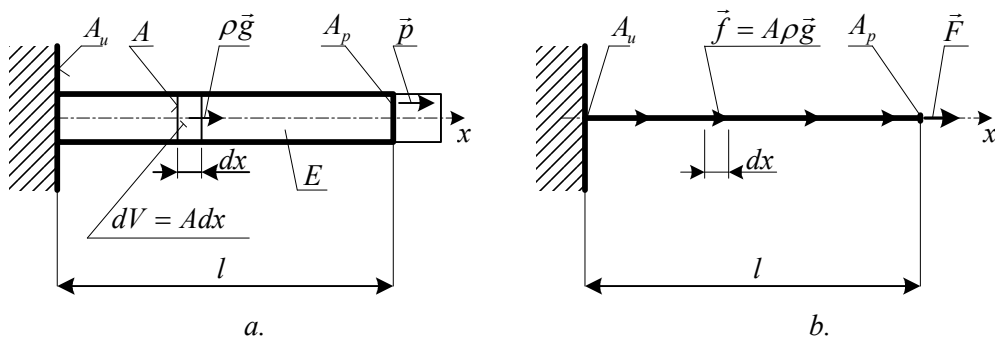


1. EGY DIMENZIÓS RUGALMAS PEREMÉRTÉK FELADAT

A fejezet bemutatja a prizmatikus húzott nyomott rúd egyensúlyi egyenletének származtatását. Az 1.a. ábrán egy l hosszúságú és A keresztmetszetű homogén prizmatikus rúd látható [12] alapján. A rúd rúdírányú önsúlyával és a véglapon megoszló erővel terhelt. A rúd térfogatán egyenletesen megoszló önsúly sűrűségvektora $\rho \vec{g}$ (ahol ρ a rúd anyagának sűrűsége, \vec{g} a gravitációs gyorsulás,) a rúd jobboldali véglapján megoszló, rúdírányú erőrendszer sűrűségvektora $\vec{p} = p_x \vec{e}_x$. A rúd anyaga homogén izotróp és lineárisan rugalmas, rugalmassági modulusa E .

A feladat megoldása során modellezési feltételezéssel élünk. A rúd tetszőleges keresztmetszetében csak rúdírányú egyenletesen megoszló normálfeszültség ébred. Az ilyen feladatot mechanikai szempontból egydimenziós feladatnak tekintjük, az eredeti feladattal egyenértékű egydimenziós rúdmodellt az 1.b. ábra szemlélteti.



1. ábra: Húzott-nyomott prizmatikus rúdfeladat és egy dimenziós modellje

Az 1. ábrán alkalmazott további jelölések: $\vec{f} = f_x \vec{e}_x$ a vonal menti terhelés konstans intenzitása, $\vec{F} = F_x \vec{e}_x = \vec{p}A$ véglapot terhelő megoszló erő eredője, l a rúd hossza, dV az elemi rúdtérfogat, dx az elemi rúdhossz, A_p a terhelt felület, a dinamikai perem, A_u az elmozdulás előírását tartalmazó felület, a kinematikai perem.

1.1. A rúd rugalmas peremérték feladatának egyenletei

A húzott-nyomott prizmatikus rúd rugalmas peremérték feladatának egyenleteit a statikában és szilárdságtanban tanult ismeretek alapján származtatjuk. A vázolt feladat esetén keressük az x irányú $u(x)$ elmozdulást, mint a hely függvényét. Az elmozdulás függvény a rúd összes pontjának elmozdulását magába foglalja, ezért szokás *elmozdulásmezőnek* is nevezni.

Kinematikai vagy geometriai egyenlet:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx}, \quad 0 < x < l, \quad (4.1)$$

ahol ε_x az x irányú fajlagos nyúlás.

