Végeselem analízis

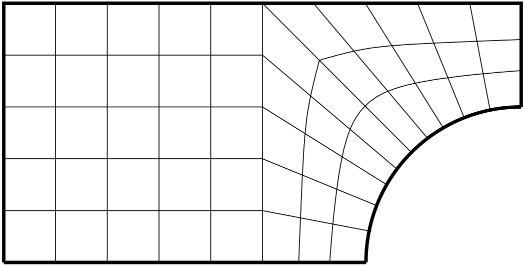
6. előadás

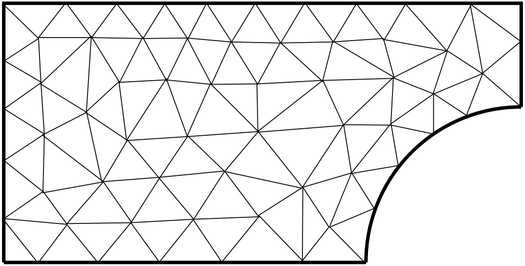
Pere Balázs

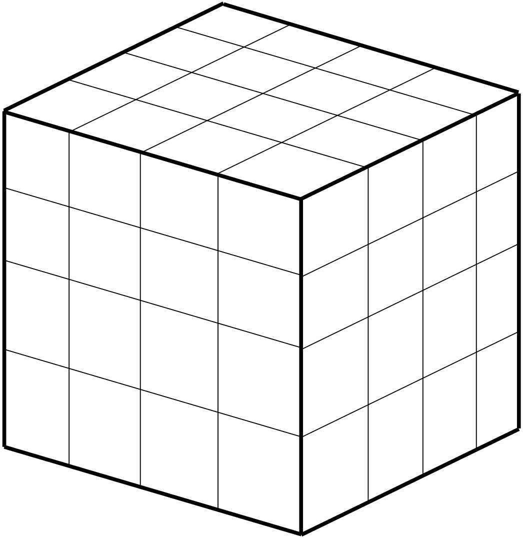
Széchenyi István Egyetem, Alkalmazott Mechanika Tanszék

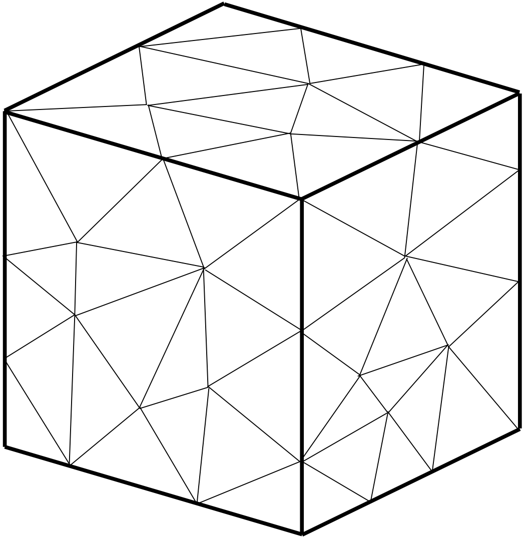
2011. október 17.

VÉGESELEM MÓDSZER



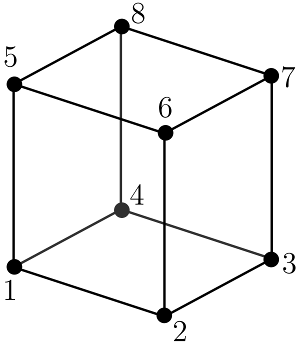




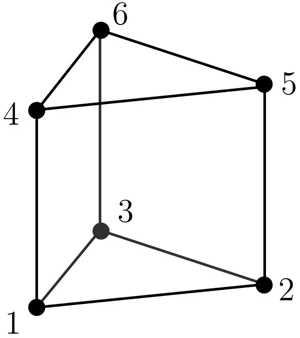


3D-s feladatok megoldása végeselem módszerrel

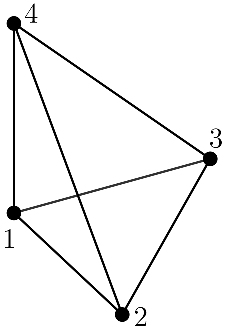
8 csomópontú hexaéder elem



6 csomópontú pentaéder elem



4 csomópontú tetraéder elem



Közelítő függvények megválasztásának szempontjai

- Az ismeretlen paraméterek legyenek a csomópontokban lévő elmozdulás koordináták. $\Rightarrow$
  - Annyi függvényt kell előállítani, ahány paraméter van.
  - Egy adott csomópontban az értéke legyen egy, a többiben viszont nulla.
- Ugyanezekkel a függvényekkel legyen leírható a test geometriája is, ahol a paraméterek szerepét a csomópontok koordinátái játsszák (*izoparametrikus végeselem*).
- A közelítő függvények legyenek könnyen (numerikusan) integrálhatók. $\Rightarrow$
  - Gauss-kvadratúra: a közelítő függvények értelmezési tartománya a $(-1;1)$ intervallum.

Közelítő függvények megválasztásának szempontjai

- Az ismeretlen paraméterek legyenek a csomópontokban lévő elmozdulás koordináták. $\Rightarrow$
  - Annyi függvényt kell előállítani, ahány paraméter van.
  - Egy adott csomópontban az értéke legyen egy, a többiben viszont nulla.
- Ugyanezekkel a függvényekkel legyen leírható a test geometriája is, ahol a paraméterek szerepét a csomópontok koordinátái játsszák (*izoparametrikus végeselem*).
- A közelítő függvények legyenek könnyen (numerikusan) integrálhatók. $\Rightarrow$
  - Gauss-kvadratúra: a közelítő függvények értelmezési tartománya a $(-1; 1)$ intervallum.

