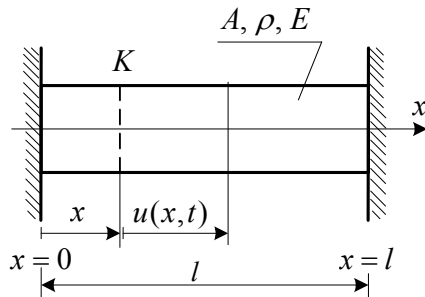


14. feladat: Mindkét végén befalazott rúd longitudinális rezgései (kontinuum modell)



Adott: a mindkét végén befalazott l hosszúságú prizmatikus rúd anyaga és geometriája:

$$A = 212 \text{ mm}^2, \quad l = 7 \text{ m}, \quad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3,$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/mm}^2.$$

A rúd keresztmetszetének alakja tetszőleges.

Feladat: a) A longitudinális kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása.

b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgéseknek a meghatározása.

Kidolgozás:

a) A longitudinális kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása:

A longitudinális kontinuum-rezgés mozgásegyenlete:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

A differenciálegyenletben $u = u(x, t)$ a rúd K keresztmetszetének rúd irányú (a rúd középvonalának irányába eső) elmozdulása.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $\Phi(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$u(x, t) = \Phi(x) T(t) = \left[D_1 \cos\left(\frac{\alpha}{a} x\right) + D_2 \sin\left(\frac{\alpha}{a} x\right) \right] \left[\cos(\alpha t + \varepsilon) \right].$$

A megoldásban szereplő D_1, D_2 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozhatók meg:

Az $x = 0$ helyen a keresztmetszet elmozdulása: $u(x=0, t) = \left[D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0 \right] \left[\cos(\alpha t + \varepsilon) \right] = 0.$

$$\Downarrow \\ D_1 = 0.$$

Az $x = l$ helyen a keresztmetszet elmozdulása: $u(x=l, t) = D_2 \sin\left(\frac{\alpha}{a} l\right) \left[\cos(\alpha t + \varepsilon) \right] = 0.$

$$\Downarrow \\ D_2 = 0, \text{ vagy } \sin\left(\frac{\alpha}{a} l\right) = 0.$$

A $D_2 = 0$ esetén az $u(x, t) \equiv 0$ megoldást kapnánk, ami számunkra érdektelen (mert azt jelenti, hogy nincs rezgés). Ezért a másik lehetőséget vizsgáljuk meg (ez esetben D_2 értéke tetszőleges):

A $\sin\left(\frac{\alpha}{a}l\right) = 0$ abban az esetben teljesül, ha $\frac{\alpha}{a}l = i\pi$, ahol $(i = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty)$.

Ebből a feltételből kapjuk a longitudinális kontinuum-rezgés saját körfrekvenciáit:

$$\alpha_i = \frac{a}{l}i\pi = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}i\pi, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \infty).$$

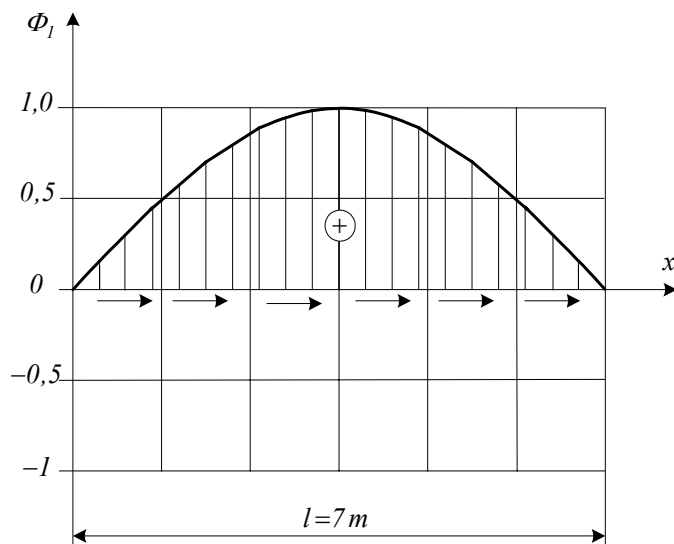
b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgéseknek a meghatározása és megrajzolása:

Az összefüggésben szereplő $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{7800}} = 5063,7 \text{ m/s}$, állandó fizikai jelentése: a longitudinális rezgés (rezgéshullám) terjedési sebessége a rúdban.