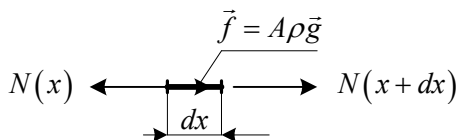
Anyagegyenlet, egyszerű Hooke-törvény:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \Rightarrow \quad N = A\sigma_x = AE\varepsilon_x \quad 0 < x < l, \quad (4.2)$$

ahol σ_x a rúdirányú normálfeszültség, N a rúderő.

Egyensúlyi egyenlet:

Az egyenlet származtatásához tekintünk a dx elemi hosszúságú rúd egyensúlyát a 2. ábrán.



2. ábra: Az elemi hosszúságú rúdelem egyensúlya

Egyensúly esetén az x irányú vetületi egyenlet

$$-N(x) + N(x + dx) + f_x dx = 0 .$$

Az $N(x + dx)$ rúderőt a lineáris tagig bezárólag sorba fejtve

$$N(x + dx) = N(x) + \frac{dN}{dx} dx + \dots ,$$

és visszahelyettesítve a vetületi egyenletbe átrendezés után megkapjuk az *egyensúlyi egyenletet*

$$\frac{dN}{dx} + f_x = 0 , \quad 0 < x < l . \quad (4.3)$$

Az (4.1)-(4.3) egyenletek egy differenciál-egyenletrendszer alkotnak, amelyhez két peremfeltétel írható fel esetünkben.

Kinematikai peremfeltétel:

Az 1.b. ábra alapján látható, hogy a befalazásnál az A_u felületen adott az elmozdulás értéke

$$u(0) = 0 . \quad (4.4)$$

Dinamikai peremfeltétel:

Az 1.b ábra alapján látható, hogy a szabad rúdvégen az A_p felületen adott a terhelés, így ott a rúderő ismert, értéke

$$N(l) = F_x . \quad (4.5)$$

Az (4.1)-(4.5) rugalmas peremérték feladatban az u, ε_x, N három ismeretlen mezők fordulnak elő. A három ismeretlen meghatározásához rendelkezésünkre áll a (4.1) – (4.3) mező-egyenlet és a (4.4) kinematikai valamint az (4.5) dinamikai peremfeltétel.

A *rugalmas peremérték feladat* ezen egyenleteit a probléma *erős megfogalmazásának*, vagy *erős alakjának* is szokás nevezni, mert teljesülése pontoszerűen áll fenn.

Az (4.1)-(4.5) egyenletekkel megadott peremérték feladat *analitikus megoldását* szokás *tényleges megoldásnak*, vagy *egzakt megoldásnak* is nevezni.

Megjegyezzük, hogy egy általános térbeli rugalmas peremérték-feladat esetén az ismeretlenek száma és a skaláris egyenletek száma egyaránt tizenöt, amelyek kiegészülnek a kinematikai és a dinamikai peremfeltételekkel.

2. KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSOK, ENERGIA ELVEK

Bonyolult rugalmas peremérték feladat esetén csak közelítő megoldással tudunk szolgálni [8]. A közelítő megoldással szemben elvárásokat fogalmazhatunk meg, mind az elmozdulás és mind a feszültség vonatkozásában, ezért bevezetünk két definíciót.

Kinematikailag lehetséges elmozdulásmező: az az $u^*(x)$ elmozdulásmező, amely folytonos és elegendően sokszor differenciálható, valamint kielégíti a kinematikai peremfeltételt.

A definíció alapján az *1.b. ábrán* bemutatott feladatra fenn kell, hogy álljon a következő két egyenlet

$$\varepsilon_x^* = \frac{du^*}{dx}, \quad u^*(0) = 0.$$

Megjegyezzük, hogy elegendő az egyszeri differenciálhatóságot előírni. Az is nyilvánvaló, hogy a tényleges megoldás mindig eleget tesz a kinematikai lehetséges elmozdulásmező definíciójának.

Statikailag lehetséges feszültségmező : az a feszültségmező, amely kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

A definíció szerint az *1.b. ábrán* bemutatott feladatra a feszültségi mezőnek, azaz az \bar{N} rúderőnek ki kell elégítenie a következő két egyenletet

$$\frac{d\bar{N}}{dx} + f_x = 0, \quad \bar{N}(l) = F_x.$$

Elmozdulási módszer: az olyan közelítő megoldást előállító módszert, amelyben az elsődleges ismeretlen mező a kinematikailag lehetséges elmozdulás.

