Differenciál egyenletek
(rövid áttekintés)

Differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy vagy több változós ismeretlen függvény és deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

Fontosabb típusok: közönséges differenciálegyenletek,
parciális differenciálegyenletek,
(sztochasztikus differenciálegyenletek,
késleltetett differenciálegyenletek)

Közönséges differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely egy független változójú függvény és deriváltjai közötti összefüggést adja meg.

Pl. $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F$, ahol $x=x(t)$ (Newton II. törvénye)

Parciális differenciálegyenlet: olyan matematikai egyenlet, amely az ismeretlen többváltozós függvény és a parciális deriváltjai közötti kapcsolatot írja le.

Pl. $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=0;$ és a megoldás $u(x,y)=f(y)$.

Speciális eset: **Lineáris állandó együtthatós közönséges inhomogén differenciálegyenlet**

$$A_n\frac{d^ny}{dx^n}+A_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+A_0y=r(x),\qquad \text{ahol } r(x) \text{ a zavaró függvény.}$$

Megoldás: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$,

ahol $y_h(x)$ a $A_n\dfrac{d^ny_h}{dx^n}+A_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y_h}{dx^{n-1}}+\dots+A_0y_h=0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása,

$y_p(x)$ az $A_n\dfrac{d^ny_p}{dx^n}+A_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}}+\dots+A_0y_p=r(x)$ inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása.

A homogén differenciálegyenlet **általános megoldása**:

$$A_n\frac{d^ny_h}{dx^n}+A_{n-1}\frac{d^{n-1}y_h}{dx^{n-1}}+\dots+A_0y_h=0$$

Megoldást $y_h=e^{\lambda x}$ alakban keressük

$$\underbrace{\left(A_n\lambda^n+A_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+A_0\right)}_{=0}\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}=0$$

Karakterisztikus egyenlet:

$A_n\lambda^n+A_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+A_0=0$ (n-ed rendű polinom)

Megoldása: n számú gyök: $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$.

A differenciálegyenletnek n számú alapmegoldása van: $e^{\lambda_1x},e^{\lambda_2x},\dots,e^{\lambda_nx}$.

Az alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldása differenciálegyenletnek: $y_h(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+,\dots,+C_ne^{\lambda_nx}$

Az ismeretlen $C_i \left(i = 1,2,\ldots,n \right)$ konstansok a perem-, illetve kezdeti feltételekből meghatározhatóak.

Az inhomogén differenciálegyenlet egy **partikuláris megoldása**:

$$A_n \frac{d^n y_p}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + A_0 y_p = r\left(x\right)$$

A megoldást célszerű a zavaró vagy más néven forrás függvény alakjában keresni, mert ez többnyire eredményre vezet:

$$y_p\left(x\right) = C\, r\left(x\right) \; .$$

Behelyettesítés után a *C* konstans meghatározható.

Deriváltak jelölése: $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$,…, stb. (hely szerinti deriváltak)

$\frac{dy}{dt} = \dot{y},$, $\frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$,…, stb. (idő szerinti deriváltak)

1. Példa:

Adott egy másodrendű állandó együtthatós közönséges lineáris differenciálegyenlet valamint az $x=0$ peremen a függvény és deriváltjának értéke:

$$y''-4y=3x, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=4.$$

Feladat a differenciál egyenlet megoldásának előállítása.

Megoldás: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

Homogén megoldás:

homogén de. $\quad y_p''-4y_p=0$, $\qquad$ megoldás keresése $y_h=e^{\lambda x}$

$$\underbrace{\left(\lambda^2-4\right)}_{=0}\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}=0$$

karakterisztikus egyenlet $\quad \lambda^2-4=0$; $\quad \lambda^2=4$; $\quad \lambda_{1,2}=\pm 2$

homogén ált megoldás: $\quad y_h(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

Az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás

$$y_h(x)=A_1\underbrace{\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)}_{ch(2x)}+A_2\underbrace{\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)}_{sh(2x)}$$

azaz $\quad y_h(x)=A_1ch(2x)+A_2sh(2x)$.

