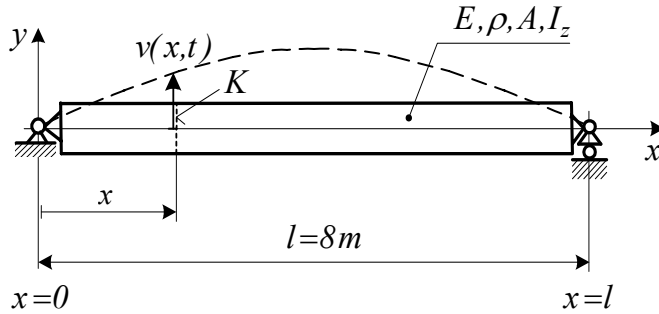


17. feladat: Kéttámaszú tartó (rúd) hajlító rezgései (kontinuum modell)



Feltételezzük, hogy a rúd az xy síkban végez hajlító rezgéseket. Az z tengely a keresztmetszetek szimmetria tengelye, ezért a rúd igénybevétele egyenes hajlítás.

Adott: a két végén megtámasztott, l hosszúságú rúd anyaga és geometriája:

$$A = 314 \text{ mm}^2, \quad l = 8 \text{ m},$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/mm}^2, \quad I_z = 7852,5 \text{ mm}^4,$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3.$$

Feladat: a) A hajlító kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása, az első három saját körfrekvencia meghatározása.

b) A rúd első három saját körfrekvenciájához tartozó rezgésekép meghatározása és szemléltetése.

Kidolgozás:

a) A hajlító kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása, az első három saját körfrekvencia meghatározása:

$$\text{A hajlító kontinuum-rezgés mozgásegyenlete: } \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{I_z E}{A \rho} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}.$$

A differenciál egyenletben $v = v(x, t)$ a rugalmas szál pontjainak (a K keresztmetszet S pontjának) y irányú elmozdulása és $c = \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}}$ a hajlító rezgés (rezgéshullám) terjedési sebessége a rúdban.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $W(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$v(x, t) = [a_1 \operatorname{ch}(kx) + a_2 \operatorname{sh}(kx) + a_3 \cos(kx) + a_4 \sin(kx)] \cos(\alpha t + \varepsilon) = W(x) T(t),$$

$$\text{ahol } k^2 = \frac{\alpha}{c} = \alpha \sqrt{\frac{A \rho}{I_z E}}$$

A megoldásban szereplő a_1, a_2, a_3, a_4 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozható meg:

$$\text{Az } x=0 \text{ helyen } v(x=0, t) = 0 \text{ és } M_{hz}(x=0, t) = -I_z E \frac{d^2 v}{dx^2}(x=0, t) = -I_z E v''(x=0, t) = 0,$$

amiből $v''(x=0, t) = 0$.

Az $x=l$ helyen $v(x=l,t)=0$ és $M_{hz}(x=l,t)=-I_z E \frac{d^2 v}{dx^2}(x=l,t)=-I_z E v''(x=l,t)=0$,
amiből $v''(x=l,t)=0$.

A megoldást behelyettesítve a peremfeltételekbe:

$$\left[\underbrace{a_1 \operatorname{ch}(k \cdot 0)}_{=1} + \underbrace{a_2 \operatorname{sh}(k \cdot 0)}_{=0} + \underbrace{a_3 \cos(k \cdot 0)}_{=1} + \underbrace{a_4 \sin(k \cdot 0)}_{=0} \right] \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0,$$

$$k^2 \left[\underbrace{a_1 \operatorname{ch}(k \cdot 0)}_{=1} + \underbrace{a_2 \operatorname{sh}(k \cdot 0)}_{=0} - \underbrace{a_3 \cos(k \cdot 0)}_{=1} - \underbrace{a_4 \sin(k \cdot 0)}_{=0} \right] \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0,$$

$$\left[a_1 \operatorname{ch}(kl) + a_2 \operatorname{sh}(kl) + a_3 \cos(kl) + a_4 \sin(kl) \right] \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0,$$

$$k^2 \left[a_1 \operatorname{ch}(kl) + a_2 \operatorname{sh}(kl) - a_3 \cos(kl) - a_4 \sin(kl) \right] \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0.$$

A peremfeltételekből egy homogén, lineáris algebrai egyenletrendszert kaptunk az a_1 , a_2 , a_3 , a_4 állandókra. Ezt mátrixos formában felírva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \operatorname{ch}(kl) & \operatorname{sh}(kl) & \cos(kl) & \sin(kl) \\ \operatorname{ch}(kl) & \operatorname{sh}(kl) & -\cos(kl) & -\sin(kl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Aa=0}}.$$

A homogén, lineáris egyenletrendszernek akkor van nem zérus megoldása, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsa zérus.

A determinánst kifejtve: $\det \underline{\underline{A}} = 4 \underbrace{\operatorname{sh}(kl)}_{\neq 0} \sin(kl) = 0$.

Mivel a $\operatorname{sh}(x)$ függvény csak $x=0$ -nál zérus, ezért a másik szorzó tényezőnek kell zérusnak lennie:

$\sin(kl)=0$, ha $kl=i\pi$, $(i=0,1,2,3, \dots, \infty)$.

Ebből a feltételből kapjuk a hajlító kontinuum-rezgés saját körfrekvenciáit:

$$k_i l = \frac{\alpha_i}{c} l = i\pi \Rightarrow k_i^2 l^2 = \frac{\alpha_i^2}{c^2} l^2 = i^2 \pi^2 \Rightarrow \alpha_i = i^2 \frac{\pi^2}{l^2} c = i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}}, \quad (i=0,1,2,3, \dots, \infty).$$

A fenti négy ismeretlenes homogén, lineáris algebrai egyenletrendszerbe $\sin(kl)=0$ -t be-

helyettesítve:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_3 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \\ a_1 \operatorname{ch}(kl) + a_2 \operatorname{sh}(kl) + a_3 \cos(kl) &= 0 \\ a_1 \operatorname{ch}(kl) + a_2 \operatorname{sh}(kl) - a_3 \cos(kl) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az első két egyenletből: $a_1 = a_3 = 0$, a harmadik egyenletből $a_2 = 0$ megoldás adódik, viszont az $a_4 \neq 0$ tetszőleges érték lehet (az előző feladatokhoz hasonlóan.)