Erőmódszer : az olyan közelítő megoldást előállító módszer, amelyben az elsődleges ismeretlen mező a statikailag lehetséges feszültségmező.

A gyakorlatban legelterjedtebb az *elmozdulási módszerre* alapozott közelítő eljárás. Az *erőmódszer* alkalmazása általában lényegesen bonyolultabb, mint az elmozdulási módszer. Az utóbbi években egyre több kutatás foglalkozik a két mező együttes közelítésével, amelyet a *vegyes mezők módszerének* nevezünk.

Jelen tantárgyban az elmozdulási módszerrel fogunk foglalkozni. A közelítő megoldás előállításához olyan elvre van szükségünk, amely egy adott függvénytérből a lehető legjobb közelítéssel szolgál a megoldás vonatkozásában. A bemutatásra kerülő két elv a pontszerű megfogalmazással szemben a vizsgált tartományon értelmezett, azaz integrál értelmű megfogalmazást alkalmaz. A két bemutatásra kerülő elv a virtuális munka elv variációs alakja és a potenciális energia minimum elv.

2.1. A virtuális munka elvének variációs alakja egydimenziós esetben

A virtuális munka elv származtatása az *1.b. ábrán* bemutatott feladatra szükségessé teszi két további definíciónak a feladatunkra alkalmas megfogalmazását.

Virtuális elmozdulásmező: két különböző kinematikailag lehetséges elmozdulásmező különbségét virtuális elmozdulásnak nevezük, és $\delta u(x)$ -val jelöljük.

$$\text{Röviden } \delta u(x) = u_1^*(x) - u_2^*(x).$$

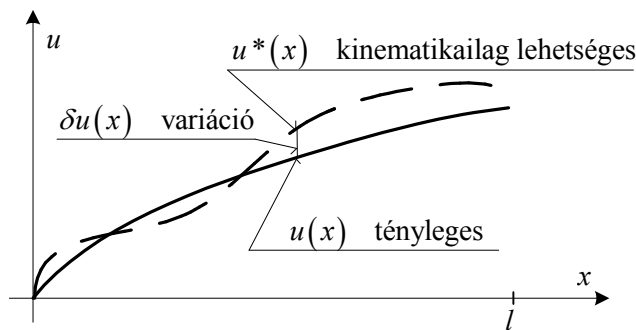
Elmozdulásmező variációja: a tényleges elmozdulásmező és annak elég kis környezetében lévő kinematikailag lehetséges elmozdulásmező különbsége. A virtuális elmozdulással megegyező módon $\delta u(x)$ -val jelöljük.

$$\text{Röviden } \delta u(x) = u^*(x) - u(x).$$

A fenti két definíció általános esetre történő megfogalmazása megtalálhatóak pl. [7] irodalomban is.

Megjegyzés: A virtuális elmozdulásmező és az elmozdulás variációja megegyezik, ha a tényleges mező közvetlen környezetében a tényleges elmozdulásmezőre vonatkozó virtuális elmozdulásmező elegendően kicsiny.

Az elmozdulásmező variációját a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra: Az elmozdulásmező variációja

Nyilvánvaló, hogy az elmozdulásmező variációja és a virtuális elmozdulás is egy tetszőleges folytonos és elegendően sokszor differenciálható függvény amelynek a kinematikai peremen az értéke zérus. Tehát fennállnak a következő összefüggések:

$$\delta \varepsilon_x = \frac{d(\delta u)}{dx}, \quad \delta u(0) = 0. \quad (5.1)$$

Szorozzuk meg a (4.3) egyensúlyi egyenletet δu -el és integráljuk a 0-tól l -ig

$$\int_0^l \delta u \frac{dN}{dx} dx + \int_0^l \delta u f_x dx = 0. \quad (5.2)$$

