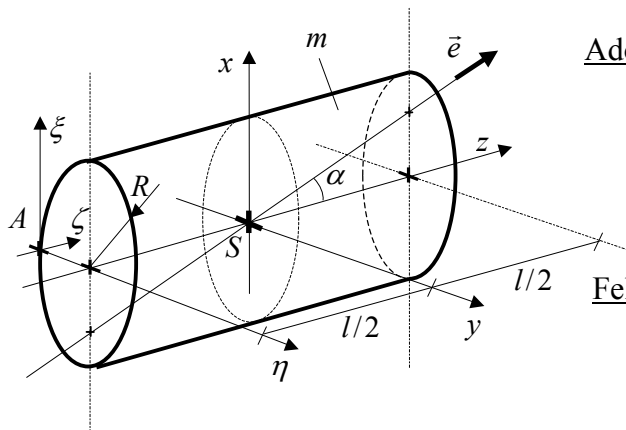


MECHANIKA III. – MOZGÁSTAN
főiskolai mérnökhallgatók számára

A 9. gyakorlat anyaga

9/1. feladat : *Tehetlenségi nyomatékok*



Adott: $m = 10 \text{ kg}$
 $R = 0,4 \text{ m}$
 $l = 1 \text{ m}$
 $\alpha = 30^\circ$

Feladat: a) Határozza meg a test S súlypontjára vonatkoztatott $\underline{\underline{J}}_S$ tehetlenségi tenzorát.
 b) Határozza meg a test S pontján átmenő $\vec{e}$ irányítású tengelyre számított J_e tehetlenségi nyomatékát.
 a) Határozza meg a test A pontjára számolt $\underline{\underline{J}}_A$ tehetlenségi tenzorát.

a) A henger pontra (S súlypontra) számított tehetlenségi tenzora : $\underline{\underline{J}}_S$

A henger x, y, z szimmetria tengelyei egyben a henger tehetlenségi főtengetyei is ,
 így az x, y, z tengelyekre számított tehetlenségi nyomatékok fő tehetlenségi nyomatékok !

$$\underline{\underline{J}}_S = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,23 & 0 & 0 \\ 0 & 1,23 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2$$

$$J_x = \frac{m}{12}(l^2 + 3R^2) = \frac{10}{12}(1^2 + 3 \cdot 0,4^2) = 1,23 \text{ kgm}^2$$

$$J_y = \frac{m}{12}(l^2 + 3R^2) = \frac{10}{12}(1^2 + 3 \cdot 0,4^2) = 1,23 \text{ kgm}^2$$

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 0,4^2 = 0,8 \text{ kgm}^2$$

b) A henger tengelyre számított tehetlenségi nyomatéka : J_e

$$\vec{e} = (\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{k}) = (0,5 \vec{i} + 0,866 \vec{k}) \text{ , ahol } |\vec{e}| = 1$$

$$J_e = \vec{e} \cdot (\underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{e}) = \vec{e} \cdot \underline{\underline{J}}_S$$

$$J_{\underline{\underline{S}}} \cdot \vec{e} = \begin{bmatrix} 1,23 & 0 & 0 \\ 0 & 1,23 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,866 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,615 \\ 0 \\ 0,693 \end{bmatrix}$$

$$J_e = \vec{e} \cdot (J_{\underline{\underline{S}}} \cdot \vec{e}) = \vec{e} \cdot \vec{J}_S = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,615 \\ 0 \\ 0,693 \end{bmatrix} = 0,31 + 0,60 = 0,91$$

$$J_e = 0,91 \text{ kgm}^2$$

c) A henger A pontra számított tehetetlenségi tenzora : $J_{\underline{\underline{A}}}$

$$\vec{r}_{SA} = x_{SA} \vec{i} + y_{SA} \vec{j} + z_{SA} \vec{k} = 0\vec{i} - R\vec{j} - \frac{l}{2} \vec{k} = (0\vec{i} - 0,4\vec{j} - 0,5\vec{k}) \text{ m}$$

A Steiner tétel alapján

$$J_{\xi} = J_x + m(y_{SA}^2 + z_{SA}^2) = 1,23 + 10(0,4^2 + 0,5^2) = 5,33 \text{ kgm}^2$$

$$J_{\eta} = J_y + m(x_{SA}^2 + z_{SA}^2) = 1,23 + 10(0^2 + 0,5^2) = 3,73 \text{ kgm}^2$$

$$J_{\zeta} = J_z + m(x_{SA}^2 + y_{SA}^2) = 0,8 + 10(0^2 + 0,4^2) = 2,4 \text{ kgm}^2$$