A mozgásegyenlet megoldása: $v(x,t) = a_4 \sin(k_i x) \cos(\alpha t + \varepsilon) = W(x) T(t)$,

$$(i = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

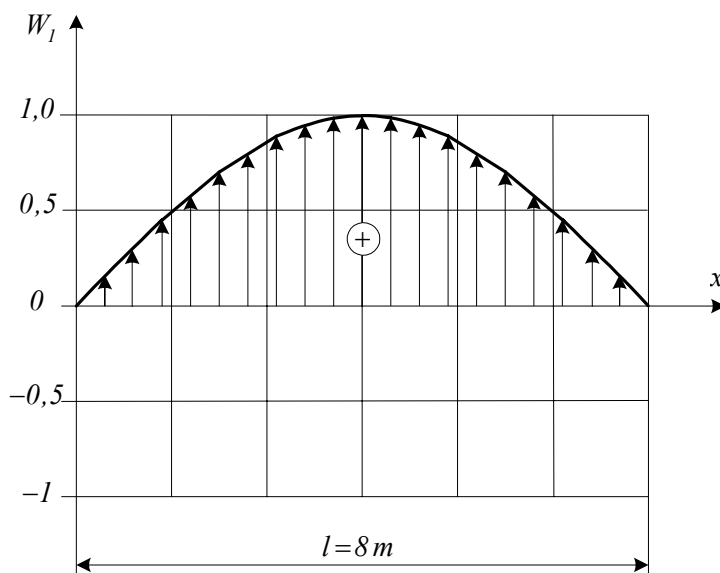
b) A rúd első három sajátfrekvenciájához tartozó rezgéskép meghatározása és megrajzolása:

Az összefüggésben szereplő $c = \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \sqrt{\frac{7852,5}{314,1} \frac{2 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} \cong 25318 \text{ m/s}$ állandó fizikai jelentése: a hajlító rezgés (rezgéshullám) terjedési sebessége a rúdban.

A rezgéseket a $W = W(x)$ függvény ábrázolásával kapjuk: $W_i = W_i(x) = a_4 \sin\left(\frac{\alpha_i}{c} x\right)$.

Legyen a továbbiakban $a_4 = 1$, így $v(x)_i = W_i(x) = \sin\left(i \frac{\pi}{l} x\right)$.

$i=1$ - első saját körfrekvencia, első rezgéskép:



Az első saját körfrekvencia:

$$\alpha_1 = 1^2 \frac{\pi^2}{l^2} c = \frac{3,141^2}{8^2} 25318,$$

$$\alpha_1 = 3901 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Az első rezgéskép:

$$W_1 = W_1(x) = \sin\left(1 \cdot \pi \frac{x}{l}\right)$$

Jellemző értékek

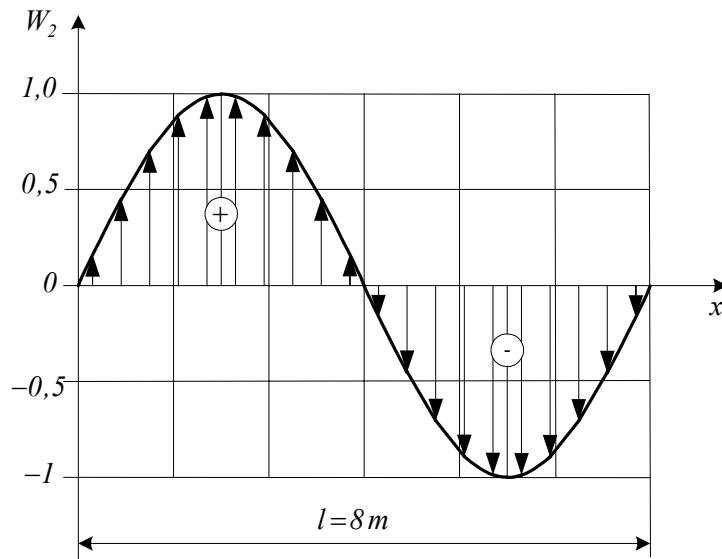
az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$W_1 = W_1(0) = \sin\left(1 \cdot \pi \frac{0}{l}\right) = 0,$$

$$W_1 = W_1(l) = \sin\left(1 \cdot \pi \frac{l}{l}\right) = 0.$$

A rezgésképen a függvényértékek az elmozdulás nagyságát és irányát is szemléltetik, mert ebben az esetben a rúd középvonalára merőleges elmozdulások lépnek fel.

$i=2$ - második saját körfrekvencia, második rezgéskép:



A második saját körfrekvencia:

$$\alpha_2 = 2^2 \frac{\pi^2}{l^2} c = 4 \frac{3,141^2}{8^2} 25318,$$

$$\alpha_2 = 15605 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A második rezgéskép:

$$W_2 = W_2(x) = \sin\left(2 \cdot \pi \frac{x}{l}\right)$$

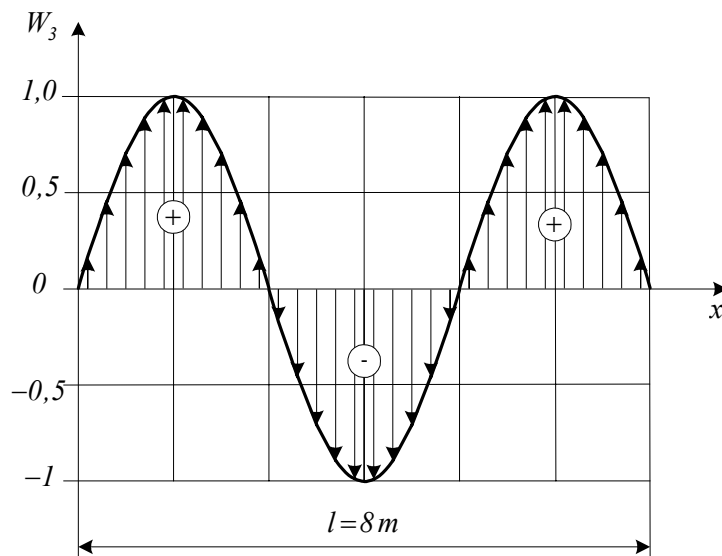
Jellemző értékek

az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$W_2 = W_2(0) = \sin\left(2 \cdot \pi \frac{0}{l}\right) = 0,$$

