

1. MECHANIKA-MOZGÁSTAN GYAKORLAT
(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

Matematikai összefoglaló

1.1. Mátrixalgebrai összefoglaló:

a) Mátrix értelmezése, jelölése:

Mátrix: skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

$$\text{Jelölése: } \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Négyzetes mátrix: olyan mátrix, amelyben a sorok és oszlopok száma megegyezik.

$$\text{Oszlopmátrix: } \begin{bmatrix} a \\ \underline{\underline{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Sormátrix: } \begin{bmatrix} a \\ \underline{\underline{a}} \end{bmatrix}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

b) Műveletek mátrixokkal:

- **Mátrix transzponáltja:** tükrözés a főátlóra. A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \end{bmatrix}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)}$$

- **Mátrixok összeadása, kivonása:** csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, ill. vonhatók ki egymásból.

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \pm \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)}$$

- **Mátrix szorzás (sor-oszlop kombináció):**

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)}$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}b_1 + a_{12}b_2) \\ (a_{21}b_1 + a_{22}b_2) \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)}$$

$$\underline{\underline{a}}^T \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{d}}^T,$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{(1 \times 2)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_1b_{11} + a_2b_{21}) & (a_1b_{12} + a_2b_{22}) \end{bmatrix}}_{(1 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}}_{(1 \times 2)}$$

c) Különleges mátrixok:

- **Egység mátrix:** $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$.

Az egység mátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorzott mátrixot.

- **Szimmetrikus mátrix:** $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$, azaz $a_{ij} = a_{ji}$, ahol $(i, j = 1, 2, 3, \dots)$. A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükröképükkel.

Például: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

- **Ferdeszimmetrikus mátrix:** $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$, azaz $a_{ij} = -a_{ji}$, ahol $i, j = 1, 2, 3, \dots$. A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükröképének mínusz egyszeresével. Ebből következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

Például: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.2. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális és diadikus szorzata:

Vektor: irányított geometriai, vagy fizikai mennyiség, ami jellemezhető iránnyal, nagysággal, mértékegységgel.

a) Vektorok skaláris szorzata:

Skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$, ahol α a vektorok által bezárt szög.

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

A szorzás eredménye egy skaláris mennyiség.

b) Vektorok kétszeres vektoriális szorzata:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \text{ vagy } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Kiszámítás kétféleképpen lehetséges:

- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,
- a kifejtési tétellel:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}), \text{ ill. } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

c) Vektorok diadikus szorzata:

Legyen adott az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ tetszőleges vektor.

Két vektor diadikus szorzatának jelölése: $\vec{a} \circ \vec{b}$, elnevezése: diád.

Két vektor diadikus szorzatát a szorzás tulajdonságainak megadásával értelmezzük:

- a diadikus szorzás és a skaláris szorzás asszociatív (csoportosítható, azaz a szorzások elvégzésének sorrendjét felcserélhetjük):

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c}),$$
- a diád a skaláris szorzás szempontjából nem kommutatív (nem mindegy, hogy egy diádot jobbról vagy balról szorzunk skalárisan egy vektorral, mert más eredményt kapunk).

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Ha a szorzás a fent leírt összefüggéseket kielégíti a szorzás diadikus.

Két vektor diadikus szorzatának kiszámítása jobbsodrású, derékszögű koordináta rendszerben.

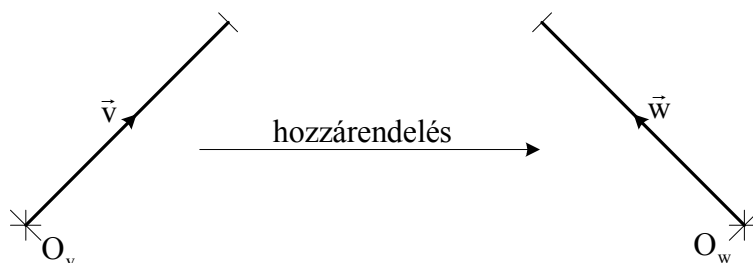
$$[\vec{a} \circ \vec{b}] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$

1.3. Tenzorok előállítása:

a) Tenzorok értelmezése és tulajdonságai:

Tenzor: homogén, lineáris vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés).

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}.$$



A $\underline{\underline{T}}$ tenzor a tetszőleges $\vec{v}$ vektorhoz a $\vec{w}$ képvektort rendeli hozzá.

b) Tenzor előállítása jobbsodratú, derékszögű descartesi koordináta-rendszerben:

Tenzor megadása:

- a tenzor koordinátaival (mátrixával) és
- koordináta rendszerrel történik.

Tenzor koordinátáinak jelölése mátrixba rendezve:

$$- \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \text{xyz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Tenzor előállítás:

Legyen ismert három értékpár:

$$\vec{i} \rightarrow \vec{a} = f(\vec{i}), \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{j} \rightarrow \vec{b} = f(\vec{j}), \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

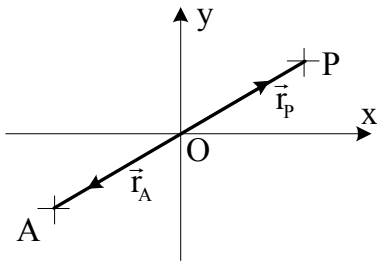
$$\vec{k} \rightarrow \vec{c} = f(\vec{k}), \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.$$

A tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j} + \vec{c} \circ \vec{k})$.

