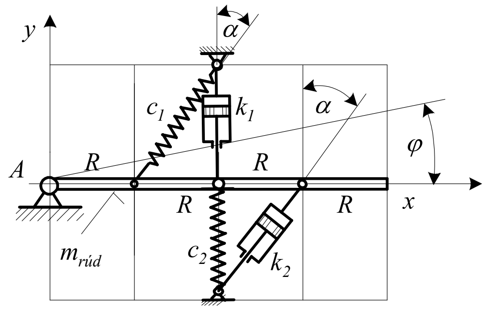
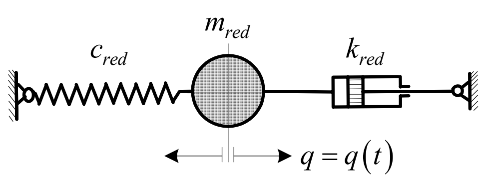
SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM **ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK**

REZGÉSTAN GYAKORLAT

Kidolgozta: Dr. Nagy Zoltán egyetemi adjunktus

5. feladat: Szabad csillapított rezgőrendszer





Adott: Az ábrán látható A pontban csapágyazott csillapított, szabad rezgőrendszer redukált rezgőrendszere.

Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása: $q(t)=\varphi(t)$.

A helyettesítő rezgőrendszer jellemzői:

$1/c_{red}=11875\,\text{Nm/rad}$, $k_{red}=1075\,\text{Nms/rad}$, $m_{red}=64\ \text{kgm}^2/\text{rad}$.

Kezdeti feltételek: $t_0=0$: $y_0=\varphi_0=8\cdot10^{-3}$ rad, $\dot{y}_0=v_0=\dot{\varphi}_0=40\cdot10^{-3}$ rad/s.

Feladat: a) Meghatározni a csillapított rendszer ν körfrekvenciáját!

b) Eldönteni, hogy kialakul-e rezgés!

c) Meghatározni a csillapított rezgőrendszer T_ν rezgésidejét és a rezgés f_ν frekvenciáját.

d) Felírni a rezgőrendszer mozgásegyenletének megoldását!

e) A Λ logaritmikus dekrementum kiszámítása.

f) Komplex kitérés(elmozdulás) vektor és a komplex sebességvektorok közötti Φ fázisszög meghatározása.

Kidolgozás:

a) A csillapított rezgőrendszer ν körfrekvenciájának meghatározása:

$$\alpha^2=\frac{1}{m_{red}\,c_{red}}=\frac{1}{64\cdot8,421\cdot10^{-5}}=\frac{100000}{64\cdot8,421}=185,548\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2},\qquad \alpha=\sqrt{185,548}=13,62\frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\beta=\frac{k_{red}}{2m_{red}}=\frac{1075}{2\cdot64}=8,398\frac{\text{rad}}{\text{s}},\qquad \nu=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{185,548-70,533}=10,724\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b) $\alpha=13,6$ rad/s $>\nu=10,724$ rad/s. Ezért kialakul a rezgés!

c) A T_ν rezgésidő kiszámítása: $\nu=\dfrac{2\pi}{T_\nu}\quad\Rightarrow\quad T_\nu=\dfrac{2\pi}{\nu}=\dfrac{6,28}{10,724}=0,585$ s.

A csillapított rezgés f_ν frekvenciája: $f_\nu=\dfrac{1}{T_\nu}=\dfrac{1}{0,585}=1,7\ \dfrac{1}{\text{s}}=\text{Hz}$.

d) A rezgőrendszer mozgásegyenletének megoldása (komplex alakban):

$z = z(t) = A\,e^{(-\beta+i\nu)t} = (a+i\,b)e^{(-\beta+i\nu)t} = a\,e^{(-\beta+i\nu)t} + i\,b\,e^{(-\beta+i\nu)t}$ - a komplex elmozdulás.

Ebből a megoldás képzetes része: $\mathrm{Im}\left[z(t)\right] = b\,e^{(-\beta+i\nu)t} = y(t)$.

A kezdeti feltételből: $y(t_0 = 0) = b\,e^{(-\beta+i\nu)t_0} = b\underbrace{e^{(-\beta+i\nu)0}}_{=1} = y_0 = b = 8\cdot 10^{-3}$ rad.