Közelítő függvények megválasztásának szempontjai

- Az ismeretlen paraméterek legyenek a csomópontokban lévő elmozdulás koordináták. $\Rightarrow$
    - Annyi függvényt kell előállítani, ahány paraméter van.
    - Egy adott csomópontban az értéke legyen egy, a többiben viszont nulla.
- Ugyanezekkel a függvényekkel legyen leírható a test geometriája is, ahol a paraméterek szerepét a csomópontok koordinátái játsszák (*izoparametrikus végeselem*).
- A közelítő függvények legyenek könnyen (numerikusan) integrálhatók. $\Rightarrow$
    - Gauss-kvadratúra: a közelítő függvények értelmezési tartománya a $(-1;1)$ intervallum.

Jelölések

- $N_i = N_i\,(\xi, \eta, \zeta)$ — közelítő függvények (alakfüggvények) $(i = 1, 2, 3, 4, \dots)$
- ξ, η, ζ — a közelítő függvények változói (helyi, vagy elemhez kötött koordinátarendszer)

Példa a paraméterek használatára — koordináták

$$x^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, x_i^e$$

$$y^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, y_i^e$$

$$z^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, z_i^e$$

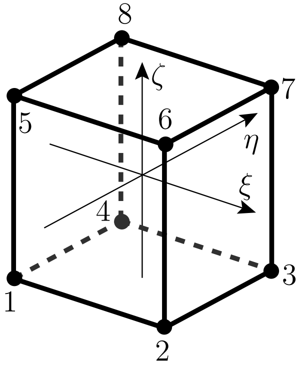
Példa a paraméterek használatára — elmozdulások

$$u^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, u_i^e$$

$$v^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, v_i^e$$

$$w^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, w_i^e$$

Elemhez kötött helyi vagy lokális koordinátarendszer



8 csomópontú 3D-s végeselem

A közelítő függvények meghatározása

$$N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right) = a_{i1} + a_{i2}\xi + a_{i3}\eta + a_{i4}\zeta + a_{i5}\xi\eta + a_{i6}\eta\zeta + a_{i7}\zeta\xi + a_{i8}\xi\eta\zeta$$

A csomópontok koordinátái:

$$\xi = \pm 1,\ \eta = \pm 1 \text{ és } \zeta = \pm 1$$

8 csomópontú 3D-s végeselem

A közelítő függvények meghatározása

$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = a_{i1} + a_{i2}\xi + a_{i3}\eta + a_{i4}\zeta + a_{i5}\xi\eta + a_{i6}\eta\zeta + a_{i7}\zeta\xi + a_{i8}\xi\eta\zeta$$

A csomópontok koordinátái:

$$\xi = \pm 1,\ \eta = \pm 1 \text{ és } \zeta = \pm 1$$

8 csomópontú 3D-s végeselem

A közelítő függvények meghatározása

$$N_8\left(\xi{=}-1,\eta{=}-1,\zeta{=}-1\right) = a_{81} - a_{82} - a_{83} - a_{84} + a_{85} + a_{86} + a_{87} - a_{88} = 0$$

$$N_8\left(\xi{=}1,\eta{=}-1,\zeta{=}-1\right) = a_{81} + a_{82} - a_{83} - a_{84} - a_{85} + a_{86} - a_{87} + a_{88} = 0$$

$$N_8\left(\xi{=}1,\eta{=}1,\zeta{=}-1\right) = a_{81} + a_{82} + a_{83} - a_{84} + a_{85} - a_{86} - a_{87} - a_{88} = 0$$

$$N_8\left(\xi{=}-1,\eta{=}1,\zeta{=}-1\right) = a_{81} - a_{82} + a_{83} - a_{84} - a_{85} - a_{86} + a_{87} + a_{88} = 0$$

$$N_8\left(\xi{=}-1,\eta{=}-1,\zeta{=}1\right) = a_{81} - a_{82} - a_{83} + a_{84} + a_{85} - a_{86} - a_{87} + a_{88} = 0$$

$$N_8\left(\xi{=}1,\eta{=}-1,\zeta{=}1\right) = a_{81} + a_{82} - a_{83} + a_{84} - a_{85} - a_{86} + a_{87} - a_{88} = 0$$

$$N_8\left(\xi{=}1,\eta{=}1,\zeta{=}1\right) = a_{81} + a_{82} + a_{83} + a_{84} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{88} = 0$$

$$N_8\left(\xi{=}-1,\eta{=}1,\zeta{=}1\right) = a_{81} - a_{82} + a_{83} + a_{84} - a_{85} + a_{86} - a_{87} - a_{88} = 1$$

8 csomópontú 3D-s végeselem

A közelítő függvények meghatározása

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{81} \\ a_{82} \\ a_{83} \\ a_{84} \\ a_{85} \\ a_{86} \\ a_{87} \\ a_{88} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A közelítő függvények meghatározása

Megoldás:

$$a_{81} = \frac{1}{8},\ a_{82} = -\frac{1}{8},\ a_{83} = \frac{1}{8},\ a_{84} = \frac{1}{8},$$

$$a_{85} = -\frac{1}{8},\ a_{86} = \frac{1}{8},\ a_{87} = -\frac{1}{8},\ a_{88} = -\frac{1}{8}$$

Behelyettesítve az $N_8(\xi, \eta, \zeta)$ függvénybe:

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi + \eta + \zeta - \xi\eta + \eta\zeta - \zeta\xi - \xi\eta\zeta)$$

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

8 csomópontú 3D-s végeselem

A közelítő függvények meghatározása

Megoldás:

$$a_{81} = \frac{1}{8},\ a_{82} = -\frac{1}{8},\ a_{83} = \frac{1}{8},\ a_{84} = \frac{1}{8},$$

$$a_{85} = -\frac{1}{8},\ a_{86} = \frac{1}{8},\ a_{87} = -\frac{1}{8},\ a_{88} = -\frac{1}{8}$$

Behelyettesítve az $N_8(\xi, \eta, \zeta)$ függvénybe:

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi + \eta + \zeta - \xi\eta + \eta\zeta - \zeta\xi - \xi\eta\zeta)$$

