Végeselem analízis

2. előadás

Pere Balázs

Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék

2011. szeptember 19.

Dinamika

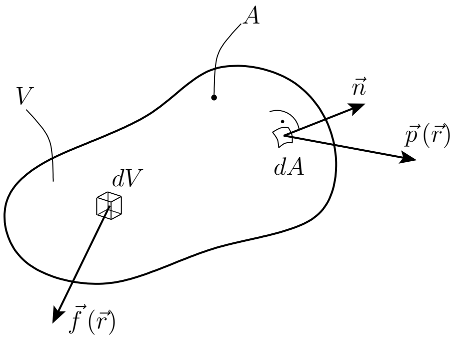
A fizikai folyamatok időbeli változását vizsgálja, az időbeli változás okára próbál magyarázatot adni.

Speciális eset a *statika*, amikor a fizikai mennyiségek időben állandóak.

A „dinamika” szó eredete: $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (dinamikosz)
jelentése: erős, erőteljes

Dinamika

Test egyensúlya



$\vec{p}\,(\vec{r})$ a test egységnyi felületére ható erő ($\vec{r} \in A$)
$\vec{f}\,(\vec{r})$ a test egységnyi térfogatára ható erő ($\vec{r} \in V$)
$\vec{n}$ a test felületének normálvektora az $\vec{r} \in A$ pontban

Dinamika

Az egyensúly feltétele:

$$\vec{F} = \vec{0}$$

ahol $\vec{F}$ a testre ható erők eredője, és

$$\vec{M}_A = \vec{0}$$

ahol $\vec{M}_A$ az erők a tér egy tetszőleges A pontjára számított nyomatéka.

Dinamika

A testre felületi és térfogati erők hatnak. Ezek eredőjét az

$$\vec{F} = \int\limits_{(A)} \vec{p} dA + \int\limits_{(V)} \vec{f} dV$$

összefüggés adja meg.

Az

$$\int\limits_{(A)} \vec{p} dA + \int\limits_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

egyenlet az erők *egyensúlyi egyenleté*nek integrál alakja.

Dinamika

A testre ható felületi és térfogati erők nyomatékát az origóra az

$$\vec{M}_O = \int\limits_{(A)} \vec{r} \times \vec{p} dA + \int\limits_{(V)} \vec{r} \times \vec{f} dV$$

összefüggés adja meg.

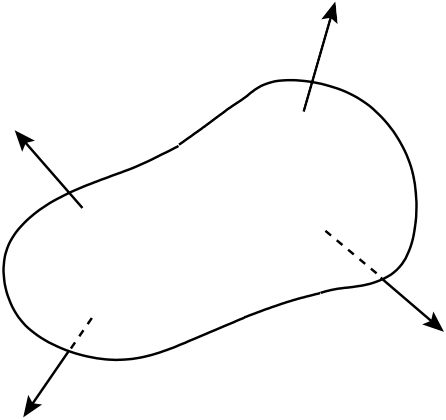
Az

$$\int\limits_{(A)} \vec{r} \times \vec{p} dA + \int\limits_{(V)} \vec{r} \times \vec{f} dV = \vec{0}$$

egyenlet a nyomatékok *egyensúlyi egyenleté*nek integrál alakja.

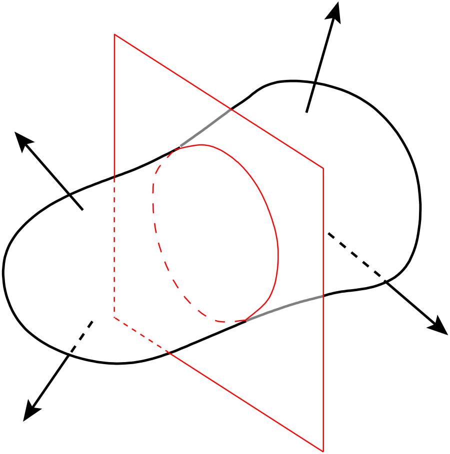
Dinamika

Test egyensúlya



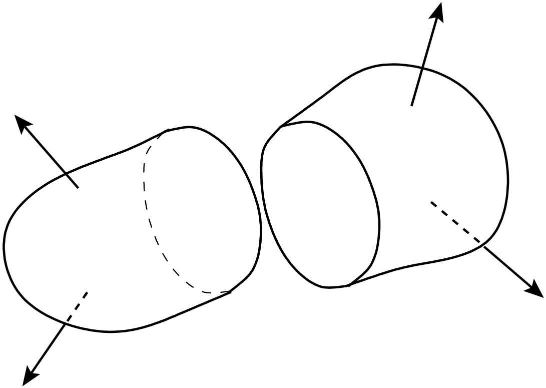
Dinamika

Test egyensúlya



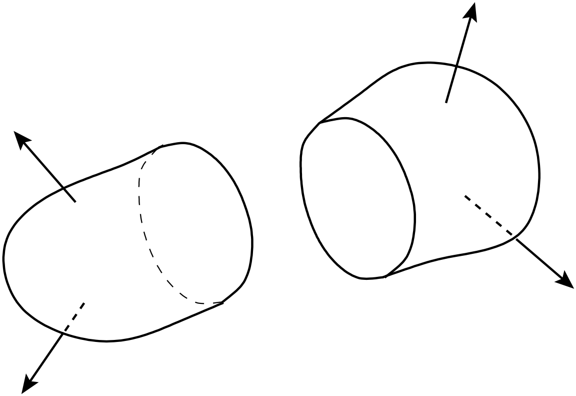
Dinamika

Test egyensúlya



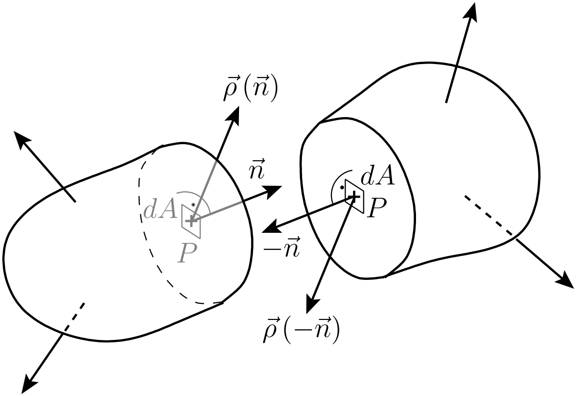
Dinamika

Test egyensúlya



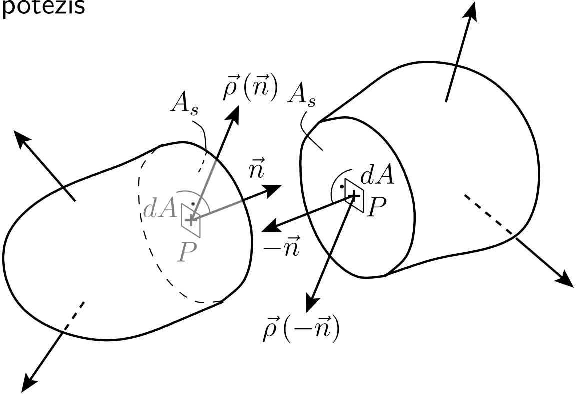
Dinamika

Cauchy-hipotézis



Dinamika

Cauchy-hipotézis



$$\int\limits_{(A_s)} \vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n})\,dA + \int\limits_{(A_s)} \vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n})\,dA = \vec{0}$$

Dinamika

Cauchy-hipotézis

$$\int_{(A_s)} \left(\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) + \vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n})\right) dA = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) + \vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) = -\vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n})$$

Dinamika

Cauchy-hipotézis

$$\int\limits_{(A_s)} \left(\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) + \vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n})\right) dA = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) + \vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) = -\vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n})$$

Dinamika

Cauchy-hipotézis

$$\int_{(A_s)} \left(\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) + \vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n})\right) dA = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) + \vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) = -\vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n})$$

Dinamika

Cauchy-hipotézis

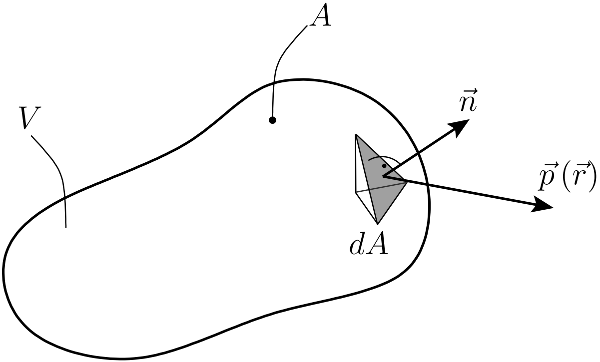
$$\vec{\rho}\,(\vec{r},\vec{n}) = -\vec{\rho}\,(\vec{r},-\vec{n})$$

vagy más jelöléssel

$$\vec{\rho}_n\,(\vec{r}) = -\vec{\rho}_{(-n)}\,(\vec{r})$$

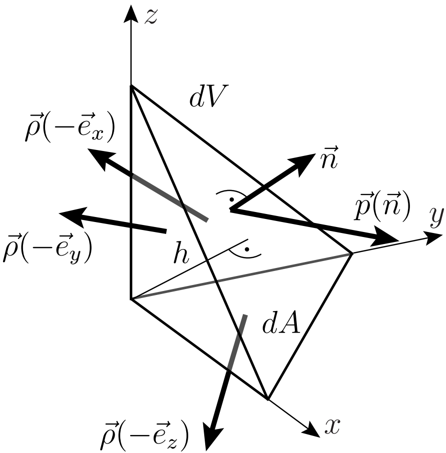
Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya



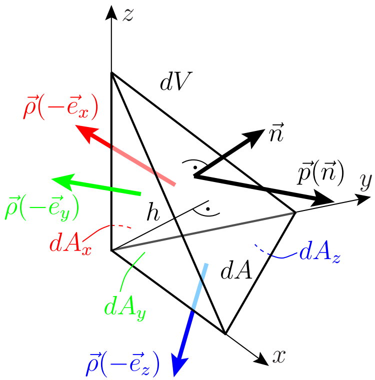
Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya



Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya



$$\vec{p}\,dA + \vec{\rho}\,(-\vec{e}_x)\;dA_x + \vec{\rho}\,(-\vec{e}_y)\;dA_y + \vec{\rho}\,(-\vec{e}_z)\;dA_z + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya

$$\vec{p}\,dA + \vec{\rho}\,(-\vec{e}_x)\;dA_x + \vec{\rho}\,(-\vec{e}_y)\;dA_y + \vec{\rho}\,(-\vec{e}_z)\;dA_z + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

A Cauchy-hipotézis miatt:

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}\,(\vec{e}_x)\;dA_x - \vec{\rho}\,(\vec{e}_y)\;dA_y - \vec{\rho}\,(\vec{e}_z)\;dA_z + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

Dinamika

Jelölés

Az egyszerűség kedvéért használjuk a következő jelöléseket:

$$\vec{\rho}_x := \vec{\rho}\,(\vec{e}_x) \qquad \vec{\rho}_y := \vec{\rho}\,(\vec{e}_y) \qquad \vec{\rho}_z := \vec{\rho}\,(\vec{e}_z)$$

Dinamika

Megjegyzés

$$dA_x = dA\cos(\alpha_x) \quad dA_y = dA\cos(\alpha_y) \quad dA_z = dA\cos(\alpha_z)$$

$$\cos(\alpha_x) = \vec{n}\cdot\vec{e}_x \quad \cos(\alpha_y) = \vec{n}\cdot\vec{e}_y \quad \cos(\alpha_z) = \vec{n}\cdot\vec{e}_z$$

Dinamika

Megjegyzés

$$dA_x = dA\cos(\alpha_x) \quad dA_y = dA\cos(\alpha_y) \quad dA_z = dA\cos(\alpha_z)$$

$$\cos(\alpha_x) = \vec{n}\cdot\vec{e}_x \quad \cos(\alpha_y) = \vec{n}\cdot\vec{e}_y \quad \cos(\alpha_z) = \vec{n}\cdot\vec{e}_z$$

Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,dA_x - \vec{\rho}_y\,dA_y - \vec{\rho}_z\,dA_z + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_x)\,dA}_{dA_x} - \vec{\rho}_y\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_y)\,dA}_{dA_y} - \vec{\rho}_z\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_z)\,dA}_{dA_z} + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,\underbrace{(\vec{e}_x\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_x} - \vec{\rho}_y\,\underbrace{(\vec{e}_y\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_y} - \vec{\rho}_z\,\underbrace{(\vec{e}_z\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_z} + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x \cdot \vec{n}dA - \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y \cdot \vec{n}dA - \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z \cdot \vec{n}dA + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,dA_x - \vec{\rho}_y\,dA_y - \vec{\rho}_z\,dA_z + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_x)\,dA}_{dA_x} - \vec{\rho}_y\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_y)\,dA}_{dA_y} - \vec{\rho}_z\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_z)\,dA}_{dA_z} + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,\underbrace{(\vec{e}_x\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_x} - \vec{\rho}_y\,\underbrace{(\vec{e}_y\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_y} - \vec{\rho}_z\,\underbrace{(\vec{e}_z\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_z} + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x \cdot \vec{n} dA - \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y \cdot \vec{n} dA - \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z \cdot \vec{n} dA + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,dA_x - \vec{\rho}_y\,dA_y - \vec{\rho}_z\,dA_z + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_x)\,dA}_{dA_x} - \vec{\rho}_y\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_y)\,dA}_{dA_y} - \vec{\rho}_z\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{e}_z)\,dA}_{dA_z} + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\,\underbrace{(\vec{e}_x\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_x} - \vec{\rho}_y\,\underbrace{(\vec{e}_y\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_y} - \vec{\rho}_z\,\underbrace{(\vec{e}_z\cdot\vec{n})\,dA}_{dA_z} + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

$$\vec{p}\,dA - \vec{\rho}_x\circ\vec{e}_x\cdot\vec{n}dA - \vec{\rho}_y\circ\vec{e}_y\cdot\vec{n}dA - \vec{\rho}_z\circ\vec{e}_z\cdot\vec{n}dA + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

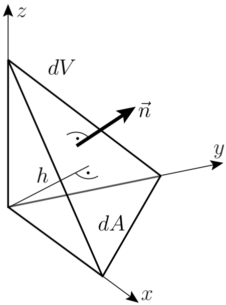
Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya

$$\vec{p}\,dA - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} dA + \vec{f}\,dV = \vec{0}$$

Dinamika

Elemi tetraéder térfogata



$$dV = dA\frac{h}{3}$$

Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya

$$\vec{p}\,dA - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n}dA + \vec{f}\frac{h}{3}dA = \vec{0}$$

ha $dA \neq 0$

$$\vec{p} - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} + \vec{f}\frac{h}{3} = \vec{0}$$

ha $h \to 0$

$$\vec{p} - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya

$$\vec{p}\,dA - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n}dA + \vec{f}\,\frac{h}{3}dA = \vec{0}$$

ha $dA \neq 0$

$$\vec{p} - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} + \vec{f}\,\frac{h}{3} = \vec{0}$$

ha $h \to 0$

$$\vec{p} - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

Dinamika

Elemi térfogat egyensúlya

$$\vec{p}\,dA - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n}dA + \vec{f}\,\frac{h}{3}dA = \vec{0}$$

ha $dA \neq 0$

$$\vec{p} - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} + \vec{f}\,\frac{h}{3} = \vec{0}$$

ha $h \to 0$

$$\vec{p} - (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

Dinamika

Feszültség tenzor

$$\vec{p} - \underbrace{\left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z\right)}_{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$$

vagy

$$\underline{\underline{F}}\left(\vec{r}\right) = \vec{\rho}_x\left(\vec{r}\right) \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y\left(\vec{r}\right) \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z\left(\vec{r}\right) \circ \vec{e}_z$$

Dinamika

Feszültség tenzor

$$\vec{p} - \underbrace{\left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z\right)}_{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z$$

vagy

$$\underline{\underline{F}}\left(\vec{r}\right) = \vec{\rho}_x\left(\vec{r}\right) \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y\left(\vec{r}\right) \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z\left(\vec{r}\right) \circ \vec{e}_z$$

Dinamika

Feszültség tenzor

$$\vec{p} - \underbrace{\left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z\right)}_{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{p}\left(\vec{r}\right) = \underline{\underline{F}}\left(\vec{r}\right) \cdot \vec{n} \qquad \left(\vec{r} \in A_p\right)$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenletek

$$\int_{(A)} \vec{p} dA + \int_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA + \int_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenletek

$$\int_{(A)} \vec{p} dA + \int_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA + \int_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

Gauss-tétel

$$\int\limits_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV + \int\limits_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_{(V)} \left(\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} \right) dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0}$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

Gauss-tétel

$$\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV + \int_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{(V)} \left(\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} \right) dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0}$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

Gauss-tétel

$$\int\limits_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV + \int\limits_{(V)} \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_{(V)} \left(\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} \right) dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0}$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0}$$

Az egyensúlyi egyenlet kapcsolatot teremt a belső erők és a (térfogati) terhelések között.

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} =$$

$$= (\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \right) +$$

$$+ (f_x\vec{e}_x + f_y\vec{e}_y + f_z\vec{e}_z) =$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} =$$

$$= \left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x \right) + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x \right) + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x \right) \right) +$$

$$+ \left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) \right) +$$

$$+ \left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \right) +$$

$$+ \left(f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z \right)$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} =$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} \circ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial x} \circ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial x} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial y} \circ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} \circ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial y} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial z} \circ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial z} \circ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} \circ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \right) +$$

$$+ \left(f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z \right)$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} =$$

$$= \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} + f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} =$$

$$= \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \vec{e}_z \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \vec{e}_z \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \vec{e}_z \right) +$$

$$+ f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} =$$

$$= \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) \vec{e}_x +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \right) \vec{e}_y +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) \vec{e}_z = \vec{0}$$

Dinamika

Egyensúlyi egyenlet differenciális alakja

3db skalár egyenlet

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

Dinamika

Nyomatékok egyensúlyának differenciális alakja

Bizonyítás nélkül

$$\int\limits_{(A)} \vec{r} \times \vec{p} dA + \int\limits_{(V)} \vec{r} \times \vec{f} dV = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T$$

Anyagegyenletek

Hooke-törvény

Feltételezések:

- a vizsgált test viselkedése legyen izotrop,
- az anyagtörvény csak kis alakváltozások mellett adja meg kellő pontossággal a testben keletkezett feszültségeket,
- az alakváltozások és belső erők (feszültségek) között a kapcsolatot írja le lineáris függvény.

Anyagegyenletek

Hooke-törvény

$$\underline{\underline{F}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{I}}\right)$$

ahol

E - az anyag rugalmassági- vagy Young-modulusza,
ν - a Poisson-tényező,
A_I - az alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa,
$\underline{\underline{I}}$ - pedig az egységtenzor.

Az anyagegyenlet kapcsolatot teremt a belső erők (feszültségek) és alakváltozások között.

Anyagegyenletek

Hooke-törvény

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{1+\nu} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \right) +$$

$$+ \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Anyagegyenletek

Hooke-törvény

Skalár egyenletek

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{zx}$$

Peremérték feladat

- Kinematikai egyenlet

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}\right)$$

- Egyensúlyi egyenletek

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{f} = \vec{0}$$

- Anyagegyenlet (Hooke-törvény)

$$\underline{\underline{F}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{I}}\right)$$

Peremérték feladat

Skalár egyenletek

Kinematikai egyenlet (6db skalár egyenlet)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Peremérték feladat

Skalár egyenletek

Egyensúlyi egyenletek (3db skalár egyenlet)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

Peremérték feladat

Skalár egyenletek

Anyagtörvény (6db skalár egyenlet)

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{zx}$$

Peremérték feladat

Skalár egyenletek

Összesen 15db skalár egyenlet

Peremérték feladat

Ismeretlen függvények

Elmozdulás koordináták

$$u\left(x,y,z\right), \qquad v\left(x,y,z\right), \qquad w\left(x,y,z\right),$$

fajlagos nyúlások

$$\varepsilon_x\left(x,y,z\right), \qquad \varepsilon_y\left(x,y,z\right), \qquad \varepsilon_z\left(x,y,z\right),$$

szögtorzulások

$$\gamma_{xy}\left(x,y,z\right), \qquad \gamma_{yz}\left(x,y,z\right), \qquad \gamma_{zx}\left(x,y,z\right),$$

normálfeszültségek

$$\sigma_x\left(x,y,z\right), \qquad \sigma_y\left(x,y,z\right), \qquad \sigma_z\left(x,y,z\right),$$

csúsztató feszültségek

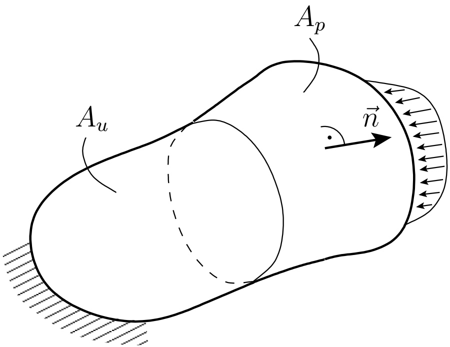
$$\tau_{xy}\left(x,y,z\right), \qquad \tau_{yz}\left(x,y,z\right), \qquad \tau_{zx}\left(x,y,z\right).$$

Peremérték feladat

Ismeretlen függvények

Összesen 15db ismeretlen

Peremérték feladat

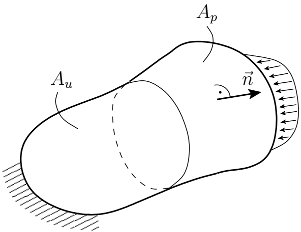


$$A_u \cup A_p = A$$

és

$$A_u \cap A_p = \varnothing$$

Peremérték feladat



- Kinematikai peremfeltétel

$$\vec{u}\left(\vec{r}\right) = \vec{u}_0\left(\vec{r}\right) \qquad \vec{r} \in A_u$$

- Dinamikai peremfeltétel

$$\underline{\underline{F}}\left(\vec{r}\right) \cdot \vec{n} = \vec{p}_0\left(\vec{r}\right) \qquad \vec{r} \in A_p$$