A komplex sebességvektor: $\dot{z}(t) = A(-\beta+i\,\nu)e^{(-\beta+i\nu)t} = (a+i\,b)(-\beta+i\,\nu)e^{(-\beta+i\nu)t}$.

Elvégezve a kijelölt műveleteket: $\dot{z}(t) = (-a\beta - b\,\nu)e^{(-\beta+i\nu)t} + i\left[(a\,\nu - b\,\beta)e^{(-\beta+i\nu)t}\right]$.

Ebből a megoldás képzetes része: $\mathrm{Im}\left[\dot{z}(t)\right] = (a\,\nu - b\,\beta)e^{(-\beta+i\nu)t} = \dot{y}(t)$.

A kezdeti feltételből: $\dot{y}(t_0 = 0) = \dot{y}_0 = (a\,\nu - b\beta)e^{(-\beta+i\nu)t_0} = (a\,\nu - b\beta)\underbrace{e^{(-\beta+i\nu)0}}_{=1} = v_0$.

$$(a\,\nu - b\beta) = v_0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_0 + b\,\beta}{\nu} = \frac{40\cdot 10^{-3} + 8\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}398}{10{,}724} \cong 0{,}01 \text{ rad.}$$

Az a és b paraméterek meghatározása után a komplex megoldásfüggvény:

$$z = z(t) = A\,e^{(-\beta+i\nu)t} = (a+i\,b)e^{(-\beta+i\nu)t} = e^{-\beta t}\left[(a+i\,b)e^{i\nu t}\right] = e^{-\beta t}\left[(a+i\,b)(\cos\nu t + i\sin\nu t)\right],$$

$$z(t) = (a\cos\nu t - b\sin\nu t)e^{-\beta t} + i\left[(a\sin\nu t + b\cos\nu t)\,e^{-\beta t}\right],$$

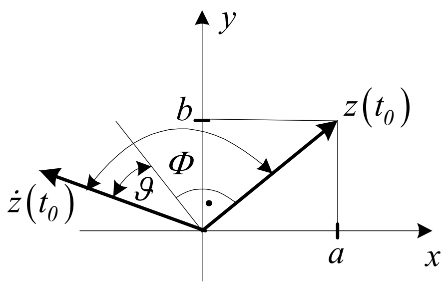
Ebből a megoldás képzetes része: $\mathrm{Im}\left[z(t)\right] = (a\sin\nu t + b\cos\nu t)\,e^{-\beta t} = y(t)$.

$$y(t) = (a\sin\nu t + b\cos\nu t)\,e^{-\beta t} = (0{,}01\sin 10{,}724\,t + 0{,}008\cos 10{,}724\,t)\,e^{-8{,}39t}$$

A fenti összefüggés a rúd A pont körüli , radiánban értelmezett $\varphi(t) \equiv y(t)$ szögelfordulását adja meg az idő függvényében.

e) Logaritmikus dekrementum: $\Lambda = \ln\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right) = 2\pi\dfrac{\beta}{\nu} = 6{,}28\dfrac{8{,}398}{10{,}724} = 4{,}92$.

e) A komplex kitérés és a komplex sebességvektor közötti fázisszög meghatározása és szemléltetése:



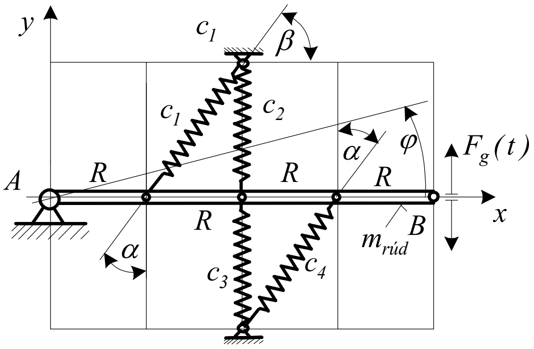
a = 0,01 rad, b = 0,008 rad.

