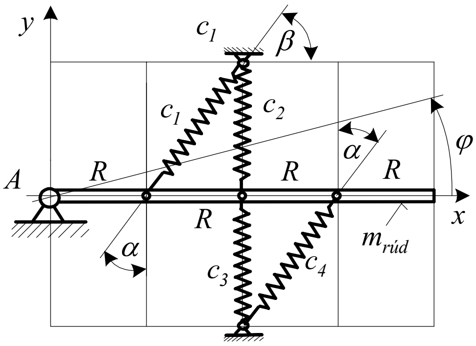
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

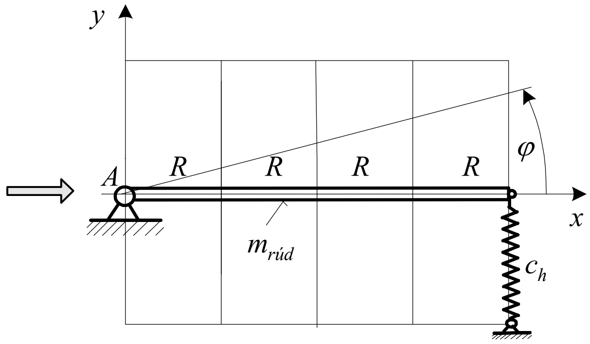
REZGÉSTAN GYAKORLAT

Kidolgozta: Dr. Nagy Zoltán egyetemi adjunktus

1. feladat: Szabad csillapítatlan rezgőrendszer (rugók helyettesítése egy adott pontban és egy előírt hatásvonalon)



1. ábra



2. ábra

Adott: az 1. ábrán látható, az A pontban csapágyazott rezgőrendszer. Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q=\varphi$.

$\beta=60^\circ$, $R=1$ m, $c_1=c_2=c_3=c_4=4\cdot 10^{-4}$ m/N , $m_{rúd}=12$ kg.

Feladat: a) Határozza meg az 1. ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű, a 2. ábrán vázolt rezgőrendszer c_h rugóállandóját.

b) Határozza meg a c_4 jelű rugóban ébredő U_4 alakváltozási energiát, ha a $\varphi=3^\circ$.

Kidolgozás:

a) A helyettesítő rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása:

A két rezgőrendszer azonos (egymást helyettesíti), ha a két rendszer rugóiban ébredő alakváltzási energia megegyezik! Az ábra alapján $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta=30^\circ$.

1. ábra: $U=\sum_{i=1}^{4} U_i = U_1+U_2+U_3+U_4$,

$$U_1=\frac{1}{2}\frac{\left(R\varphi\cos\alpha\right)^2}{c_1}\ ,\ U_2=\frac{1}{2}\frac{\left(2R\varphi\right)^2}{c_2}\ ,\ U_3=\frac{1}{2}\frac{\left(2R\varphi\right)^2}{c_3}\ ,\ U_4=\frac{1}{2}\frac{\left(3R\varphi\cos\alpha\right)^2}{c_4}.$$

2. ábra: $U=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(4R\varphi\right)^2}{c_h}$.

Az alakváltozási energiák egyenlősége alapján írható:

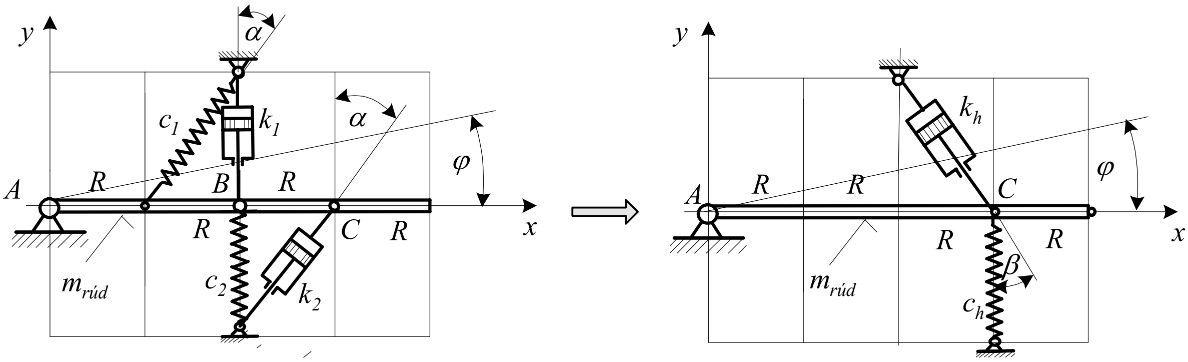
$$\frac{1}{2}R^2\varphi^2\left[\frac{\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4}{c_2}+\frac{4}{c_3}+\frac{9\cos^2\alpha}{c_4}\right]=\frac{1}{2}R^2\varphi^2\frac{16}{c_h}, \qquad c_h=4{,}129\cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}.$$