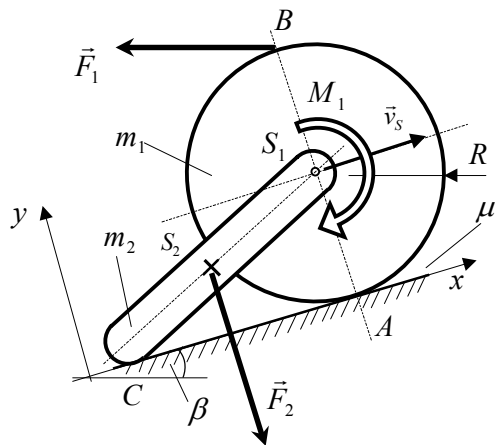
$$J_{\xi\eta} = J_{xy} + m x_{SA} y_{SA} = 0 + 10 \cdot 0 \cdot (-0,4) = 0$$

$$J_{\eta\zeta} = J_{yz} + m y_{SA} z_{SA} = 0 + 10 \cdot (-0,4) \cdot (-0,5) = 2 \text{ kgm}^2$$

$$J_{\zeta\xi} = J_{zx} + m z_{SA} x_{SA} = 0 + 10 \cdot (-0,5) \cdot 0 = 0$$

$$J_{\underline{\underline{A}}} = \begin{bmatrix} J_{\xi} & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_{\eta} & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,33 & 0 & 0 \\ 0 & 3,73 & -2 \\ 0 & -2 & 2,4 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2$$

9/2. feladat : Teljesítmény , energia



Adott : $\vec{v}_s = (2\vec{i}) \text{ m/s}$, $g \cong 10 \text{ m/s}^2$
 $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 8 \text{ kg}$
 $R = 0,5 \text{ m}$, $\beta = 30^\circ$, $\mu = 0,2$
 $\vec{F}_1 = (-60\vec{i} + 20\vec{j}) \text{ N}$
 $\vec{F}_2 = (-80\vec{j}) \text{ N}$, $\vec{M}_1 = (-20\vec{k}) \text{ Nm}$

Feladat : a) Határozza meg a rendszer teljesítményét.
 b) Határozza meg a rendszer kinetikai energiáját.

a) A két testből álló rendszerre ható nyomaték és erők teljesítménye : P

$$P_{G_1} = \vec{G}_1 \cdot \vec{v}_{S_1} = -m_1 g (\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{j}) \cdot (v_s \vec{i}) = -m_1 g \sin \beta v_s$$

$$P_{G_1} = -10 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -100 \text{ W}$$

$$P_{G_2} = \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_{S_2} = -m_2 g (\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{j}) \cdot (v_s \vec{i}) = -m_2 g \sin \beta v_s$$

$$P_{G_2} = -8 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -80 \text{ W}$$

$$P_{F_1} = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_B = (F_{1x} \vec{i} + F_{1y} \vec{j}) \cdot (2v_s \vec{i})$$

$$P_{F_1} = (-60\vec{i} + 20\vec{j}) \cdot (4\vec{i}) = -240 \text{ W}$$

$$P_{F_2} = \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_s = (-80\vec{j}) \cdot (2\vec{i}) = 0$$

$$P_{M_1} = \vec{M}_1 \cdot \vec{\omega}_1 = (M_1 \vec{k}) \times (\omega_1 \vec{k}) = (-20\vec{k}) \times (-4\vec{k}) = 80 \text{ W}$$

$$\omega_1 = \frac{v_s}{R} = \frac{2}{0,5} = 4 \Rightarrow \vec{\omega}_1 = (-4\vec{k}) \text{ 1/s}$$

$$P = \sum P_i = (-100 - 80 - 240 + 80) = -340 \text{ W}$$

$$P_{F_A} = 0 \text{ , mert } \vec{v}_A = \vec{0} \text{ (az A pont a henger sebességpólusa)}$$

$$P_{F_C} \neq 0 \text{ , mert } \vec{v}_C \neq \vec{0} \text{ és } \vec{F}_C \text{-nek van x irányú koordinátája a súrlódás miatt}$$

c) A rendszer kinetikai energiája : E

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{S_1}^2 + \frac{1}{2} J_{s1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 R^2 \omega_1^2 + J_{s1} \omega_1^2) = \frac{1}{2} (m_1 R^2 + J_{s1}) \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_a \omega_1^2$$

$$J_{s1} = \frac{1}{2} m_1 R^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,5^2 = 1,25 \text{ kgm}^2$$

