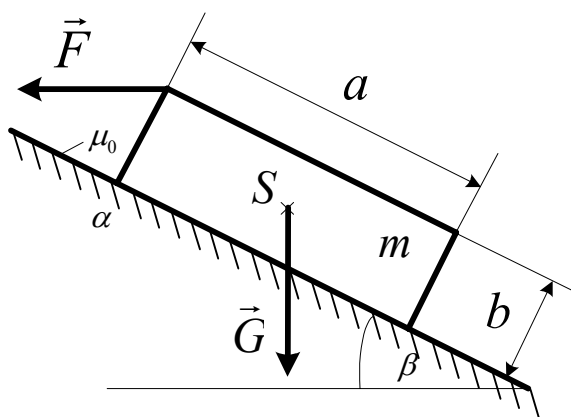
$$a = 1 \text{ m}, b = 0,5 \text{ m}, \mu_0 = 0,2$$

$$m = 100 \text{ kg}, g \cong 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \beta = 30^\circ$$

Feladat:

Határozza meg, mekkora vízszintes
irányú $\vec{F}$ erő hatására marad a hasáb
még éppen egyensúlyban?

- Szerkesztéssel,
- Számítással.



Megoldás: szerkesztéssel

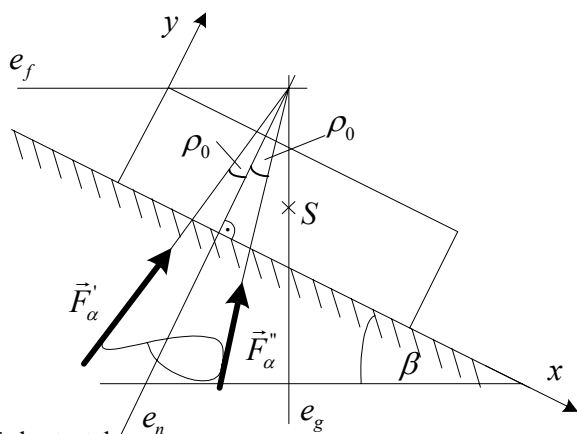
A szélsőséges egyensúlyi helyzetet kétféleképpen érhetjük el.

Az $\vec{F}_{\max}$ maximális húzóerőt akkor fejtjük ki, amikor a test még éppen nem mozdul el a lejtőn fölfelé, az $\vec{F}_{\min}$ húzóerőt pedig akkor, amikor még éppen nem kezd el lefelé csúszni.

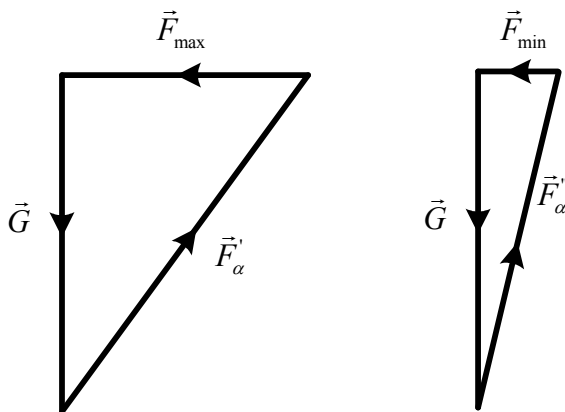
Első esetben a lejtő felől a testre ható erő ($\vec{F}'_\alpha$) a fölfelé indulást „akadályozza” (azaz $\vec{F}'_\alpha$ „lefelé” mutat), a másodikban pedig a lefelé csúszást gátolja (azaz $\vec{F}'_\alpha$ „fölfelé” mutat), de mindkét esetben a nyugvásbeli súrlódási kúp palástján helyezkedik el. (A nem szélsőséges esetekben ($\vec{F}_{\min} < \vec{F} < \vec{F}_{\max}$), az $\vec{F}_\alpha$ hatásvonalát, valahol a kúpon belül találjuk.)

Az egyensúly feltétele: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_\alpha = \vec{0}$ (Az erők hatásvonalai egy pontban metszik egymást.)