Partikuláris megoldás: $\quad y_p(x)=C\,x \quad$ (a zavaró függvény alakjában keressük)

$y_p''-4y=3x$ behelyettesítés után $\quad -4Cx=3x \Rightarrow C=-\dfrac{3}{4}$

$$y_p(x)=-\frac{3}{4}x$$

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

$y(0)=1$

$$y(0)=1=A_1\underbrace{ch(2\cdot 0)}_{1}+A_2\underbrace{sh(2\cdot 0)}_{0}-\frac{3}{4}0$$

$$1=A_1\underbrace{ch(2\cdot 0)}_{1} \qquad \Rightarrow A_1=1$$

$y'(0)=4$

$$y'(0)=4=A_1\underbrace{2sh(2\cdot 0)}_{0}+A_2\underbrace{2ch(2\cdot 0)}_{2}-\frac{3}{4}$$

$$4=A_2\underbrace{2ch(2\cdot 0)}_{2}-\frac{3}{4} \quad \Rightarrow A_2=2+\frac{3}{8}=\frac{19}{8}$$

Végül: $\quad y(x)=y_h(x)+y_p(x)=ch(2x)+\dfrac{19}{8}sh(2x)-\dfrac{3}{4}x$.

2. **Példa:**
Adott egy másodrendű állandó együtthatós közönséges lineáris differenciálegyenlet valamint az $x=0$ peremen a függvény és deriváltjának értéke:

$$y''+4y=3x\,, \qquad y(0)=1,\quad y'(0)=4\,.$$

Feladat a differenciálegyenlet megoldásának előállítása.

Megoldás: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

Homogén megoldás:

homogén de. $y_h''+4y_h=0\,,$ megoldás keresése $y_h=e^{\lambda x}$

$$\underbrace{\left(\lambda^2+4\right)}_{=0}\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}=0$$

karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+4=0\,;\quad \lambda^2=-4\,;\quad \lambda_{1,2}=\pm 2i$

homogén általános megoldás $y_h(x)=C_1e^{i2x}+C_2e^{-i2x}\,,$

ahol $e^{i2x}=cos(2x)+i\,sin(2x);\qquad e^{-i2x}=cos(2x)-i\,sin(2x)$

azaz $y_h(x)=C_1\left(cos(2x)+i\,sin(2x)\right)+C_2\left(cos(2x)-i\,sin(2x)\right)$

Az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombináció is megoldás

$$y_h(x)=A_1\underbrace{\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)}_{cos(2x)}+A_2\underbrace{\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2}\right)}_{sin(2x)}.$$

Behelyettesítés után: $y_h(x)=A_1\,cos(2x)+A_2\,sin(2x)$

Partikuláris megoldás: $y_p''+4y_p=3x\,;\qquad y_p(x)=C\,x$ (alakban keressük)

behelyettesítés után $4Cx=3x\ \Rightarrow C=\dfrac{3}{4}\,;\quad y_p(x)=\dfrac{3}{4}\,x$

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

$y(0)=1$

$$y(0)=1=A_1\underbrace{cos(2\cdot 0)}_{1}+A_2\underbrace{sin(2\cdot 0)}_{0}+\frac{3}{4}0$$

$$1=A_1\underbrace{cos(2\cdot 0)}_{1}\qquad\Rightarrow A_1=1$$

$y'(0)=4$

$$y'(0)=4=-A_1\underbrace{2\,sin(2\cdot 0)}_{0}+A_2\underbrace{2\,cos(2\cdot 0)}_{2}+\frac{3}{4}$$

$$4=A_2\underbrace{2\,cos(2\cdot 0)}_{2}+\frac{3}{4}\qquad\Rightarrow A_2=2+\frac{3}{4}=\frac{13}{8}$$

Végül:

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=cos(2x)+\frac{13}{8}sin(2x)+\frac{3}{4}\,x\,.$$

3. **Példa**:
Adott egy kezdeti érték feladat differenciálegyenlete és a $t=0$ időpontban a függvényérték és első deriváltja:

$$\ddot{y}+9y=3\cos 2t \qquad \text{és} \qquad y(0)=-2; \qquad \dot{y}(0)=3\,.$$

Feladat az adott kezdeti érték feladat megoldásának előállítása.