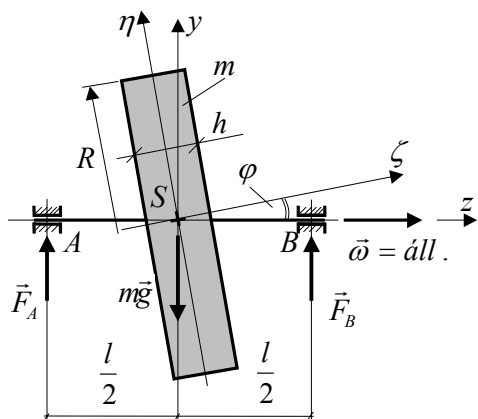
$$J_a = \frac{3}{2} m_1 R^2 = \frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 0,5^2 = 3,75 \text{ kgm}^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} J_a \omega_1^2 = 0,5 \cdot 3,75 \cdot 4^2 = 30 \text{ J}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{S_2}^2 = 0,5 \cdot 8 \cdot 2^2 = 16 \text{ J}$$

$$E = \sum E_i = E_1 + E_2 = 30 + 16 = 46 \text{ J}$$

9/3. feladat : Forgórész tömegkiegyensúlyozása



Adott : $\omega = 105 \text{ 1/s} = \text{áll.}$, $g \cong 10 \text{ m/s}^2$

$m = 48 \text{ kg}$, $\varphi = 3^\circ$

$R = 0,2 \text{ m}$

$h = 0,05 \text{ m}$

$l = 0,6 \text{ m}$

Feladat : Határozza meg az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerők értékét.

A támasztó erők : $\vec{F}_A = F_{Ax} \vec{i} + F_{Ay} \vec{j}$

$\vec{F}_B = F_{Bx} \vec{i} + F_{By} \vec{j}$

A forgórész S súlyponti tehetetlenségi tenzora ($h \ll R$) : $\underline{\underline{J}}_S$

$$\underline{\underline{J}}_S = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{bmatrix}$$

$$J_\xi = J_\eta = \frac{1}{4} m R^2 = \frac{48 \cdot 0,2^2}{4} = 0,48 \text{ kgm}^2$$

$$J_\zeta = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{48 \cdot 0,2^2}{2} = 0,96 \text{ kgm}^2$$

továbbá

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} &= \vec{e}_\xi \\ \vec{j} &= \cos \varphi \vec{e}_\eta + \sin \varphi \vec{e}_\zeta \\ \vec{k} &= -\sin \varphi \vec{e}_\eta + \cos \varphi \vec{e}_\zeta \end{aligned} \right\}$$

$$\sin \varphi = 0,052 \quad , \quad \sin^2 \varphi = 0,0027$$

$$\cos \varphi = 0,999 \quad , \quad \cos^2 \varphi = 0,997$$

$$J_x = \vec{i} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = J_\xi = 0,96 \text{ kgm}^2$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\vec{i} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{j} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = 0$$

$$J_{xz} = J_{zx} = -\vec{i} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{k} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = 0$$

$$J_y = \vec{j} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$J_y = J_\eta \cos^2 \varphi + J_\zeta \sin^2 \varphi = 0,48 \cdot 0,997 + 0,96 \cdot 0,0027 = 0,482 \text{ kgm}^2$$

$$J_y = 0,482 \text{ kgm}^2 \approx J_\eta$$

$$J_z = \vec{k} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$J_z = J_\eta \sin^2 \varphi + J_\zeta \cos^2 \varphi = 0,48 \cdot 0,0027 + 0,96 \cdot 0,997 = 0,958 \text{ kgm}^2$$

$$J_z = 0,958 \text{ kgm}^2 \approx J_\zeta$$

$$J_{yz} = J_{zy} = -\vec{j} \cdot \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{k} = -\begin{bmatrix} 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$J_{yz} = J_{zy} = J_\eta \cos \varphi \sin \varphi - J_\zeta \cos \varphi \sin \varphi = -0,025 \text{ kgm}^2$$

$$\underline{\underline{J}}_{S_{xyz}} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & -J_{yz} \\ 0 & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,480 & 0 & 0 \\ 0 & 0,482 & 0,025 \\ 0 & 0,025 & 0,958 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2$$