Szerkesztetábra



Erőábra



Megoldás: számítással

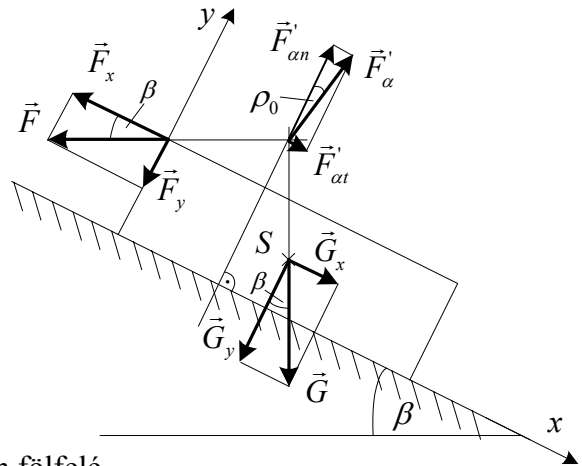
Ismét az egyensúly feltétele a kiindulás:

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_\alpha = \vec{0}, \text{ ahol}$$

$$\vec{F} = -F \cos \beta \vec{i} - F \sin \beta \vec{j}$$

$$\vec{G} = G \sin \beta \vec{i} - G \cos \beta \vec{j}$$

$$\vec{F}_\alpha = F'_{at} \vec{i} + F'_{an} \vec{j}$$



ha, a test még éppen nem mozdul el a lejtőn fölfelé.

Valamint, a Coulomb törvény értelmében:

$$F'_{at} = \mu_0 F'_{an}.$$

Behelyettesítés után, $\vec{i}$ -vel, majd $\vec{j}$ -vel skalárisan megszorozzuk a vektoregyenletet:

$$-F \cos \beta + G \sin \beta + \mu_0 F'_{an} = 0$$

$$-F \sin \beta - G \cos \beta + F'_{an} = 0 \quad \Rightarrow \quad F'_{an} = F \sin \beta + G \cos \beta$$

majd, ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk:

$$-F \cos \beta + G \sin \beta + \mu_0 (F \sin \beta + G \cos \beta) = 0, \text{ amiből kifejezve}$$

$$F = G \frac{\sin \beta + \mu_0 \cos \beta}{\cos \beta - \mu_0 \sin \beta}, \text{ és az adatok behelyettesítése után}$$

$$F = 100 \cdot 10 \cdot \frac{\sin 30^\circ + 0,2 \cdot \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0,2 \cdot \sin 30^\circ}, \text{ majd}$$

$$F = 1000 \cdot \frac{\frac{1}{2} + 0,2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,2 \frac{1}{2}} = 878,83 \text{ kN}.$$

Tehát az a maximális húzóerő, amikor a test még éppen nem mozdul el a lejtőn fölfelé:

$$\underline{\underline{F_{\max} = 878,83 \text{ kN} (\leftarrow)}}.$$

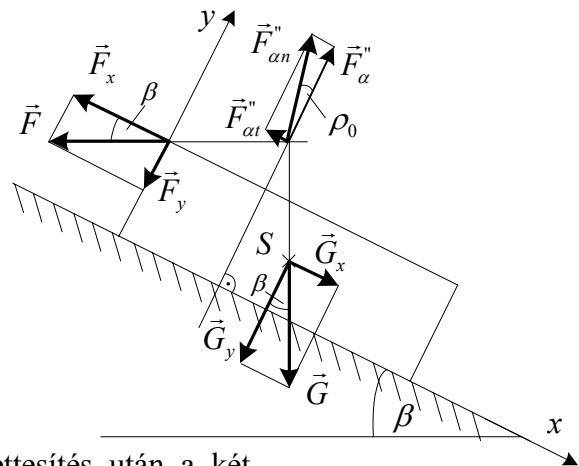
A másik eset, amikor a test lefelé mozgását akadályozzuk meg az erővel ($\vec{F}_{\min}$):

