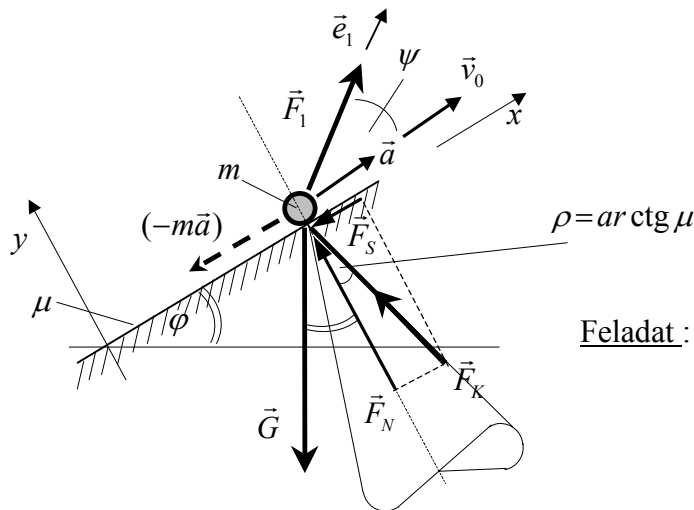


MECHANIKA III. – MOZGÁSTAN
főiskolai mérnökhallgatók számára

A 6. gyakorlat anyaga

6/1. feladat : Tömegpont mozgása kényszerpályán



Adott : $\varphi = \psi = 30^\circ$
 $m = 10 \text{ kg}$
 $\vec{v}_0 = (8\vec{i}) \text{ m/s}$
 $\mu = 0,2$

Feladat : a) Mekkora F_1 erő esetén marad a tömegpont a kényszerpályán ?
 b) Határozza meg a tömegpont gyorsulását !

A tömegpont gyorsulása : $\vec{a} = a\vec{i}$

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}_1 \quad ; \quad \text{ahol} \quad \vec{e}_1 = \cos \psi \vec{i} + \sin \psi \vec{j}$$

$$\vec{G} = m \vec{g} = m(-g \sin \varphi \vec{i} - g \cos \varphi \vec{j})$$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (-\mu F_N \vec{i} + F_N \vec{j})$$

Impulzus tétel :

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{F} + (-m \vec{a}) = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{G} + \vec{F}_K + (-m \vec{a}) = \vec{0}$$

$$F_1 (\cos \psi \vec{i} + \sin \psi \vec{j}) + m g (-\sin \varphi \vec{i} - \cos \varphi \vec{j}) + (-\mu F_N \vec{i} + F_N \vec{j}) + (-m a \vec{i}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} / \cdot \vec{j}$$

$$F_1 \cos \psi - m g \sin \varphi - \mu F_N - m a = 0 \quad ; \quad F_1 \sin \psi - m g \cos \varphi + F_N = 0$$

$$m a = F_1 \cos \psi - m g \sin \varphi - \mu F_N \quad \Leftarrow \quad F_N = m g \cos \varphi - F_1 \sin \psi$$

$$m a = F_1 \cos \psi - m g \sin \varphi - \mu (m g \cos \varphi - F_1 \sin \psi)$$

a) A kényszerpályán maradás feltétele : $F_N \geq 0$

$$F_N = m g \cos \varphi - F_1 \sin \psi \geq 0 \quad \text{alapján}$$

$$F_1 \leq \frac{m g \cos \varphi}{\sin \psi} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,866}{0,5} = 173,2 \text{ N}$$

b) A tömegpont gyorsulása : $\vec{a} = a \vec{i}$

$$m a = F_1 \cos \psi - m g \sin \varphi - \mu (m g \cos \varphi - F_1 \sin \psi)$$

$$m a = F_1 (\cos \psi + \mu \sin \psi) - m g (\sin \varphi + \mu \cos \varphi)$$

$$a = \frac{F_1}{m} (\cos \psi + \mu \sin \psi) - g (\sin \varphi + \mu \cos \varphi)$$