$$W_2 = W_2(l) = \sin\left(2 \cdot \pi \frac{l}{l}\right) = 0.$$

$i=3$ - harmadik saját körfrekvencia, harmadik rezgéskép:



A harmadik saját körfrekvencia:

$$\alpha_3 = 3^2 \frac{\pi^2}{l^2} c = 9 \frac{3,141^2}{8^2} 25318,$$

$$\alpha_3 = 35109 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A harmadik rezgéskép:

$$W_3 = W_3(x) = \sin\left(3 \cdot \pi \frac{x}{l}\right)$$

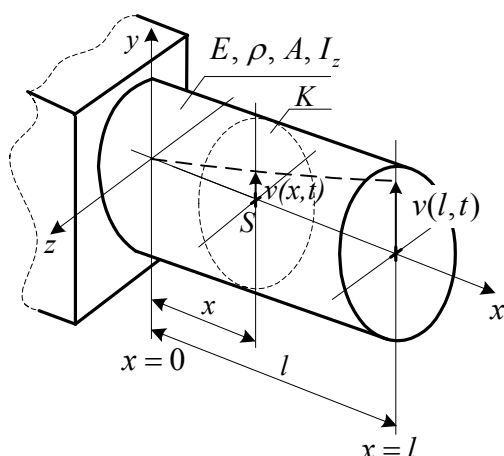
Jellemző értékek

az $x=0$ és $x=l$ helyen:

$$W_3 = W_3(0) = \sin\left(3 \cdot \pi \frac{0}{l}\right) = 0,$$

$$W_3 = W_3(l) = \sin\left(3 \cdot \pi \frac{l}{l}\right) = 0.$$

18. feladat: Befalazott kör keresztmetszetű rúd hajlító rezgései (kontinuum modell)



Adott: az egyik végén befalazott kör keresztmetszetű, l hosszúságú rúd anyaga és geometriája:

$$A = 314 \text{ mm}^2, \quad l = 5 \text{ m}, \quad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3,$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/mm}^2, \quad I_z = 7852,5 \text{ mm}^4.$$

Feladat: a) A hajlító kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása, az első három saját körfrekvencia meghatározása.

b) A rúd első három saját körfrekvenciájához tartozó rezgéskép meghatározása és szemléltetése.

Feltételezzük, hogy a rúd az xy síkban végez hajlító rezgéseket. Az z tengely a keresztmetszetek szimmetria tengelye, ezért a rúd igénybevétele egyenes hajlítás.

Kidolgozás:

a) A hajlító kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása, az első három saját körfrekvencia meghatározása:

A hajlító kontinuum-rezgés mozgásegyenlete:
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{I_z E}{A \rho} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}.$$

ahol $c = \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}}$ a hajlító rezgéshullám terjedési sebessége a rúdban.

$$c = \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \sqrt{\frac{7852,5}{314,1} \frac{2 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} \cong 25318 \text{ m/s}.$$

A differenciálegyenletben a $v = v(x, t)$ a rugalmas szál pontjainak (a K keresztmetszet S súlypontjának) y irányú elmozdulása.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $W(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$v(x, t) = [a_1 \operatorname{ch}(kx) + a_2 \operatorname{sh}(kx) + a_3 \cos(kx) + a_4 \sin(kx)] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = W(x) T(t),$$

ahol $k^2 = \frac{\alpha}{c} = \alpha \sqrt{\frac{A \rho}{I_z E}}.$

A megoldásban szereplő a_1, a_2, a_3, a_4 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozhatók meg:

Az $x = 0$ helyen $v(x = 0, t) = 0$ és $\varphi(x = 0, t) = v'(x = 0, t) = 0.$

Az $x = l$ helyen $M_{hz}(x = l, t) = -I_z E \frac{d^2 v}{dx^2}(x = l, t) = -I_z E v''(x = l, t) = 0, \Rightarrow v''(x = l, t) = 0.$

Az $x = l$ helyen $T_y(x = l, t) = I_z E \frac{d^3 v}{dx^3}(x = l, t) = I_z E v'''(x = l, t) = 0, \Rightarrow v'''(x = l, t) = 0.$

A megoldást behelyettesítve a peremfeltételekbe:

$$\begin{aligned} & \left[\underbrace{a_1 \operatorname{ch}(k \cdot 0)}_{=1} + \underbrace{a_2 \operatorname{sh}(k \cdot 0)}_{=0} + \underbrace{a_3 \cos(k \cdot 0)}_{=1} + \underbrace{a_4 \sin(k \cdot 0)}_{=0} \right] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = 0, \\ & k \left[\underbrace{a_1 \operatorname{sh}(k \cdot 0)}_{=0} + \underbrace{a_2 \operatorname{ch}(k \cdot 0)}_{=1} - \underbrace{a_3 \sin(k \cdot 0)}_{=0} + \underbrace{a_4 \cos(k \cdot 0)}_{=1} \right] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = 0, \\ & k^2 [a_1 \operatorname{ch}(kl) + a_2 \operatorname{sh}(kl) - a_3 \cos(kl) - a_4 \sin(kl)] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = 0, \\ & k^3 [a_1 \operatorname{sh}(kl) + a_2 \operatorname{ch}(kl) + a_3 \sin(kl) - a_4 \cos(kl)] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = 0. \end{aligned}$$

