

1. MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. Ts; Tarnai Gábor mérnökstanár.)

*Matematikai összefoglaló, kiinduló feladatok***1.1. Mátrixalgebrai összefoglaló:****a) Mátrix értelmezése, jelölése:****Mátrix:** skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

$$\text{Jelölése: } \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Négyzetes mátrix: olyan mátrix, amelyben a sorok és oszlopok száma megegyezik.

$$\text{Oszlopmátrix: } \underline{\underline{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Sormátrix: } \underline{\underline{a}}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

b) Műveletek mátrixokkal:

- **Mátrix transzponáltja:** tükrözés a főátlóra. A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

•

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)}$$

- **Mátrixok összeadása, kivonása:** csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, ill. vonhatók ki egymásból.

•

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \pm \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) \\ (a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)}$$

- Mátrix szorzás (sor-oszlop kombináció):**

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_1 + a_{12}b_2) \\ (a_{21}b_1 + a_{22}b_2) \end{bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 1)}$$

$$\underline{\underline{a}}^T \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{d}}^T,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}_{(1 \times 2)} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} (a_1b_{11} + a_2b_{21}) & (a_1b_{12} + a_2b_{22}) \end{bmatrix}_{(1 \times 2)} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}_{(1 \times 2)}$$

c) Különleges mátrixok:

- Egység mátrix:** $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$.

Az egység mátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorzott mátrixot.

- Szimmetrikus mátrix:** $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$, azaz $a_{ij} = a_{ji}$, ahol $(i, j = 1, 2, 3, \dots)$. A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükörképükkel.

Például: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

- Ferdeszimmetrikus mátrix:** $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$, azaz $a_{ij} = -a_{ji}$, ahol $i, j = 1, 2, 3, \dots$. A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükörképének mínusz egyszeresével. Ebből következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

Például: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.2. Vektorok skaláris, kétszeres vektoriális és diadikus szorzata:

Vektor: irányított geometriai, vagy fizikai mennyiség, ami jellemezhető iránnyal, nagysággal, mértékegységgel.

a) Vektorok skaláris szorzata:

Skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$, ahol α a vektorok által bezárt szög.

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

A szorzás eredménye egy skaláris mennyiség.

b) Vektorok kétszeres vektoriális szorzata:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \text{ vagy } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Kiszámítás kétféleképpen lehetséges:

- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,
- a kifejtési szabállyal:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}), \text{ ill. } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

c) Vektorok diadikus szorzata:

Legyen adott az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ tetszőleges vektor.

Két vektor diadikus szorzatának jelölése: $\vec{a} \circ \vec{b}$, elnevezése: diád.

Két vektor diadikus szorzatát a szorzás tulajdonságainak megadásával értelmezzük:

- a diadikus szorzás és a skaláris szorzás asszociatív (csoportosítható, azaz a szorzások elvégzésének sorrendjét felcserélhetjük):

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \cdot \vec{c}),$$
- a diád a skaláris szorzás szempontjából nem kommutatív (nem mindegy, hogy egy diádot jobbról vagy balról szorzunk skalárisan egy vektorral, mert más eredményt kapunk).

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) \neq (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Ha a szorzás a fent leírt összefüggéseket kielégíti a szorzás diadikus.

Két vektor diadikus szorzatának kiszámítása jobbsodrású, derékszögű koordináta rendszerben.

$$\begin{bmatrix} \vec{a} \circ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$

1.3. Tenzorok előállítása:

a) Tenzorok értelmezése és tulajdonságai:

Tenzor: homogén, lineáris vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés).

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}.$$



A $\underline{\underline{T}}$ tenzor a tetszőleges $\vec{v}$ vektorhoz a $\vec{w}$ képvektort rendeli hozzá.

b) Tenzor előállítása jobbsodratú, derékszögű descartesi koordináta-rendszerben:

Tenzor megadása:

- a tenzor koordinátaival (mátrixával) és
- koordináta rendszerrel történik.

Tenzor koordinátáinak jelölése mátrixba rendezve:

$$- \quad \left[\underline{\underline{T}} \right]_{xyz} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Tenzor előállítása:

Legyen ismert három értékpár:

$$\vec{i} \rightarrow \vec{a} = f(\vec{i}), \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{j} \rightarrow \vec{b} = f(\vec{j}), \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

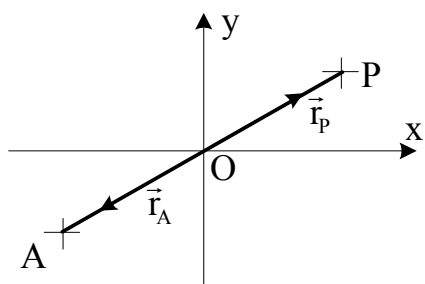
$$\vec{k} \rightarrow \vec{c} = f(\vec{k}), \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.$$

A tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j} + \vec{c} \circ \vec{k})$.

$$\text{A tenzor mátrixa: } \left[\underline{\underline{T}} \right]_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}.$$

1.3.1. Tenzor előállítás:

Adott: $\vec{r}_p = (12\vec{i} + 4\vec{j})\text{m}$.



