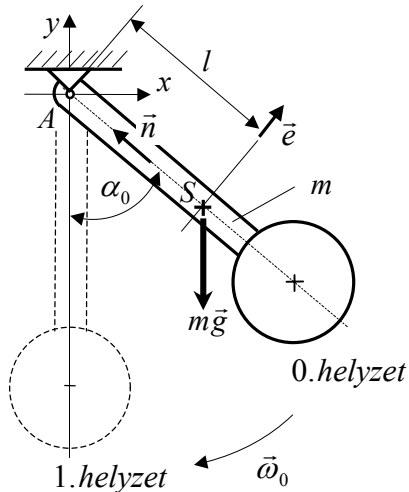


MECHANIKA III. – MOZGÁSTAN
főiskolai mérnökhallgatók számára

A 11. gyakorlat anyaga

11/1. feladat : Fizikai inga



Adott : $\omega_0 = 4 \text{ 1/s}$, $g \cong 10 \text{ m/s}^2$
 $m = 10 \text{ kg}$, $J_s = 0,15 \text{ kgm}^2$
 $l = 0,2 \text{ m}$, $\alpha_0 = 60^\circ$

Feladat : a) Az indítás pillanatában – 0. helyzet – mekkora az inga S pontjának $\vec{a}_{S_0}$ gyorsulása és az A pontban ható $\vec{F}_{A_0}$ erő ?
 b) Határozza meg az inga 1. helyzetében az S pont $\vec{a}_{S_1}$ gyorsulását és az A pontban ható $\vec{F}_{A_1}$ erő értékét !

A feladatot az $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$ koordináta-rendszerben oldjuk meg , ahol $\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}$, $|\vec{e}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$.

a) Indítási helyzet :

Az ingára ható A ponti ismeretlen erőt vegyük fel $\vec{F}_{A_0} = (F_{Ae_0} \vec{e} + F_{An_0} \vec{n})$,
 az S pont gyorsulását $\vec{a}_{S_0} = (a_{e_0} \vec{e} + a_{n_0} \vec{n})$, míg az inga szöggyorsulását
 $\vec{\varepsilon}_0 = (-\varepsilon_0 \vec{b})$ alakban. Az inga szögsebessége az ábra alapján $\vec{\omega}_0 = (-4\vec{b}) \text{ 1/s}$.

Az A pontra felírt perdület tétel alapján :

$$\frac{d\vec{\pi}_{A_0}}{dt} = \dot{\vec{\pi}}_{A_0} = \vec{M}_{A_0}$$

$$\underbrace{J_A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{\pi}_{A_0}}_{\vec{0}, \text{ mert } \parallel - \text{ak}} = \vec{M}_{A_0} \Rightarrow \vec{M}_{A_0} + (-J_A \vec{\varepsilon}_0) = \vec{0}$$

$$(-m g \sin \alpha_0 l \vec{b}) + (J_A \varepsilon_0 \vec{b}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{b}$$

$$J_A \varepsilon_0 = m g \sin \alpha_0 \cdot l$$

$$\varepsilon_0 = \frac{m g \sin \alpha_0 l}{J_A} = \frac{m g \sin \alpha_0 l}{J_s + m l^2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,866 \cdot 0,2}{0,15 + 10 \cdot 0,2^2} = \frac{17,2}{0,55} = 31,5 \text{ 1/s}^2$$

$$\vec{\varepsilon}_0 = (-31,5 \vec{b}) \text{ 1/s}^2$$

$$\vec{a}_{S0} = (a_{e0} \vec{e} + a_{n0} \vec{n}) \quad \text{ahol}$$

$$a_{e0} = l \varepsilon_0 = 0,2 \cdot (-31,5) = -6,3 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a}_{e0} = (-6,3 \vec{e}) \text{ m/s}^2$$

$$a_{n0} = \frac{v_{S0}^2}{l} = l \omega_0^2 = 0,2 \cdot 16 = 3,2 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a}_{n0} = (3,2 \vec{n}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{S0} = (a_{e0} \vec{e} + a_{n0} \vec{n}) = (-6,3 \vec{e}) + (3,2 \vec{n}) \text{ m/s}^2$$

Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján :

$$\vec{F} = m \vec{a}_S$$

$$(\vec{F}_{A0} + \vec{G}) + (-m \vec{a}_S) = \vec{0}$$

$$(F_{A0_e} \vec{e} + F_{A0_n} \vec{n}) + (-m g \sin \alpha_0 \vec{e} - m g \cos \alpha_0 \vec{n}) + (-m a_{e0} \vec{e} - m a_{n0} \vec{n}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{e} \quad / \cdot \vec{n}$$

$$F_{A0_e} - m g \sin \alpha_0 - m a_{e0} = 0$$

$$F_{A0_n} - m g \cos \alpha_0 - m a_{n0} = 0$$

$$F_{A0_e} = m (g \sin \alpha_0 + a_{e0})$$

$$F_{A0_n} = m (g \cos \alpha_0 + a_{n0})$$

$$F_{A0_e} = 10 \cdot (10 \cdot 0,866 - 6,3) = 23,6 \text{ N}$$

$$F_{A0_n} = 10 \cdot (10 \cdot 0,5 + 3,2) = 82 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{A0} = (23,6 \vec{e} + 82 \vec{n}) \text{ N}$$

b) Függőleges helyzet vizsgálata :

Az inga szögsebessége függőleges helyzetben $\vec{\omega}_1$.

A munkatétel alapján : $E_1 - E_0 = W_{01}$

$$\frac{1}{2} J_a \omega_1^2 - \frac{1}{2} J_a \omega_0^2 = m g l (1 - \cos \alpha_0)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{2 m l}{J_a} (1 - \cos \alpha_0)$$

$$\omega_1^2 = 16 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0,2}{0,55} (1 - 0,5) = 52,36 \Rightarrow \omega_1 = 7,236 \text{ 1/s}$$

$$\vec{\omega}_1 = (-7,236 \vec{b}) \text{ 1/s}$$

Az A pontra felírt perdület tétel alapján :

$$\frac{d\vec{\pi}_{A1}}{dt} = \dot{\vec{\pi}}_{A1} = \vec{M}_{A1} \quad / \text{ az inga szöggyorsulását vegyük fel } \vec{\varepsilon}_1 = (-\varepsilon_1 \vec{b}) \text{ irányításúnak } /$$

$$\underbrace{J_a \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\pi}_{A1}}_{\vec{0}, \text{ mert } \parallel - ak} = \vec{M}_{A1} \Rightarrow \vec{M}_{A1} + (-J_a \vec{\varepsilon}_1) = \vec{0}$$

$$(\vec{0}) + (J_a \varepsilon_1 \vec{b}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{b}$$

$$J_a \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = 0 \text{ 1/s}^2$$

$$\vec{a}_{S1} = (a_{e1} \vec{e} + a_{n1} \vec{n}) \quad \text{ahol}$$

$$a_{e1} = l \varepsilon_1 = 0,2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{a}_{e1} = \vec{0}$$

$$a_{n1} = \frac{v_{S1}^2}{l} = l \omega_1^2 = 0,2 \cdot 7,236^2 = 10,47 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a}_{n1} = (10,47 \vec{n}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{S1} = (a_{e1} \vec{e} + a_{n1} \vec{n}) = (10,47 \vec{n}) \text{ m/s}^2$$

Az impulzus tétel alapján :

$$\vec{F} = m \vec{a}_S$$

$$(\vec{F}_{A1} + \vec{G}) + (-m \vec{a}_S) = \vec{0}$$

$$(F_{A1_e} \vec{e} + F_{A1_n} \vec{n}) + (-m g \vec{n}) + (-m a_{e1} \vec{e} - m a_{n1} \vec{n}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{e} \quad / \cdot \vec{n}$$