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

A közelítő függvények meghatározása

Megoldás:

$$a_{81} = \frac{1}{8},\ a_{82} = -\frac{1}{8},\ a_{83} = \frac{1}{8},\ a_{84} = \frac{1}{8},$$

$$a_{85} = -\frac{1}{8},\ a_{86} = \frac{1}{8},\ a_{87} = -\frac{1}{8},\ a_{88} = -\frac{1}{8}$$

Behelyettesítve az $N_8\left(\xi, \eta, \zeta\right)$ függvénybe:

$$N_8\left(\xi, \eta, \zeta\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \xi + \eta + \zeta - \xi\eta + \eta\zeta - \zeta\xi - \xi\eta\zeta\right)$$

$$N_8\left(\xi, \eta, \zeta\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \xi\right)\left(1 + \eta\right)\left(1 + \zeta\right)$$

8 csomópontú 3D-s végeselem

A közelítő függvények

$$N_1(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_2(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_3(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_4(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_5(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

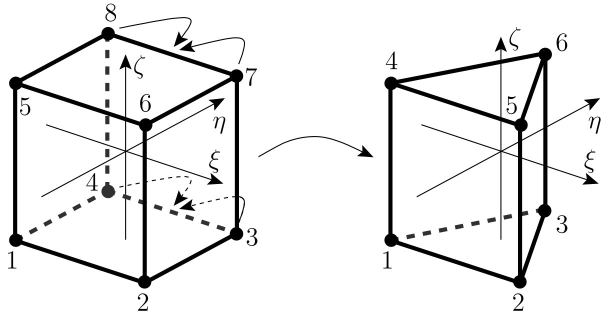
$$N_6(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_7(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_8(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

6 csomópontú 3D-s végeselem

A 6 csomópontú végeselem létrehozása a 8 csomópontúból az csomópontok egybeejtésével



6 csomópontú 3D-s végeselem

A közelítő függvények

$$N_1(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_2(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_3(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)$$

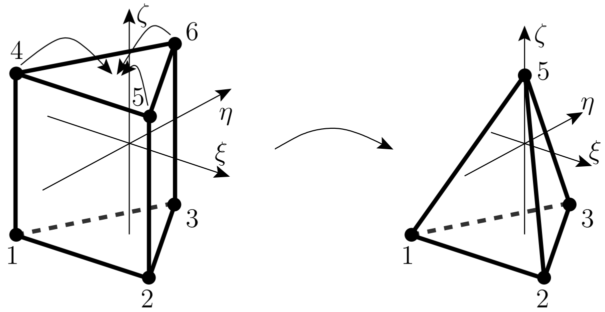
$$N_4(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_5(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_6(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$$

4 csomópontú 3D-s végeselem

A 6 csomópontú végeselem létrehozása a 8 csomópontúból az csomópontok egybeejtésével



4 csomópontú 3D-s végeselem

A közelítő függvények

$$N_1(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_2(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_3(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_4(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)$$

Az elmozdulásmező közelítése egy végeselemen

$$\vec{u}\,(\vec{r}) = u\,(x,y,z)\,\vec{e}_x + v\,(x,y,z)\,\vec{e}_y + w\,(x,y,z)\,\vec{e}_z \qquad \vec{r} \in V^e$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{u}}^e\,(x^e,y^e,z^e) = \underbrace{\begin{bmatrix} u^e\,(x^e,y^e,z^e) \\ v^e\,(x^e,y^e,z^e) \\ w^e\,(x^e,y^e,z^e) \end{bmatrix}}_{(3\times 1)}$$

Az elmozdulásmező közelítése egy végeselemen

$$x^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\sum_{i=1}^{n}N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)x_i^e$$

$$y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\sum_{i=1}^{n}N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)y_i^e$$

$$z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\sum_{i=1}^{n}N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)z_i^e$$

Az elmozdulásmező közelítése egy végeselemen

$$u^e\left(x^e, y^e, z^e\right) = u^e\left(x^e\left(\xi,\eta,\zeta\right), y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right), z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right) =$$

$$= u^e\left(\xi,\eta,\zeta\right) = \sum_{i=1}^{n} N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right) q_{xi}^e$$

$$v^e\left(x^e, y^e, z^e\right) = v^e\left(x^e\left(\xi,\eta,\zeta\right), y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right), z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right) =$$

$$= v^e\left(\xi,\eta,\zeta\right) = \sum_{i=1}^{n} N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right) q_{yi}^e$$

$$w^e\left(x^e, y^e, z^e\right) = w^e\left(x^e\left(\xi,\eta,\zeta\right), y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right), z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right) =$$

$$= w^e\left(\xi,\eta,\zeta\right) = \sum_{i=1}^{n} N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right) q_{zi}^e$$

Az elmozdulásmező közelítése egy végeselemen

$$u^e(x^e, y^e, z^e) = u^e(x^e(\xi,\eta,\zeta), y^e(\xi,\eta,\zeta), z^e(\xi,\eta,\zeta)) =$$

$$= u^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, q^e_{xi}$$

$$v^e(x^e, y^e, z^e) = v^e(x^e(\xi,\eta,\zeta), y^e(\xi,\eta,\zeta), z^e(\xi,\eta,\zeta)) =$$

$$= v^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, q^e_{yi}$$

$$w^e(x^e, y^e, z^e) = w^e(x^e(\xi,\eta,\zeta), y^e(\xi,\eta,\zeta), z^e(\xi,\eta,\zeta)) =$$

$$= w^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, q^e_{zi}$$

Az elmozdulásmező közelítése egy végeselemen

$$u^e\left(x^e,y^e,z^e\right)=u^e\left(x^e\left(\xi,\eta,\zeta\right),y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right),z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)=$$

$$=u^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\sum_{i=1}^{n}N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)q^e_{xi}$$

$$v^e\left(x^e,y^e,z^e\right)=v^e\left(x^e\left(\xi,\eta,\zeta\right),y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right),z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)=$$

$$=v^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\sum_{i=1}^{n}N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)q^e_{yi}$$

$$w^e\left(x^e,y^e,z^e\right)=w^e\left(x^e\left(\xi,\eta,\zeta\right),y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right),z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)=$$

$$=w^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\sum_{i=1}^{n}N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)q^e_{zi}$$