Megoldás: $y(x)=y_h(t)+y_p(t)$

Homogén megoldás:

homogén de. $\ddot{y}_h+9y_h=0$, megoldás keresése $y_h=e^{\lambda t}$

$$\underbrace{\left(\lambda^2+9\right)}_{=0}\underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}=0$$

karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+9=0$; $\lambda^2=-9$; $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-1}\,\sqrt{9}=\pm i3$

homogén általános megoldás $y_h(t)=C_1e^{i3t}+C_2e^{-i3t}$,

ahol $e^{i3t}=\cos(3t)+i\sin(3t)$; $e^{-i3t}=\cos(3t)-i\sin(3t)$

azaz $y_h(x)=C_1\left(\cos(3t)+i\sin(3t)\right)+C_2\left(\cos(3t)-i\sin(3t)\right)$

az alapmegoldások (bázisok) tetszőleges lineáris kombináció is megoldás

$$y_h(x)=A_1\underbrace{\left(\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}\right)}_{\cos(3t)}+A_2\underbrace{\left(\frac{e^{i3t}-e^{-i3t}}{2}\right)}_{\sin(3t)}$$

behelyettesítés után $y_h(x)=A_1\cos(3t)+A_2\sin(3t)$

Partikuláris megoldás: $\ddot{y}_p+4y_p=3\cos 2t$; $y_p(x)=C\cos 2t$ (alakban keressük)

a deriváltak: $\dot{y}_p(x)=-C2\sin 2t$; $\ddot{y}_p(x)=-C\,4\cos 2t$ behelyettesítése után

$$-4C\cos 2t+9C\cos 2t=3\cos 2t$$

$$5C=3; \qquad C=\frac{3}{5}; \qquad y_p(x)=\frac{3}{5}\cos 2t$$

Peremfeltételek figyelembevétele: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

$$y(0)=1 \qquad y(0)=-2=A_1\underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{1}+A_2\underbrace{\sin(3\cdot 0)}_{0}+\frac{3}{5}\underbrace{\cos(2\cdot 0)}_{1}$$

$$-2=A_1\underbrace{\cos(3\cdot 0)}_{1}+\frac{3}{5} \Rightarrow A_1=-2-\frac{3}{5}=-\frac{13}{5}$$

$$y'(0)=4 \qquad \dot{y}(0)=3=-A_1\underbrace{3\sin(3\cdot 0)}_{0}+A_2\underbrace{3\cos(3\cdot 0)}_{2}-2\frac{3}{5}\cos(2\cdot 0)$$

$$3=A_2\underbrace{3\cos(3\cdot 0)}_{3} \qquad \Rightarrow A_2=1$$

Végül: $$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=-\frac{13}{5}\cos(3t)+\sin(3t)+\frac{3}{5}\cos 2t\,.$$

Egy rezgéssé alakítások (addiciós tételek):

I. $$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \overset{\text{átalakítás}}{\Leftrightarrow} y = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = a \cos(\omega t + \varphi) = \underbrace{a \cos \varphi}_{c_1} \cos \omega t \underbrace{- a \sin \varphi}_{c_2} \sin \omega t$$

$$(c_1)^2 + (c_2)^2 = a^2 (\cos \varphi)^2 + a^2 (\sin \varphi)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{-a \sin \varphi}{a \cos \varphi} = -tg\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctg\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)$$

II. $$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \overset{\text{átalakítás}}{\Leftrightarrow} y = a \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) = \underbrace{a \sin \varphi}_{c_1} \cos \omega t \underbrace{+ a \cos \varphi}_{c_2} \sin \omega t$$

$$(c_1)^2 + (c_2)^2 = a^2 (\sin \varphi)^2 + a^2 (\cos \varphi)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a \sin \varphi}{a \cos \varphi} = tg\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctg\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$