A Steiner tétel alapján :

$$J_{x'} = J_x + m(y_S^2 + z_S^2) = 0,48 + 48 \cdot (0^2 + \frac{l^2}{4}) = 0,48 + 48 \cdot 0,09 = 4,8 \text{ kgm}^2$$

$$J_{y'} = J_y + m(x_S^2 + z_S^2) = 0,482 + 48 \cdot (0^2 + \frac{l^2}{4}) = 0,482 + 48 \cdot 0,09 = 4,802 \text{ kgm}^2$$

$$J_{z'} = J_z + m(x_S^2 + y_S^2) = 0,482 + 48 \cdot (0^2 + 0^2) = 0,958 + 0 = 0,958 \text{ kgm}^2$$

$$J_{x'y'} = J_{xy} + m \cdot x_S \cdot y_S = 0 + 48 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \text{ kgm}^2$$

$$J_{x'z'} = J_{xz} + m \cdot x_S \cdot z_S = 0 + 48 \cdot 0 \cdot 0,3 = 0 \text{ kgm}^2$$

$$J_{y'z'} = J_{yz} + m \cdot y_S \cdot z_S = -0,025 + 48 \cdot 0 \cdot 0 = -0,025 \text{ kgm}^2$$

Az előzőek alapján a forgórész A , illetve B ponti tehetetlenségi tenzora :

$$\underline{\underline{J}}_{A \begin{smallmatrix} x' y' z' \end{smallmatrix}} = \underline{\underline{J}}_{B \begin{smallmatrix} x' y' z' \end{smallmatrix}} = \begin{bmatrix} J_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y'} & -J_{y'z'} \\ 0 & -J_{z'y'} & J_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,80 & 0 & 0 \\ 0 & 4,802 & 0,025 \\ 0 & 0,025 & 0,958 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2$$

Az A pontra felírt perdület tétel alapján :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}_{A \begin{smallmatrix} x' y' z' \end{smallmatrix}} \vec{\varepsilon}_{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_{A \begin{smallmatrix} x' y' z' \end{smallmatrix}} \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{AS} \times m \underbrace{\vec{a}_A}_{=\vec{0}} &= \vec{r}_{AS} \times \vec{G} + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B \\ \omega^2 \left[\vec{k} \times \left(-J_{y'z'} \vec{j} + J_{z'} \vec{k} \right) \right] &= \frac{l}{2} G (\vec{k} \times -\vec{j}) + (l\vec{k}) \times (F_{Bx} \vec{i} + F_{By} \vec{j}) \\ \omega^2 J_{y'z'} \vec{i} &= \frac{l}{2} G \vec{i} + l F_{Bx} \vec{j} - l F_{By} \vec{i} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j} \\ \omega^2 J_{y'z'} &= \frac{l}{2} G - l F_{By} & F_{Bx} = 0 \\ F_{By} &= \frac{1}{l} \left(-\omega^2 J_{y'z'} + \frac{l}{2} G \right) \\ F_{By} &= \frac{G}{2} - \frac{1}{l} \omega^2 J_{y'z'} \\ F_{By} &= \frac{48 \cdot 10}{2} - \frac{1}{0,6} \cdot 105^2 \cdot 0,025 \\ F_{By} &= -219,38 \text{ N} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

A B pontban ható támasztó erő tehát : $\vec{F}_B = (-219,3\vec{j}) \text{ N}$

A B pontra felírt perdület tétel alapján :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}_{B \begin{smallmatrix} x' y' z' \end{smallmatrix}} \vec{\varepsilon}_{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_{B \begin{smallmatrix} x' y' z' \end{smallmatrix}} \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{BS} \times m \underbrace{\vec{a}_B}_{=\vec{0}} &= \vec{r}_{BS} \times \vec{G} + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A \\ \omega^2 \left[\vec{k} \times \left(-J_{y'z'} \vec{j} + J_{z'} \vec{k} \right) \right] &= \frac{l}{2} G (-\vec{k} \times -\vec{j}) + (-l\vec{k}) \times (F_{Ax} \vec{i} + F_{Ay} \vec{j}) \\ \omega^2 J_{y'z'} \vec{i} &= -\frac{l}{2} G \vec{i} - l F_{Ax} \vec{j} + l F_{Ay} \vec{i} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j} \\ \omega^2 J_{y'z'} &= -\frac{l}{2} G + l F_{Ay} & F_{Ax} = 0 \\ F_{Ay} &= \frac{1}{l} \left(\omega^2 J_{y'z'} + \frac{l}{2} G \right) \end{aligned}$$

$$F_{Ay} = \frac{G}{2} + \frac{1}{l} \omega^2 J_{y'z'}$$

$$F_{Ay} = \frac{48 \cdot 10}{2} + \frac{1}{0,6} \cdot 105^2 \cdot 0,025$$

$$F_{Ay} = 701,21 \text{ N} \quad (\uparrow)$$

Az A pontban ható támasztó erő tehát : $\vec{F}_A = (701,21 \vec{j}) \text{ N}$