Az elmozdulásmező közelítése egy végeselemen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix}}_{\underset{(3\times 1)}{\underline{\underline{u}}^e(\xi,\eta,\zeta)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\underset{(3\times 3n)}{\underline{\underline{N}}(\xi,\eta,\zeta)}} \underbrace{\begin{bmatrix} q^e_{x1} \\ q^e_{y1} \\ q^e_{z1} \\ q^e_{x2} \\ q^e_{y2} \\ q^e_{z2} \\ \vdots \\ q^e_{xn} \\ q^e_{yn} \\ q^e_{zn} \end{bmatrix}}_{\underset{(3n\times 1)}{\underline{\underline{q}}^e}}$$

vagy röviden

$$\underline{\underline{u}}^e(\xi,\eta,\zeta) = \underline{\underline{N}}(\xi,\eta,\zeta)\,\underline{\underline{q}}^e$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\underset{(xyz)}{\left[\underline{\underline{A}}\left(\vec{r}\right)\right]} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \vec{r} \in V^e \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e\left(x^e, y^e, z^e\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \varepsilon_y^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \varepsilon_z^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \gamma_{xy}^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \gamma_{yz}^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \gamma_{zx}^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \end{bmatrix}}_{(6\times1)}$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\underset{(xyz)}{\left[\underline{\underline{A}}\left(\vec{r}\right)\right]} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \vec{r} \in V^e \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\varepsilon}^e\left(x^e, y^e, z^e\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \varepsilon_y^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \varepsilon_z^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \gamma_{xy}^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \gamma_{yz}^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \\ \gamma_{zx}^e\left(x^e, y^e, z^e\right) \end{bmatrix}}_{(6\times 1)}$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\underset{(6\times1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(x^e,y^e,z^e)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^e}{\partial x} \\ \frac{\partial v^e}{\partial y} \\ \frac{\partial w^e}{\partial z} \\ \frac{\partial u^e}{\partial y} + \frac{\partial v^e}{\partial x} \\ \frac{\partial v^e}{\partial z} + \frac{\partial w^e}{\partial y} \\ \frac{\partial w^e}{\partial x} + \frac{\partial u^e}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underset{(6\times3)}{\underline{\underline{\partial}}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix}}_{\underset{(3\times1)}{\underline{u}^e(x^e,y^e,z^e)}}$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\varepsilon}^e(x^e,y^e,z^e) \\ (6\times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\varepsilon}^e(\xi,\eta,\zeta) \\ (6\times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\partial}} \\ (6\times 3)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{u}^e(\xi,\eta,\zeta) \\ (3\times 1)}} =$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{\partial}} \\ (6\times 3)}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{N}}(\xi,\eta,\zeta) \\ (3\times 3n)}} \underbrace{\begin{bmatrix} q^e_{x1} \\ q^e_{y1} \\ q^e_{z1} \\ q^e_{x2} \\ q^e_{y2} \\ q^e_{z2} \\ \vdots \\ q^e_{xn} \\ q^e_{yn} \\ q^e_{zn} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{q}^e \\ (3n\times 1)}} =$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta) \\ (6\times 3n)}} \underbrace{\begin{bmatrix} q^e_{x1} \\ q^e_{y1} \\ q^e_{z1} \\ q^e_{x2} \\ q^e_{y2} \\ q^e_{z2} \\ \vdots \\ q^e_{xn} \\ q^e_{yn} \\ q^e_{zn} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{q}^e \\ (3n\times 1)}}$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\underline{\varepsilon}^{e}\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\underline{\underline{\partial}}\,\underline{u}^{e}\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\underbrace{\underline{\underline{\partial}}\,\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)}_{\underline{\underline{B}}^{e}\left(\xi,\eta,\zeta\right)}\underline{q}^{e}=\underline{\underline{B}}^{e}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\underline{q}^{e}$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} = \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial y} = \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial z} = \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

ahol

$$\left(\underline{\underline{J}}^e\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ és } \underline{\underline{J}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

ahol

$$\left(\underline{\underline{J}}^e\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ és } \underline{\underline{J}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\frac{\partial x^e(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi} x_i^e$$

$$\frac{\partial x^e(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta} x_i^e$$

$$\frac{\partial x^e(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta} x_i^e$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\frac{\partial y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \xi} y_i^e$$

$$\frac{\partial y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \eta} y_i^e$$

$$\frac{\partial y^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \zeta} y_i^e$$

Az alakváltozások közelítése egy végeselemen

$$\frac{\partial z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \xi} z_i^e$$

$$\frac{\partial z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \eta} z_i^e$$

$$\frac{\partial z^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{\partial \zeta} z_i^e$$

Az feszültségmező közelítése egy végeselemen

$$\underset{(xyz)}{\left[\underline{\underline{F}}\left(\vec{r}\right)\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \vec{r} \in V^e \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^e\left(x,y,z\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x^e\left(x,y,z\right) \\ \sigma_y^e\left(x,y,z\right) \\ \sigma_z^e\left(x,y,z\right) \\ \tau_{xy}^e\left(x,y,z\right) \\ \tau_{yz}^e\left(x,y,z\right) \\ \tau_{zx}^e\left(x,y,z\right) \end{bmatrix}}_{(6\times 1)}$$

Az feszültségmező közelítése egy végeselemen

$$\underset{(xyz)}{\left[\underline{\underline{F}}\left(\vec{r}\right)\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \vec{r} \in V^e \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^e\left(x,y,z\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x^e\left(x,y,z\right) \\ \sigma_y^e\left(x,y,z\right) \\ \sigma_z^e\left(x,y,z\right) \\ \tau_{xy}^e\left(x,y,z\right) \\ \tau_{yz}^e\left(x,y,z\right) \\ \tau_{zx}^e\left(x,y,z\right) \end{bmatrix}}_{(6\times1)}$$