A rezgéseket a $\Phi = \Phi(x)$ függvény ábrázolásával kapjuk: $\Phi_i = \Phi_i(x) = D_2 \sin\left(\frac{\alpha_i}{a}x\right)$.

Legyen a továbbiakban $D_2 = 1$.

$i=1$ - első saját körfrekvencia, első rezgéskép:



Az első saját körfrekvencia:

$$\alpha_1 = \frac{a}{l}(1 \cdot \pi) = 723,38 \cdot 3,141$$

$$\alpha_1 = 2272 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Az első rezgéskép:

$$\Phi_1 = \Phi_1(x) = \sin\left(1 \cdot \pi \frac{x}{l}\right)$$

A peremfeltételek

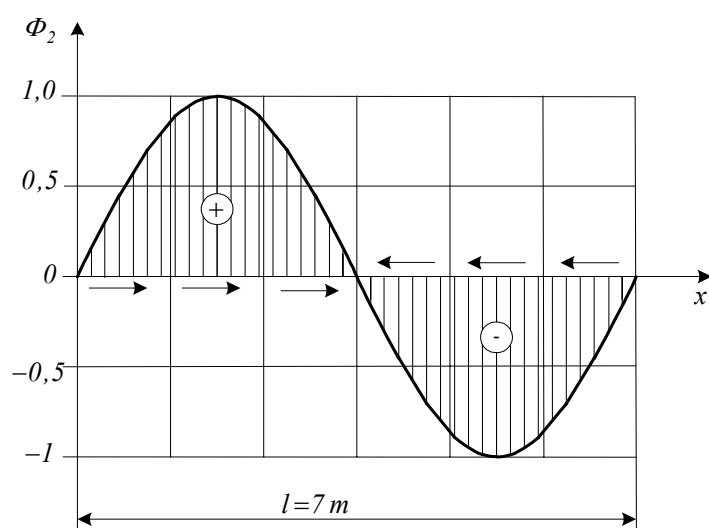
az $x = 0$ és $x = l$ helyen:

$$\Phi_1 = \Phi_1(0) = \sin\left(1 \cdot \pi \frac{0}{l}\right) = 0,$$

$$\Phi_1 = \Phi_1(l) = \sin\left(1 \cdot \pi \frac{l}{l}\right) = 0.$$

A rezgésképen a függvényértékek az elmozdulások nagyságát, a nyilak pedig az x tengely irányú elmozdulások irányát szemléltetik.

$i=2$ - második saját körfrekvencia, második rezgésekép:



A második saját körfrekvencia:

$$\alpha_2 = \frac{v_l}{l} (2 \cdot \pi) = 723,38 \cdot 6,282$$

$$\alpha_2 = 4544 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A második rezgésekép:

$$\Phi_2 = \Phi_2(x) = \sin\left(2 \cdot \pi \frac{x}{l}\right)$$

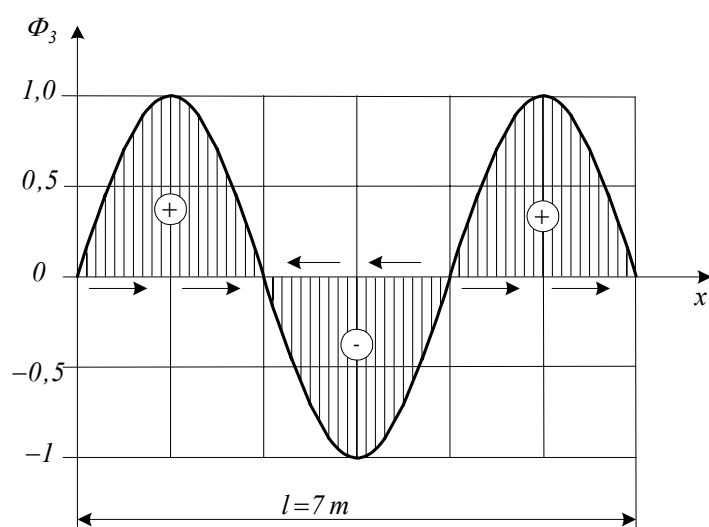
Peremfeltételek

az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_2 = \Phi_2(0) = \sin\left(2 \cdot \pi \frac{0}{l}\right) = 0,$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(l) = \sin\left(2 \cdot \pi \frac{l}{l}\right) = 0.$$