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_\alpha = \vec{0}, \text{ és itt,}$$

$$\vec{F} = -F \cos \beta \vec{i} - F \sin \beta \vec{j},$$

$$\vec{G} = G \sin \beta \vec{i} - G \cos \beta \vec{j},$$

$$\vec{F}_\alpha = -F_\alpha \vec{i} + F_\alpha \vec{j},$$



Továbbá felhasználva, hogy:

$$F_\alpha = \mu_0 F_\alpha.$$

Az egyensúlyi egyenletbe történő behelyettesítés után a két skalár egyenlet:

$$-F \cos \beta + G \sin \beta - \mu_0 F_\alpha = 0$$

$$-F \sin \beta - G \cos \beta + F_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F_\alpha = F \sin \beta + G \cos \beta$$

ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk:

$$-F \cos \beta + G \sin \beta - \mu_0 (F \sin \beta + G \cos \beta) = 0, \text{ amiből}$$

$$F = G \frac{\sin \beta - \mu_0 \cos \beta}{\cos \beta + \mu_0 \sin \beta} = 100 \cdot 10 \cdot \frac{\sin 30^\circ - 0,2 \cdot \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ + 0,2 \cdot \sin 30^\circ} = 1000 \cdot \frac{\frac{1}{2} - 0,2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,2 \frac{1}{2}}.$$

Tehát az a minimális húzóerő, amikor a test még éppen nem kezd lecsúszni a lejtőn:

$$\underline{\underline{F_{\min} = 338,29 \text{ kN} (\leftarrow)}}$$

Végeredményben tehát:

$F > F_{\max}$ esetén a test elindul a lejtőn fölfelé, hiszen $|F_x| > |G_x + F_\alpha|$ (mozgástan),

$F_{\min} \leq F \leq F_{\max}$ esetben a test folyamatosan nyugalomban marad (**statika**), és

$F < F_{\min}$ következménye: a test elkezd csúszni lefelé, $|F_x| < |G_x - F_\alpha|$ (mozgástan).

14.2. Példa.

Adott:

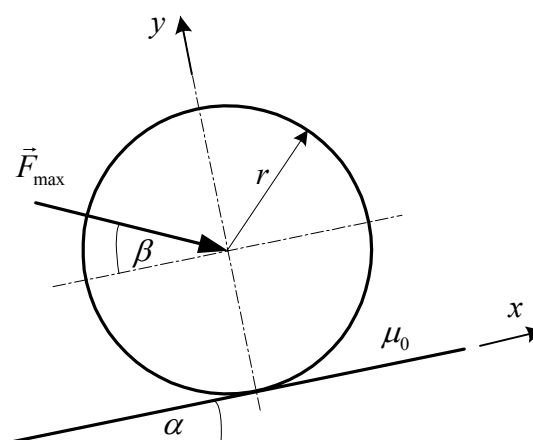
$$m = 6 \text{ kg}, g \cong 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$r = 200 \text{ mm}, f = 3 \text{ mm}$$

$$\alpha = 14^\circ, \beta = 30^\circ$$

Feladat:

- Mekkora maximális erő ($F_{\max}$) esetén lesz a henger egyensúlyban?
- Mekkora lehet minimálisan a nyugalmi súrlódási tényező ($\mu_{0\min}$) értéke, hogy a henger ne csússzon meg?



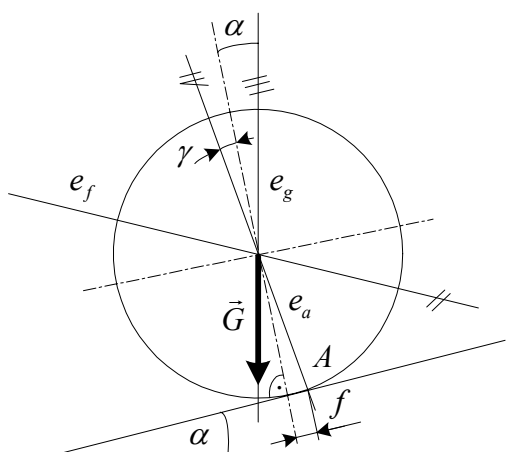
Megoldás:

a. Szerkesztéssel

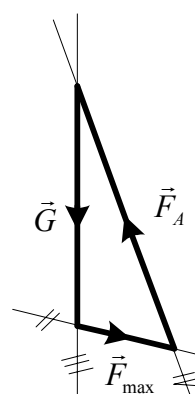
Egyensúly esetén teljesül a következő egyenlet: $\vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_{\max} = \vec{0}$,

ahol $\vec{F}_A$ a lejtőről a hengerre ható támasztóerő.