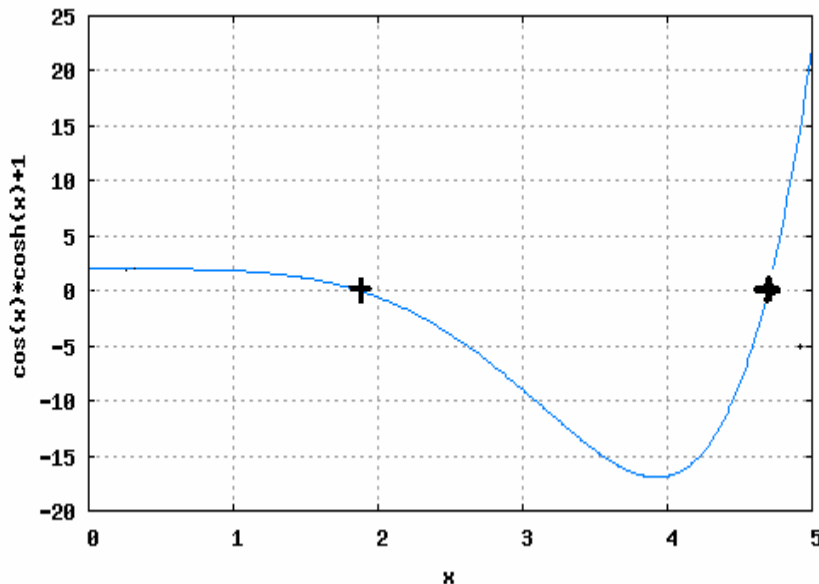
A peremfeltételekből egy homogén, lineáris egyenletrendszert kapunk az a_1, a_2, a_3, a_4 állandókra. Ezt mátrixos formában felírva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{ch}(kl) & \operatorname{sh}(kl) & -\cos(kl) & -\sin(kl) \\ \operatorname{sh}(kl) & \operatorname{ch}(kl) & \sin(kl) & -\cos(kl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Aa = 0}}.$$

A homogén, lineáris egyenletrendszernek akkor van nem zérus megoldása, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsa zérus.

A determinánst kifejtve: $\det \underline{\underline{A}} = \operatorname{ch}(kl) \cos(kl) + 1 = 0$.

Az egyenlet baloldalán álló függvényt ábrázolva kapjuk a zérushelyeket:



Zérushelyek az ábrából:

$$i=1 \quad k_1 l = 1,875.$$

$$i=2 \quad k_2 l = 4,694.$$

További zérushelyek:

$$i=3 \quad k_3 l = 7,855.$$

$$i=4 \quad k_4 l = 10,996.$$

A hajlító kontinuum-rezgés saját körfrekvenciái:

- Az első saját körfrekvencia:

$$k_1 l = 1,875 \Rightarrow k_1 = \frac{1,875}{l}$$

$$\alpha_1 = k_1^2 c = k_1^2 \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \frac{1,875^2}{l^2} c = \left(\frac{1,875}{5}\right)^2 25318 = 3560,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- A második saját körfrekvencia:

$$k_2 l = 4,694 \Rightarrow k_2 = \frac{4,694}{l}$$

$$\alpha_2 = k_2^2 c = k_2^2 \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \frac{4,694^2}{l^2} c = \left(\frac{4,694}{5}\right)^2 25318 \cong 22311 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- A harmadik saját körfrekvencia:

$$k_3 l = 7,855 \Rightarrow k_3 = \frac{7,855}{l}$$

$$\alpha_3 = k_3^2 c = k_3^2 \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \frac{7,855^2}{l^2} c = \left(\frac{7,855}{5}\right)^2 25318 \cong 62486 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b) A rúd első három saját körfrekvenciájához tartozó rezgéskép meghatározása és szemléltetése:

A rezgések meghatározásánál a differenciál-egyenlet megoldásának a *Rayleigh*-féle (vagy *Krülov*-féle) függvényekkel felírt alakját használjuk fel:

$$v(x) = [D_1 S(kx) + D_2 T(kx) + D_3 U(kx) + D_4 V(kx)],$$

$$v'(x) = k [D_1 V(kx) + D_2 S(kx) + D_3 T(kx) + D_4 U(kx)],$$

$$v''(x) = -I_z E k^2 [D_1 U(kx) + D_2 V(kx) + D_3 S(kx) + D_4 T(kx)],$$

$$v'''(x) = -I_z E k^3 [D_1 T(kx) + D_2 U(kx) + D_3 V(kx) + D_4 S(kx)],$$

$$\text{ahol: } S(kx) = \frac{1}{2} [\text{ch}(kx) + \cos(kx)], \quad T(kx) = \frac{1}{2} [\text{sh}(kx) + \sin(kx)],$$

$$U(kx) = \frac{1}{2} [\text{ch}(kx) - \cos(kx)], \quad V(kx) = \frac{1}{2} [\text{sh}(kx) - \sin(kx)].$$

A peremfeltételekből felírt homogén lineáris algebrai egyenletrendszerbe behelyettesítjük a saját körfrekvenciákat (az egyenletrendszernek csak ezekre van triviálistól különböző megoldása).