$i=3$ - harmadik saját körfrekvencia, harmadik rezgésekép:



A harmadik saját körfrekvencia:

$$\alpha_3 = \frac{v_l}{l} (3 \cdot \pi) = 723,38 \cdot 9,423$$

$$\alpha_3 = 6816 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A harmadik rezgésekép:

$$\Phi_3 = \Phi_3(x) = \sin\left(3 \cdot \pi \frac{x}{l}\right)$$

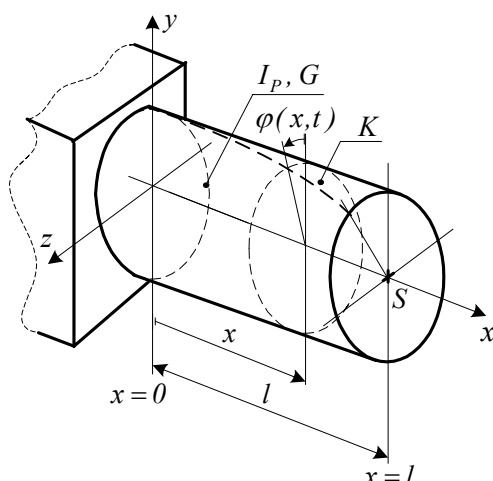
Peremfeltételek

az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_3 = \Phi_3(0) = \sin\left(3 \cdot \pi \frac{0}{l}\right) = 0,$$

$$\Phi_3 = \Phi_3(l) = \sin\left(3 \cdot \pi \frac{l}{l}\right) = 0.$$

15. feladat: Befalazott kör keresztmetszetű rúd torziós rezgései (kontinuum modell)



Adott: az egyik végén befalazott kör keresztmetszetű, l hosszúságú rúd anyaga és geometriája.

$$l = 10 \text{ m}, \rho = 8000 \text{ kg/m}^3, G = 80000 \text{ MPa}.$$

Feladat: a) A torziós (csavaró) kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása.

b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgéseknek a meghatározása.

Kidolgozás:

a) A torziós (csavaró) kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása:

A torziós kontinuum-rezgés mozgásegyenlete:
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

A differenciálegyenletben $\varphi = \varphi(x, t)$ a rúd K keresztmetszetének x tengely körüli szögelfordulása.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $\Phi(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$\varphi(x, t) = \left[D_1 \cos\left(\frac{\alpha}{b} x\right) + D_2 \sin\left(\frac{\alpha}{b} x\right) \right] \left[\cos(\alpha t + \varepsilon) \right] = \Phi(x) T(t).$$

A megoldásban szereplő D_1, D_2 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozható meg:

Az $x = 0$ helyen a keresztmetszet elmozdulása:
$$u(x=0, t) = \left[D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0 \right] \left[\cos(\alpha t + \varepsilon) \right] = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$D_1 = 0.$$

Az $x = 0$ helyen (befalazott rúdvég) a keresztmetszet szögelfordulása:

$$\varphi(x=0, t) = \left[D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0 \right] \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$D_1 = 0.$$

Az $x = l$ helyen (szabad rúdvég) a csavaró nyomaték, illetve az ezzel arányos $\vartheta = M_c / I_p G$ fajlagos szögelfordulás:

$$\vartheta = \frac{1}{I_p G} \underbrace{M_c}_{=0} = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = D_2 \frac{\alpha}{b} \cos\left(\frac{\alpha}{b} l\right) \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$D_2 = 0, \text{ vagy } \cos\left(\frac{\alpha}{b} l\right) = 0.$$

A $D_2 = 0$ esetén az $\varphi(x, t) \equiv 0$ megoldást kapnánk, ami számunkra érdektelen (mert azt jelenti, hogy nincs rezgés). Ezért a másik lehetőséget vizsgáljuk meg (ez esetben D_2 értéke tetszőleges):

A $\cos\left(\frac{\alpha}{b}l\right) = 0$ abban az esetben teljesül, ha $\frac{\alpha}{b}l = \frac{\pi}{2} + (i-1)\pi$, ahol $(i = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty)$.