Parciális integrálás módszerét alkalmazva, legyen

$$u = \delta u, \quad v' = \frac{dN}{dx},$$

$$u' = \frac{d(\delta u)}{dx}, \quad v = N,$$

A módszer szerint a deriválatlan mennyiségek szorzatából kivonjuk a kiszámított mennyiségek szorzatának integrálját

$$\delta u N \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d(\delta u)}{dx} N dx + \int_0^l \delta u f_x dx = 0. \quad (5.3)$$

Figyelembe véve, hogy $\delta u(0) = 0$ és $\delta u(l) = \delta u_l$, valamint figyelembe véve a (4.5) dinamikai peremfeltételt, átrendezés után megkaphatjuk a *virtuális munka elv variációs alakját*.

A virtuális munka elv variációs alakja egy dimenziós feladatra :

$$\int_0^l \frac{d(\delta u)}{dx} N dx = \int_0^l \delta u f_x dx + F_x \delta u_l, \quad (5.4)$$

a tényleges megoldásnál a belső erők virtuális munkája megegyezik a külső erők virtuális munkájával.

A (4.2) anyagtörvény behelyettesítése (5.4) egyenletbe megadja a *rugalmas peremérték feladat gyenge alakját*.

Rugalmas peremérték feladat gyenge alakja :

$$\int_0^l \frac{d(\delta u)}{dx} AE \frac{du}{dx} dx = \int_0^l \delta u f_x dx + F_x \delta u_l. \quad (5.5)$$

Az (5.5) egyenlet igen fontos az elmozdulásra alapozott közelítő megoldások, így a végeselemes megoldások előállítására szempontjából is.

Gyengealakra alapozott közelítő megoldás tulajdonságai:

- az elmozdulásmezőnek kinematikailag lehetségesnek kell lennie,
- a kapott megoldás integrál értelemben kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

2.2. A teljes potenciális energia minimum elve

A teljes potenciális energia az alakváltozási energia és a külső erők potenciáljának összege [7]. A külső erők potenciálja helyett szokás a külső erők virtuális munkájának mínusz egyszeresének a fogalmát is használni. Így a teljes potenciális energia

$$\Pi_p = U - W, \quad (5.6)$$

ahol U az alakváltozási energia, W a külső erők virtuális munkája. Ez a kifejezés tulajdonképpen egy funkcionál.

Funkcionál: A matematikában azokat az operátorokat, amelyeknek az értékkészlete valós számhalmaz, funkcionáloknak nevezzük.

A (4.1)-(4.5) peremérték feladathoz rendelt funkcionál, azaz a teljes potenciális energia alakja

$$\Pi_p(u) = \frac{1}{2} \int_0^l AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l u f_x dx - F_x u_l. \quad (5.7)$$

Ha (5.7)-t úgy tekintjük, mint a $u(x)$ tényleges megoldásra felírt teljes potenciális energia, akkor felvetődik a kérdés, hogy ehhez képest milyen nagyságú teljes potenciális energia érték-

ket szolgáltat egy $u^*(x)$ kinematikailag lehetséges közelítő elmozdulásmező? A közelítő elmozdulásra vonatkozó teljes potenciális energia (5.7)-hez hasonlóan határozható meg

$$\Pi_p^*(u^*) = \frac{1}{2} \int_0^l AE \left(\frac{du^*}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l u^* f_x dx - F_x u_l^* . \quad (5.8)$$