- Az első saját körfrekvenciához tartozó rezgéskép:

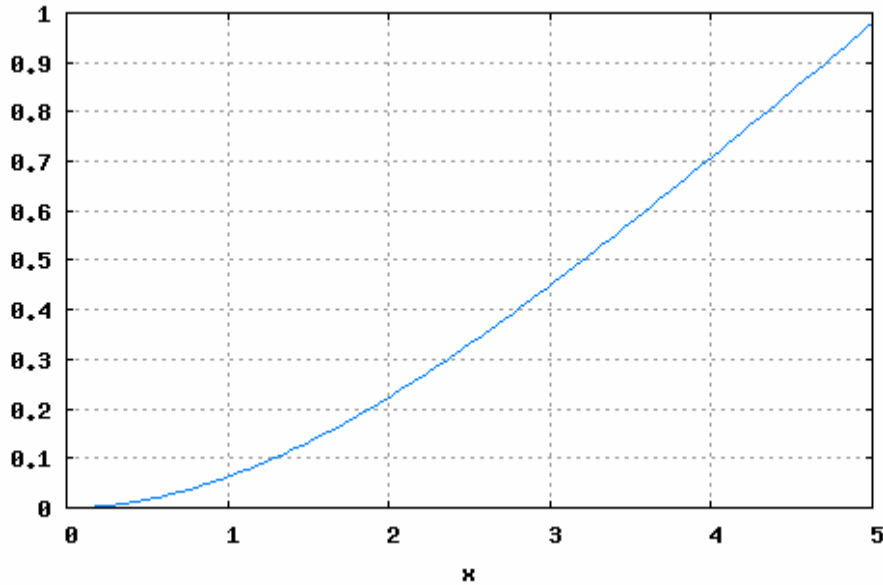
$$\begin{bmatrix} S(0) & T(0) & U(0) & V(0) \\ V(0) & S(0) & T(0) & U(0) \\ U(k_1 l) & V(k_1 l) & S(k_1 l) & T(k_1 l) \\ T(k_1 l) & U(k_1 l) & V(k_1 l) & S(k_1 l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = -0,734.$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2} [\text{ch}(k_1 x) - \cos(k_1 x)] - \frac{0,734}{2} [\text{sh}(k_1 x) - \sin(k_1 x)],$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2} \left[\text{ch}\left(\frac{1,875}{l} x\right) - \cos\left(\frac{1,875}{l} x\right) \right] - \frac{0,734}{2} \left[\text{sh}\left(\frac{1,875}{l} x\right) - \sin\left(\frac{1,875}{l} x\right) \right],$$

$$W_1(x) = 0,5 [\operatorname{ch}(0,369x) - \cos(0,369x)] - 0,367 [\operatorname{sh}(0,369x) - \sin(0,369x)].$$

A $W_1(x)$ első rezgéskép szemléltetése:



$$\alpha_1 \cong 3560 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- A második saját körfrekvenciához tartozó rezgéskép:

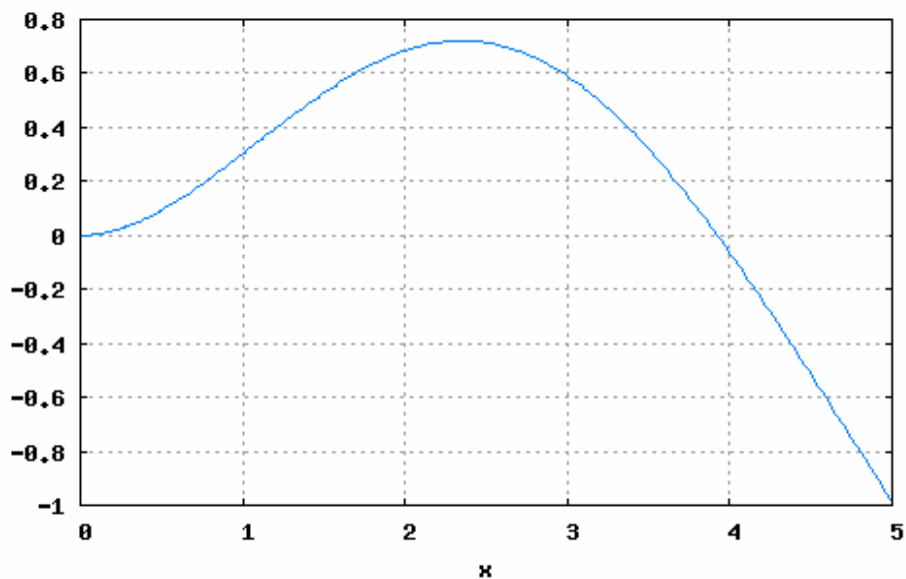
A homogén lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = -1,018.$$

$$W_2(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{4,694}{l}x\right) - \cos\left(\frac{4,694}{l}x\right) \right] - \frac{1,018}{2} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{4,694}{l}x\right) - \sin\left(\frac{4,694}{l}x\right) \right],$$

$$W_2(x) = 0,5 [\operatorname{ch}(0,9388x) - \cos(0,9388x)] - 0,509 [\operatorname{sh}(0,9388x) - \sin(0,9388x)].$$

A $W_2(x)$ második rezgéskép szemléltetése:



$$\alpha_2 \cong 22311 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- A harmadik saját körfrekvenciához tartozó rezgéskép:

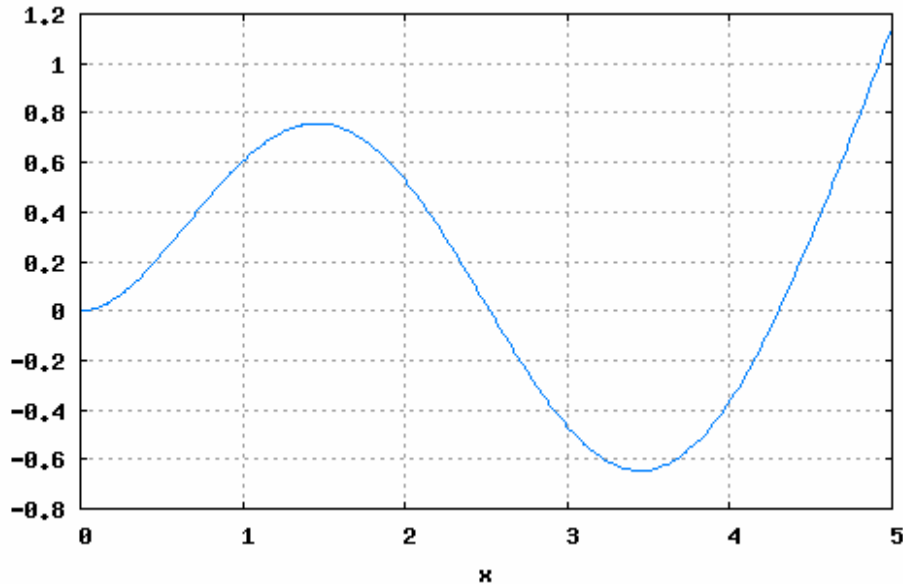
A homogén lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = -0,999.$$

$$W_3(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{7,855}{l}x\right) - \cos\left(\frac{7,855}{l}x\right) \right] - \frac{0,999}{2} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{7,855}{l}x\right) - \sin\left(\frac{7,855}{l}x\right) \right],$$