Ebből a feltételből kapjuk a csavaró kontinuum-rezgés saját körfrekvenciáit:

$$\alpha_i = \frac{b}{l} \left[\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi \right] = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \left[\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi \right], \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \infty).$$

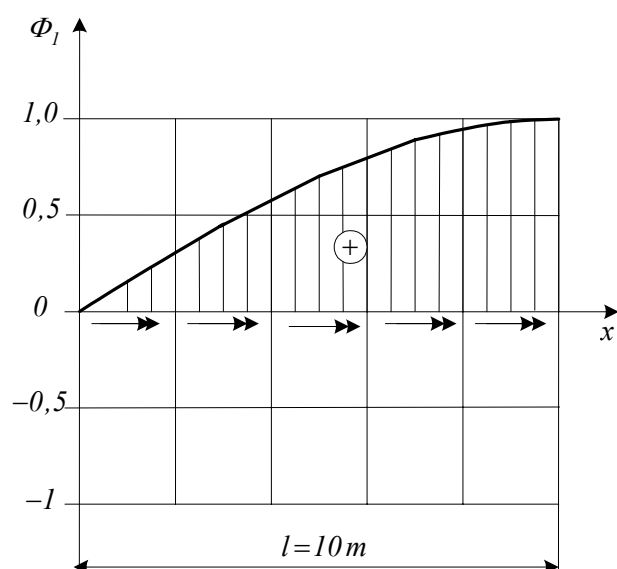
b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgésekének a meghatározása és megrajzolása:

Az összefüggésben szereplő $b = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10}}{8000}} = 3162,7 \text{ m/s}$ állandó fizikai jelentése: a csavaró rezgés (rezgéshullám) terjedési sebessége a rúdban.

A rezgéseknek a $\Phi = \Phi(x)$ függvény ábrázolásával kapjuk: $\Phi_i = \Phi_i(x) = D_2 \sin\left(\frac{\alpha_i}{b}x\right)$.

Legyen a továbbiakban $D_2 = 1$.

$i=1$ - első saját körfrekvencia, első rezgésekép:



Az első saját körfrekvencia:

$$\alpha_1 = \frac{b}{l} \left[\frac{\pi}{2} + (1-1)\pi \right] = \frac{b}{l} \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{3162}{10} \frac{3,141}{2} = 496,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Az első rezgésekép:

$$\Phi_1 = \sin\left(\left[\frac{\pi}{2} + (1-1)\pi\right] \frac{x}{l}\right)$$

Jellemző értékek

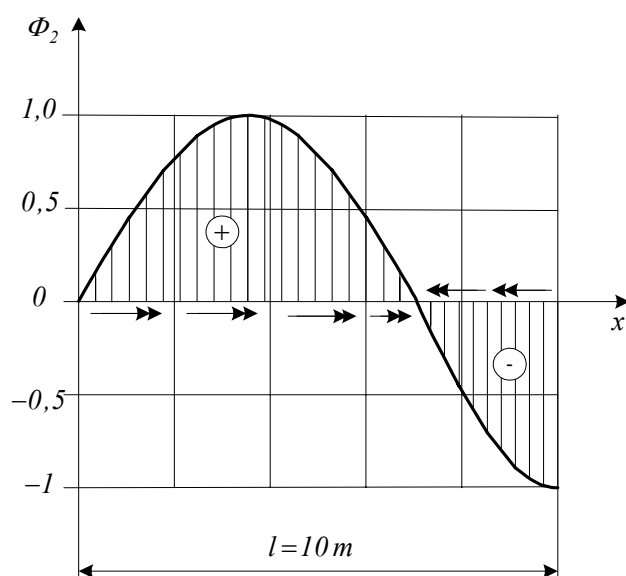
az $x = 0$ és $x = l$ helyen:

$$\Phi_1 = \Phi_1(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = 0,$$

$$\Phi_1 = \Phi_1(l) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{l}\right) = 1.$$

A rezgésekben a függvényértékek a szögelfordulás nagyságát, a nyilak pedig azt szemléltetik, hogy az x tengely körüli szögelfordulásról van szó. A nyilak iránya a szögelfordulás irányát adja meg.