b) A c_4 jelű rugóban ébredő alakváltozási energia:

$$U_4=\frac{9R^2\cos^2\alpha}{2c_4}\varphi^2, \quad \text{ahol } \varphi=\frac{3^\circ\pi}{180^\circ}=0{,}05235 \text{ radián},$$

$$U_4 = \frac{9 \cdot 1^2 \cdot \cos^2 30^\circ \cdot 0,05235^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 23,12 \text{ Nm}.$$

2. feladat: Szabad csillapított rezgőrendszer (rugók és csillapítók helyettesítése egy adott pontban és egy előírt hatásvonalon)



1. ábra *2. ábra*

Adott: az 1. ábrán látható, az A pontban csapágyazott rezgőrendszer. Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q = \varphi$.

$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $R = 1$ m, $c_1 = c_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ m/N , $k_1 = k_2 = 100$ Ns/m , $m_{rúd} = 12$ kg.

Feladat: a) Határozza meg az 1. ábrán látható rezgőrendszerrel egyenértékű, a 2. ábrán vázolt rezgőrendszer c_h rugóállandóját és k_h csillapítási tényezőjét.

b) Határozza meg a c_2 jelű rugóban ébredő U_2 alakváltozási energiát, ha a $\varphi = 3^\circ$.

Kidolgozás:

a) A helyettesítő rezgőrendszer jellemzőinek meghatározása:

A két rezgőrendszer egyenértékű, ha a két rezgőrendszer c_i rugóiban ébredő alakváltozási energia és a k_i csillapító tagjaiban felemésztett mozgási energia megegyezik.

- A helyettesítő rugóállandó meghatározása:

1. ábra: $U = \sum_{i=1}^{2} U_i = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\frac{(R\varphi\cos\alpha)^2}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{(2R\varphi)^2}{c_2}$,

2. ábra: $U = \frac{1}{2}\frac{(3R\varphi)^2}{c_h}$.

Az alakváltozási energiák egyenlősége alapján írható:

$$\frac{1}{2}R^2\varphi^2\left[\frac{\cos^2\alpha}{c_1} + \frac{4}{c_2}\right] = \frac{1}{2}R^2\varphi^2\frac{9}{c_h} \quad \rightarrow \quad c_h = 7,578 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{m}}{\text{N}}.$$

- A helyettesítő csillapítási tényező meghatározása:

1. ábra: $Q_k = \sum_{i=1}^{2} Q_{k_i} = Q_{k_1} + Q_{k_2} = \vec{F}_{k_1} \cdot \vec{\beta}_B + \vec{F}_{k_2} \cdot \vec{\beta}_C$.