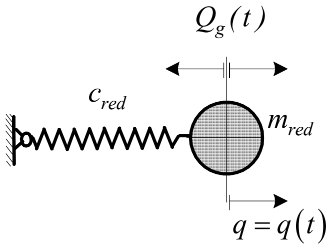
$\Phi = \dfrac{\pi}{2} + \vartheta$, ahol $tg\vartheta = \dfrac{\beta}{\nu} = \dfrac{8{,}398}{10{,}724} = 0{,}783$

$\vartheta = arctg 0{,}783 \cong 38^\circ$

$\Phi = \dfrac{\pi}{2} + \vartheta = 90^\circ + 38^\circ = 128^\circ$.

6. feladat: Csillapítatlan gerjesztett rezgőrendszer





Adott: Az ábrán látható az *A* pontban csapágyazott rezgőrendszer redukált rezgőrendszere (*3. feladat*). Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása: $q(t)=\varphi(t)$.

$1/c_{red}=38750\,\text{Nm/rad}$, $m_{red}=64\ \text{kgm}^2/\text{rad}$, $F_g(t)=F_{g0}\sin(\omega_g t)$, $F_{g0}=100\ \text{N}$,

$\omega_g=40\ \text{rad/s}$, $R=1\,\text{m}$, $\varepsilon=0$.

Feladat: a) A redukált rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása.
b) A redukált rendszer mozgásegyenletének általános megoldása.
c) A *Z* komplex ellenállás meghatározása.
d) A rezgés vektorábrájának megrajzolása.

Kidolgozás:

a) A rezgőrendszer mozgásegyenlete:

Általános koordináta: $q=\varphi$.

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dE}{d\dot q}\right)-\dfrac{dE}{dq}=Q_c+Q_g$.

Az általános gerjesztő erő: $Q_g(t)$

$$Q_g(t)=\vec F_g\cdot\vec\beta_B=F_{g0}\sin(\omega_g t)\vec j\cdot(4R\vec j)=4R\,F_{g0}\sin(\omega_g t),\quad \text{ahol}$$

$$\vec F_g=F_{g0}\sin(\omega_g t)\vec j,\ \ \vec\beta_B=\frac{\partial\vec v_B}{\partial\dot q}=\frac{\partial\vec v_B}{\partial\dot\varphi}=\frac{\partial(4R\dot\varphi\vec j)}{\partial\dot\varphi}=4R\vec j.$$

A rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$\frac{64}{12}m_{rúd}R^2\ddot\varphi+\left(\frac{R^2\cos^2\alpha}{c_1}+\frac{4R^2}{c_2}+\frac{4R^2}{c_3}+\frac{9R^2\cos^2\alpha}{c_4}\right)\varphi=4RF_{g0}\sin(\omega_g t).$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_{red}\ddot q+\frac{1}{c_{red}}q=Q_g(t)=Q_{g0}\sin(\omega_g t).$$

$$64\ddot q+38750q=400\sin(40t).$$

b) A mozgásegyenlet általános megoldása:

$$z(t)=z_h(t)+z_p(t)=A\,e^{i\alpha t}+\frac{P_0e^{i\omega_g t}}{i\,\omega_g Z}.$$

Állandósult rezgések esetén bennünket a megoldás partikuláris része érdekel:

$$z(t)\approx z_p(t)=\frac{P_0e^{i\omega_g t}}{i\,\omega_g Z},\qquad \text{ahol}\ \ P_0=Q_{g0}e^{i\varepsilon}=4R\,F_{g0}\,e^{i\varepsilon}=4R\,F_{g0}\underbrace{e^0}_{=1}=4RF_{g0}\ (\text{Nm}).$$

c) A rezgőrendszer komplex ellenállása:

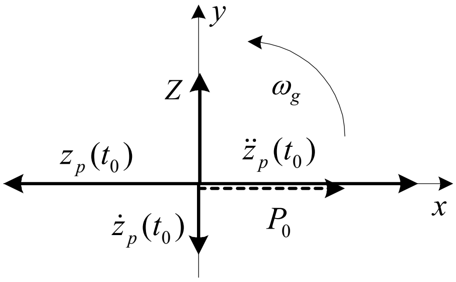
$$Z = i\left(\omega_g m_{red} - \frac{1}{c_{red}\,\omega_g}\right) = i\left(40\cdot 64 - \frac{38750}{40}\right) = i\left(2560 - 968{,}75\right) = i\left(1591{,}25\right)\ \text{Nms.}$$

d) A gerjesztett rezgés vektorábrája:

$$z_p(t_0=0) = \frac{P_0}{i\,\omega_g Z}\underbrace{e^{i\omega_g t_0}}_{=1} = \frac{P_0}{i\,\omega_g Z} = \frac{4RF_{g0}}{i\,\omega_g Z} = \frac{4\cdot 1\cdot 100}{i\,40\cdot(i1591{,}25)} = \frac{10}{-1591{,}25} = -6{,}284\cdot 10^{-3}\ \text{rad},$$

$$\dot z_p(t_0=0) = i\,\omega_g \frac{P_0 e^{i\omega_g t_0}}{i\,\omega_g Z} = i\,\omega_g\, z_p\left(t_0\right) = i\,40\cdot\left(-6{,}284\cdot 10^{-3}\right) = -i\ 0{,}251\ \text{rad/s},$$

$$\ddot z_p(t_0=0) = -\omega_g^2 z_p\left(t_0\right) = -40^2\cdot\left(-6{,}284\cdot 10^{-3}\right) = 10{,}05\ \text{rad/s}^2.$$



$$z_p(t) = \frac{P_0}{i\,\omega_g Z}e^{i\omega_g t} = \frac{P_0}{i\,\omega_g Z}\left(\cos\omega_g t + i\sin\omega_g t\right),$$

$$z_p(t) = \left(-6{,}284\cdot 10^{-3}\cos 40t\right) + i\left(-6{,}284\cdot 10^{-3}\sin 40t\right),$$

$$\dot z_p(t) = \left(0{,}251\sin 40t\right) + i\left(-0{,}251\cos 40t\right),$$

$$\ddot z_p(t) = \left(10{,}05\cos 40t\right) + i\left(10{,}05\sin 40t\right).$$

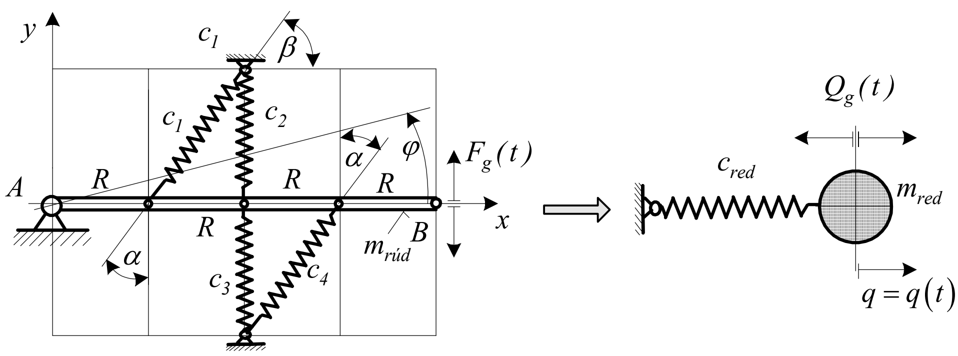
A tényleges megoldást az ω_g körfrekvenciával forgó komplex vektoroknak a függőleges, y képzetes tengelyre eső merőleges vetülete szolgáltatja:

$$y(t) = \text{Im}\left[z_p(t)\right] = -6{,}284\cdot 10^{-3}\sin 40t\quad \text{rad},$$

$$\dot y(t) = \text{Im}\left[\dot z_p(t)\right] = -0{,}251\cos 40t\quad \text{rad/s},$$

$$\ddot y(t) = \text{Im}\left[\ddot z_p(t)\right] = 10{,}05\sin 40t\quad \text{rad/s}^2.$$

7. feladat: Csillapítatlan gerjesztett rezgőrendszer



Adott: Az ábrán látható az *A* pontban csapágyazott rezgőrendszer redukált rezgőrendszere (*3.feladat*). Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása: $q(t) = \varphi(t)$.

