

Végelem analízis

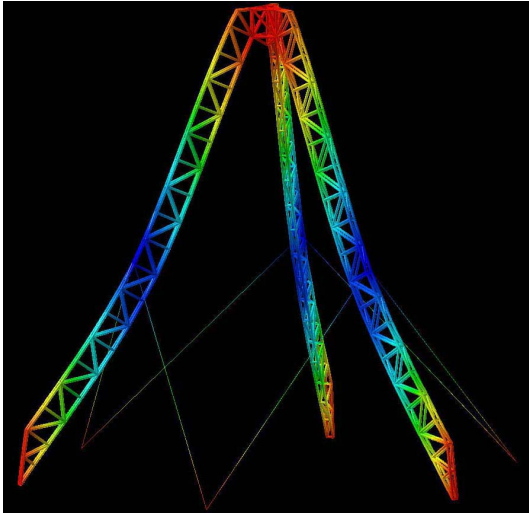
1. előadás

Pere Balázs

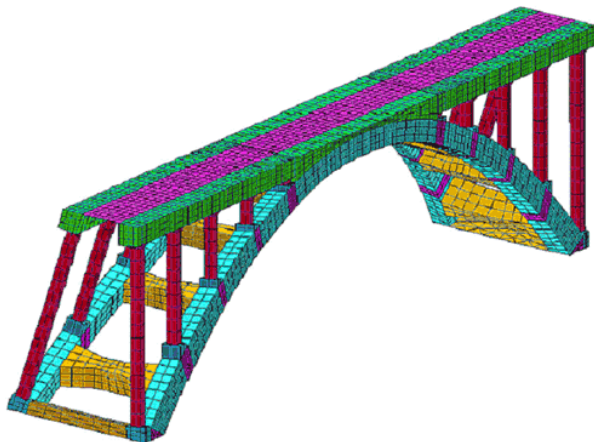
Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék

2011. szeptember 18.

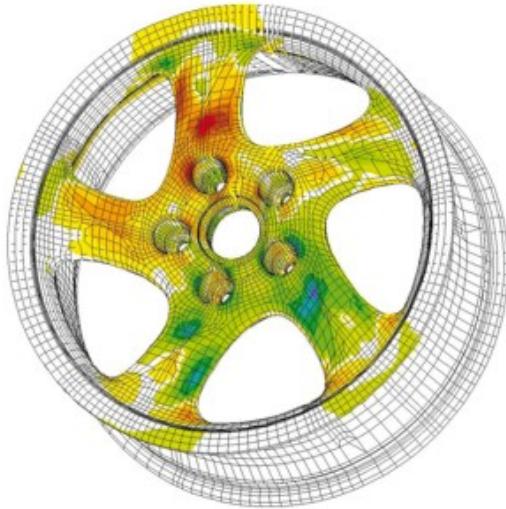
Mi az a VégesElem Analízis (VEA)?



Mi az a Végeselem Analízis (VEA)?



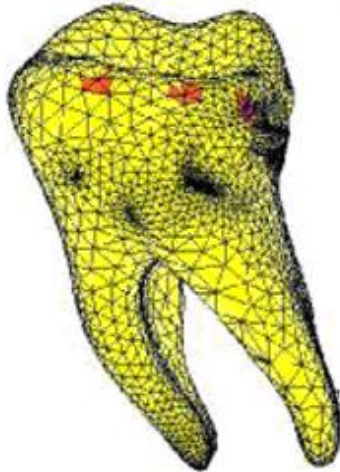
Mi az a VégesElem Analízis (VEA)?



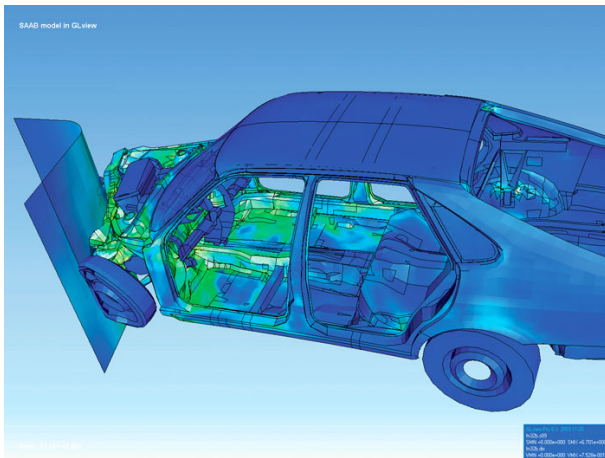
Mi az a VégesElem Analízis (VEA)?