Feladat:

- Azon $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektoroknak a koordináta-rendszer O kezdőpontjára tükrözött vektorait állítja elő.
- Előállítani azt az $\vec{r}_A$ vektort, amely az $\vec{r}_p$ vektor origóra vett tükörképe.

- a) A tenzor előállítása:

Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{i} \rightarrow \vec{a} = -\vec{i}, \quad \vec{j} \rightarrow \vec{b} = -\vec{j}.$$

A két értékpárból a tenzor: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j})$

A tenzor mátrixa: $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

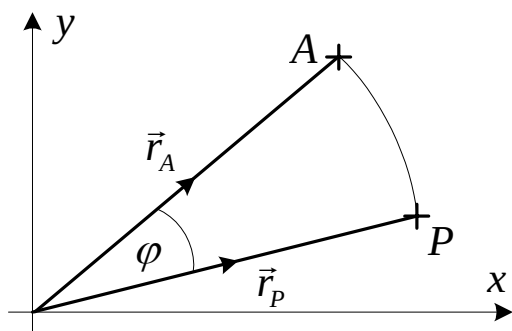
- b) Az origóra tükrözött $\vec{r}_A$ képvektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = (-12\vec{i} - 4\vec{j})\text{m}.$$

1.3.2. Tenzor előállítás:

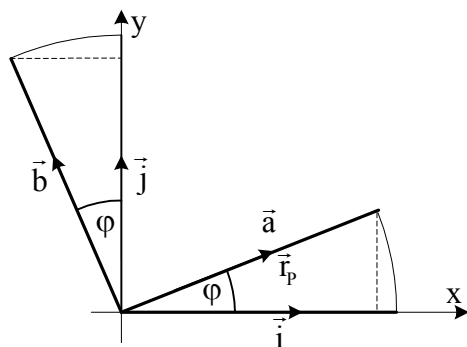
Adott: $\vec{r}_p = (8\vec{i} + 2\vec{j})\text{m}$, $\varphi = 60^\circ$.



Feladat:

- Azon $\underline{\underline{T}}$ tenzor mátrixának előállítása, amely az xy sík helyvektoraiból a helyvektorok z tengely körül φ szöggel elforgatott vektorait állítja elő.
- Előállítani azt az $\vec{r}_A$ vektort, amelyet az $\vec{r}_p$ vektor φ szöggel történő elforgatásával kapunk.

a) A tenzor előállítása:



Síkbeli esetben a tenzort két értékpárja határozza meg:

$$\vec{i} \rightarrow \vec{a} = (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}),$$

$$\vec{j} \rightarrow \vec{b} = (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}).$$

A két értékpárból a tenzor: $\underline{\underline{T}} = (\vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j})$.

A diádok kiszámítása:

$$[\vec{a} \circ \vec{i}] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ a_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{b} \circ \vec{j}] = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

A tenzor mátrixa:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

b) Az elforgatott $\vec{r}_A$ vektor meghatározása:

$$\vec{r}_A = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}_p = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,268 \\ 7,928 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_A = (2,268\vec{i} + 7,928\vec{j})\text{m}$$

1.3.3. Tenzor megadása (tisztá nyírás):

Adott: az ábrán jelölt egységnyi hosszúságú négyzet.

	<u>Feladat:</u> - Adja meg annak a leképezésnek a tenzorát, amely az egységnyi oldalú négyzetet a szaggatott vonallal megrajzolt téglalapba viszi át. - Határozza meg a szimmetria pont képét.
--	--

Megoldás:

Az egységvektorok képei és a tenzor kiszámítása:

$$\vec{i} \rightarrow \vec{a} = 2\vec{i}; \quad \vec{j} \rightarrow \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{j}, \quad \underline{\underline{T}} = \vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j} = 2\vec{i} \circ \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \circ \vec{j}$$

$$[\vec{i} \circ \vec{i}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\vec{j} \circ \vec{j}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A leképezés tenzora tehát:

$$\underline{\underline{T}}_{(x,y)} = 2\vec{i} \circ \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \circ \vec{j} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A négyzet szimmetria-középpontjának képe:

$$\vec{r} = \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \right) \text{ m}$$