A tenzor mátrixa: $[\underline{\underline{T}}]_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}.$

1.3.1. Tenzor előállítása:

Adott: $\vec{r}_p = (12\vec{i} + 4\vec{j})\text{m}.$



Feladat:

- Azon $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer O kezdőpontjára tükrözött vektorait állítja elő.
- Előállítani azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_p$ vektor origóra vett tükörképe.

a) A tenzor előállítása:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{i} \rightarrow \vec{a} = -\vec{i}, \quad \vec{j} \rightarrow \vec{b} = -\vec{j}.$$

A két értékpárból a tenzor: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j})$

A tenzor mátrixa: $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

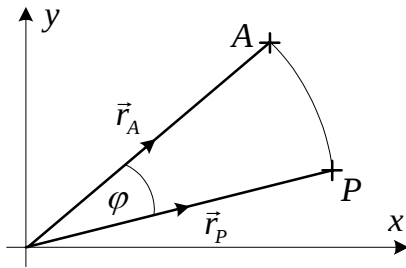
b) Az origóra tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = (-12\vec{i} - 4\vec{j})\text{m}.$$

1.3.2. Tenzor előállítás:

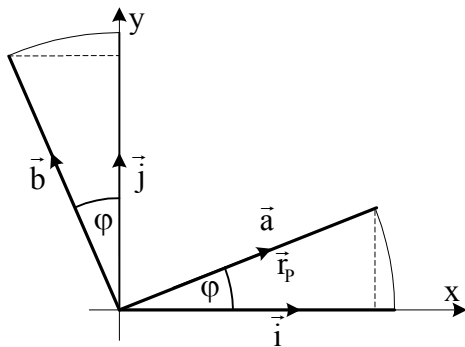
Adott: $\vec{r}_p = (8\vec{i} + 2\vec{j})\text{m}$, $\varphi = 60^\circ$.



Feladat:

- Azon $\underline{T}$ tenzor mátrixának előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektorok z tengely körül φ szöggel elforgatott vektorait állítja elő.
- Előállítani azt az $\vec{r}_A$ vektort, amelyet az $\vec{r}_p$ vektor φ szöggel történő elforgatásával kapunk.

a) A tenzor előállítása:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{i} \rightarrow \vec{a} = (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}),$$

$$\vec{j} \rightarrow \vec{b} = (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}).$$

A két értékpárból a tenzor: $\underline{T} = (\vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j})$.

A diádok kiszámítása:

$$[\vec{a} \circ \vec{i}] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ a_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{b} \circ \vec{j}] = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

A tenzor mátrixa:

$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

b) Az elforgatott $\vec{r}_A$ vektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{T} \cdot \vec{r}_p = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,268 \\ 7,928 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = (2,268\vec{i} + 7,928\vec{j})\text{m}.$$

1.4. Differenciálszámítás:

Az f függvény deriváltján az

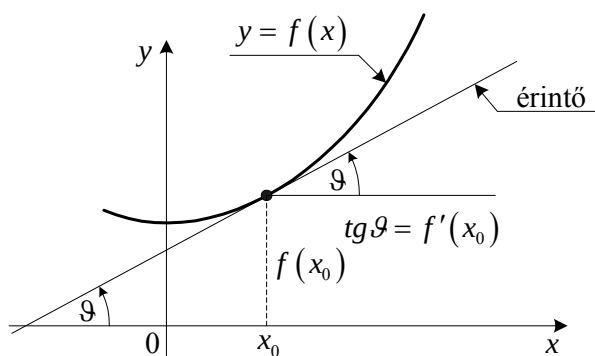
$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

határértéket értjük (feltételezve, hogy létezik és véges).

Az $y = f(x)$ függvény deriváltjának jelölései: f' , $f'(x)$, y' , $y'(x)$, $\dot{y}$, $\frac{dy}{dx}$ stb., ahol $\dot{y}$ az idő szerinti első derivált.

A derivált x_0 helyen vett $f'(x_0)$ helyettesítési értékét szokás a függvény x_0 helyhez tartozó differenciálhányadosának is nevezni. A derivált előállítását deriválásnak vagy differenciálásnak nevezzük.

A $f'(x_0)$ differenciálhányados geometriai jelentése az $y = f(x)$ görbe x_0 helyhez tartozó érintőjének az iránytangense, azaz $f'(x_0) = \operatorname{tg} \vartheta$ (1. ábra).



1. ábra

Amennyiben egy függvény valamely helyen vagy intervallumon deriválttal rendelkezik, akkor a függvény itt differenciálható. A differenciálhatóságból pedig a függvény folytonossága következik.