Az feszültségmező közelítése egy végeselemen

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \sigma_z^e \\ \tau_{xy}^e \\ \tau_{yz}^e \\ \tau_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\underset{(6\times 1)}{\underline{\underline{\sigma}}^e(x,y,z)}} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x^e + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e\right)\right) \\ \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y^e + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e\right)\right) \\ \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z^e + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e\right)\right) \\ \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}^e \\ \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}^e \\ \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx}^e \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{1-2\nu}\left(\left(1-\nu\right)\varepsilon_x^e + \nu\varepsilon_y^e + \nu\varepsilon_z^e\right) \\ \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{1-2\nu}\left(\nu\varepsilon_x^e + \left(1-\nu\right)\varepsilon_y^e + \nu\varepsilon_z^e\right) \\ \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{1-2\nu}\left(\nu\varepsilon_x^e + \nu\varepsilon_y^e + \left(1-\nu\right)\varepsilon_z^e\right) \\ \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}^e \\ \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}^e \\ \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx}^e \end{bmatrix} =
$$

Az feszültségmező közelítése egy végeselemen

$$= \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_x^e + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_y^e + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z^e \\ \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_x^e + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_y^e + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z^e \\ \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_x^e + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_y^e + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z^e \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}^e \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz}^e \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}^e \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\underset{(6\times 6)}{\underline{\underline{C}}^e}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{zx}^e \end{bmatrix}}_{\underset{(6\times 1)}{\underline{\varepsilon}^e(\xi,\eta,\zeta)}}$$

Az feszültségmező közelítése egy végeselemen

$$\underline{\underline{\sigma}}^{e}\left(x,y,z\right)=\underline{\underline{\sigma}}^{e}\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\underline{\underline{C}}^{e}\underline{\underline{\varepsilon}}^{e}\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\underline{\underline{C}}^{e}\underline{\underline{B}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\underline{\underline{q}}^{e}$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$\underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$\underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$U^e = \frac{1}{2} \int\limits_{(V^e)} \underline{\underline{F}} \cdot \cdot \underline{\underline{A}} dV = \frac{1}{2} \int\limits_{(V^e)} \left(\underline{\varepsilon}^e\right)^T \underline{\sigma}^e dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{q}^e\right)^T \left(\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta)\right)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta)\, \underline{q}^e \underbrace{\det\left(\underline{\underline{J}}^e\right) d\xi d\eta d\zeta}_{dV} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underline{q}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta)\right)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta) \det\left(\underline{\underline{J}}^e\right) d\xi d\eta d\zeta}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{q}^e$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$U^e = \frac{1}{2} \int\limits_{(V^e)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} dV = \frac{1}{2} \int\limits_{(V^e)} \left(\underline{\varepsilon}^e\right)^T \underline{\sigma}^e dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{q}^e\right)^T \left(\underline{\underline{B}}^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e\left(\xi,\eta,\zeta\right) \underline{q}^e \underbrace{\det\left(\underline{\underline{J}}^e\right) d\xi d\eta d\zeta}_{dV} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underline{q}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{B}}^e\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e\left(\xi,\eta,\zeta\right) \det\left(\underline{\underline{J}}^e\right) d\xi d\eta d\zeta}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{q}^e$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$U^e = \frac{1}{2}\int\limits_{(V^e)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} dV = \frac{1}{2}\int\limits_{(V^e)} \left(\underline{\varepsilon}^e\right)^T \underline{\sigma}^e dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{q}^e\right)^T \left(\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta)\right)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta)\, \underline{q}^e \underbrace{\det\left(\underline{\underline{J}}^e\right) d\xi d\eta d\zeta}_{dV} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{q}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta)\right)^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta,\zeta) \det\left(\underline{\underline{J}}^e\right) d\xi d\eta d\zeta}_{\underline{\underline{K}}^e}\, \underline{q}^e$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$U^e = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$\underline{\underline{q}}^e = \underset{(3n\times 1)}{\begin{bmatrix} q^e_{x1} \\ q^e_{y1} \\ q^e_{z1} \\ q^e_{x2} \\ q^e_{y2} \\ q^e_{z2} \\ \vdots \\ q^e_{xn} \\ q^e_{yn} \\ q^e_{zn} \end{bmatrix}} = \underset{(3n\times 1)}{\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}^e_1 \\ \underline{\underline{q}}^e_2 \\ \underline{\underline{q}}^e_3 \\ \underline{\underline{q}}^e_4 \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}^e_n \end{bmatrix}} \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{q}}^e_i = \underset{(3\times 1)}{\begin{bmatrix} q^e_{xi} \\ q^e_{yi} \\ q^e_{zi} \end{bmatrix}}$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$\underline{\underline{K}}^e = \underset{(3n\times 3n)}{\begin{bmatrix} K^e_{xx11} & K^e_{xy11} & K^e_{xz11} & K^e_{xx12} & \cdots & K^e_{xy1n} & K^e_{xz1n} \\ K^e_{yx11} & K^e_{yy11} & K^e_{yz11} & K^e_{yx12} & \cdots & K^e_{yy1n} & K^e_{yz1n} \\ K^e_{zx11} & K^e_{zy11} & K^e_{zz11} & K^e_{zx12} & \cdots & K^e_{zy1n} & K^e_{zz1n} \\ K^e_{xx21} & K^e_{xy21} & K^e_{xz21} & K^e_{xx22} & \cdots & K^e_{xy2n} & K^e_{xz2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K^e_{yxn1} & K^e_{yyn1} & K^e_{yzn1} & K^e_{yxn2} & \cdots & K^e_{yynn} & K^e_{yznn} \\ K^e_{zxn1} & K^e_{zyn1} & K^e_{zzn1} & K^e_{zxn2} & \cdots & K^e_{zynn} & K^e_{zznn} \end{bmatrix}}$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$\underline{\underline{K}}^e = \underset{(3n\times 3n)}{\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}^e_{11} & \underline{\underline{K}}^e_{12} & \underline{\underline{K}}^e_{13} & \cdots & \underline{\underline{K}}^e_{1n} \\ \underline{\underline{K}}^e_{21} & \underline{\underline{K}}^e_{22} & \underline{\underline{K}}^e_{23} & \cdots & \underline{\underline{K}}^e_{2n} \\ \underline{\underline{K}}^e_{31} & \underline{\underline{K}}^e_{32} & \underline{\underline{K}}^e_{33} & \cdots & \underline{\underline{K}}^e_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{K}}^e_{n1} & \underline{\underline{K}}^e_{n2} & \underline{\underline{K}}^e_{n3} & \cdots & \underline{\underline{K}}^e_{nn} \end{bmatrix}}$$

