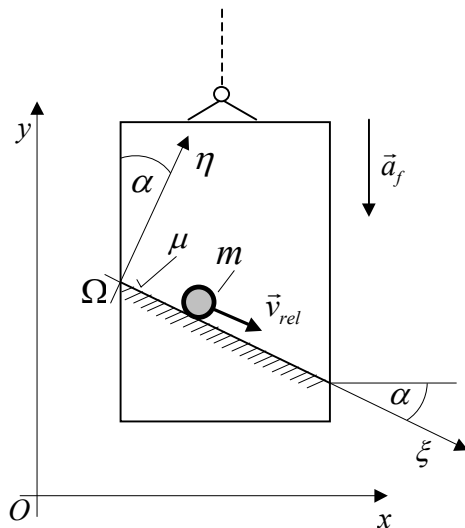


MECHANIKA III. – MOZGÁSTAN
főiskolai mérnökhallgatók számára

A 8. gyakorlat anyaga

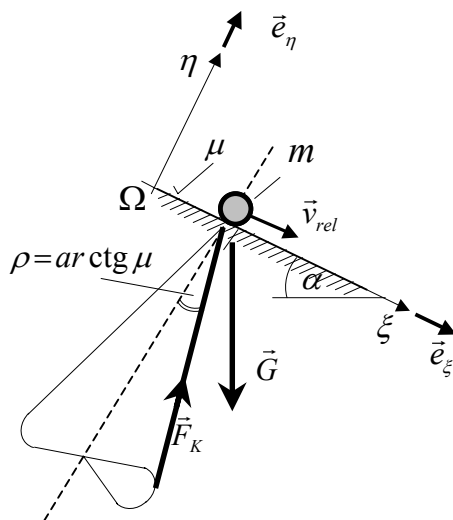
8/1. feladat : *Relatív mozgás kinetikája*



Adott: $m = 4 \text{ kg}$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$
 $\vec{a}_f = (-2\vec{j}) \text{ m/s}^2$, $\vec{v}_{rel} = (0,8\vec{e}_\xi) \text{ m/s}$
 $\mu = 0,1$, $\alpha = 20^\circ$
 $\vec{e}_\xi = (\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j})$, $\vec{e}_\eta = (\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j})$

- Feladat: a) Határozza meg a tömegpont relatív gyorsulását !
 b) Határozza meg a tömegpontra ható kényszererő nagyságát !
 c) Mekkora gyorsulással mozoghat lefelé a felvonó, hogy a tömegpont még éppen ne váljon el a kényszerpályától, $\vec{a}_f^* = ?$

A tömegpontra ható abszolút erők (az álló xy koordináta-rendszerben ható erők): $\vec{F}_K$, $\vec{G}$



$$\vec{F}_{absz} = \vec{F}_K + \vec{G} = m \vec{a}_{absz}$$

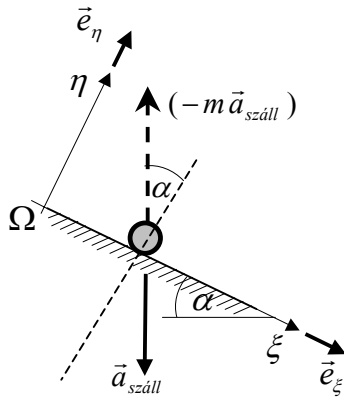
Kényszererő : $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (-\mu F_N \vec{e}_\xi + F_N \vec{e}_\eta)$$

Súlyerő : $\vec{G}$

$$\vec{G} = (m g \sin \alpha \vec{e}_\xi - m g \cos \alpha \vec{e}_\eta)$$

A tömegpontra ható járulékos erők : $\vec{F}_{száll}$, $\vec{F}_{Cor}$



Szállító erő : $\vec{F}_{száll}$

$$\vec{a}_{száll} = \vec{a}_\Omega + \underbrace{\vec{e} \times \vec{\rho} - \omega^2 \vec{\rho}}_{=\vec{0}} = \vec{a}_\Omega = \vec{a}_f$$

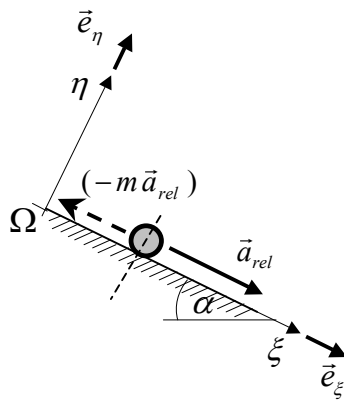
$$\vec{F}_{száll} = (-m\vec{a}_{száll}) = (-m\vec{a}_f)$$

$$\vec{F}_{száll} = (-ma_f \sin \alpha \vec{e}_\xi + ma_f \cos \alpha \vec{e}_\eta)$$