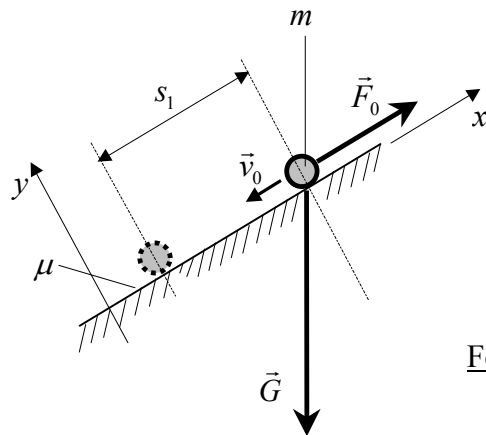
A tömegpont gyorsulása az elemelkedés (pályaelhagyás) határhelyzetében :

$$a = \frac{173,2}{10} (0,866 + 0,2 \cdot 0,5) - 10 (0,5 + 0,2 \cdot 0,866) = 16,73 - 6,73 = 10 \text{ m/s}^2$$

$$a \cong g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = (10 \vec{i}) \text{ m/s}^2$$

6/2. feladat : Tömegpont mozgása kényszerpályán



Adott : $\vec{G} = (-30\vec{i} - 40\vec{j}) \text{ N}$

$s_1 = 5 \text{ m}$

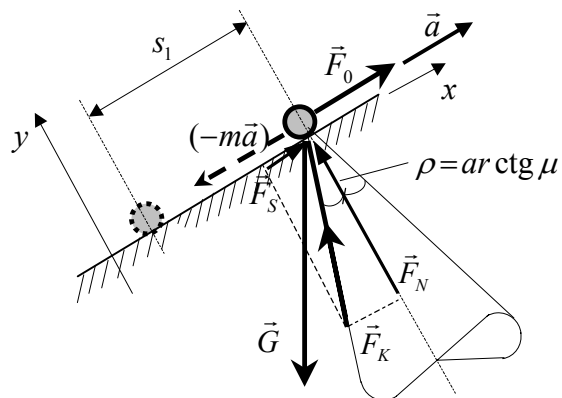
$\vec{v}_0 = (-10\vec{i}) \text{ m/s}$

$\mu = 0,15$

$\vec{F}_0 = (100\vec{i}) \text{ N}$

Feladat : a) Az indulási helyzetben mekkora a tömegpont gyorsulása, $\vec{a} = ?$

b) Határozza meg $\vec{F}_0$ vektornak azt az értékét, mely esetén a tömegpont s_1 út megtétele után megáll, $\vec{F}_0 = ?$



$\vec{F}_0 = F \vec{i}$

$\vec{G} = m \vec{g} = \vec{G}_x + \vec{G}_y = (-30\vec{i} - 40\vec{j}) \text{ N}$

$G = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ N}$

$m = \frac{G}{g} = \frac{50}{10} = 5 \text{ kg}$

$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (\mu F_N \vec{i} + F_N \vec{j})$

a) Impulzus tétel :

$\vec{F} = m \vec{a}$

$\vec{F} + (-m \vec{a}) = \vec{0}$

$(\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{F}_K) + (-m \vec{a}) = \vec{0}$