$$F_{A1_e} - m a_{e0} = 0$$

$$F_{A1_n} - m g - m a_{n1} = 0$$

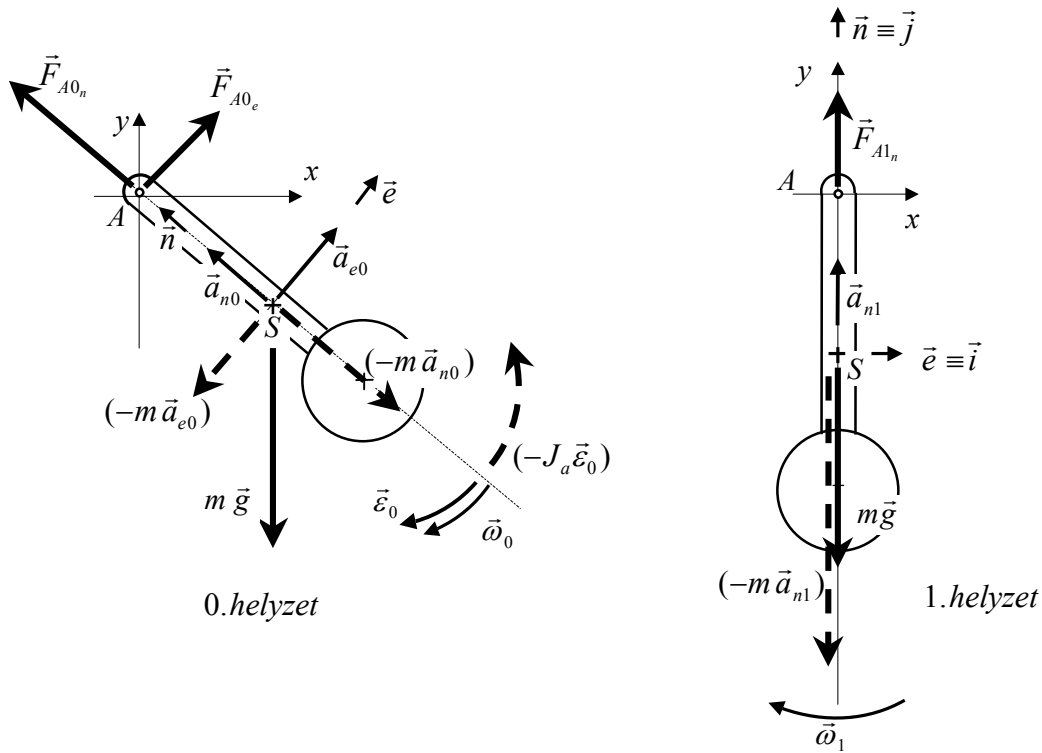
$$F_{A1_e} = m a_{e1} = 0$$

$$F_{A1_n} = m(g + a_{n1})$$

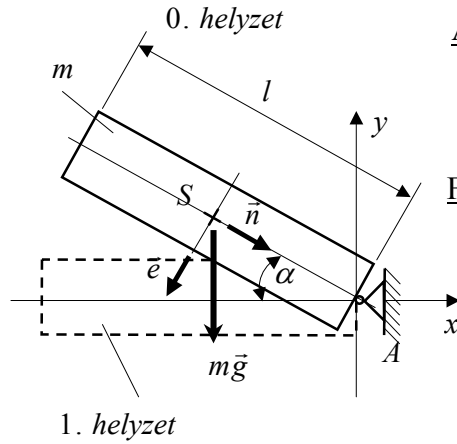
$$F_{A1_n} = 10 \cdot (10 + 10,47) = 204,7 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{A1} = (204,7 \vec{n}) \text{ N}$$

A két helyzetben fellépő mennyiségek szemléltetése



11/2. feladat : Álló tengely körüli forgómozgás



Adott : $\alpha = 30^\circ$, $g \cong 10 \text{ m/s}^2$
 $m = 4 \text{ kg}$, $\omega_0 = 0$
 $l = 2 \text{ m}$

Feladat : a) Az indítás pillanatában (0.helyzet) mekkora a rúd S pontjának $\vec{a}_{S_0}$ gyorsulása és az A pontban ható $\vec{F}_{A_0}$ erő ?
 b) Határozza meg a rúd 1. helyzetében a rúd $\vec{\omega}_1$ szögsebességét !

A feladatot az $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$ koordináta-rendszerben oldjuk meg , ahol $\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}$, $|\vec{e}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$.

a) Indítási helyzet :

A rúdra ható A ponti ismeretlen erőt vegyük fel $\vec{F}_{A_0} = (F_{A_{e_0}} \vec{e} + F_{A_{n_0}} \vec{n})$,
 az S pont gyorsulását $\vec{a}_{S_0} = (a_{e_0} \vec{e} + a_{n_0} \vec{n})$, míg a rúd szöggyorsulását $\vec{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_0 \vec{b})$ alakban. A rúd szögsebessége az ábra alapján $\vec{\omega} = (\omega \vec{b})$.