Szerkezeti ábra



Erő ábra



Az ábrából látható: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{f}{r}$

Számítással

Az egyensúlyi egyenlet ismét a kiinduló pont: $\vec{G} + \vec{F}_A + \vec{F}_{\max} = \vec{0}$, ahol:

$$\vec{G} = -G \sin \alpha \vec{i} - G \cos \alpha \vec{j}$$

$$\vec{F}_A = -F_A \sin \gamma \vec{i} + F_A \cos \gamma \vec{j}$$

$$\vec{F}_{\max} = F_{\max} \cos \beta \vec{i} - F_{\max} \sin \beta \vec{j}$$

Behelyettesítés után, $\vec{i}$ -vel, majd $\vec{j}$ -vel
skalárisan megszorozzuk a vektoregyenletet:

$$\left. \begin{aligned} -G \sin \alpha - F_A \sin \gamma + F_{\max} \cos \beta &= 0 \\ -G \cos \alpha + F_A \cos \gamma - F_{\max} \sin \beta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

A második skaláris egyensúlyi egyenletből:

$$F_A = \frac{G \cos \alpha + F_{\max} \sin \beta}{\cos \gamma}.$$

Ezt visszahelyettesítve az első skaláris egyensúlyi egyenletbe:

$$-G \sin \alpha - \frac{G \cos \alpha + F_{\max} \sin \beta}{\cos \gamma} \sin \gamma + F_{\max} \cos \beta = 0, \text{ átrendezés után}$$

$$F_{\max} \left(\cos \beta - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \sin \beta \right) = G \left(\sin \alpha + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \cos \alpha \right).$$

Az ábrából leolvashatjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{|F_{Ax}|}{|F_{Ay}|} = \frac{|F_{At}|}{|F_{An}|} = \frac{f}{r}, \text{ ahol } F_{At} \equiv F_{Ax} \text{ az érintő síkba eső erőkoordináta, és}$$

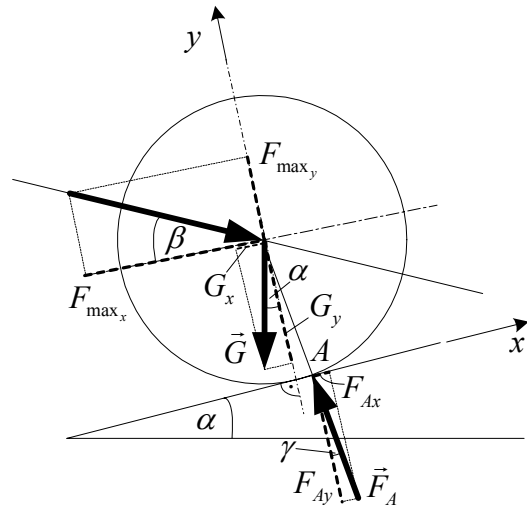
$F_{An} \equiv F_{Ay}$ az érintkezési felületre merőleges erőkoordináta. Most már

$$F_{\max} = G \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \gamma \cos \alpha}{\cos \beta - \operatorname{tg} \gamma \sin \beta} = 6 \cdot 10 \cdot \frac{0,242 + \frac{3}{200} 0,97}{0,866 - \frac{3}{200} 0,05} = 17,92 \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F_{\max} = 17,92 \text{ N} \searrow}}$$

b. A megcsúszáshoz tartozó, $\mu_{0\min}$ legkisebb nyugvásbeli súrlódási tényező meghatározása:

$$\mu_{0\min} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{f}{r} = \frac{3}{200} = 0,015. \quad \underline{\underline{\mu_{0\min} = 0,015}}$$



14.3. Példa.

Adott: Az ábrán látható fogó méretei és terhelése.

$$a = 100 \text{ mm}, m = 5 \text{ t}, \mu_0 = 0,3.$$

Feladat:

Határozza meg, megtartja-e a befogószerkezet a terhet!