$$\vec{F}_{k_1} = -k_1\vec{v}_{d_1} = -k_1\left(2R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right), \quad \vec{\beta}_B = \frac{\partial\vec{v}_B}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\left(2R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)}{\partial\dot{\varphi}} = \left(2R\,\vec{j}\right),$$

$$Q_{k_1} = -k_1\left(2R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)\left(2R\,\vec{j}\right) = -k_1\,4R^2\dot{\varphi}.$$

$$\vec{F}_{k_2} = -k_2 \vec{v}_{d_2} = -k_2\, 3R\dot{\varphi}\cos\alpha\left(\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}\right) = -k_2\, 3R\dot{\varphi}\left(\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{i} + \cos^2\alpha\,\vec{j}\right),$$

$$\vec{\beta}_C = \frac{\partial\vec{v}_C}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\left(3R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)}{\partial\dot{\varphi}} = \left(3R\,\vec{j}\right),$$

$$Q_{k_2} = -k_2\, 3R\dot{\varphi}\left(\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{i} + \cos^2\alpha\,\vec{j}\right)\left(3R\,\vec{j}\right) = -k_2\, 9R^2\dot{\varphi}\cos^2\alpha\,,$$

$$Q_k = Q_{k_1} + Q_{k_2} = -k_1\, 4R^2\dot{\varphi} - k_2\, 9R^2\dot{\varphi}\cos^2\alpha.$$

2. ábra: $Q_{k_h} = \vec{F}_{k_h}\cdot\vec{\beta}_C$

$$\vec{F}_{k_h} = -k_h\vec{v}_d = -k_h\, 3R\dot{\varphi}\cos\beta\left(-\sin\beta\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}\right) = -k_h\, 3R\dot{\varphi}\left(-\cos\beta\sin\beta\,\vec{i} + \cos^2\beta\,\vec{j}\right),$$

$$\vec{\beta}_C = \frac{\partial\vec{v}_C}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\left(3R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)}{\partial\dot{\varphi}} = \left(3R\,\vec{j}\right),$$

$$Q_{k_h} = -k_h\, 3R\dot{\varphi}\left(-\cos\beta\sin\beta\,\vec{i} + \cos^2\beta\,\vec{j}\right)\left(3R\,\vec{j}\right) = -k_h\, 9R^2\cos^2\beta\,\dot{\varphi}.$$

Az általános csillapító erők egyenlősége alapján írható:

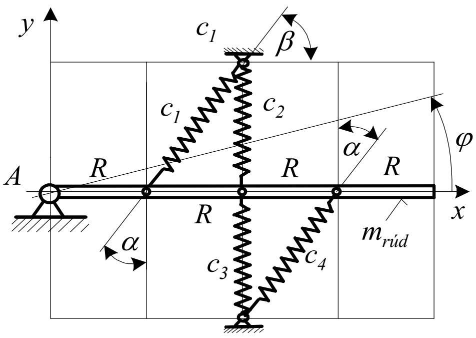
$$-k_1\, 4R^2\dot{\varphi} - k_2\, 9R^2\dot{\varphi}\cos^2\alpha = -k_h\, 9R^2\cos^2\beta\,\dot{\varphi}\ ,$$

$$k_h = \frac{4k_1 + 9k_2\cos^2\alpha}{9\cos^2\beta} = 477{,}7\ \text{Ns/m}.$$

b) A c_2 jelű rugóban ébredő alakváltozási energia:

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{4R^2\varphi^2}{c_2}\ ,\quad \text{ahol}\ \varphi = \frac{3^\circ\,\pi}{180^\circ} = 0{,}05235\ \text{radián}\ ,\ U_2 = \frac{1}{2}\ \frac{4\cdot 1^2\cdot 0{,}05235^2}{4\cdot 10^{-4}} = 13{,}47\,\text{Nm}.$$

3. feladat: Szabad csillapítatlan rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható, az **A** pontban csapágyazott rezgőrendszer. Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q = \varphi$.

$R = 1$ m, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 4\cdot 10^{-4}$ m/N ,

$m_{rúd} = 12$ kg , $\beta = 60^\circ$.

Feladat: a) Határozza meg az ábrán látható rendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén.

b) Határozza meg a redukált rendszer jellemző paramétereit.

Kidolgozás:

a) A mozgásegyenlet felírása:

Az ábrából: $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta = 30^\circ$.

Általános koordináta: $q = \varphi,\quad \dot{q} = \dot{\varphi}\ ,\quad \ddot{q} = \ddot{\varphi}$.

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dE}{d\dot{q}}\right) - \dfrac{dE}{dq} = Q_c$.

