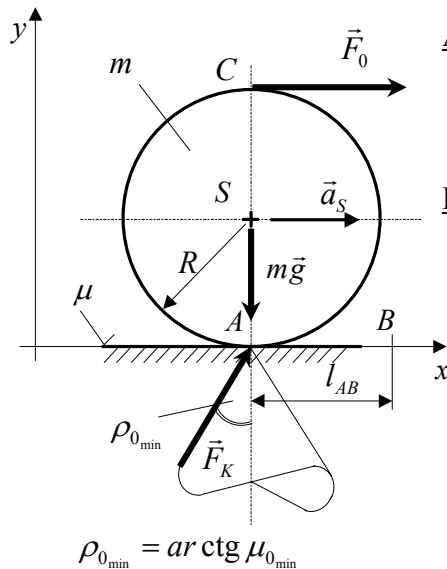


MECHANIKA III. – MOZGÁSTAN
főiskolai mérnökhallgatók számára

A 10. gyakorlat anyaga

10/1. feladat : Gördülő mozgás



Adott : $\vec{a}_s = (8\vec{i}) \text{ m/s}^2$, $g \cong 10 \text{ m/s}^2$
 $m = 30 \text{ kg}$, $l_{AB} = 2 \text{ m}$
 $R = 0,1 \text{ m}$

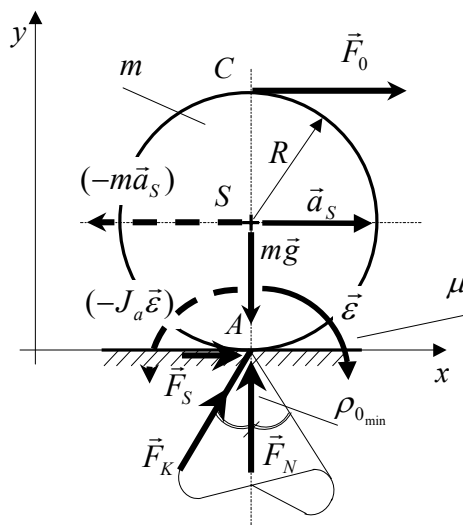
- Feladat : a) Mekkora $\vec{F}_0$ erő szükséges a gyorsuló mozgás fenntartásához ?
 b) Határozza meg a korongra ható $\vec{F}_K$ kényszererő nagyságát.
 c) Milyen $\mu_{0\min}$ nyugvásbeli súrlódási tényező szükséges a csúszásmentes, gördülő mozgás megvalósulásához ?
 d) Mekkora W_{AB} munkát végez a korongra ható erő – rendszer az l_{AB} távolságon ?

A mozgás iránya alapján a korong szöggyorsulása

$$\vec{\varepsilon} = -\varepsilon \vec{k} = -\frac{a_s}{R} \vec{k} = -\frac{8}{0,1} \vec{k} = (-80 \vec{k}) \text{ 1/s}^2$$

A korongra ható kényszererőt vegyük fel $\vec{F}_K = F_s \vec{i} + F_N \vec{j}$ alakban.

a) Az A pontra felírt perdület tétel alapján :



$$\frac{d\vec{\pi}_A}{dt} = \dot{\vec{\pi}}_A = \vec{M}_A$$

$$\underbrace{J_A \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\pi}_A}_{\vec{0}, \text{mert } \parallel -a \vec{k}} = \vec{M}_A \Rightarrow \vec{M}_A + (-J_a \vec{\varepsilon}) = \vec{0}$$

$$(-F_0 \cdot 2R \vec{k}) + (J_a \varepsilon \vec{k}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{k}$$

$$F_0 = \frac{J_a \varepsilon}{2R} = \frac{\frac{3}{2} m R^2 \varepsilon}{2R} = \frac{1,5 \cdot 30 \cdot 0,1^2 \cdot 80}{2 \cdot 0,1} = 180 \text{ N}$$

b) Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján :

$$\vec{F} = m \vec{a}_S$$

$$(\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{F}_K) = m \vec{a}_S$$

$$(F_0 \vec{i} - m g \vec{j} + F_S \vec{i} + F_N \vec{j}) + (-m a_S \vec{i}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$F_0 + F_S - m a_S = 0 \qquad -m g + F_N = 0$$

$$F_S = m a_S - F_0 = 30 \cdot 8 - 180 = 60 \text{ N} \qquad F_N = m g = 30 \cdot 10 = 300 \text{ N}$$

$$\vec{F}_K = F_S \vec{i} + F_N \vec{j} = (60 \vec{i} + 300 \vec{j}) \text{ N}$$

Ellenőrzés : írjuk fel a perdület tételt a korong S súlypontjára

$$\vec{M}_S + (-J_s \vec{\varepsilon}) = \vec{0}$$

$$(-F_0 \cdot R \vec{k}) + (F_S \cdot R \vec{k}) + (J_s \varepsilon \vec{k}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{k}$$

$$F_S = F_0 - \frac{J_s \varepsilon}{R} = F_0 - \frac{\frac{1}{2} m R^2 \varepsilon}{R} = 180 - \frac{0,5 \cdot 30 \cdot 0,1^2 \cdot 80}{0,1} = 180 - 120 = 60 \text{ N}$$

c) A csúszásmentes gördüléshez szükséges minimális nyugvásbeli súrlódási tényező :