- c. Szerkesztéssel,
- d. Számítással.

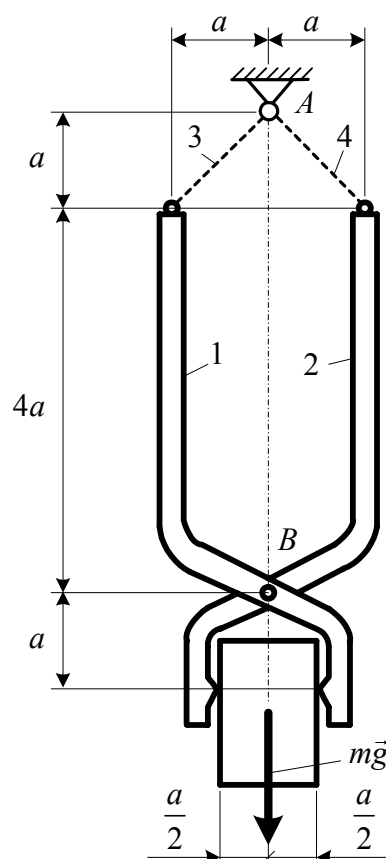
Megoldás:

- Szerkesztéssel

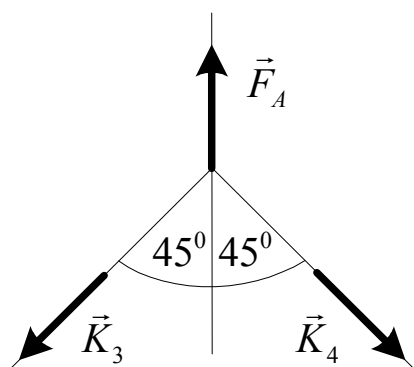
A súrlódási tényező minimális értékének meghatározása.

A csukló egyensúlya:

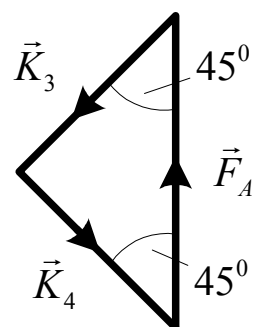
$$\vec{F}_A + \vec{K}_3 + \vec{K}_4 = \vec{0}$$



Helyzetábra



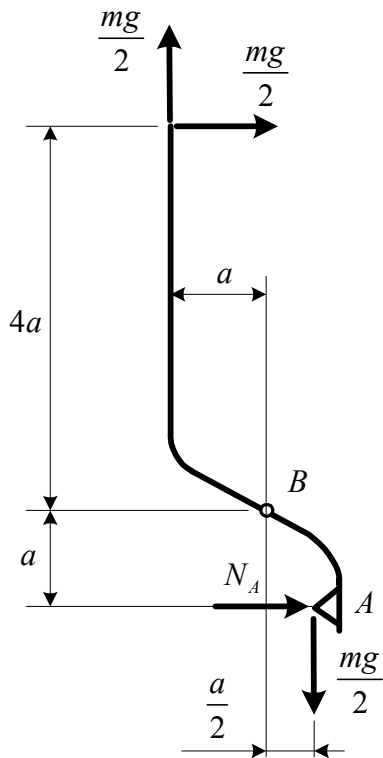
Erőábra



Megoldás:

- Számítással

Az 1 test egyensúlyából:



$$M_b = 0 = -a \frac{mg}{2} - 4a \frac{mg}{2} - \frac{a}{2} \frac{mg}{2} + a N_A,$$

$$0 = mg \left(-\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{4} \right) + N_A,$$

$$N_A = 2,75mg = 137,5 \text{ kN},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{mg}{2}}{N_A} = \frac{\frac{1}{2}mg}{2,75mg} = \frac{1}{5,5} = 0,1818,$$

$$\mu_{0\min} = \operatorname{tg} \alpha = 0,1818 < 0,3 = \operatorname{tg} \rho_0 = \mu_0$$