Amint az a 3. ábrán is látható a közelítő mező felírható a tényleges elmozdulásmező és a variációja összegeként

$$u^*(x) = u(x) + \delta u(x) . \quad (5.9)$$

A (5.8) potenciális energiába behelyettesítve (5.9)-t

$$\Pi_p^*(u + \delta u) = \frac{1}{2} \int_0^l AE \left(\frac{d(u + \delta u)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l (u + \delta u) f_x dx - F_x (u_l + \delta u_l) , \quad (5.10)$$

majd célszerűen átrendezve, az alábbi kifejezést kapjuk

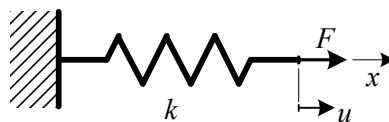
$$\begin{aligned} \Pi_p^*(u + \delta u) &= \frac{1}{2} \int_0^l AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l u f_x dx - F_x u_l + \\ &+ \int_0^l \frac{d(\delta u)}{dx} AE \frac{du}{dx} dx - \int_0^l \delta u f_x dx - F_x \delta u_l + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l AE \left(\frac{d(\delta u)}{dx} \right)^2 dx . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ha megfigyeljük (5.11) jobb oldalát láthatjuk, hogy az első sor megegyezik az (5.7) tényleges megoldás teljes potenciális energia kifejezés jobboldalával. A második sor az (5.5) virtuális munkaelv variációs alakjának nullára rendezett alakját szolgáltatja. A harmadik sor pedig egy kvadratikusan kifejezés integrálja, ami biztos, hogy nagyobb, mint nulla. Tehát megállapíthatjuk, hogy a teljes potenciális energia minimummal rendelkezik a tényleges megoldásnál.

Az (5.11) második sorában az elmozdulás variációja lineárisan szerepel, ez egyben a teljes potenciális energia első variációja és $\delta \Pi_p$ -vel jelöljük, míg a harmadik sora az elmozdulás variációját kvadratikusan tartalmazza és a teljes potenciális energia második variációját szolgáltatja, amelyet $\delta^2 \Pi_p$ -vel jelölünk.

2.3. Példa teljes potenciális energia minimum elvére

Egy k merevségű rugót F erő terheli. Határozzuk meg a rúgó végpontjának x irányú u elmozdulását a teljes potenciális energia minimum elvének felhasználásával!



4. ábra: Rugó terhelése koncentrált erővel

A rugalmas rendszer teljes potenciális energiája

$$\Pi_p(u) = \frac{1}{2} k u^2 - F u . \quad (5.18)$$

Most a teljes potenciális energia kifejezése nem funkcionál, hanem egy valós függvény. A potenciális energia minimum elv értelmében a függvénynek keressük a minimumát. A létezésének szükséges feltétele, hogy első deriváltja zérus legyen

$$\frac{d}{du} [\Pi_p(u)] = 0 = k u - F . \quad (5.19)$$

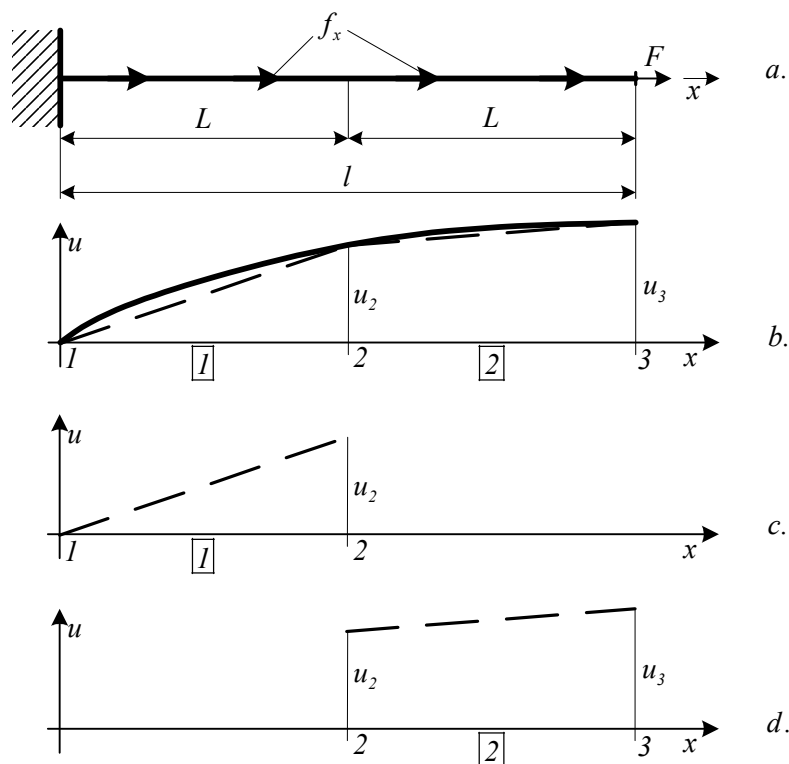
Az (5.19) egyenletből pedig átalakítás után megkapjuk a jól ismert összefüggést az elmozdulásra