• **Deriválási szabályok:** Legyenek u , v , f , g differenciálható függvények. Ekkor:

1. $(Cu)' = Cu'$, C állandó;

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(uv)' = u'v + uv'$;

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$;

5. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'_x$ láncszabály;

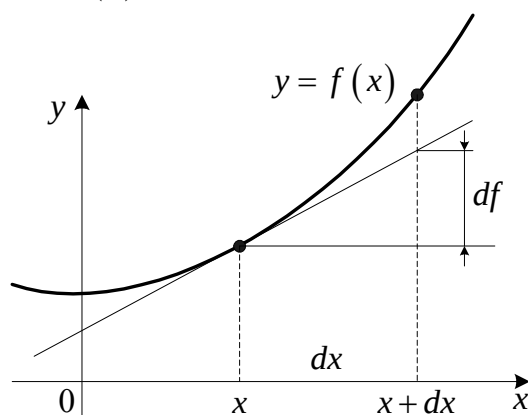
6. Legyen $y = f(x)$ és $x = f^{-1}(y)$. Ekkor $f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$;

7. Ha $x = x(t)$, $y = y(t)$, akkor $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

• **Alapfüggvények deriváltja:**

$C' = 0, C \text{ állandó}$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x;$	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Értelmezzük a függvény második, harmadik stb. deriváltját. Jelölésük: $f'', f''', \dots, f^{(n)}, \dots$.
A f függvény differenciálja: $df = f'(x) dx$ (2. ábra).



2. ábra

1.4.1. Példa:

A $f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ formula alapján határozzuk meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \frac{1}{x}$ függvény deriváltját.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x;$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

1.4.2. Példa:

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(x^3 \sqrt{x})' = \left(x \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};$$

1.5. A határozatlan integrál:

A (nagy) F függvényt a (kis) f függvény primitív függvényének nevezzük valamely nyílt intervallumon, ha itt $F'(x) = f(x)$. Egy függvénynek végtelen sok primitív függvénye van, és ezek összességét f határozatlan integráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int f(x) dx + C,$$

ahol C tetszőleges állandó (integrációs állandó). Például: $\int 2 dx = 2x + C$.

Alapintegrálok:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ahol C konstans, például: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$;
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;
3. $\int e^x dx = e^x + C$;
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, például $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$;
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Integrálási szabályok:

1. $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx = k \cdot F(x) + C$, például: $\int 2 \cos x dx = 2 \sin x + C$;
2. $\int (f + g - h) dx = F + G - H + C$, például:
$$\int \left(e^x + \sin x - \frac{1}{x} \right) dx = e^x - \cos x - \ln|x| + C$$
;
3. $\int f' \cdot f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$, például: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{\ln x}_{f^n} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$;

$$4. \int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + C, \text{ például:}$$

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} f' dx = \ln|\ln x| + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = - \int - \frac{\sin x}{\cos x} f' dx = \ln|\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} f' dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$5. \int f(kx) dx = \frac{F(kx)}{k} + C, \text{ például: } \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C,$$

$$\int e^{2x-5} dx = \frac{e^{2x-5}}{2} + C,$$

$$\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + C$$

$$6. \int (ax+b)^n dx = \frac{F(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$$

$$7. \int f' e^f dx = e^f + C, \text{ például: } \int \frac{2}{\tilde{f}'} e^{2x+3} f' dx = e^{2x+3} + C;$$

$$8. \int f' \sin(f) dx = -\cos(f) + C, \text{ például:}$$

$$\int (6x+3) \sin(3x^2+3x) dx = -\cos(3x^2+3x) + C$$

$$9. \int f' \cos(f) dx = \sin(f) + C, \text{ például:}$$

$$\int \underbrace{(e^x + 2x)}_{f'} \cos \underbrace{(e^x + x^2)}_f dx = \sin(e^x + x^2) + C$$

Parciális integrálás:

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

1.6. A határozott integrál:

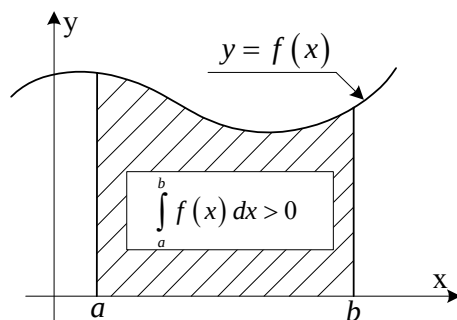
Az f függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó határozott integrálján az integrálközelítő összegek sorozatának határértékét értjük (feltéve, hogy ez létezik és véges),

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

ahol $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ahol $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, ξ_i pedig az $[x_i - x_{i-1}]$ részintervallum egy tetszőleges pontja. Azt így értelmezett integrált Riemann-integrálnak is nevezzük.

Ha létezik az (1) határérték, akkor azt mondhatjuk, hogy f az $[a, b]$ intervallumon **integrálható**. Ha a függvény folytonos valamely intervallumon, akkor ott integrálható.

Ha f az $[a, b]$ intervallumon integrálható, és itt $f(x) \geq 0$, akkor az (1) határozott integrál geometriai jelentése az $y = f(x)$ görbe alatti és $[a, b]$ szakasz fölötti síkidom területe.



3. ábra

A határozott integrál tulajdonságai:

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad C \text{ állandó};$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b.$$