A rendszer kinetikai energiája:

$$E = \frac{1}{2}J_a\,\omega^2 = \frac{1}{2}J_a\,\dot{q}^2 = \frac{1}{2}J_a\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_{rúd}\left[4R\right]^2 + m_{rúd}\left[2R\right]^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{12}m_{rúd}\right)\dot{\varphi}^2.$$

$$\frac{dE}{d\dot{q}}=\frac{dE}{d\dot{\varphi}}=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\dot{\varphi} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{\varphi}}\right)=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\ddot{\varphi}\ ,$$

$$\frac{dE}{dq}=\frac{dE}{d\varphi}=0\ .$$

A rugókban felhalmozódott alakváltozási energia:

$$U=\frac{1}{2}\frac{\left(R\,\varphi\cos\alpha\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(2\,R\,\varphi\right)^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{\left(2\,R\,\varphi\right)^2}{c_3}+\frac{1}{2}\frac{\left(3\,R\,\varphi\cos\alpha\right)^2}{c_4},$$

$$U=\frac{1}{2}\frac{R^2\varphi^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{4R^2\varphi^2}{c_2}+\frac{1}{2}\frac{4R^2\varphi^2}{c_3}+\frac{1}{2}\frac{9\,R^2\varphi^2\cos^2\alpha}{c_4}.$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{d\varphi}=-\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{4R^2}{c_3}+\frac{9\,R^2\cos^2\alpha}{c_4}\right)\varphi.$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\ddot{\varphi}+\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{4R^2}{c_3}+\frac{9\,R^2\cos^2\alpha}{c_4}\right)\varphi=0.$$

b) A redukált jellemzők meghatározása:

$$m_{red}=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2=\frac{64}{12}\cdot 12\cdot 1^2=64\ \text{kgm}^2,$$

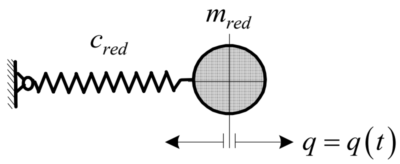
$$\frac{1}{c_{red}}=\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{4R^2}{c_3}+\frac{9\,R^2\cos^2\alpha}{c_4}=\frac{1^2\cdot\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{4\cdot 1^2}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{4\cdot 1^2}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{9\cdot 1^2\cdot\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}}\ ,$$

$$\frac{1}{c_{red}}=\frac{15,5}{4\cdot 10^{-4}}=38750\ \text{Nm}.$$

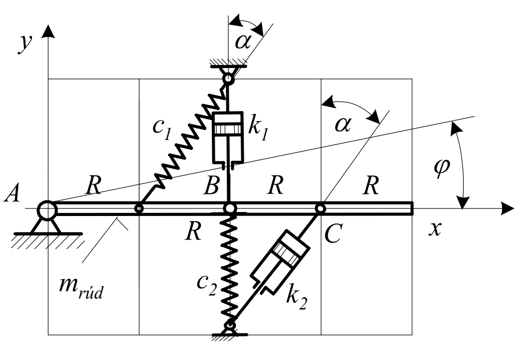
A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$64\ddot{\varphi}+38750\,\varphi=0 \qquad\Rightarrow\qquad \text{A forgómozgás mozgásegyenlete.}$$

A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer:



4. feladat: Szabad csillapított rezgőrendszer



Adott: az ábrán látható, az A pontban csapágyazott rezgőrendszer. Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q=\varphi$.

$R=1$ m, $c_1=c_2=4\cdot 10^{-4}$ m/N , $\alpha=30^\circ$,

$m_{rúd}=12$ kg , $k_1=k_2=100$ Ns/m.

Feladat: a) Határozza meg az ábrán látható rezgőrendszer mozgásegyenletét kis szögelfordulások esetén.

b) Határozza meg a redukált rezgőrendszer jellemző paramétereit.

Kidolgozás:

a) A mozgásegyenlet felírása:

Az általános koordináta: $q=\varphi$, $\dot{q}=\dot{\varphi}$, $\ddot{q}=\ddot{\varphi}$.