$$u = \frac{F}{k} \quad (5.20)$$

A bemutatott példa megoldási módszere a legegyszerűbb lineárisan rugalmas végeelemes feladat, amely elvét tekintve megegyezik a komplex geometriájú és terhelésű rugalmas peremérték feladat megoldásánál alkalmazott végeelem módszerrel.

3. LOKÁLIS APPROXIMÁCIÓ ELVE, VÉGESELEM DISZKRETIZÁCIÓ EGYDIMENZIÓS FELADATRA

A vizsgálatunkat továbbra is az (4.1)-(4.5) alatt definiált peremérték feladatra végezzük. A végelem *diszkretizáció* jelentése végeselemes *felosztás*, a tartományt résztartományokra, azaz elemekre osztása. Az L hosszúságú elemek határait csomópontok jelölik.



7. ábra: Két elemes felosztás, approximáció elemenként

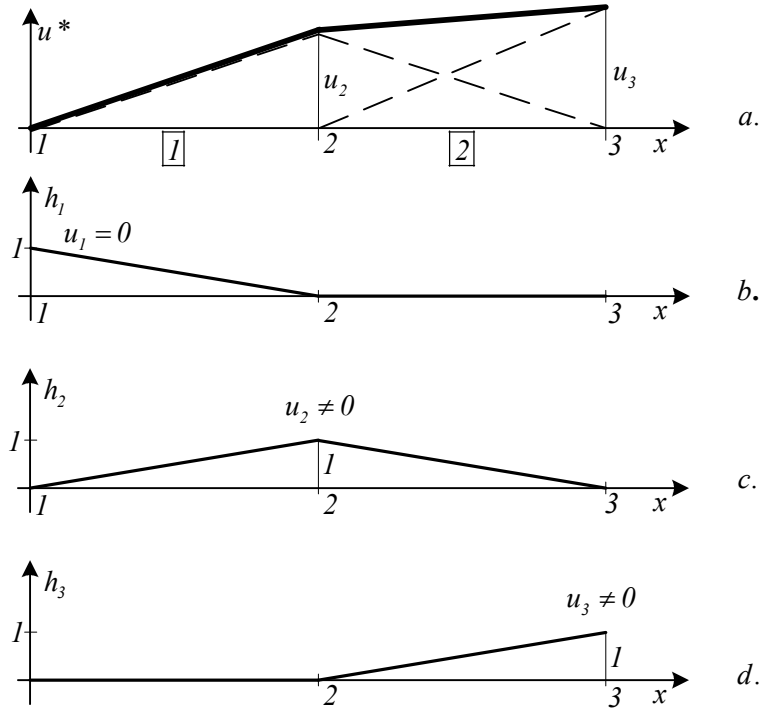
Az 1.b. ábrán vázolt tartományt most gondolatban két egyenlő hosszúságú résztartományra azaz végeselemre bontjuk és az elmozdulásmézőt az elemeken külön-külön approximáljuk. Az elemek sorszámát bekereteztük, az elemek végein feltüntetett számok jelölik az elemek csomóponti sorszámaikat. Az ismeretlen elmozdulásmézőt elemenként külön-külön lineárisan közelítjük (7.c. és 7.d. ábrák) és gondoskodunk azok illesztéséről is. Az illesztés azt jelenti, hogy az elemhatáron közös 2. csomópontban az u_2 elmozdulás megegyezik mindkét elmen. A 7.b. ábrán folytonos vonal jelöli az egzakt megoldást és szaggatott a közelítést.