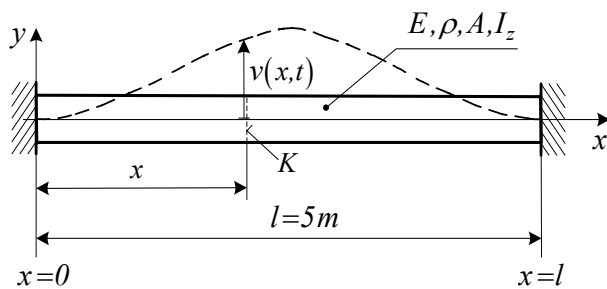
$$W_3(x) = 0,5 \left[\operatorname{ch}(1,571x) - \cos(1,571x) \right] - 0,4995 \left[\operatorname{sh}(1,571x) - \sin(1,571x) \right].$$

A $W_3(x)$ harmadik rezgéskép szemléltetése:



$$\alpha_3 = 62486 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

19. feladat: Mindkét végén befalazott kör keresztmetszetű rúd hajlító rezgései (kontinuum modell)



Adott: a mindkét végén befalazott kör keresztmetszetű, l hosszúságú rúd anyaga és geometriája:

$$A = 314 \text{ mm}^2, l = 5 \text{ m}, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/mm}^2, I_z = 7852,5 \text{ mm}^4.$$

Feladat: a) A hajlító kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása, az első három saját körfrekvencia meghatározása.

b) A rúd első három saját körfrekvenciájához tartozó rezgéseknek meghatározása és szemléltetése.

Feltételezzük, hogy a rúd az xy síkban végez hajlító rezgéseket. Az z tengely a keresztmetszetek szimmetria tengelye, ezért a rúd igénybevétele egyenes hajlítás.

Kidolgozás:

a) A hajlító kontinuum-rezgések differenciálegyenletének megoldása, az első három saját körfrekvencia meghatározása.:

$$\text{A hajlító kontinuum-rezgés mozgásegyenlete: } \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{I_z E}{A \rho} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}.$$

$$\text{ahol } c = \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} \quad \text{a hajlító rezgéshullám terjedési sebessége a rúdban.}$$

$$c = \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \sqrt{\frac{7852,5}{314,1} \frac{2 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} \cong 25318 \text{ m/s}.$$

A differenciálegyenletben a $v = v(x, t)$ a rugalmas szál pontjainak (a K keresztmetszet S súlypontjának) y irányú elmozdulása.

A megoldást *Fourier* módszerrel egy, csak a helykoordinátától függő $W(x)$ és egy, csak az időtől függő $T(t)$ függvény szorzatának alakjában keressük:

$$v(x, t) = [a_1 \operatorname{ch}(kx) + a_2 \operatorname{sh}(kx) + a_3 \cos(kx) + a_4 \sin(kx)] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = W(x) T(t),$$

$$\text{ahol } k^2 = \frac{\alpha}{c} = \alpha \sqrt{\frac{A \rho}{I_z E}}.$$

A megoldásban szereplő a_1, a_2, a_3, a_4 állandók a rúd két végére felírt peremfeltételekből határozhatók meg:

$$\text{Az } x=0 \text{ helyen } v(x=0, t) = 0 \text{ és } \varphi(x=0, t) = v'(x=0, t) = 0.$$

$$\text{Az } x=l \text{ helyen } v(x=l, t) = 0 \text{ és } \varphi(x=l, t) = v'(x=l, t) = 0.$$

A megoldást behelyettesítve a peremfeltételekbe:

$$\left[\underbrace{a_1 \operatorname{ch}(k \cdot 0)}_{=1} + \underbrace{a_2 \operatorname{sh}(k \cdot 0)}_{=0} + \underbrace{a_3 \cos(k \cdot 0)}_{=1} + \underbrace{a_4 \sin(k \cdot 0)}_{=0} \right] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = 0,$$

$$[a_1 \operatorname{ch}(kl) + a_2 \operatorname{sh}(kl) + a_3 \cos(kl) + a_4 \sin(kl)] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = 0,$$

$$k \left[\underbrace{a_1 \operatorname{sh}(k \cdot 0)}_{=0} + \underbrace{a_2 \operatorname{ch}(k \cdot 0)}_{=1} - \underbrace{a_3 \sin(k \cdot 0)}_{=0} + \underbrace{a_4 \cos(k \cdot 0)}_{=1} \right] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = 0,$$

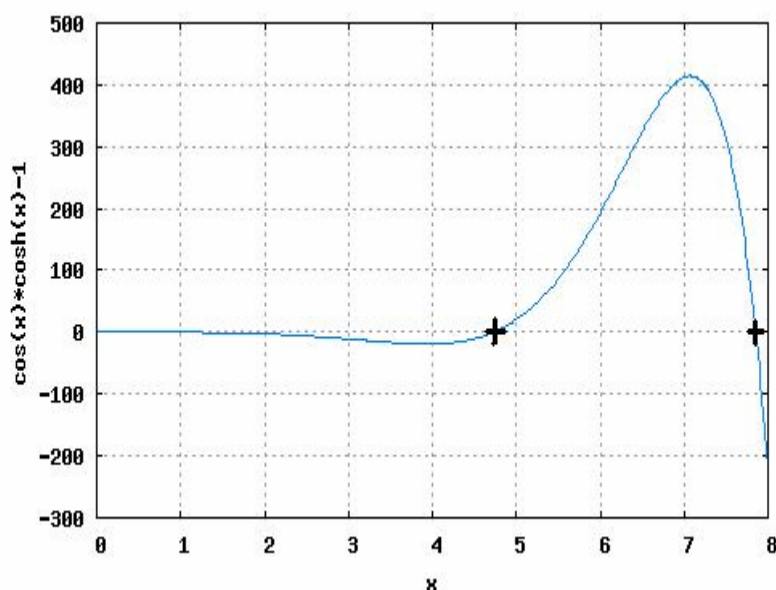
$$k [a_1 \operatorname{sh}(kl) + a_2 \operatorname{ch}(kl) - a_3 \sin(kl) + a_4 \cos(kl)] [\cos(\alpha t + \varepsilon)] = 0.$$