$$F_S = \mu_{0\min} F_N = 60 \text{ N}$$

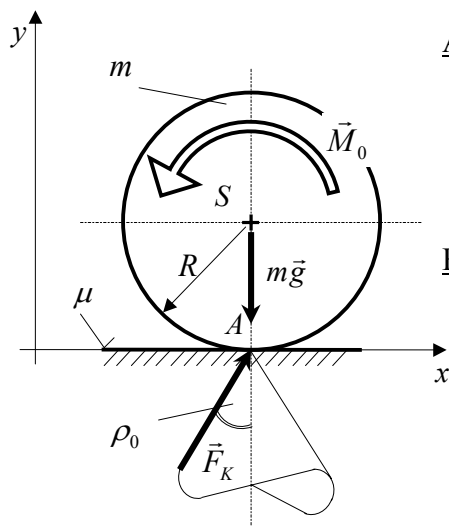
$$\mu_{0\min} = \frac{F_S}{F_N} = \frac{60}{300} = 0,2$$

d) Az l_{AB} szakaszon végzett munka : W_{AB}

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} P dt = \int_{t_A}^{t_B} (\vec{F}_0 \cdot \vec{v}_C + \underbrace{\vec{G} \cdot \vec{v}_S}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_K \cdot \vec{v}_A}_{=0}) dt = \int_{t_A}^{t_B} F_0 \cdot 2v_S dt$$

$$W_{AB} = 2F_0 \int_{t_A}^{t_B} v_S dt = 2F_0 l_{AB} = 2 \cdot 180 \cdot 2 = 720 \text{ J}$$

10/2. feladat : Gördülő mozgás



Adott : $\vec{M}_0 = (M_0 \vec{k}) = (36 \vec{k}) \text{ Nm}$

$g \cong 10 \text{ m/s}^2$, $R = 0,3 \text{ m}$

$m = 20 \text{ kg}$, $J_s = 1,2 \text{ kgm}^2$

$\mu_0 = \tan \rho_0 = 0,4$, $\mu = 0,3$

Feladat : a) Mekkora a korong $\vec{\varepsilon}$ szöggyorsulása és S pontjának $\vec{a}_S$ gyorsulása ?

b) Határozza meg a korongra ható $\vec{F}_K$ kényszer erő nagyságát.

c) Mekkora lehet a nyomaték legnagyobb értéke

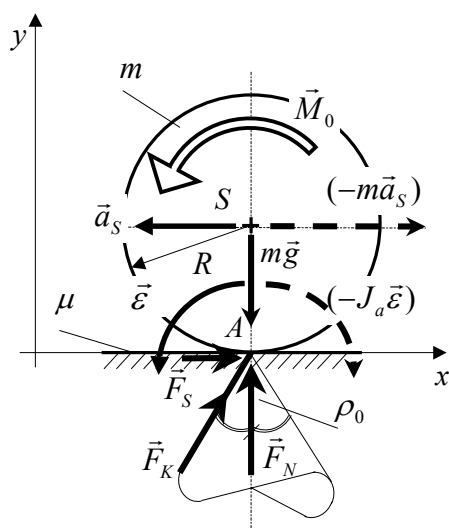
$-\vec{M}_{0_{\max}}$ -, hogy a korong még éppen ne csússzon meg?

A korong síkmozgást végez, ezért a korong szöggyorsulása

$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{k}$ irányítású, és ezzel összhangban $\vec{a}_S = -a_S \vec{i}$.

A korongra ható kényszer erőt vegyük fel $\vec{F}_K = F_S \vec{i} + F_N \vec{j}$ alakban.

a) Az A pontra felírt perdület tétel alapján :



$$\frac{d\vec{\pi}_A}{dt} = \dot{\vec{\pi}}_A = \vec{M}_A$$

$$\underbrace{J_A \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\pi}_A}_{\vec{0}, \text{mert } \parallel -ak} = \vec{M}_A \Rightarrow \vec{M}_A + (-J_A \vec{\varepsilon}) = \vec{0}$$

$$(M_0 \vec{k}) + (-J_A \varepsilon \vec{k}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{k}$$

$$\varepsilon = \frac{M_0}{J_A} = \frac{M_0}{J_s + mR^2} = \frac{36}{1,2 + 20 \cdot 0,09} = \frac{36}{3} = 12 \text{ 1/s}^2$$

$$\vec{a}_S = a_{S_e} \vec{i} + \underbrace{a_{S_n} \vec{j}}_{=0} = -\varepsilon R \vec{i} = -12 \cdot 0,3 \vec{i} = (-3,6 \vec{i}) \text{ m/s}^2$$

b) Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján :

$$\vec{F} = m \vec{a}_S$$

$$(\vec{G} + \vec{F}_K) + (-m \vec{a}_S) = \vec{0}$$

$$(-m g \vec{j} + F_S \vec{i} + F_N \vec{j}) + (m a_S \vec{i}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$F_S + m a_S = 0$$

$$-m g + F_N = 0$$

$$F_S = -m a_S = -20 \cdot 3,6 = -72 \text{ N} \quad (\leftarrow)$$

$$F_N = m g = 20 \cdot 10 = 200 \text{ N} \quad (\uparrow)$$

$$\vec{F}_K = F_S \vec{i} + F_N \vec{j} = (-72 \vec{i} + 200 \vec{j}) \text{ N}$$

c) A megcsúszáshoz tartozó határérték : $\vec{M}_{0_{\max}}$

$$F_{S_{\max}} = \mu_0 F_N = 0,4 \cdot 200 = 80 \text{ N}$$

Az előzőek alapján

$$F_{S_{\max}} = -m a_{S_{\max}} = -80 \text{ N} \quad (\leftarrow)$$

$$-m R \varepsilon_{\max} = -80$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{F_{S_{\max}}}{m R} = \frac{80}{20 \cdot 0,3} = \frac{40}{3} \text{ 1/s}^2$$

továbbá

$$J_a \varepsilon_{\max} = M_{0_{\max}}$$

$$M_{0_{\max}} = 3 \cdot \frac{40}{3} = 40 \text{ Nm}$$

$$\vec{M}_{0_{\max}} = (40 \vec{k}) \text{ Nm}$$