Az A pontra felírt perdület tétel alapján :

0. helyzet

$$\frac{d\vec{\pi}_{A_0}}{dt} = \dot{\vec{\pi}}_{A_0} = \vec{M}_{A_0}$$

$$\underline{J}_A \vec{\varepsilon}_0 + \underbrace{\vec{\omega}_0 \times \vec{\pi}_{A_0}}_{\vec{0}, \text{ mert } \vec{\omega}_0 = \vec{0}} = \vec{M}_{A_0} \Rightarrow \vec{M}_{A_0} + (-J_a \vec{\varepsilon}_0) = \vec{0}$$

$$(m g \cos \alpha \frac{l}{2} \vec{b}) + (-J_a \varepsilon_0 \vec{b}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{b}$$

$$J_a \varepsilon_0 = m g \cos \alpha \cdot \frac{l}{2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{m g \cos \alpha l}{2 \cdot J_a} = \frac{m g \cos \alpha l}{2 \cdot \left[J_s + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right]}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{m g \cos \alpha l}{2 \cdot \left[\frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right]} = \frac{m g \cos \alpha l}{2 \cdot \left[\frac{1}{3} m l^2 \right]} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 0,866 \cdot 2}{2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 2^2 \right]} = \frac{69,28}{2 \cdot 5,33} = 6,49 \text{ 1/s}^2$$

$$\vec{\varepsilon}_0 = (6,49 \vec{b}) \text{ 1/s}^2$$

$$\vec{a}_{S0} = (a_{e0} \vec{e} + a_{n0} \vec{n}) \quad \text{ahol}$$

$$a_{e0} = \frac{l}{2} \varepsilon_0 = 1 \cdot (6,49) = 6,49 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a}_{e0} = (6,49 \vec{e}) \text{ m/s}^2$$

$$a_{n0} = \frac{v_{S0}^2}{l} = l \omega_0^2 = 2 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow \vec{a}_{n0} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{S0} = (a_{e0} \vec{e} + a_{n0} \vec{n}) = (6,49 \vec{e}) \text{ m/s}^2$$

Az impulzus tétel (a kinetika alaptörvénye) alapján :

$$\vec{F} = m \vec{a}_S$$

$$(\vec{F}_{A0} + \vec{G}) + (-m \vec{a}_S) = \vec{0}$$

$$(F_{A0_e} \vec{e} + F_{A0_n} \vec{n}) + (m g \cos \alpha \vec{e} + m g \sin \alpha \vec{n}) + (-m a_{e0} \vec{e} - m a_{n0} \vec{n}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{e} \quad / \cdot \vec{n}$$

$$F_{A0_e} + m g \cos \alpha - m a_{e0} = 0$$

$$F_{A0_n} + m g \sin \alpha - m a_{n0} = 0$$

$$F_{A0_e} = m (a_{e0} - g \cos \alpha)$$

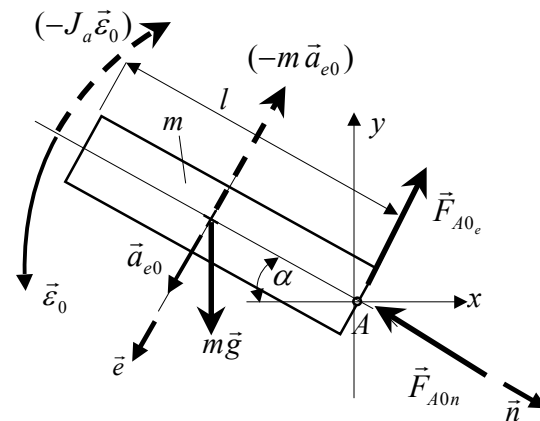
$$F_{A0_n} = -m g \sin \alpha$$

$$F_{A0_e} = 4 \cdot (6,49 - 10 \cdot 0,866) = -8,68 \text{ N}$$

$$F_{A0_n} = -4 \cdot 10 \cdot 0,5 = -20 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{A0} = (-8,68 \vec{e} - 20 \vec{n}) \text{ N}$$

A 0. jelű helyzetben fellépő mennyiségek szemléltetése



b) Vízszintes helyzet vizsgálata :

A rúd szögsebessége vízszintes helyzetben $\vec{\omega}_1$.

A munkatétel alapján : $E_1 - E_0 = W_{01}$

$$\frac{1}{2} J_a \omega_1^2 - \frac{1}{2} J_a \underbrace{\omega_0^2}_{=0} = m g \frac{l}{2} \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} J_a \omega_1^2 = m g \frac{l}{2} \sin \alpha$$

$$\omega_1^2 = \frac{m g l \sin \alpha}{J_a} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0,5}{5,33} = 7,5 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{7,5} = 2,739 \text{ 1/s}$$

$$\vec{\omega}_1 = (2,739 \vec{b}) \text{ 1/s}$$