$1/c_{red} = 38750\ \text{Nm/rad}$, $m_{red} = 64\ \text{kgm}^2\text{/rad}$, $F_g(t) = F_{g0}\sin(\omega_g t)$, $F_{g0} = 100\ \text{N}$, $\omega_g = 40\ \text{rad/s}$, $R = 1\,\text{m}$, $\varepsilon = 0$.

Feladat: a) A rezgőrendszer mozgásegyenletének meghatározása.
b) A redukált rezgőrendszer α saját körfrekvenciájának meghatározása.
c) A gerjesztett rezgés maximális kitérésének meghatározása.

d) A rúd maximális szögelfordulásának ábrázolása a gerjesztési körfrekvencia függvényében (a rezonanciagörbe megrajzolása).

e) A c_4 rugóállandójú rugóban ébredő maximális Q_4 rugóerőt meghatározása.

Kidolgozás:

a) A rendszer mozgásegyenlete:

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{q}}\right)-\frac{dE}{dq}=Q_c+Q_g$.

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_{red}\ddot{q}+\frac{1}{c_{red}}q=Q_g(t)=Q_{g0}\sin(\omega_g\, t),$$

$$64\ddot{q}+38750q=400\sin(40t)\ .$$

b) A rendszer saját körfrekvenciája:

$$\alpha^2=\frac{1}{m_{red}\,c_{red}}=\frac{38750}{40}=605,4\ \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}\qquad\to\qquad\alpha=\sqrt{605,4}=24,606\frac{\text{rad}}{\text{s}}\ .$$

c) A maximális kitérés meghatározása:

$$\varphi_{stat}=c_{red}\,Q_{g0}=c_{red}\,4\,R\,F_{g0}=\frac{400}{38750}=0,01032(rad)\ \to\ \varphi_{stat}=0,591^\circ.$$

$$\varphi^{\max}=\varphi_{stat}\frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega_g^2\right)^2}}=0,01032\frac{24,606^2}{\sqrt{\left(24,606^2-40^2\right)^2}}=6,284\cdot10^{-3}\ (rad)\ \to\ \varphi^{\max}=0,36^\circ.$$

c) A $\varphi^{\max}=\varphi^{\max}\left(\omega_g\right)$ rezonenciafüggvény meghatározása:

A függvény jellegzetes pontjai:

- statikus állapot esetén$\left(\omega_g=0\right)$:

$$\varphi^{\max}=\varphi_{stat}\frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega_g^2\right)^2}}=\frac{0,01032\cdot24,606^2}{\sqrt{\left(24,606^2-0^2\right)^2}}=0,01032\ \text{rad}\to\varphi^{\max}=\varphi_{stat}=0,591^\circ.$$

- rezonancia állapot esetén$\left(\omega_g=\alpha=24,606\ \text{rad/s}\right)$:

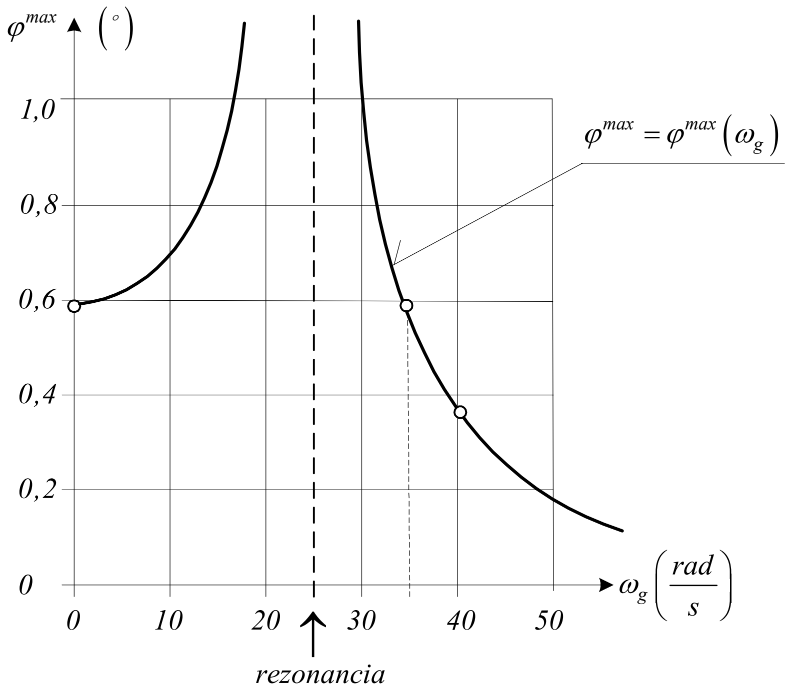
$$\varphi^{\max}=\varphi_{stat}\frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega_g^2\right)^2}}=\frac{0,01032\cdot24,606^2}{\sqrt{\left(24,606^2-24,606^2\right)^2}}=\to\infty\ \ (\text{rad}).$$