A peremfeltételekből egy homogén, lineáris egyenletrendszert kapunk az a_1, a_2, a_3, a_4 állandókra. Ezt mátrixos formában felírva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{ch}(kl) & \operatorname{sh}(kl) & \cos(kl) & \sin(kl) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{sh}(kl) & \operatorname{ch}(kl) & -\sin(kl) & \cos(kl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Aa = 0}}.$$

A homogén, lineáris egyenletrendszernek akkor van nem zérus megoldása, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsa zérus. Kifejtve: $\det \underline{\underline{A}} = \operatorname{ch}(kl) \cos(kl) - 1 = 0$.

Az egyenlet bal oldalán álló függvényt grafikusán ábrázolva kapjuk a zérushelyeket:



Zérushelyek az ábrából:

$$i = 1 \quad k_1 l = 4,7301.$$

$$i = 2 \quad k_2 l = 7,8532.$$

További zérushelyek:

$$i = 3 \quad k_3 l = 10,9956.$$

$$i = 4 \quad k_4 l = 14,1372.$$

A hajlító kontinuum-rezgés saját körfrekvenciái:

- Az első saját körfrekvencia:

$$k_1 l = 4,7301 \Rightarrow k_1 = \frac{4,7301}{l}$$

$$\alpha_1 = k_1^2 c = k_1^2 \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \frac{4,7301^2}{l^2} c = \left(\frac{4,7301}{5} \right)^2 25318 \cong 22657 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- A második saját körfrekvencia:

$$k_2 l = 7,8532 \Rightarrow k_2 = \frac{7,8532}{l}$$

$$\alpha_2 = k_2^2 c = k_2^2 \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \frac{7,8532^2}{l^2} c = \left(\frac{7,8532}{5} \right)^2 25318 \cong 62454 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- A harmadik saját körfrekvencia:

$$k_3 l = 10,9956 \Rightarrow k_3 = \frac{10,9956}{l}$$

$$\alpha_3 = k_3^2 c = k_3^2 \sqrt{\frac{I_z E}{A \rho}} = \frac{10,9956^2}{l^2} c = \left(\frac{10,9956}{5} \right)^2 25318 \cong 122450 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b) A rúd első három saját körfrekvenciájához tartozó rezgések meghatározása és szemléltetése:

A rezgések meghatározásánál a differenciál-egyenlet megoldásának a *Rayleigh*-féle (vagy *Krülov*-féle) függvényekkel felírt alakját használjuk fel:

$$v(x) = [D_1 S(kx) + D_2 T(kx) + D_3 U(kx) + D_4 V(kx)],$$

$$v'(x) = k [D_1 V(kx) + D_2 S(kx) + D_3 T(kx) + D_4 U(kx)],$$

$$v''(x) = -I_z E k^2 [D_1 U(kx) + D_2 V(kx) + D_3 S(kx) + D_4 T(kx)],$$

$$v'''(x) = -I_z E k^3 [D_1 T(kx) + D_2 U(kx) + D_3 V(kx) + D_4 S(kx)],$$

$$\text{ahol: } S(kx) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(kx) + \cos(kx)], \quad T(kx) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(kx) + \sin(kx)],$$

$$U(kx) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(kx) - \cos(kx)], \quad V(kx) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(kx) - \sin(kx)].$$

A peremfeltételekből felírt homogén lineáris algebrai egyenletrendszerbe behelyettesítjük a saját körfrekvenciákat (az egyenletrendszernek csak ezekre van triviálistól különböző megoldása).

- Az első saját körfrekvenciához tartozó rezgéskép:

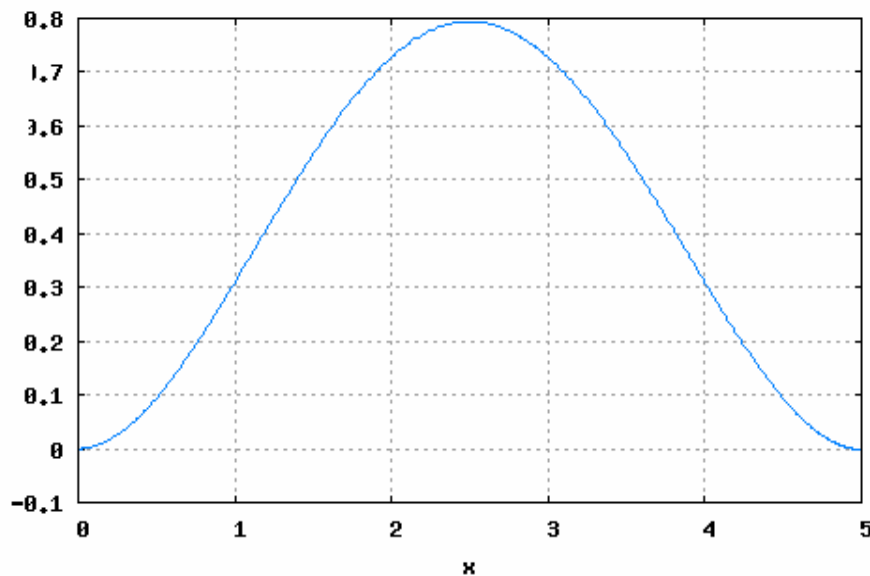
$$\begin{bmatrix} S(0) & T(0) & U(0) & V(0) \\ V(0) & S(0) & T(0) & U(0) \\ S(k_1 l) & T(k_1 l) & U(k_1 l) & V(k_1 l) \\ V(k_1 l) & S(k_1 l) & T(k_1 l) & U(k_1 l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = -0,9826.$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(k_1 x) - \cos(k_1 x)] - 0,9826 [\operatorname{sh}(k_1 x) - \sin(k_1 x)],$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{4,7301}{l} x\right) - \cos\left(\frac{4,7301}{l} x\right) \right] - \frac{0,9826}{2} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{4,7301}{l} x\right) - \sin\left(\frac{4,7301}{l} x\right) \right],$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{4,7301}{5} x\right) - \cos\left(\frac{4,7301}{5} x\right) \right] - \frac{0,9826}{2} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{4,7301}{5} x\right) - \sin\left(\frac{4,7301}{5} x\right) \right].$$