$i=2$ - második saját körfrekvencia, második rezgéskép:



A második saját körfrekvencia:

$$\alpha_2 = \frac{b}{l} \left[\frac{\pi}{2} + (2-1)\pi \right] = \frac{b}{l} \frac{3\pi}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{3162}{10} \frac{3 \cdot 3,141}{2} = 1490 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A második rezgéskép:

$$\Phi_2 = \sin \left[\left(\frac{\pi}{2} + (2-1)\pi \right) \frac{x}{l} \right]$$

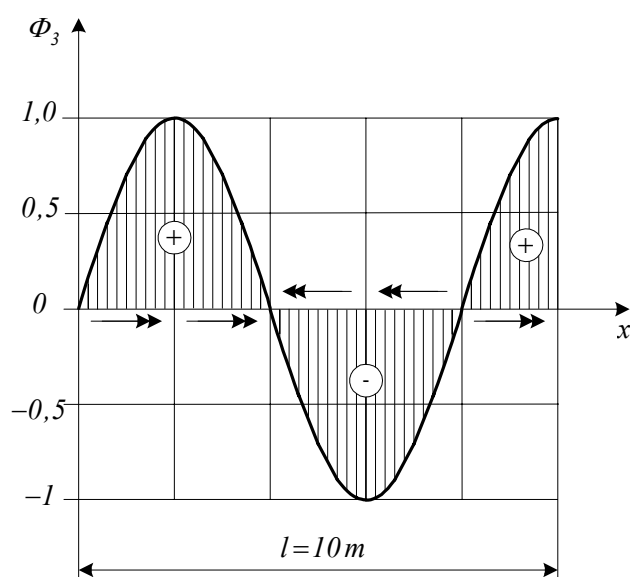
Jellemző értékek

az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_2 = \Phi_2(0) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} \cdot 0 \right) = 0,$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(l) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} \cdot 1 \right) = -1.$$

$i=3$ - harmadik saját körfrekvencia, harmadik rezgéskép:



A harmadik saját körfrekvencia:

$$\alpha_3 = \frac{b}{l} \left[\frac{\pi}{2} + (3-1)\pi \right] = \frac{b}{l} \frac{5\pi}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{3162}{10} \frac{5 \cdot 3,141}{2} = 2483 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A harmadik rezgéskép:

$$\Phi_3 = \sin \left[\left(\frac{\pi}{2} + (3-1)\pi \right) \frac{x}{l} \right]$$

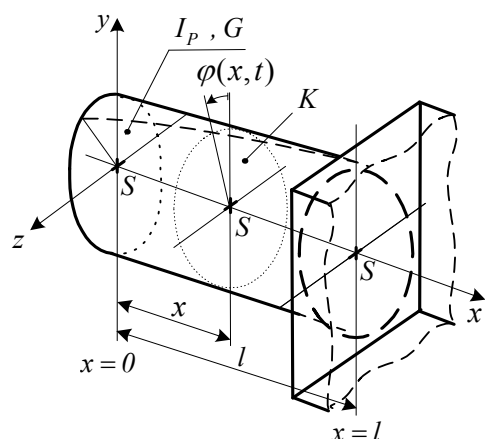
Jellemző értékek

az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_3 = \Phi_3(0) = \sin \left(\frac{5\pi}{2} \cdot 0 \right) = 0,$$

$$\Phi_3 = \Phi_3(l) = \sin \left(\frac{5\pi}{2} \cdot 1 \right) = 1.$$

16. feladat: Befalazott kör keresztmetszetű rúd torziós rezgései (kontinuum modell)



Adott: az egyik végén befalazott kör keresztmetszetű, l hosszúságú rúd anyaga és geometriája.

$$l = 10 \text{ m}, \rho = 8000 \text{ kg/m}^3, G = 80000 \text{ MPa}.$$

Feladat: a) A torziós (csavaró) kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása.

b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgéseknek a meghatározása.