- $\varphi^{\max}\left(\omega_g\right)=\varphi_{stat}$ esetén:

$$\varphi^{\max}=\varphi_{stat}=\frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2-\omega_g^2\right)^2}}\varphi_{stat}\ \to\ 1=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\xi^2\right)^2}}\ \to\ \xi=\frac{\omega_g}{\alpha}=\sqrt{2}\ \to\ \omega_g=\sqrt{2}\,\alpha\ ,$$

$$\omega_g=\sqrt{2}\,\alpha=\sqrt{2}\cdot24,606=34,79\frac{\text{rad}}{\text{s}}\ \ \text{esetén}\ \ \varphi^{\max}=\varphi_{stat}=0,591^\circ$$

A rezonancia görbe:

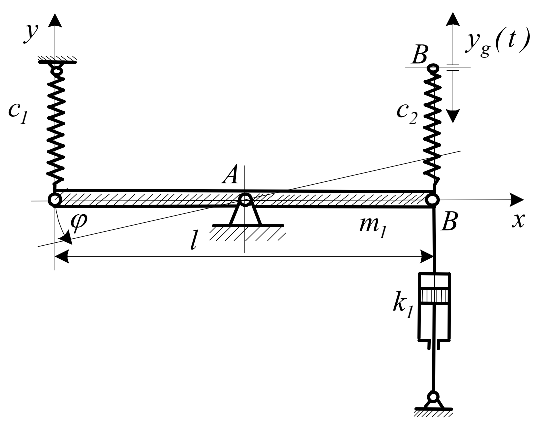


d) A c_4 rugóállandójú rugóban ébredő maximális Q_4 rugóerőt meghatározása.

$$Q_4(t)=\frac{9\,R^2\cos^2\alpha}{c_4}\varphi(t)=\frac{9\cdot 1^2\cdot\cos^2 30^\circ}{4\cdot 10^{-4}}\left(-6,284\cdot 10^{-3}\sin 40\,t\right)=-106\sin\left(40\,t\right),$$

$$Q_4^{\max}=\left|-106\underbrace{\sin\left(40\,t\right)}_{=1}\right|=106\ \text{N}.$$

8. feladat: Útgerjesztés - gerjesztés rugón keresztül



Adott:

Az ábrán látható, az A pontban csapágyazott rezgőrendszer. A rendszert a c_2 rugó B pontjában az $y_g(t)=y_{g0}\sin(\omega_g\,t+\varepsilon)$ függvény szerint (útgerjesztés) gerjesztjük.

$l=2\,\text{m}$, $c_1=2\cdot 10^{-4}\ \text{m/N}$, $c_2=4\cdot 10^{-4}\ \text{m/N}$,
$m_1=12\ \text{kg}$, $k_1=200\,\text{Ns/m}$, $y_{g0}=10\,\text{mm}$,
$\omega_g=20\,\text{rad/s}$.

Feladat: a) Az ábrán látható rezgőrendszer mozgásegyenletének felírása kis szögelfordulások esetén.
b) A redukált rendszer jellemző paramétereinek meghatározása.