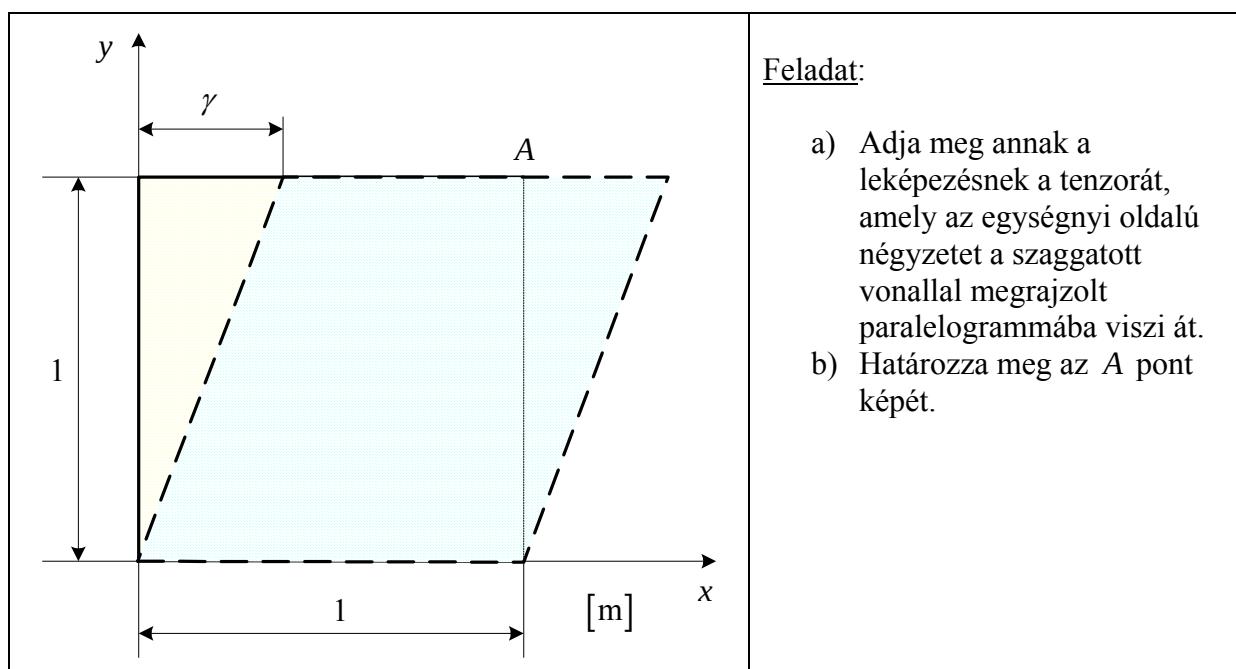
Ebből a téglalap szimmetria-középpontjának képe:

$$\vec{v} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r} \rightarrow \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$\vec{v} = \left(\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} \right) \text{ m}$$

1.3.4. Tenzor megadása (egyszerű nyírás):

Adott: az ábrán jelölt egységnyi hosszúságú négyzet.



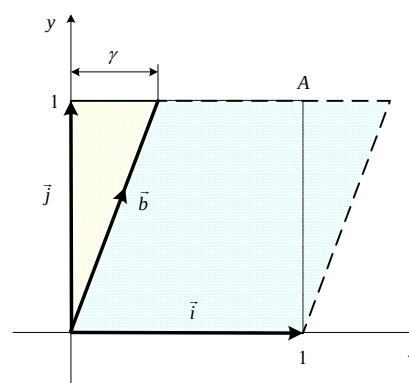
Megoldás:

Az egységvektorok képei és a tenzor kiszámítása:

$$\vec{i} \rightarrow \vec{a} = \vec{i}; \quad \vec{j} \rightarrow \vec{b} = \gamma \vec{i} + \vec{j},$$

..

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \vec{a} \circ \vec{i} + \vec{b} \circ \vec{j} = \vec{i} \circ \vec{i} + (\gamma \vec{i} + \vec{j}) \circ \vec{j} = \\ &= \vec{i} \circ \vec{i} + \gamma \vec{i} \circ \vec{j} + \vec{j} \circ \vec{j} \end{aligned}$$



$$[\vec{i} \circ \vec{i}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; [\vec{j} \circ \vec{j}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; [\vec{i} \circ \vec{j}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A leképezés tenzora tehát:

$$\underbrace{[\underline{\underline{T}}]}_{(x,y)} = \vec{i} \circ \vec{i} + \gamma \vec{i} \circ \vec{j} + \vec{j} \circ \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

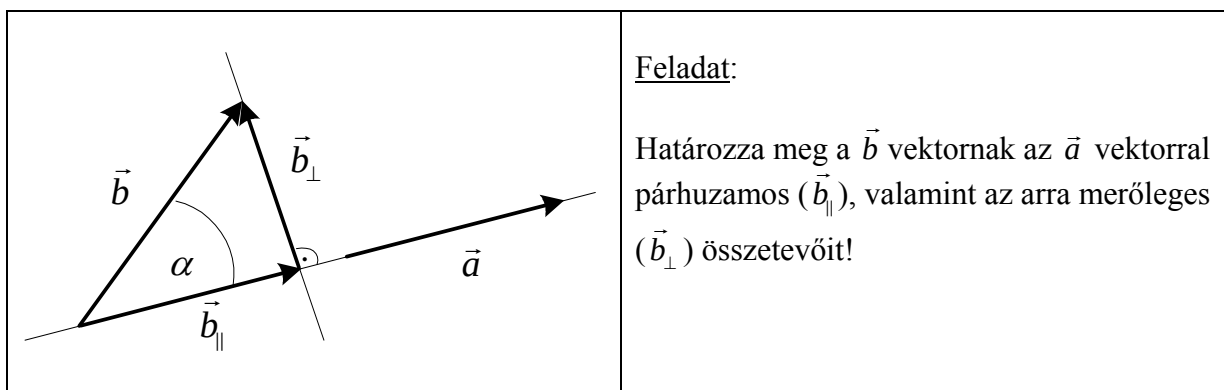
Ha $\vec{r} = (\vec{i} + \vec{j})$ m (az A pont), akkor $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ez esetben leképezése:

$$\vec{v} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\gamma \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \vec{v} = [(1+\gamma)\vec{j} + \vec{j}] \text{ m}$$

1.3.5. Vektor adott irányú összetevője

Adott: az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor. $\vec{a} = (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$ m ; $\vec{b} = (\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k})$ m .



Megoldás: Keressük a $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$ összefüggésnek megfelelő vektorokat.

Az ábrából látható: $|\vec{b}_{\parallel}| = |\vec{b}| \cos \alpha$, a vektor pedig $\vec{b}_{\parallel} = |\vec{b}_{\parallel}| \vec{e}_a$,

ahol $\vec{e}_a$ az $\vec{a}$ vektor irány-egységvektora, tehát $|\vec{e}_a| = 1$. Meghatározása: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Most már:

$$\vec{b}_{\parallel} = |\vec{b}_{\parallel}| \vec{e}_a = (|\vec{b}| \cos \alpha) \cdot \vec{e}_a = \left(|\vec{b}| \underbrace{|\vec{e}_a|}_{1} \cos \alpha \right) \cdot \vec{e}_a = \frac{|\vec{b}| |\vec{a}| \cos \alpha}{|\vec{a}|} \cdot \vec{e}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

ahol $|\vec{a}|^2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 9$, és $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 + 8 - 2) = 7$.

Behelyettesítés után tehát:

$$\vec{b}_{\parallel} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_{\parallel} = \frac{7}{9} \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{b}_{\parallel} = \left(\frac{7}{9} \vec{i} + \frac{14}{9} \vec{j} - \frac{14}{9} \vec{k} \right) \text{ m}}}}$$

Mivel $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$, ebből $\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel}$, azaz

$$\vec{b}_{\perp} = (\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) - \left(\frac{7}{9} \vec{i} + \frac{14}{9} \vec{j} - \frac{14}{9} \vec{k} \right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{b}_{\perp} = \left(\frac{2}{9} \vec{i} + \frac{22}{9} \vec{j} + \frac{23}{9} \vec{k} \right) \text{ m}}}}$$

Másik megoldás:

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \left[\overbrace{(\vec{a} \cdot \vec{a})}^{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} \right] = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \quad \text{illetve} \quad \vec{b}_{\perp} = \frac{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})}{|\vec{a}|^2}$$

Tehát a $\vec{b}$ vektornak az $\vec{a}$ vektorral párhuzamos, valamint az arra merőleges összetevői:

$$\vec{b}_{\parallel} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}, \quad \vec{b}_{\perp} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}.$$

Megjegyzés:

$$\vec{b}_{\parallel} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{a}) = \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \circ \vec{a}) \cdot \vec{b} = \underline{\underline{A_{\parallel}}} \cdot \vec{b},$$

$$\vec{b}_{\perp} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \left[(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{b}}_{\vec{b}} - \vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \right] = \frac{1}{|\vec{a}|^2} [(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{a}) \cdot \vec{b}] = \underline{\underline{A_{\perp}}} \cdot \vec{b}.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} \vec{b}_{\parallel} &= \underline{\underline{A_{\parallel}}} \cdot \vec{b} & \text{ahol} & \quad \underline{\underline{A_{\parallel}}} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \circ \vec{a}), & \text{illetve} \\ \vec{b}_{\perp} &= \underline{\underline{A_{\perp}}} \cdot \vec{b} & \text{ahol} & \quad \underline{\underline{A_{\perp}}} = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \underline{\underline{E}} - (\vec{a} \circ \vec{a}). \end{aligned}$$