Kidolgozás:

a) A torziós (csavaró) kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása:

$$\text{A torziós kontinuum-rezgés mozgásegyenlete: } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

A differenciálegyenletben $\varphi = \varphi(x, t)$ a rúd K keresztmetszetének x tengely körüli szögelfordulása.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $\Phi(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$\varphi(x, t) = \left[D_1 \cos\left(\frac{\alpha}{b} x\right) + D_2 \sin\left(\frac{\alpha}{b} x\right) \right] \left[\cos(\alpha t + \varepsilon) \right] = \Phi(x) T(t).$$

A megoldásban szereplő D_1, D_2 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozható meg:

Az $x = 0$ helyen (szabad rúdvég) a csavaró nyomaték, illetve az ezzel arányos $\vartheta = M_c / I_p G$ fajlagos szögelfordulás:

$$\vartheta = \frac{1}{I_p G} \underbrace{M_c}_{=0} = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = D_2 \frac{\alpha}{b} \cos\left(\frac{\alpha}{b} \cdot 0\right) \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0.$$

$$\Downarrow \\ D_2 = 0.$$

Az $x = l$ helyen (befalazott rúdvég) a keresztmetszet szögelfordulása:

$$\varphi(x = 0, t) = \left[D_1 \cos\left(\frac{\alpha}{b} l\right) \right] \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0.$$

$$\Downarrow \\ D_1 = 0, \text{ vagy } \cos\left(\frac{\alpha}{b} l\right) = 0.$$

A $D_1 = 0$ esetén az $\varphi(x, t) \equiv 0$ megoldást kapnánk, ami számunkra érdektelen (mert azt jelenti, hogy nincs rezgés). Ezért a másik lehetőséget vizsgáljuk meg (ez esetben D_1 értéke tetszőleges):

A $\cos\left(\frac{\alpha}{b}l\right)=0$ abban az esetben teljesül, ha $\frac{\alpha}{b}l=\frac{\pi}{2}+(i-1)\pi$, ahol $(i=0,1,2,3, \dots, \infty)$.

Ebből a feltételből kapjuk a csavaró kontinuum-rezgés saját körfrekvenciáit:

$$\alpha_i = \frac{b}{l} \left[\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi \right] = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \left[\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi \right], \quad (i=1,2,3, \dots, \infty).$$

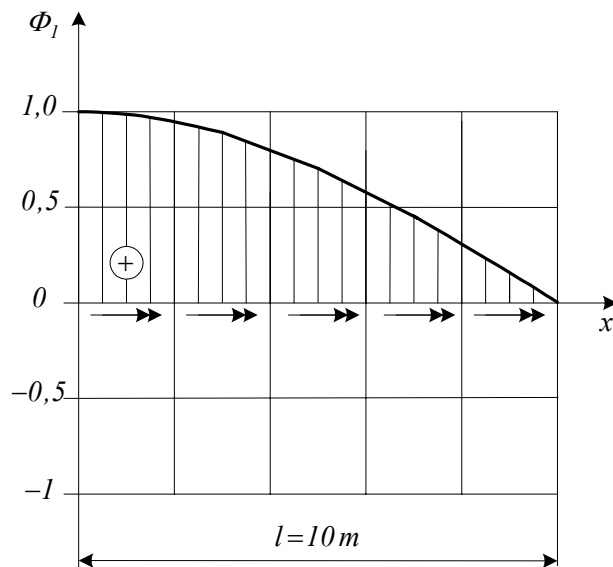
b) A rúd első három sajátfrekvenciájának és a hozzájuk tartozó rezgéseképnek a meghatározása és megrajzolása:

Az összefüggésben szereplő $b = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10}}{8000}} = 3162,7 \text{ m/s}$ állandó fizikai jelentése: a csavaró rezgés (rezgéshullám) terjedési sebessége a rúdban.

A rezgéseképeket a $\Phi = \Phi(x)$ függvény ábrázolásával kapjuk: $\Phi_i = \Phi_i(x) = D_i \cos\left(\frac{\alpha_i}{b}x\right)$.

Legyen a továbbiakban $D_1 = 1$.