Kidolgozás:

Az általános koordináta legyen a rúd szögelfordulása $q=\varphi$.

a) A mozgásegyenlet felírása:

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dE}{d\dot q}\right)-\dfrac{dE}{dq}=Q.$

A rendszer kinetikai energiája:

$$E=\frac{1}{2}J_a\,\omega^2=\frac{1}{2}J_a\,\dot{q}^2=\frac{1}{2}J_a\,\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_1\,l^2\right)\dot{\varphi}^2.$$

$$\frac{dE}{d\dot{q}}=\frac{dE}{d\dot{\varphi}}=\frac{1}{12}m_1 l^2\dot{\varphi}\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{\varphi}}\right)=\frac{1}{12}m_1 l^2\ddot{\varphi}\ ,$$

$$\frac{dE}{dq}=\frac{dE}{d\varphi}=0\ .$$

A rugókban felhalmozódott alakváltozási energia:

$$U=U_1+U_2=\frac{1}{2}\frac{\left(l/2\,\varphi\right)^2}{c_1}+\frac{1}{2}\frac{\left(y_g-l/2\,\varphi\right)^2}{c_2}.$$

Az általános visszatérítő erő és gerjesztő erő:

$$Q=-\frac{dU}{dq}=-\frac{dU}{d\varphi}=-\left(\underbrace{\frac{l^2}{4c_1}\varphi+\frac{l^2}{4c_2}\varphi}_{Q_c}-\underbrace{\frac{l}{2c_2}y_g}_{Q_g}\right),$$

$$Q_c=-\left(\frac{l^2}{4c_1}\varphi+\frac{l^2}{4c_2}\varphi\right)\quad,\quad Q_g=\left(\frac{l}{2c_2}y_g\right).$$

Az általános csillapító erő: $Q_k=\vec{F}_{k_1}\cdot\vec{\beta}_B$,

$$\vec{F}_{k_1}=-k_1\,\vec{v}_{d_1}=-k_1\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)\quad,\quad\vec{\beta}_B=\frac{\partial\vec{v}_B}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)}{\partial\dot{\varphi}}=\left(\frac{l}{2}\vec{j}\right),$$

$$Q_k=-k_1\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\,\vec{j}\right)\left(\frac{l}{2}\vec{j}\right)=-\frac{1}{4}k_1\,l^2.\dot{\varphi}.$$

A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{d\dot{q}}\right)-\frac{dE}{dq}=Q_k+Q_c+Q_g$.

$$\left(\frac{1}{12}m_1 l^2\right)\ddot{\varphi}+\left(\frac{1}{4}k_1 l^2\right)\dot{\varphi}+\left(\frac{l^2}{4c_1}+\frac{l^2}{4c_2}\right)\varphi=\frac{l}{2c_2}y_{g0}\sin(\omega_g t).$$

b) Redukált rezgőrendszer jellemzői:

$$m_{red}=\frac{1}{12}m_1 l^2=\frac{1}{12}\cdot 12\cdot 2^2=4\ \mathrm{kgm}^2,$$

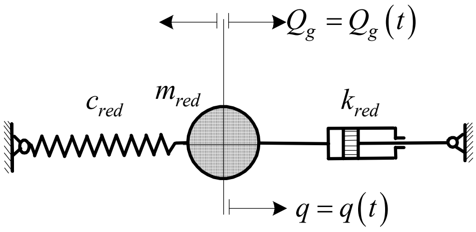
$$k_{red}=\frac{1}{4}k_1 l^2=\frac{1}{4}200\cdot 2^2=200\,\mathrm{Nsm},$$

$$\frac{1}{c_{red}}=\frac{l^2}{4c_1}+\frac{l^2}{4c_2}=\frac{2^2}{4\cdot 2\cdot 10^{-4}}+\frac{2^2}{4\cdot 2\cdot 10^{-4}}=7500\,\mathrm{Nm},$$

$$Q_g=Q_{g0}\sin(\omega_g t)=\left(\frac{l}{2c_2}y_{g0}\right)\sin(\omega_g t)=\left(\frac{2}{2\cdot 4\cdot 10^{-4}}0{,}01\right)\sin(20\,t)=25\sin(20\,t)\ \ \mathrm{Nm}.$$

A redukált rezgőrendszer mozgásegyenlete:

$$4\ddot{\varphi}+200\dot{\varphi}+7500\varphi=25\sin(20\,t).$$



$Q_g = Q_g(t)$
c_{red}
m_{red}
k_{red}
$q = q(t)$