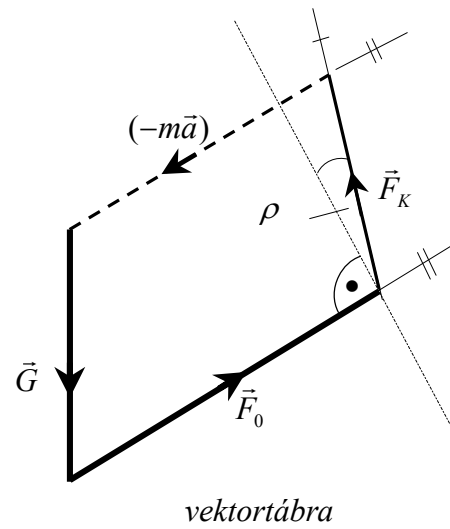
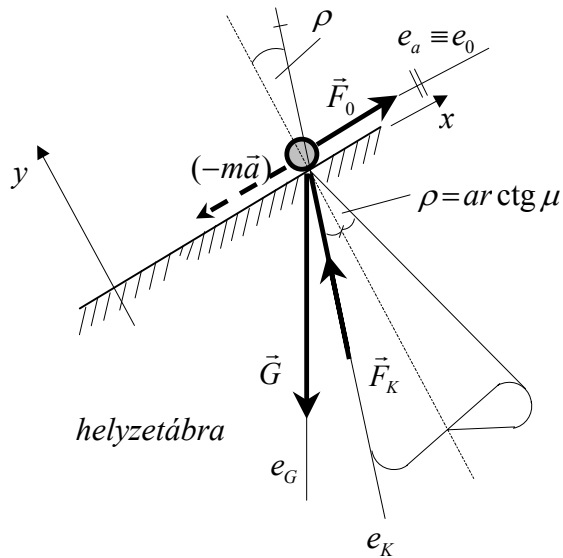
$(F_0 \vec{i}) + (-G_x \vec{i} - G_y \vec{j}) + (\mu F_N \vec{i} + F_N \vec{j}) + (-m a \vec{i}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$

$$\begin{array}{ccc} F_0 - G_x + \mu F_N - m a = 0 & \vdots & -G_y + F_N = 0 \\ m a = F_0 - G_x + \mu G_y & \Leftarrow & F_N = G_y = 40 \text{ N} \end{array}$$

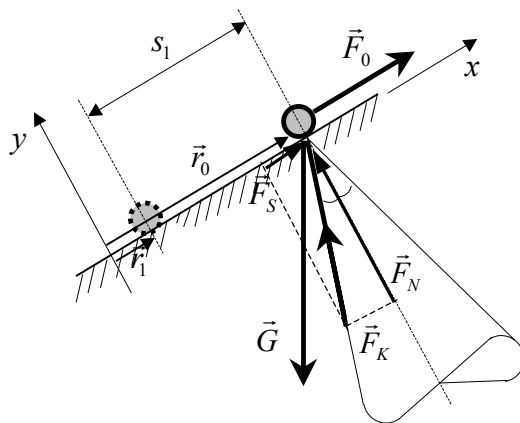
$a = \frac{1}{m} (F_0 - G_x + \mu G_y) = \frac{1}{5} (100 - 30 + 0,15 \cdot 40) = 15,2 \text{ m/s}^2$

$\vec{a} = (15,2 \vec{i}) \text{ m/s}^2$

Szerkesztés : $\vec{G} + \vec{F}_0 + \vec{F}_K + (-m\vec{a}) = \vec{0}$



b) Az $\vec{F}_0$ meghatározása:



$t_0 = 0$ (indulás)

$\vec{v}_0 = (-10\vec{i}) \text{ m/s}$

$\vec{r}_0 = (x_0\vec{i}) \text{ m}$

t_1 (megállás)

$\vec{v}_1 = \vec{0}$

$\vec{r}_1 = (x_1\vec{i}) \text{ m}$

$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{F}_K$

$$\underbrace{E_1}_{=0} - E_0 = W_{10} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} = \vec{F} (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \vec{F} (-s_1 \vec{i})$$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = [(F_0 \vec{i}) + (-G_x \vec{i} - G_y \vec{j}) + (\mu F_N \vec{i} + F_N \vec{j})] \cdot (-s_1 \vec{i})$$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -F_0 s_1 + G_x s_1 - \mu F_N s_1$$

$$F_0 = \frac{1}{s_1} (G_x s_1 - \mu F_N s_1 + \frac{1}{2} m v_0^2) = G_x - \mu G_y + \frac{1}{2 s_1} m v_0^2$$

$$F_0 = 30 - 0,15 \cdot 40 + \frac{1}{2 \cdot 5} 5 \cdot 10^2 = 30 - 6 + 50 = 74 \text{ N}$$

$$\vec{F}_0 = (74\vec{i}) \text{ N}$$