$i=1$ - első saját körfrekvencia, első rezgéskép:



Az első saját körfrekvencia

$$\alpha_1 = \frac{b}{l} \left[\frac{\pi}{2} + (1-1)\pi \right] = \frac{b}{l} \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{3162}{10} \frac{3,141}{2} = 496,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Az első rezgéskép:

$$\Phi_1 = \cos\left(\left[\frac{\pi}{2} + (1-1)\pi\right] \frac{x}{l}\right).$$

Jellemző értékek

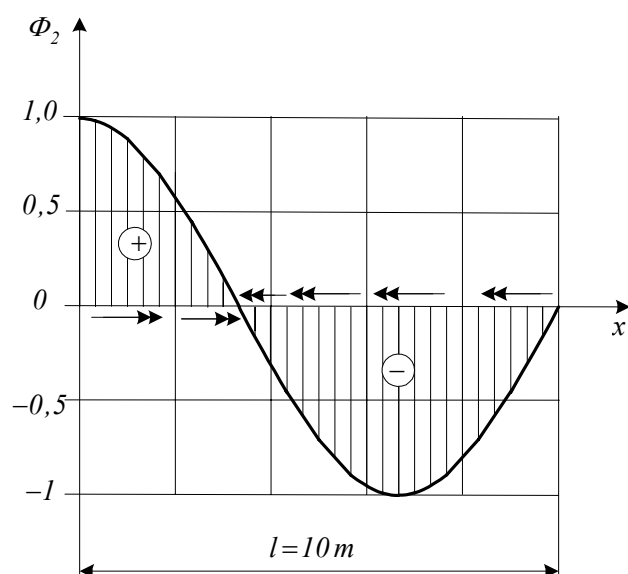
az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_1 = \Phi_1(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = 1,$$

$$\Phi_1 = \Phi_1(l) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) = 0.$$

A rezgésképen a függvényértékek a szögelfordulás nagyságát, a nyilak pedig azt szemléltetik, hogy az x tengely körüli szögelfordulásról van szó. A nyilak iránya a szögelfordulás irányát adja meg.

$i=2$ - második saját körfrekvencia, második rezgéskép:



A második saját körfrekvencia:

$$\alpha_2 = \frac{b}{l} \left[\frac{\pi}{2} + (2-1)\pi \right] = \frac{b}{l} \frac{3\pi}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{3162}{10} \frac{3 \cdot 3,141}{2} = 1490 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A második rezgéskép:

$$\Phi_2 = \cos \left(\left[\frac{\pi}{2} + (2-1)\pi \right] \frac{x}{l} \right).$$

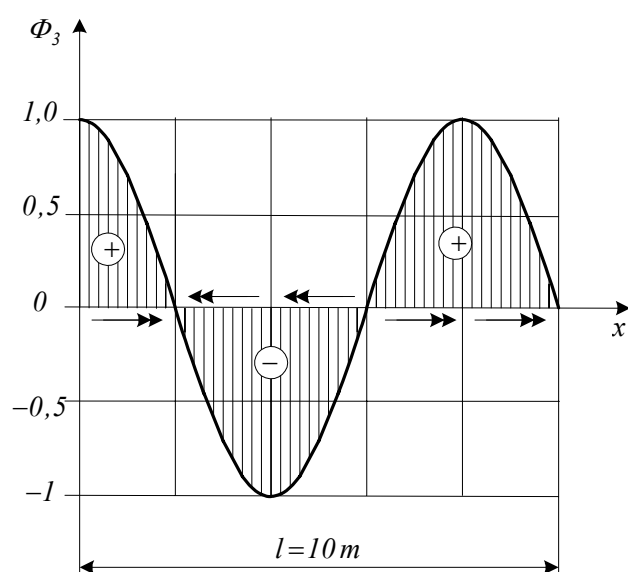
Jellemző értékek

az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_2 = \Phi_2(0) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \cdot 0 \right) = 1,$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(l) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \cdot 1 \right) = 0.$$

$i=3$ - harmadik saját körfrekvencia, harmadik rezgéskép:



A harmadik saját körfrekvencia:

$$\alpha_3 = \frac{b}{l} \left[\frac{\pi}{2} + (3-1)\pi \right] = \frac{b}{l} \frac{5\pi}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{3162}{10} \frac{5 \cdot 3,141}{2} = 2483 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A harmadik rezgéskép:

$$\Phi_3 = \cos \left(\left[\frac{\pi}{2} + (3-1)\pi \right] \frac{x}{l} \right).$$

Jellemző értékek

az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$\Phi_3 = \Phi_3(0) = \cos \left(\frac{5\pi}{2} \cdot 0 \right) = 1,$$

$$\Phi_3 = \Phi_3(l) = \cos \left(\frac{5\pi}{2} \cdot 1 \right) = 0.$$