

MECHANIKA III. – MOZGÁSTAN
főiskolai mérnökhallgatók számára

Az 1. gyakorlat anyaga

1/1. feladat : *Tömegpont síkmozgása*

Adott : $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 (c - t^2)$

$$\vec{b}_0 = (-\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m} , \quad \vec{b}_1 = (4\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ m/s}^2 , \quad c = 2 \text{ s}^2$$

$$t_0 = 0 \text{ s} , \quad t_1 = 1,5 \text{ s}$$

Kérdés : a) $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = ?$ $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = ?$

b) $\vec{v}(t) = ?$

c) $\vec{v}_k = ?$

d) $\vec{a}(t) = ?$

a) *Mozgásfüggvény* : $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 (c - t^2)$

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) &= \vec{b}_0 + \vec{b}_1 (c - t_0^2) = (-\vec{i} + 2\vec{j}) + (4\vec{i} - 4\vec{j})(2 - 0) = \\ &= (-\vec{i} + 2\vec{j}) + (8\vec{i} - 8\vec{j}) = (7\vec{i} - 6\vec{j}) \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) &= \vec{b}_0 + \vec{b}_1 (c - t_1^2) = (-\vec{i} + 2\vec{j}) + (4\vec{i} - 4\vec{j})(2 - 1,5^2) = \\ &= (-\vec{i} + 2\vec{j}) + (4\vec{i} - 4\vec{j})(-0,25) = (-2\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ m} \end{aligned}$$

b) *Sebességfüggvény* : $\vec{v} = \vec{v}(t)$

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\vec{b}_1 t = (-8\vec{i} + 8\vec{j})t$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = (-12\vec{i} + 12\vec{j}) \text{ m/s}$$

c) *Közepes sebesség* : $\vec{v}_k$

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{(-2\vec{i} + 3\vec{j}) - (7\vec{i} - 6\vec{j})}{1,5} = \frac{(-9\vec{i} + 9\vec{j})}{1,5} = (-6\vec{i} + 6\vec{j}) \text{ m/s}$$

d) *Gyorsulásfüggvény* : $\vec{a} = \vec{a}(t)$

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{b}_1 = -2(4\vec{i} - 4\vec{j}) = (-8\vec{i} + 8\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = \text{állandó}$$

1/2. feladat : Tömegpont síkmozgása

Adott : $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{b} t + \vec{c} t^2$

$$\vec{b} = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ m/s} , \quad \vec{c} = (2\vec{i} + 1,5\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$t_0 = 0 \text{ s} , \quad t_1 = 2 \text{ s}$$

Kérdés : a) $\vec{v}_k = ?$

b) $\vec{v}(t) = ?$

c) $\vec{a}(t) = ?$

d) A hodográf ábrázolása

e) A pályagörbe ábrázolása

a) Közepes sebesség : $\vec{v}_k$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = \vec{0}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = \vec{b} t_1 + \vec{c} t_1^2 = 2(-3\vec{i} - 4\vec{j}) + 4(2\vec{i} + 1,5\vec{j}) = (2\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{v}_k = \frac{\Delta \vec{r}_{01}}{\Delta t_{01}} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j}}{2} = (\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}$$

b) Sebességfüggvény : $\vec{v} = \vec{v}(t)$

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b} + 2\vec{c}t = (-3\vec{i} - 4\vec{j}) + 2(2\vec{i} + 1,5\vec{j})t$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = (-3\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ m/s}$$

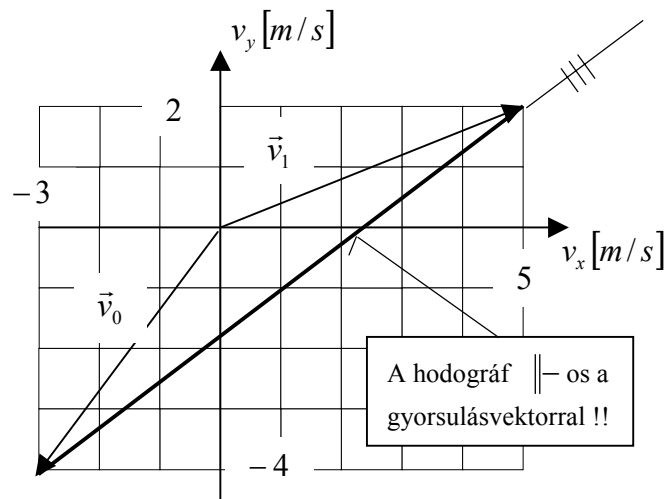
$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = \vec{b} + 4\vec{c} = (-3\vec{i} - 4\vec{j}) + (8\vec{i} + 6\vec{j}) = (5\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m/s}$$

c) Gyorsulásfüggvény : $\vec{a} = \vec{a}(t)$

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{c} = (4\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$\vec{a} = \text{állandó}$

d) Hodográf : $\vec{v} = \vec{v}(t)$ függvény ábrázolása a v_x, v_y KR-ben



1/3. feladat : Tömegpont síkmozgása

Adott : $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{c}_1 \cos(bt) + \vec{c}_2 \sin(bt)$

$$\vec{c}_1 = (3\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}) \text{ m}, \quad \vec{c}_2 = (0\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ m}, \quad b = 5 \text{ 1/s}$$

$$t_0 = 0 \text{ s}, \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ s}, \quad t_3 = \pi \text{ s}, \quad t_4 = \frac{3\pi}{2} \text{ s}$$

Kérdés : a) $\vec{r} = \vec{r}(t_i) = ?$

b) $\vec{v} = \vec{v}(t_i) = ?$, $\vec{v}(t) = ?$

c) $\vec{a} = \vec{a}(t_i) = ?$, $\vec{a}(t) = ?$

a) *Mozgásfüggvény* : $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{c}_1 \cos 5t + \vec{c}_2 \sin 5t$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = \vec{c}_1 \underbrace{\cos 0^0}_{=1} + \vec{c}_2 \underbrace{\sin 0^0}_{=0} = \vec{c}_1 = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = \vec{c}_1 \underbrace{\cos \frac{5\pi}{2}}_{=0} + \vec{c}_2 \underbrace{\sin \frac{5\pi}{2}}_{=1} = \vec{c}_2 = (1\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2) = \vec{c}_1 \underbrace{\cos 5\pi}_{=-1} + \vec{c}_2 \underbrace{\sin 5\pi}_{=0} = -\vec{c}_1 = (-3\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}(t_3) = \vec{c}_1 \underbrace{\cos \frac{3\pi}{2}}_{=0} + \vec{c}_2 \underbrace{\sin \frac{3\pi}{2}}_{=-1} = -\vec{c}_2 = (-1\vec{j} - 2\vec{k}) \text{ m}$$

A négy pont egy síkban van !

b) *Sebességfüggvény* : $\vec{v} = \vec{v}(t)$

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -b\vec{c}_1 \sin(bt) + b\vec{c}_2 \cos(bt) = -5\vec{c}_1 \sin(5t) + 5\vec{c}_2 \cos(5t)$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = -5\vec{c}_1 \underbrace{\sin 0^0}_{=0} + 5\vec{c}_2 \underbrace{\cos 0^0}_{=1} = 5\vec{c}_2 = (5\vec{j} + 10\vec{k}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = -5\vec{c}_1 \underbrace{\sin \frac{5\pi}{2}}_{=1} + 5\vec{c}_2 \underbrace{\cos \frac{5\pi}{2}}_{=0} = -5\vec{c}_1 = (-15\vec{i} - 20\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2) = -5\vec{c}_1 \underbrace{\sin 5\pi}_{=0} + 5\vec{c}_2 \underbrace{\cos 5\pi}_{=-1} = -5\vec{c}_2 = (-5\vec{j} - 10\vec{k}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}(t_3) = -5\vec{c}_1 \underbrace{\sin \frac{3\pi}{2}}_{=-1} + 5\vec{c}_2 \underbrace{\cos \frac{3\pi}{2}}_{=0} = 5\vec{c}_1 = (15\vec{i} + 20\vec{j}) \text{ m/s}$$

A sebességvektorok is egy síkban vannak ! A hely- és a sebességvektorok síkja azonos.

c) *Gyorsulásfüggvény* : $\vec{a} = \vec{a}(t)$

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -b^2 \vec{c}_1 \cos(bt) - b^2 \vec{c}_2 \sin(bt) = -b^2 (\vec{c}_1 \cos(bt) + \vec{c}_2 \sin(bt))$$

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = -b^2 \vec{r}(t)$$

A gyorsulásvektorok is a helyvektorok síkjában vannak



A tömegpont síkmozgást végez !