Coriolis erő : $\vec{F}_{Cor}$

$$\vec{a}_{Cor} = 2 \cdot \underbrace{\vec{\omega}}_{=\vec{0}} \times \vec{v}_{rel} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{Cor} = (-m\vec{a}_{Cor}) = \vec{0}$$



Relatív erő (a mozgó $\xi\eta$ koordináta – rendszerben ható erő) : $\vec{F}_{rel}$

A kényszer miatt $\vec{a}_{rel} = (a_{rel} \vec{e}_\xi)$

$$\vec{F}_{rel} = m \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{F}_{rel} = (m a_{rel} \vec{e}_\xi)$$

a) A tömegpont relatív gyorsulása : $\vec{a}_{rel}$

$$\vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$$

$$(\vec{G} + \vec{F}_K) + (-m\vec{a}_{száll}) + (-m\vec{a}_{Cor}) = m\vec{a}_{rel}$$

$$(mg \sin \alpha \vec{e}_\xi - mg \cos \alpha \vec{e}_\eta) + (-\mu F_N \vec{e}_\xi + F_N \vec{e}_\eta) + (-ma_f \sin \alpha \vec{e}_\xi + ma_f \cos \alpha \vec{e}_\eta) + (-m a_{rel} \vec{e}_\xi) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{e}_\xi \quad / \cdot \vec{e}_\eta$$

$$mg \sin \alpha - \mu F_N - ma_f \sin \alpha - m a_{rel} = 0$$

$$-mg \cos \alpha + F_N + ma_f \cos \alpha = 0$$

$$m a_{rel} = m g \sin \alpha - \mu F_N - m a_f \sin \alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$F_N = m \cos \alpha (g - a_f)$$

$$m a_{rel} = m g \sin \alpha - \mu m \cos \alpha (g - a_f) - m a_f \sin \alpha$$

$$F_N = 4 \cdot 0,939 \cdot (10 - 2) = 30,04 \text{ N}$$

$$a_{rel} = g \sin \alpha - \mu \cos \alpha (g - a_f) - a_f \sin \alpha$$

$$a_{rel} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - a_f(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$a_{rel} = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(g - a_f) = (0,342 - 0,1 \cdot 0,939) \cdot (10 - 2) = 1,98 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{rel} = (1,98 \vec{e}_\xi) \text{ m/s}^2$$

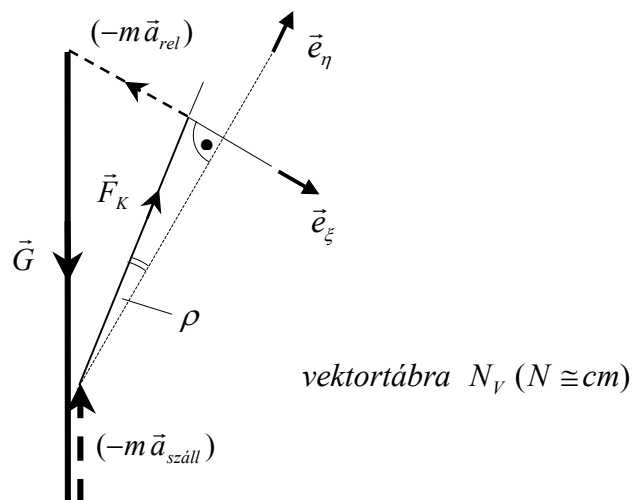
b) A tömegpontra ható kényszererő : $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = -\mu F_N \vec{e}_\xi + F_N \vec{e}_\eta = -0,1 \cdot 30,04 \vec{e}_\xi + 30,04 \vec{e}_\eta$$

$$\vec{F}_K = (-3,004 \vec{e}_\xi + 30,04 \vec{e}_\eta) \text{ N}$$

Megoldás szerkesztéssel :

$$(\vec{G} + \vec{F}_K) + (-m\vec{a}_{száll}) + (-m\vec{a}_{Cor}) = m\vec{a}_{rel}$$



c) A pályaelhagyáshoz (elváláshoz) szükséges felvonó gyorsulás : $\vec{a}_f^*$

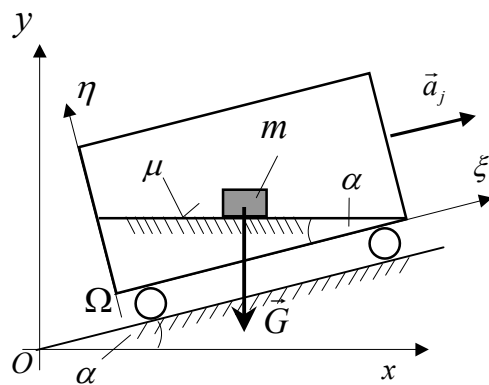
$$\text{Feltétel} \Rightarrow F_N = 0$$

$$F_N = 0 = m \cos \alpha (g - a_f^*)$$

$$a_f^* = g$$

$$\vec{a}_f^* = (-10\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

8/2. feladat : Relatív mozgás kinetikája



Adott: $t_0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_j = \vec{0}$, $\vec{v}_{rel} = \vec{0}$

$$\vec{a}_j = (1,2\vec{i} + 0,5\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{G} = (-100\vec{j}) \text{ N}$$