A $W_1(x)$ első rezgéskép szemléltetése:



$$\alpha_1 \cong 22657 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- A második saját körfrekvenciához tartozó rezgéskép:

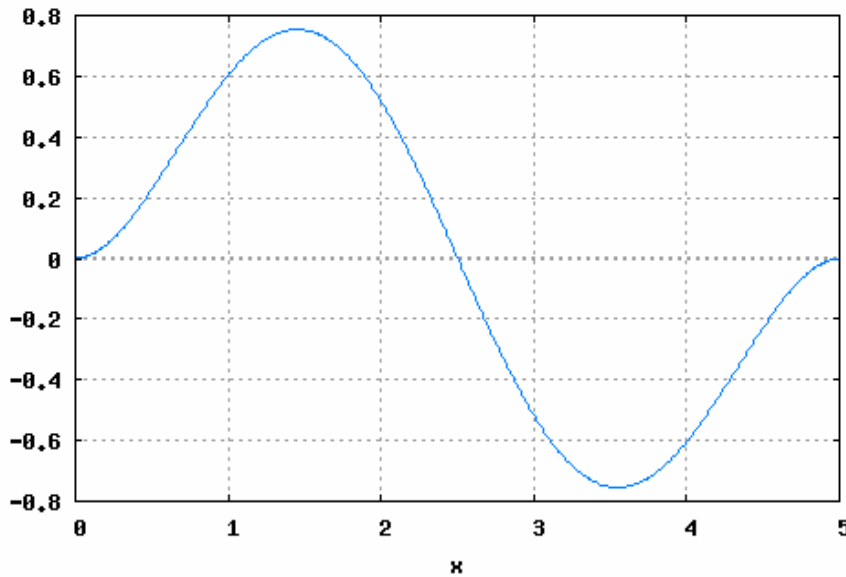
A homogén lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = -1,0008.$$

$$W_2(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{7,8532}{l} x\right) - \cos\left(\frac{7,8532}{l} x\right) \right] - \frac{1,0008}{2} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{7,8532}{l} x\right) - \sin\left(\frac{7,8532}{l} x\right) \right],$$

$$W_2(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{7,8532}{5} x \right) - \cos \left(\frac{7,8532}{5} x \right) \right] - \frac{1,0008}{2} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{7,8532}{5} x \right) - \sin \left(\frac{7,8532}{5} x \right) \right].$$

A $W_2(x)$ második rezgéskép szemléltetése:



$$\alpha_2 \cong 62\,454 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- A második saját körfrekvenciához tartozó rezgéskép:

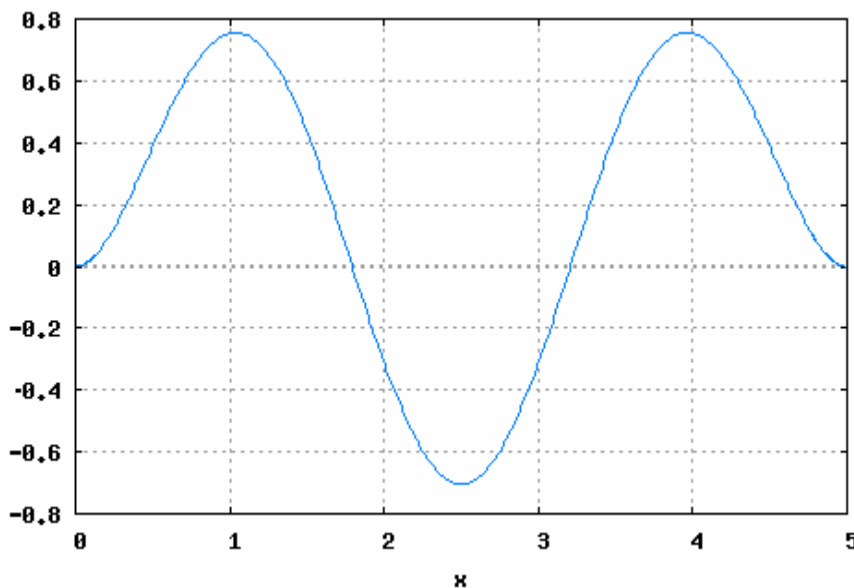
A homogén lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = -0,9999.$$

$$W_3(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{10,9956}{l} x \right) - \cos \left(\frac{10,9956}{l} x \right) \right] - \frac{0,9999}{2} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{10,9956}{l} x \right) - \sin \left(\frac{10,9956}{l} x \right) \right],$$

$$W_3(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{10,9956}{5} x \right) - \cos \left(\frac{10,9956}{5} x \right) \right] - \frac{0,9999}{2} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{10,9956}{5} x \right) - \sin \left(\frac{10,9956}{5} x \right) \right].$$

A $W_3(x)$ harmadik rezgéskép szemléltetése:



$$\alpha_3 = 122\,450 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$