ahol

$$\underline{\underline{K}}^e_{ij} = \underset{(3\times 3)}{\begin{bmatrix} K^e_{xxij} & K^e_{xyij} & K^e_{xzij} \\ K^e_{yxij} & K^e_{yyij} & K^e_{yzij} \\ K^e_{zxij} & K^e_{zyij} & K^e_{zzij} \end{bmatrix}}$$

Az alakváltozási energia közelítése egy végeselemen

$$U^e = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\underline{\underline{q}}_1^e\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_2^e\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_3^e\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_4^e\right)^T \cdots \left(\underline{\underline{q}}_n^e\right)^T\right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^e & \underline{\underline{K}}_{12}^e & \underline{\underline{K}}_{13}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{1n}^e \\ \underline{\underline{K}}_{21}^e & \underline{\underline{K}}_{22}^e & \underline{\underline{K}}_{23}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{2n}^e \\ \underline{\underline{K}}_{31}^e & \underline{\underline{K}}_{32}^e & \underline{\underline{K}}_{33}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{3n}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{n1}^e & \underline{\underline{K}}_{n2}^e & \underline{\underline{K}}_{n3}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{nn}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1^e \\ \underline{\underline{q}}_2^e \\ \underline{\underline{q}}_3^e \\ \underline{\underline{q}}_4^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_n^e \end{bmatrix}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$\vec{p}_0\left(\vec{r}\right) = p_{0x}\left(x,y,z\right)\vec{e}_x + p_{0y}\left(x,y,z\right)\vec{e}_y + p_{0z}\left(x,y,z\right)\vec{e}_z \qquad \vec{r} \in A_p$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{p}}_0\left(x,y,z\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{0x}\left(x,y,z\right) \\ p_{0y}\left(x,y,z\right) \\ p_{0z}\left(x,y,z\right) \end{bmatrix}}_{(3\times 1)}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$\vec{p}_0\left(\vec{r}\right) = p_{0x}\left(x,y,z\right)\vec{e}_x + p_{0y}\left(x,y,z\right)\vec{e}_y + p_{0z}\left(x,y,z\right)\vec{e}_z \qquad \vec{r} \in A_p$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{p}}_0\left(x,y,z\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{0x}\left(x,y,z\right) \\ p_{0y}\left(x,y,z\right) \\ p_{0z}\left(x,y,z\right) \end{bmatrix}}_{(3\times1)}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$\vec{u} \cdot \vec{p}_0 = up_{0x} + vp_{0y} + wp_{0z}$$

$$\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_0 = up_{0x} + vp_{0y} + wp_{0z}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$\vec{u} \cdot \vec{p}_0 = up_{0x} + vp_{0y} + wp_{0z}$$

$$\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_0 = up_{0x} + vp_{0y} + wp_{0z}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$W^e_{k\,p} = \int\limits_{\left(A^e_p\right)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA = \int\limits_{\left(A^e_p\right)} \left(\underline{\underline{u}}^e\left(x, y, z\right)\right)^T \underline{\underline{p}}_0\left(x, y, z\right) dA =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \left(\underline{\underline{N}}\left(\xi, \eta, \zeta\right)\right)^T \underline{\underline{p}}_0\left(\xi, \eta, \zeta\right) \underbrace{J_A\left(\xi, \eta, \zeta = 1\right) d\xi d\eta}_{dA} =$$

$$= \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{N}}\left(\xi, \eta, \zeta\right)\right)^T \underline{\underline{p}}_0\left(\xi, \eta, \zeta\right) J_A\left(\xi, \eta, \zeta = 1\right) d\xi d\eta}_{\underline{\underline{f}}^e_p}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$W_{k\,p}^{e}=\int\limits_{\left(A_p^e\right)}\vec{u}\cdot\vec{p}_0 dA=\int\limits_{\left(A_p^e\right)}\left(\underline{\underline{u}}^{e}\left(x,y,z\right)\right)^{T}\underline{\underline{p}}_0\left(x,y,z\right)dA=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left(\underline{\underline{q}}^{e}\right)^{T}\left(\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)^{T}\underline{\underline{p}}_0\left(\xi,\eta,\zeta\right)\underbrace{J_A\left(\xi,\eta,\zeta=1\right)d\xi d\eta}_{dA}=$$

$$=\left(\underline{\underline{q}}^{e}\right)^{T}\underbrace{\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left(\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)^{T}\underline{\underline{p}}_0\left(\xi,\eta,\zeta\right)J_A\left(\xi,\eta,\zeta=1\right)d\xi d\eta}_{\underline{\underline{f}}_p^{e}}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$W_{k\,p}^{e} = \int\limits_{\left(A_p^e\right)} \vec{u}\cdot\vec{p}_0 dA = \int\limits_{\left(A_p^e\right)} \left(\underline{u}^e\left(x,y,z\right)\right)^T \underline{\underline{p}}_0\left(x,y,z\right) dA =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \left(\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)^T \underline{\underline{p}}_0\left(\xi,\eta,\zeta\right) \underbrace{J_A\left(\xi,\eta,\zeta=1\right)d\xi d\eta}_{dA} =$$