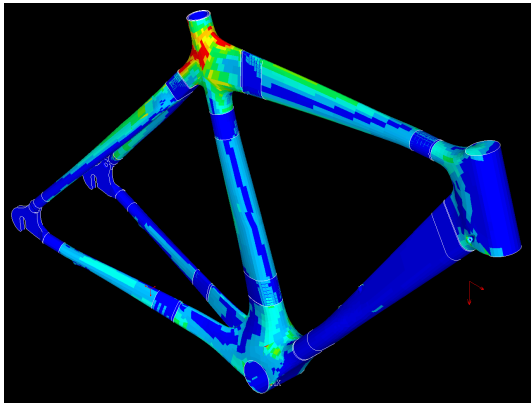
Mi az a VégesElem Analízis (VEA)?



Mi az a VégesElem Analízis (VEA)?



Mi az a VégesElem Analízis (VEA)?



- Rugalmasságtani alapok
 - Kinematika
 - Dinamika
 - Anyagtörvények
 - Rugalmasságtani peremérték feladat megfogalmazása
- Rugalmasságtani peremérték feladat közelítő megoldása
 - Virtuális munka elve
 - Virtuális elmozdulás elve
 - Potenciális energia minimuma elv
 - Lagrange-féle variációs elv
 - Ritz-módszer

- A végelem módszer felépítése 3D-s feladatra
 - Háromszög és négyszög végelem
 - Elmozdulások, alakváltozások és feszültségek közelítése egy végelemen
 - Egy végelem alakváltozási energiája és merevségi mátrixa
 - Külső erők munkája egy végelemen
 - Egy végelem potenciális energiája
 - Teljes szerkezet merevségi mátrixa és tehervektora
 - Kinematikai peremfeltételek figyelembevétele
 - Kinematikai terhelés
- Kiegészítések a végelem módszerhez
 - Numerikus integrálás
 - Gauss kvadratura

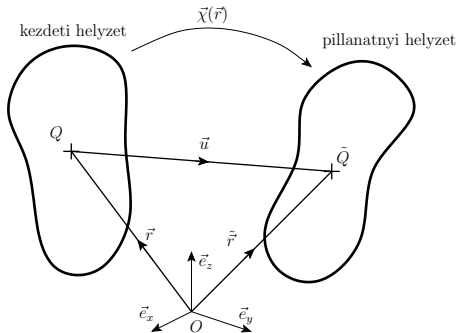
- Mechanikai modellek a végelem módszerben
 - Rúd-modellek
 - Bernoulli-féle rúdelmélet
 - Timoshenko-féle rúdelmélet
 - 2D-s feladatok
 - Általánosított síkfeszültség feladat
 - Síkalakváltozási feladat
 - Forgásszimmetrikus feladat
 - Héj-modellek
 - Mebrán elmélet
 - Kirchhoff-Love elmélet
 - Reissner-Mindlin elmélet

Kinematika:

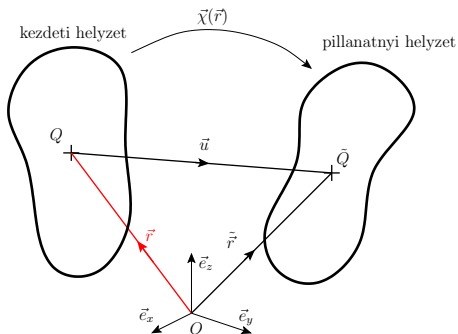
A kinematika a testek mozgását, alakváltozását írja le, és nem keresi a mozgást vagy alakváltozást létrehozó okokat.

A „kinematika” szó eredete: $\kappaινεῖν$ (kinein), jelentése: mozogni.

Elmozdulások



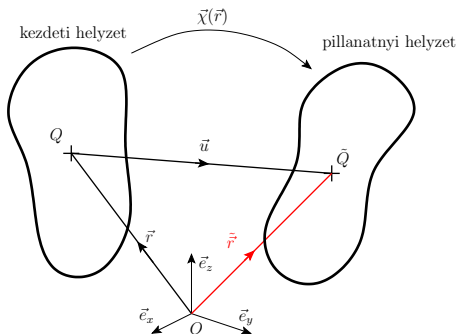
Elmozdulások



$\vec{r}$ – a deformálatlan test pontjaiba mutató vektor

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Elmozdulások



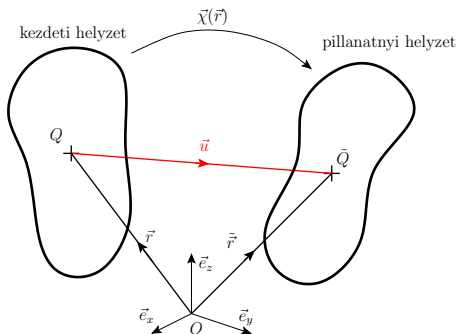
$\vec{\tilde{r}}$ – a deformált test pontjaiba mutató vektor

$$\vec{\tilde{r}} = \tilde{x}\vec{e}_x + \tilde{y}\vec{e}_y + \tilde{z}\vec{e}_z$$

ahol

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y, z) \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y, z) \quad \tilde{z} = \tilde{z}(x, y, z)$$

Elmozdulások

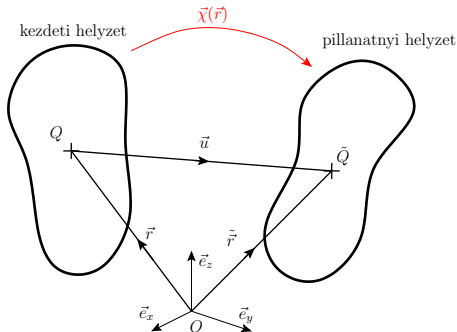


$$\vec{u} = \tilde{\vec{r}} - \vec{r} = (\tilde{x} - x) \vec{e}_x + (\tilde{y} - y) \vec{e}_y + (\tilde{z} - z) \vec{e}_z = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + w \vec{e}_z$$

ahol

$$u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z)$$

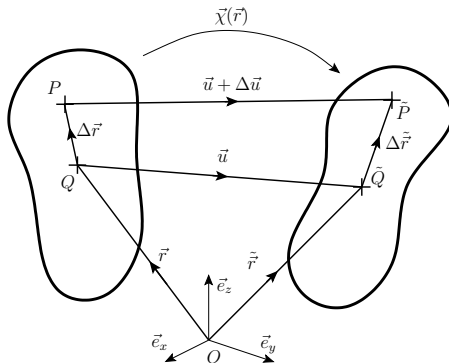
Elmozdulások



$\vec{\chi}(\vec{r})$ – egy vektor-vektor függvény, amely megadja a deformálatlan test pontjainak leképezését a deformált test pontjaira. Ez a függvény nem feltétlenül lineáris!

$$\vec{\chi}(\vec{r}) = \vec{\chi}(x, y, z) = \vec{\tilde{r}}$$

Alakváltozások

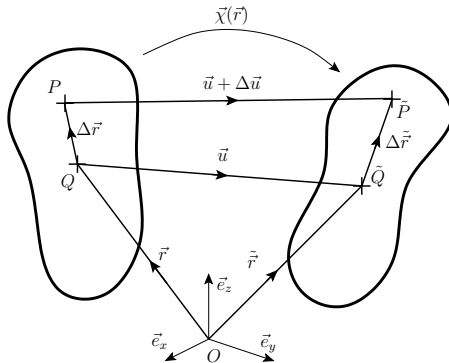


$$\vec{\chi}(\vec{r}_P) = \vec{r}_{\tilde{P}}$$

vagy ugyan ez másként

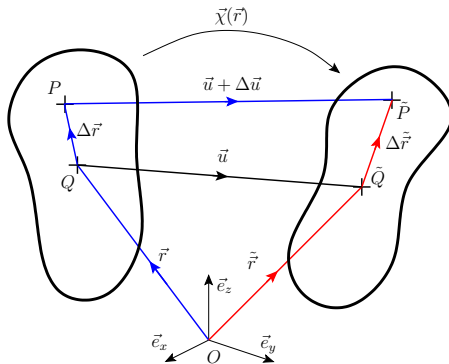
$$\vec{\chi}(\vec{r}_Q + \Delta\vec{r}) = \vec{r}_{\tilde{Q}} + \Delta\vec{r}$$

Alakváltozások



Kérdés: Mekkora a $\Delta\vec{u}$, ha $\vec{r}$ és $\Delta\vec{r}$ tetszőleges?

Alakváltozások



$$\vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) = \tilde{\vec{r}} + \Delta\tilde{\vec{r}}$$

Alakváltozások

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) = \tilde{\vec{r}} + \Delta\tilde{\vec{r}}$$

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) = \underbrace{\vec{\chi}(\vec{r})}_{\tilde{\vec{r}}} + \underbrace{[\vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{\chi}(\vec{r})]}_{\Delta\tilde{\vec{r}}}$$

$$\underbrace{\vec{r} + \vec{u}}_{\tilde{\vec{r}}} + \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r})$$

Alakváltozások

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) = \tilde{\vec{r}} + \Delta\tilde{\vec{r}}$$

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) = \underbrace{\vec{\chi}(\vec{r})}_{\tilde{\vec{r}}} + \underbrace{[\vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{\chi}(\vec{r})]}_{\Delta\tilde{\vec{r}}}$$

$$\underbrace{\vec{r} + \vec{u}}_{\tilde{\vec{r}}} + \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r})$$

Alakváltozások

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) = \tilde{\vec{r}} + \Delta\tilde{\vec{r}}$$

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} + (\vec{u} + \Delta\vec{u}) = \underbrace{\vec{\chi}(\vec{r})}_{\tilde{\vec{r}}} + \underbrace{[\vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{\chi}(\vec{r})]}_{\Delta\tilde{\vec{r}}}$$

$$\underbrace{\vec{r} + \vec{u}}_{\tilde{\vec{r}}} + \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r})$$

Alakváltozások

Sorfejtés a lineáris tagokig bezárólag

$$\vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \approx \underbrace{\vec{\chi}(\vec{r})}_{\vec{\tilde{r}}} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\tilde{r}} + \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \vec{\tilde{r}} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z$$

Alakváltozások

Sorfejtés a lineáris tagokig bezárólag

$$\vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \approx \underbrace{\vec{\chi}(\vec{r})}_{\tilde{\vec{r}}} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\vec{r}} + \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \tilde{\vec{r}} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z$$

Alakváltozások

Sorfejtés a lineáris tagokig bezárólag

$$\vec{\chi}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \approx \underbrace{\vec{\chi}(\vec{r})}_{\vec{\tilde{r}}} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\tilde{r}} + \Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \vec{\tilde{r}} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} + \Delta \vec{u} &= \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z = \\ &= \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \Delta z =\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} + \Delta \vec{u} &= \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z = \\ &= \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \Delta z = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z\end{aligned}$$

Alakváltozások

Azonosság

$$\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} + \Delta \vec{u} &= \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \Delta z = \\ &= \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) \Delta x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) \Delta y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \Delta z = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z\end{aligned}$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z = \\
 & = \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z + \\
 & + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z + \\
 & + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z =
 \end{aligned}$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z = \\
 & = \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z + \\
 & + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z + \\
 & + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_x \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_y \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z \Delta z =
 \end{aligned}$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot (\vec{e}_x \Delta x + \vec{e}_y \Delta y + \vec{e}_z \Delta z) + \\ &+ \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot (\vec{e}_x \Delta x + \vec{e}_y \Delta y + \vec{e}_z \Delta z) + \\ &+ \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot (\vec{e}_x \Delta x + \vec{e}_y \Delta y + \vec{e}_z \Delta z) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot (\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z)$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x \right) \cdot (\vec{e}_x \Delta x + \vec{e}_y \Delta y + \vec{e}_z \Delta z) + \\ &+ \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y \right) \cdot (\vec{e}_x \Delta x + \vec{e}_y \Delta y + \vec{e}_z \Delta z) + \\ &+ \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot (\vec{e}_x \Delta x + \vec{e}_y \Delta y + \vec{e}_z \Delta z) = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot (\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z) \end{aligned}$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned}
 & \Delta \vec{r} + \Delta \vec{u} = \\
 & = \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot (\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z) = \\
 & = \underbrace{\vec{\chi} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right)}_{\nabla} \cdot \underbrace{(\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z)}_{\Delta \vec{r}} = \\
 & = \vec{\chi} \circ \nabla \cdot \Delta \vec{r}
 \end{aligned}$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned}
 & \Delta \vec{r} + \Delta \vec{u} = \\
 & = \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot (\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z) = \\
 & = \underbrace{\vec{\chi} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right)}_{\nabla} \cdot \underbrace{(\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z)}_{\Delta \vec{r}} = \\
 & = \vec{\chi} \circ \nabla \cdot \Delta \vec{r}
 \end{aligned}$$

Alakváltozások

$$\begin{aligned}
 & \Delta \vec{r} + \Delta \vec{u} = \\
 & = \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial z} \circ \vec{e}_z \right) \cdot (\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z) = \\
 & = \underbrace{\vec{\chi} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right)}_{\nabla} \cdot \underbrace{(\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z)}_{\Delta \vec{r}} = \\
 & = \vec{\chi} \circ \nabla \cdot \Delta \vec{r}
 \end{aligned}$$

Alakváltozások

Mivel

$$\vec{\chi}(\vec{r}) = \vec{\tilde{r}} \quad \text{és} \quad \vec{\tilde{r}} = \vec{r} + \vec{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \overset{\downarrow}{\vec{\tilde{r}}} \circ \nabla \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial \vec{\tilde{r}}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} + \vec{u}) \cdot \Delta\vec{r} =$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \Delta\vec{r} = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}}_I + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta\vec{r} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}$$

Alakváltozások

Mivel

$$\vec{\chi}(\vec{r}) = \vec{\tilde{r}} \quad \text{és} \quad \vec{\tilde{r}} = \vec{r} + \vec{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \overset{\downarrow}{\vec{\tilde{r}}} \circ \nabla \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial \vec{\tilde{r}}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} + \vec{u}) \cdot \Delta\vec{r} =$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \Delta\vec{r} = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}}_I + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta\vec{r} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}$$

Alakváltozások

Mivel

$$\vec{\chi}(\vec{r}) = \vec{\tilde{r}} \quad \text{és} \quad \vec{\tilde{r}} = \vec{r} + \vec{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{r} + \Delta\vec{u} = \overset{\downarrow}{\vec{\tilde{r}}} \circ \nabla \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial \vec{\tilde{r}}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} + \vec{u}) \cdot \Delta\vec{r} =$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \Delta\vec{r} = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}}_I + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta\vec{r} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta\vec{r}$$

Alakváltozások

$$\Delta \vec{r} + \Delta \vec{u} = \Delta \vec{r} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta \vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \cdot \Delta \vec{r}$$

Alakváltozások

Definíció

Az elmozdulás függvény gradiensét *deriválttenzor*nak nevezzük.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = \vec{u} \circ \nabla = \underline{\underline{D}}$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z$$

$$\begin{matrix} \underline{\underline{D}} \\ (xyz) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Alakváltozások

Definíció

Az elmozdulás függvény gradiensét *deriválttenzor*nak nevezzük.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = \vec{u} \circ \nabla = \underline{\underline{D}}$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z$$

$$\begin{matrix} \underline{\underline{D}} \\ (xyz) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Alakváltozások

Definíció

Az elmozdulás függvény gradiensét *deriválttenzor*nak nevezzük.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = \vec{u} \circ \nabla = \underline{\underline{D}}$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{D}} \\ (xyz) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Alakváltozások

A deriválttenzor felbontása **szimmetrikus** és **ferdén szimmetrikus** részekre

$$\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\underline{\underline{A}}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\underline{\underline{\Psi}}}$$

Alakváltozások

Tétel

Ha $u, v, w \ll 1$, azaz az *elmozdulások* nagyon kicsik, akkor az $\underline{\underline{A}}$ jó közelítéssel az alakváltozást írja le, a $\underline{\underline{\Psi}}$ pedig a tengely körüli szögelfordulást.

- $\underline{\underline{A}}$ az alakváltozási tenzor,
- $\underline{\underline{\Psi}}$ a forgató tenzor.

Alakváltozások

Definíció

Az

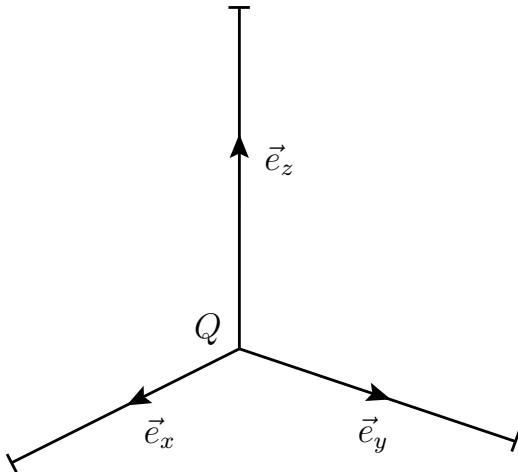
$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T) = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$$

egyenletet *kinematikai egyenletnek* nevezzük.

A kinematikai egyenlet kapcsolatot teremt az elmozdulások és az alakváltozások között.

Alakváltozások

Elemi triéder



Alakváltozások

A deriválttenzor szemléltetése

$$\Delta \vec{u} = \underline{\underline{D}} \cdot \Delta \vec{r} = \underline{\underline{A}} \cdot \Delta \vec{r} + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \Delta \vec{r}$$

Ha

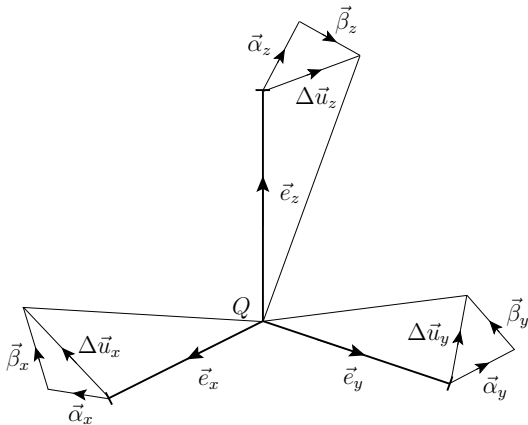
$$\Delta \vec{r} = \vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{u}_x = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_x + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{e}_x = \vec{\alpha}_x + \vec{\beta}_x$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{u}_y = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_y + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{e}_y = \vec{\alpha}_y + \vec{\beta}_y$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{u}_z = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{e}_z + \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{e}_z = \vec{\alpha}_z + \vec{\beta}_z$$

Alakváltozások

Deriválttenzor szemléltetése



Alakváltozások

Forgás szemléltetése

$$\begin{aligned}
 \underline{[\underline{\Psi}]}_{(xyz)} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\psi_z & \psi_y \\ \psi_z & 0 & -\psi_x \\ -\psi_y & \psi_x & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Megjegyzés:

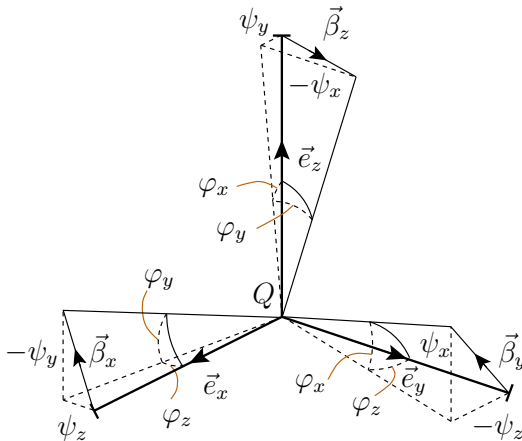
$$\vec{\beta}_n = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{n} = \vec{\psi} \times \vec{n}.$$

ahol

$$\vec{\psi} = \psi_x \vec{e}_x + \psi_y \vec{e}_y + \psi_z \vec{e}_z$$

Alakváltozások

Forgás szemléltetése



Alakváltozások

Alakváltozások szemléltetése

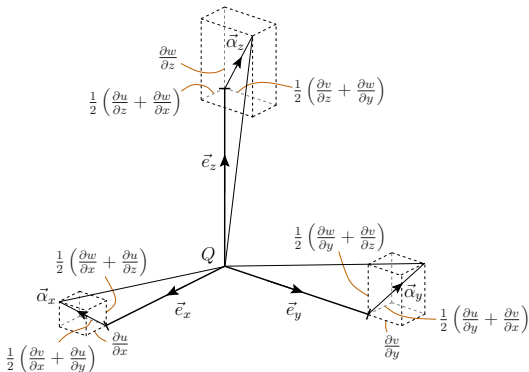
$$[\underline{A}]_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

vagy tömörebben

$$\underline{A} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$$

Alakváltozások

Alakváltozás szemléltetése



Alakváltozások

Ha a kezdetben egységnyi hosszúságú szakaszok hossza csak kis mértékben változik meg és a koordináta-tengelyek kezdetben kilencven fokos szöge csak kis mértékben csökken vagy növekszik, azaz

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ll 1 \quad \frac{\partial w}{\partial z} \ll 1$$

és

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \ll 1 \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \ll 1 \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \ll 1$$

Alakváltozások

akkor a fajlagos nyúlások az

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y \approx \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z \approx \frac{\partial w}{\partial z}$$

összefüggésekkel, a szögtorzulások pedig a

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx} = \arctg \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zy} = \arctg \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \arctg \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

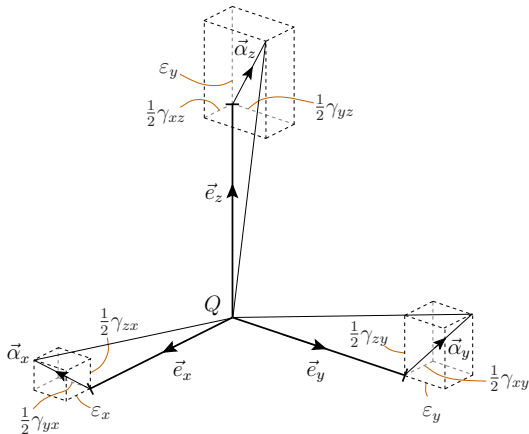
összefüggésekkel kaphatók.

Alakváltozások

$$\begin{aligned}
 \underset{(xyz)}{[A]} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \approx \\
 &\approx \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Alakváltozások

Alakváltozás szemléltetése



Kompatibilitás

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad / \times \nabla$$

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \nabla \times \left(\frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \right) \times \nabla =$$

$$= \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{u} \circ \underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}} + \underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}} \circ \vec{u} \times \nabla) = \underline{\underline{0}}$$

Kompatibilitás

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad / \times \nabla$$

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \nabla \times \left(\frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \right) \times \nabla =$$

$$= \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{u} \circ \underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}} + \underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}} \circ \vec{u} \times \nabla) = \underline{\underline{0}}$$

Kompatibilitás

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \quad / \times \nabla$$

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \nabla \times \left(\frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}) \right) \times \nabla =$$

$$= \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{u} \circ \underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}} + \underbrace{\nabla \times \nabla}_{\vec{0}} \circ \vec{u} \times \nabla) = \underline{\underline{0}}$$

Kompatibilitás

Kompatibilitási egyenlet

Az

$$\nabla \times \underline{\underline{A}} \times \nabla = \underline{\underline{0}}$$

egyenletet *kompatibilitási egyenletnek* nevezzük.