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}$$

- Feladat: a) Határozza meg a tömegpont $\vec{a}_{rel}$ relatív gyorsulását és a tömegpontra ható $\vec{F}_K$ kényszererő nagyságát, ha $\mu = \mu_0 = 0$.
- b) Határozza meg μ_{0min} értékét melynél a test nyugalomban marad.
- c) Határozza meg a tömegpont $\vec{a}_{rel}$ relatív gyorsulását és a tömegpontra ható $\vec{F}_K$ kényszererő nagyságát, ha $\mu = 0,1$ és $\mu_0 = 0,11$.

$$a) \vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$$

$$(\vec{G} + \vec{F}_K) + (-m\vec{a}_{száll}) + (-m\vec{a}_{Cor}) = m\vec{a}_{rel}$$

$$\vec{F}_{absz} = \vec{F}_K + \vec{G}$$

Kényszererő: $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (F_N \vec{j})$$

Súlyerő: $\vec{G}$

$$\vec{G} = (-mg \vec{j})$$

$$m = \frac{G}{g} = 10 \text{ kg}$$

$$\vec{F}_{száll} = -m\vec{a}_{száll} = -m\vec{a}_j = (-12\vec{i} - 5\vec{j}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_{Cor} = -m\vec{a}_{Cor} = -m(2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}) = \vec{0}$$

a tömegpont relatív gyorsulása a kényszer miatt $\vec{a}_{rel} = (a_{rel} \vec{i})$ irányítású vektor, így

$$\vec{F}_{rel} = m\vec{a}_{rel} = (F_{rel} \vec{i})$$

$$(-mg \vec{j}) + (F_N \vec{j}) + (-m\vec{a}_j) + (-ma_{rel} \vec{i}) = \vec{0}$$

$$(-100\vec{j}) + (F_N \vec{j}) + (-12\vec{i} - 5\vec{j}) + (-ma_{rel} \vec{i}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$-12 - ma_{rel} = 0$$

$$-100 + F_N - 5 = 0$$

$$a_{rel} = -\frac{12}{m} = -1,2$$

$$F_N = 105$$

$$\vec{a}_{rel} = (-1,2\vec{i}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_N = (105\vec{j}) \text{ N}$$

b) Relatív nyugalom : $\vec{a}_{rel} = \vec{0}$

$$\vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$$

$$(\vec{G} + \vec{F}_K) + (-m\vec{a}_{száll}) + \underbrace{(-m\vec{a}_{Cor})}_{=\vec{0}} = \underbrace{m\vec{a}_{rel}}_{=\vec{0}}$$

Kényszer erő : $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (F_S \vec{i} + F_N \vec{j})$$

$$(-m g \vec{j}) + (F_S \vec{i} + F_N \vec{j}) + (-m \vec{a}_j) = \vec{0}$$

$$(-100 \vec{j}) + (F_S \vec{i} + F_N \vec{j}) + (-12 \vec{i} - 5 \vec{j}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$F_S - 12 = 0 \quad -100 + F_N - 5 = 0$$

$$F_S = 12 \text{ N} \quad F_N = 105 \text{ N}$$

$$\mu_{0_{\min}} = \frac{F_S}{F_N} = \frac{12}{105} = 0,114$$

c) A tömegpont a járműhöz képest megcsúszik : $\mu_0 < \mu_{0_{\min}}$

$$\vec{F}_{absz} + \vec{F}_{száll} + \vec{F}_{Cor} = \vec{F}_{rel}$$

$$(\vec{G} + \vec{F}_K) + (-m\vec{a}_{száll}) + \underbrace{(-m\vec{a}_{Cor})}_{=\vec{0}} = m\vec{a}_{rel}$$

$$\vec{v}_{rel} = (-v_{rel} \vec{i})$$

Kényszer erő : $\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (F_S \vec{i} + F_N \vec{j})$$

$$(-100 \vec{j}) + (\mu F_N \vec{i} + F_N \vec{j}) + (-12 \vec{i} - 5 \vec{j}) + (-m a_{rel} \vec{i}) = \vec{0} \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$\mu F_N - 12 - m a_{rel} = 0 \quad -100 + F_N - 5 = 0$$

$$a_{rel} = \frac{\mu F_N - 12}{m} = \frac{0,1 \cdot 105 - 12}{10} \quad \Leftarrow \quad F_N = 105 \text{ N}$$

$$a_{rel} = -0,15 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{rel} = (-0,15 \vec{i}) \text{ m/s}^2 \quad \vec{F}_K = \vec{F}_S + \vec{F}_N = (10,5 \vec{i} + 105 \vec{j}) \text{ N}$$