$$= \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)^T \underline{\underline{p}}_0\left(\xi,\eta,\zeta\right) J_A\left(\xi,\eta,\zeta=1\right)d\xi d\eta}_{\underline{\underline{f}}_p^e}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$dA = \left| d\xi \vec{e}_\xi \times d\eta \vec{e}_\eta \right| = \left| d\xi \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times d\eta \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{e}_z \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{e}_z \right) \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \vec{e}_z + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \vec{e}_x \right| d\xi d\eta =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\xi d\eta =$$

$$= J_A \left(\xi, \eta, \zeta = 1 \right) d\xi d\eta$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$dA = \left| d\xi \vec{e}_\xi \times d\eta \vec{e}_\eta \right| = \left| d\xi \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times d\eta \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{e}_z \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{e}_z \right) \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \vec{e}_z + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \vec{e}_x \right| d\xi d\eta =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\xi d\eta =$$

$$= J_A \left(\xi, \eta, \zeta = 1 \right) d\xi d\eta$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$dA = \left| d\xi \vec{e}_\xi \times d\eta \vec{e}_\eta \right| = \left| d\xi \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times d\eta \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{e}_z \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{e}_z \right) \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \vec{e}_z + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \vec{e}_x \right| d\xi d\eta =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\xi d\eta =$$

$$= J_A \left(\xi, \eta, \zeta = 1 \right) d\xi d\eta$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$dA = \left| d\xi \vec{e}_\xi \times d\eta \vec{e}_\eta \right| = \left| d\xi \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times d\eta \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{e}_z \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{e}_z \right) \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \vec{e}_z + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \vec{e}_x \right| d\xi d\eta =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\xi d\eta =$$

$$= J_A \left(\xi, \eta, \zeta = 1 \right) d\xi d\eta$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$dA = \left| d\xi \vec{e}_\xi \times d\eta \vec{e}_\eta \right| = \left| d\xi \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times d\eta \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{e}_z \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{e}_z \right) \right| d\xi d\eta =$$

$$= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \vec{e}_z + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \vec{e}_x \right| d\xi d\eta =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\xi d\eta =$$

$$= J_A \left(\xi, \eta, \zeta = 1 \right) d\xi d\eta$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

Általában

$$d\vec{A}_0 = \vec{n}_0 dA_0 = \det\left(\underline{\underline{J}}^e\right)\left(\underline{\underline{J}}^e\right)^{-1} \cdot \vec{n} dA$$

$$d\vec{A}_0 = \vec{n}_0 dA_0 = \operatorname{adj}\left(\underline{\underline{J}}^e\right) \cdot \vec{n} dA$$

ahol

$$\underline{\underline{J}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

Általában

$$d\vec{A}_0 = \vec{n}_0 dA_0 = \det\left(\underline{\underline{J}}^e\right)\left(\underline{\underline{J}}^e\right)^{-1} \cdot \vec{n} dA$$

$$d\vec{A}_0 = \vec{n}_0 dA_0 = \operatorname{adj}\left(\underline{\underline{J}}^e\right) \cdot \vec{n} dA$$

ahol

$$\underline{\underline{J}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

Általában

$$d\vec{A}_0 = \vec{n}_0 dA_0 = \det\left(\underline{\underline{J}}^e\right)\left(\underline{\underline{J}}^e\right)^{-1} \cdot \vec{n} dA$$

$$d\vec{A}_0 = \vec{n}_0 dA_0 = \operatorname{adj}\left(\underline{\underline{J}}^e\right) \cdot \vec{n} dA$$

ahol

$$\underline{\underline{J}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Felületi erők munkája

$$W_{k\,p}^{e} = \int\limits_{\left(A_p^e\right)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 \, dA = \left(\underline{\underline{q}}^{e}\right)^T \underline{\underline{f}}_{p}^{e} = \left[\left(\underline{\underline{q}}_1^{e}\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_2^{e}\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_3^{e}\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_4^{e}\right)^T \cdots \left(\underline{\underline{q}}_n^{e}\right)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_{p\,1}^{e} \\ \underline{\underline{f}}_{p\,2}^{e} \\ \underline{\underline{f}}_{p\,3}^{e} \\ \underline{\underline{f}}_{p\,4}^{e} \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_{p\,n}^{e} \end{bmatrix}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Térfogati erők munkája

$$\vec{f}\left(\vec{r}\right) = f_x\left(x,y,z\right)\vec{e}_x + f_y\left(x,y,z\right)\vec{e}_y + f_z\left(x,y,z\right)\vec{e}_z \qquad \vec{r}\in V$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{f}}_0\left(x,y,z\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_x\left(x,y,z\right) \\ f_y\left(x,y,z\right) \\ f_z\left(x,y,z\right) \end{bmatrix}}_{(3\times1)}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Térfogati erők munkája

$$\vec{f}\left(\vec{r}\right) = f_x\left(x,y,z\right)\vec{e}_x + f_y\left(x,y,z\right)\vec{e}_y + f_z\left(x,y,z\right)\vec{e}_z \qquad \vec{r} \in V$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{f}}_0\left(x,y,z\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_x\left(x,y,z\right) \\ f_y\left(x,y,z\right) \\ f_z\left(x,y,z\right) \end{bmatrix}}_{(3\times 1)}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Térfogati erők munkája

$$\vec{u} \cdot \vec{f} = u f_x + v f_y + w f_z$$

$$\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{f}}_0 = u f_x + v f_y + w f_z$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Térfogati erők munkája

$$\vec{u} \cdot \vec{f} = u f_x + v f_y + w f_z$$

$$\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{f}}_0 = u f_x + v f_y + w f_z$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Térfogati erők munkája

$$W_{k\,f}^{e} = \int\limits_{(V^e)} \vec{u} \cdot \vec{f} dV = \int\limits_{(V^e)} \left(\underline{u}^{e}(x,y,z)\right)^T \underline{\underline{f}}_0 (x,y,z)\, dV =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{q}}^{e}\right)^T \left(\underline{\underline{N}}(\xi,\eta,\zeta)\right)^T \underline{\underline{f}}_0(\xi,\eta,\zeta) \underbrace{\det\left(\underline{\underline{J}}^{e}\right) d\xi d\eta d\zeta}_{dV} =$$