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{q}}\right)-\frac{dE}{dq}=Q_c+Q_k$.

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}J_a\,\omega^2=\frac{1}{2}J_a\,\dot{q}^2=\frac{1}{2}J_a\,\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_{rúd}\left[4R\right]^2+m_{rúd}\left[2R\right]^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{12}m_{rúd}\right)\dot{\varphi}^2.$$

$$\frac{dE}{d\dot{q}}=\frac{dE}{d\dot{\varphi}}=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\dot{\varphi}\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{\varphi}}\right)=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\ddot{\varphi},$$

$$\frac{dE}{dq}=\frac{dE}{d\varphi}=0.$$

A rugókban felhalmozódott alakváltozási energia:

$$U=\frac{1}{2}\frac{\left(R\varphi\cos\alpha\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(2R\varphi\right)^2}{c_2}=\frac{1}{2}\frac{R^2\varphi^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{4R^2\varphi^2}{c_2}$$

Az általános visszatérítő erő:

$$Q_c=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{d\varphi}=-\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}\right)\varphi.$$

Az általános csillapító erő: $Q_k=\sum_{i=1}^{2}Q_{k_i}=Q_{k_1}+Q_{k_2}=\vec{F}_{k_1}\cdot\vec{\beta}_B+\vec{F}_{k_2}\cdot\vec{\beta}_C$.

$$\vec{F}_{k_1}=-k_1\vec{v}_{d_1}=-k_1\left(2R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right),\quad\vec{\beta}_B=\frac{\partial\vec{v}_B}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial\left(2R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)}{\partial\dot{\varphi}}=\left(2R\,\vec{j}\right),$$

$$Q_{k_1}=-k_1\left(2R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)\left(2R\,\vec{j}\right)=-k_1\,4R^2\dot{\varphi}.$$

$$\vec{F}_{k_2}=-k_2\vec{v}_{d_2}=-k_2\,3R\dot{\varphi}\cos\alpha\left(\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}\right)=-k_2\,3R\dot{\varphi}\left(\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{i}+\cos^2\alpha\,\vec{j}\right),$$

$$\vec{\beta}_C=\frac{\partial\vec{v}_C}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial\left(3R\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)}{\partial\dot{\varphi}}=\left(3R\,\vec{j}\right),$$

$$Q_{k_2}=\vec{F}_{k_2}\cdot\vec{\beta}_C=-k_2\,3R\dot{\varphi}\left(\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{i}+\cos^2\alpha\,\vec{j}\right)\left(3R\,\vec{j}\right)=-k_2\,9R^2\dot{\varphi}\cos^2\alpha,$$

$$Q_k=Q_{k_1}+Q_{k_2}=-k_1\,4R^2\dot{\varphi}-k_2\,9R^2\dot{\varphi}\cos^2\alpha=-\left(k_1\,4R^2+k_2\,9R^2\cos^2\alpha\right)\dot{\varphi}.$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\,\ddot{\varphi}+\left(k_1 4R^2+k_2 9R^2\cos^2\alpha\right)\dot{\varphi}+\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}\right)\varphi=0.$$

b) A redukált jellemzők meghatározása:

$$m_{red}=\frac{64}{12}m_{rúd}R^2=\frac{64}{12}\cdot 12\cdot 1^2=64\ \text{kgm}^2,$$

$$k_{red}=k_1 4R^2+k_2 9R^2\cos^2\alpha=\left(4k_1+9k_2\cos^2\alpha\right)R^2=\left(4\cdot 100+9\cdot 100\cdot\cos^2 30^\circ\right)1^2=1075\ \text{Nsm},$$

$$\frac{1}{c_{red}}=\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}=\frac{1^2\cdot\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}}+\frac{4\cdot 1^2}{4\cdot 10^{-4}}=\frac{0,75+4}{4\cdot 10^{-4}}=11875\ \text{Nm}.$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$64\ddot{\varphi}+1075\dot{\varphi}+11875\varphi=0.$$

A helyettesítő (redukált) rezgőrendszer: