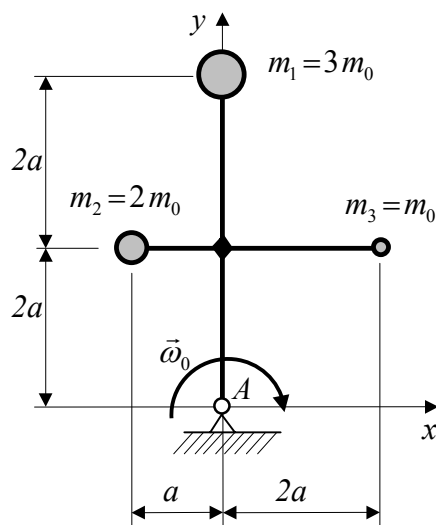


MECHANIKA III. – MOZGÁSTAN  
főiskolai mérnökhallgatók számára

Az 5. gyakorlat anyaga

5/1. feladat : Tömegpontrendszer impulzusa



Adott :  $m_0 = 1 \text{ kg}$   
 $a = 1 \text{ m}$   
 $\vec{\omega}_0 = (-2 \vec{k}) \text{ 1/s}$   
 A rudak merevek és súlytalanok!

Feladat : Meghatározni

- Tömegpontok sebességeit,
- A rendszer eredő impulzusvektorát,
- A rendszer A pontra számított perdületét és
- Az eredő impulzusvektor hatásvonalát.

a) A tömegpontok sebessége :  $\vec{v}_i$

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{A1} = (-\vec{\omega}_0 \vec{k}) \times (4a \vec{j}) = (4a\omega_0 \vec{i}) = (8\vec{i}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{A2} = (-\vec{\omega}_0 \vec{k}) \times (-a \vec{i} + 2a \vec{j}) = (2a\omega_0 \vec{i} + a\omega_0 \vec{j}) = (4\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{A3} = (-\vec{\omega}_0 \vec{k}) \times (2a \vec{i} + 2a \vec{j}) = (2a\omega_0 \vec{i} - 2a\omega_0 \vec{j}) = (4\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ m/s}$$

b) A rendszer impulzusa :  $\vec{I}$

$$\vec{I}_1 = m_1 \vec{v}_1 = 3m_0 (4a\omega_0 \vec{i}) = (12am_0\omega_0 \vec{i})$$

$$\vec{I}_2 = m_2 \vec{v}_2 = 2m_0 (2a\omega_0 \vec{i} + a\omega_0 \vec{j}) = (4am_0\omega_0 \vec{i} + 2am_0\omega_0 \vec{j})$$

$$\vec{I}_3 = m_3 \vec{v}_3 = m_0 (2a\omega_0 \vec{i} - 2a\omega_0 \vec{j}) = (2am_0\omega_0 \vec{i} - 2am_0\omega_0 \vec{j})$$

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^3 \vec{I}_i = (18am_0\omega_0 \vec{i}) = (36\vec{i}) \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Ns}$$

c) Rendszer perdülete az A pontra :  $\vec{\pi}_A$

$$\vec{\pi}_{A1} = \vec{r}_{A1} \times \vec{I}_1 = (4a \vec{j}) \times (12am_0\omega_0 \vec{i}) = (-48a^2m_0\omega_0 \vec{k})$$

$$\vec{\pi}_{A2} = \vec{r}_{A2} \times \vec{I}_2 = (-a \vec{i} + 2a \vec{j}) \times (4am_0\omega_0 \vec{i} + 2am_0\omega_0 \vec{j}) = (-10a^2m_0\omega_0 \vec{k})$$

$$\vec{\pi}_{A3} = \vec{r}_{A3} \times \vec{I}_3 = (2a \vec{i} + 2a \vec{j}) \times (2am_0\omega_0 \vec{i} - 2am_0\omega_0 \vec{j}) = (-8a^2m_0\omega_0 \vec{k})$$

$$\vec{\pi}_A = \sum_{i=1}^3 \vec{\pi}_{Ai} = (-66a^2m_0\omega_0 \vec{k}) = (-132\vec{k}) \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = \text{Nms}$$

c) Az eredő impulzusvektor hatásvonalának meghatározása

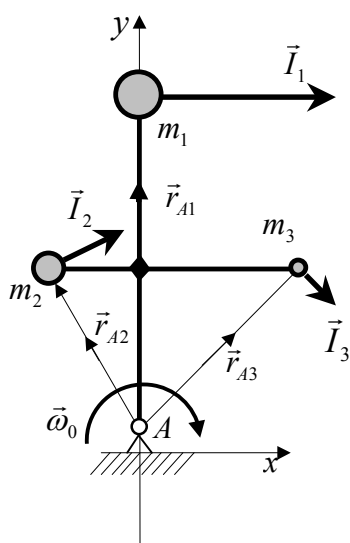
Definíció: A hatásvonal bármely pontjára számított impulzusnyomaték (perdület) zérus.

A D pont az eredő impulzusvektor hatásvonalán lévő azon pont, mely az A ponthoz legközelebb van.

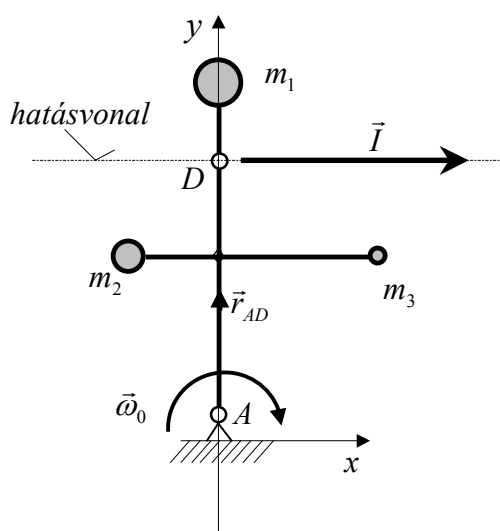
$$\underbrace{\vec{\pi}_D}_{=0} = \vec{\pi}_A + \vec{I} \times \vec{r}_{AD} \quad / \times \vec{I}$$

$$\vec{0} = \vec{\pi}_A \times \vec{I} + (\vec{I} \times \vec{r}_{AD}) \times \vec{I} = (\vec{\pi}_A \times \vec{I}) + \vec{r}_{AD} \cdot I^2 - \vec{I} \cdot (\underbrace{\vec{r}_{AD} \cdot \vec{I}}_{=0})$$

$$\vec{r}_{AD} = \frac{-(\vec{\pi}_A \times \vec{I})}{I^2} = - \frac{(-66 a^2 m_0 \omega_0 \vec{k}) \times (18 a m_0 \omega_0 \vec{i})}{18^2 a^2 m_0^2 \omega_0^2} = \left( \frac{22}{6} a \vec{j} \right) = (3,66 \vec{j}) \text{ m}$$



$\Leftrightarrow$

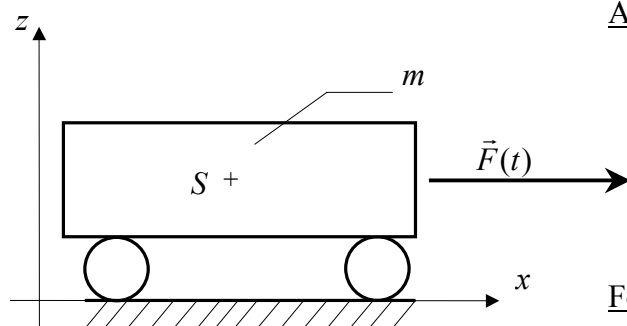


$$\vec{\pi}_A = \sum_1^3 (\vec{r}_{Ai} \times \vec{I}_i) = (-132 \vec{k}) \text{ Nms}$$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{\pi}_A = \underbrace{\vec{\pi}_D}_{=0} + \vec{r}_{AD} \times \vec{I} = (-132 \vec{k}) \text{ Nms}$$

**5/2. feladat : Newton II. törvénye**



Adott :  $\vec{F} = \vec{F}(t)$  vonóerő függvény

$$\vec{F}(t) = (at^2 + bt + c)\vec{i}$$

$$a = 300 \text{ N/s}^2, \quad c = 500 \text{ N}$$

$$b = 200 \text{ N/s}, \quad m = 1000 \text{ kg}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{0}, \quad \vec{r}_0 = \vec{0}$$

Feladat : Meghatározni

- $\vec{a} = \vec{a}(t)$  gyorsulás – idő függvényt,
- $\vec{v} = \vec{v}(t)$  sebesség – idő függvényt,
- $\vec{r} = \vec{r}(t)$  mozgásfüggvényt.

a) Gyorsulás–idő függvény :  $\vec{a}(t)$

Newton II. törvénye :  $\vec{F} = m\vec{a}$  alapján

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(t) = \frac{1}{m} (at^2 + bt + c) \vec{i} = (0,3t^2 + 0,2t + 0,5) \vec{i} \quad \text{m/s}^2$$

b) Sebesség–idő függvény :  $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\vec{v}_0}_{=0} + \int \vec{a}(t) dt = \frac{1}{m} \left( a \frac{t^3}{3} + b \frac{t^2}{2} + ct \right) \vec{i} = (0,1t^3 + 0,1t^2 + 0,5t) \vec{i} \quad \text{m/s}$$

c) Mozgásfüggvény :  $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}_0}_{=0} + \int \vec{v}(t) dt = \frac{1}{m} \left( a \frac{t^4}{12} + b \frac{t^3}{6} + c \frac{t^2}{2} \right) \vec{i} = \left( \frac{0,1}{4} t^4 + \frac{0,1}{3} t^3 + \frac{0,5}{2} t^2 \right) \vec{i} \quad \text{m}$$