$$= \left(\underline{\underline{q}}^{e}\right)^T \underbrace{\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{N}}(\xi,\eta,\zeta)\right)^T \underline{\underline{f}}_0(\xi,\eta,\zeta) \det\left(\underline{\underline{J}}^{e}\right) d\xi d\eta d\zeta}_{\underline{\underline{f}}_f^{e}}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Térfogati erők munkája

$$W^e_{k\,f} = \int\limits_{(V^e)} \vec{u} \cdot \vec{f} dV = \int\limits_{(V^e)} \left(\underline{u}^e (x,y,z) \right)^T \underline{\underline{f}}_0 (x,y,z)\, dV =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{q}}^e \right)^T \left(\underline{\underline{N}} (\xi,\eta,\zeta) \right)^T \underline{\underline{f}}_0 (\xi,\eta,\zeta) \underbrace{\det \left(\underline{\underline{J}}^e \right) d\xi d\eta d\zeta}_{dV} =$$

$$= \left(\underline{\underline{q}}^e \right)^T \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{N}} (\xi,\eta,\zeta) \right)^T \underline{\underline{f}}_0 (\xi,\eta,\zeta) \det \left(\underline{\underline{J}}^e \right) d\xi d\eta d\zeta}_{\underline{\underline{f}}^e_f}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Térfogati erők munkája

$$W_{k\,f}^{e} = \int\limits_{(V^e)} \vec{u}\cdot\vec{f}dV = \int\limits_{(V^e)} \left(\underline{u}^e\left(x,y,z\right)\right)^T \underline{\underline{f}}_0\left(x,y,z\right)dV =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \left(\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)^T \underline{\underline{f}}_0\left(\xi,\eta,\zeta\right) \underbrace{\det\left(\underline{\underline{J}}^e\right)d\xi d\eta d\zeta}_{dV} =$$

$$= \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underbrace{\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right)^T \underline{\underline{f}}_0\left(\xi,\eta,\zeta\right)\det\left(\underline{\underline{J}}^e\right)d\xi d\eta d\zeta}_{\underline{\underline{f}}_f^e}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

Térfogati erők munkája

$$W_{k\,f}^{e} = \int\limits_{(V^{e})} \vec{u}\cdot\vec{f}dV = \left(\underline{\underline{q}}^{e}\right)^{T} \underline{\underline{f}}_{p}^{e} = \left[\ \left(\underline{\underline{q}}_{1}^{e}\right)^{T}\ \left(\underline{\underline{q}}_{2}^{e}\right)^{T}\ \left(\underline{\underline{q}}_{3}^{e}\right)^{T}\ \left(\underline{\underline{q}}_{4}^{e}\right)^{T}\ \cdots\ \left(\underline{\underline{q}}_{n}^{e}\right)^{T}\ \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_{f\,1}^{e} \\ \underline{\underline{f}}_{f\,2}^{e} \\ \underline{\underline{f}}_{f\,3}^{e} \\ \underline{\underline{f}}_{f\,4}^{e} \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_{f\,n}^{e} \end{bmatrix}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

$$W_k^e = \int\limits_{(A_p^e)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 \, dA + \int\limits_{(V^e)} \vec{u} \cdot \vec{f} \, dV = \left(\underline{q}^e\right)^T \underline{\underline{f}}_p^e + \left(\underline{q}^e\right)^T \underline{\underline{f}}_f^e =$$

$$= \left(\underline{q}^e\right)^T \underbrace{\left(\underline{\underline{f}}_p^e + \underline{\underline{f}}_f^e\right)}_{\underline{\underline{f}}} = \left(\underline{q}^e\right)^T \underline{\underline{f}}^e =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\underline{\underline{q}}_1^e\right)^T & \left(\underline{\underline{q}}_2^e\right)^T & \left(\underline{\underline{q}}_3^e\right)^T & \left(\underline{\underline{q}}_4^e\right)^T & \cdots & \left(\underline{\underline{q}}_n^e\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_1^e \\ \underline{\underline{f}}_2^e \\ \underline{\underline{f}}_3^e \\ \underline{\underline{f}}_4^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_n^e \end{bmatrix}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

$$W_k^e = \int\limits_{(A_p^e)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 \, dA + \int\limits_{(V^e)} \vec{u} \cdot \vec{f} \, dV = \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}_p^e + \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}_f^e =$$

$$= \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underbrace{\left(\underline{\underline{f}}_p^e + \underline{\underline{f}}_f^e\right)}_{\underline{\underline{f}}} = \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}^e =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\underline{\underline{q}}_1^e\right)^T & \left(\underline{\underline{q}}_2^e\right)^T & \left(\underline{\underline{q}}_3^e\right)^T & \left(\underline{\underline{q}}_4^e\right)^T & \cdots & \left(\underline{\underline{q}}_n^e\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_1^e \\ \underline{\underline{f}}_2^e \\ \underline{\underline{f}}_3^e \\ \underline{\underline{f}}_4^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_n^e \end{bmatrix}$$

Külső erők munkájának közelítése egy végeselemen

$$W_k^e = \int\limits_{(A_p^e)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 \, dA + \int\limits_{(V^e)} \vec{u} \cdot \vec{f} \, dV = \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}_p^e + \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}_f^e =$$

$$= \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underbrace{\left(\underline{\underline{f}}_p^e + \underline{\underline{f}}_f^e\right)}_{\underline{\underline{f}}} = \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}^e =$$

$$= \left[\left(\underline{\underline{q}}_1^e\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_2^e\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_3^e\right)^T \left(\underline{\underline{q}}_4^e\right)^T \cdots \left(\underline{\underline{q}}_n^e\right)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_1^e \\ \underline{\underline{f}}_2^e \\ \underline{\underline{f}}_3^e \\ \underline{\underline{f}}_4^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_n^e \end{bmatrix}$$

Egy végeselem potenciális energiája

$$\Pi_p^e = U^e - W_k^e = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{\underline{K}}}^e \underline{\underline{q}}^e - \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}^e$$