Ez a közelítés felépíthető csomópontokhoz rendelt approximációs függvények segítségével is, amint azt a 8. ábra szemlélteti. Egy-egy közelítő függvény (8. b. c. d.) az egész ($2L$) tartományon folytonos, de csak lokálisan a megfelelő csomóponthoz tartozó elemek felett különbözik nullától. Ezek a függvények Ritz-féle bázisfüggvényeknek is tekinthetők.

Az 8. a. ábrán vázolt közelítő függvény (folytonos vonal) felépíthető a csomópontokhoz rendelt h_i ($i = 1, 2, 3$) alakfüggvények lineáris kombinációjaként is:

$$u^*(x) = \sum_{i=1}^3 h_i(x) u_i, \quad (6.1)$$

ahol az egyes mennyiségek bal alsó indexei a megfelelő csomóponti sorszámokat jelölik és megjegyezzük, hogy $u_1 = 0$.



8. ábra: Csomópontokhoz rendelt lokális approximációs függvények

Ahhoz, hogy a közelítő mező kinematikailag lehetséges legyen, az $u_1 = 0$ kinematikai peremfeltételt elő kell írunk, vagyis a 8. b. ábrán látható függvény nem játszik szerepet az approximációban.

A lokális approximáció elvének alkalmazásával a feladat visszavezethető a Ritz-féle módszer alkalmazására [1], [11], [13].

3.1. Húzott-nyomott rúdelem

Az 5.4. pontban láthattuk, hogy a közelítő megoldás keresése során a szerkezet teljes potenciális energiáját kellett felírni. Hasonlóan kell eljárni, amikor a vizsgált tartományt résztartományokra, azaz végelemekre bontjuk. A szerkezet teljes potenciális energiája az egyes elemeken számolt potenciális energiák összegeként állítható elő a koncentrált erő munkájával együtt

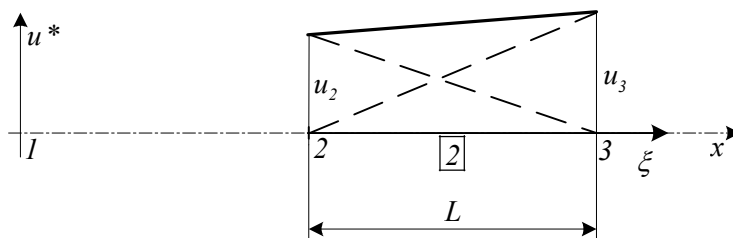
$$\Pi_p = \sum_{e=1}^2 \Pi_p^e - F_x u_3, \quad (6.2)$$

ahol az e index a végelemek sorszámát jelöli. Megjegyezzük, hogy a koncentrált erő munkáját nem szokás valamely elem teljes potenciális energiájához rendelni, csupán a szerkezet teljes potenciális energiájához. Itt és a továbbiakban közelítő megoldásról fogunk beszélni, de a korábban alkalmazott „*” jelölést a jobb felső indexben elhagyjuk.

Az elemen számolt teljes potenciális energia

$$\Pi_p^e(u_i, u_j) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{du^e}{d\xi} \right) AE \left(\frac{du^e}{d\xi} \right) d\xi - \int_0^L u^e f_x d\xi. \quad (6.3)$$

Vizsgáljuk meg a 7. ábrán és a 9. ábrán is vázolt 2-es sorszámú végelemen az elmozdulás approximációját.



9. ábra: Approximáció a 2. elemen

A 9. ábrán az elemhez kötöten bevezetünk egy új ξ koordinátát oly módon, hogy az origója essen egybe az elem baloldali végpontjával és iránya egyezzen meg az eredeti x iránnyal. Írjuk fel a ξ koordináta és az u_i csomóponti elmozdulás koordináták segítségével kifejezve az elmozdulásmezőt az elem mentén

$$u^2(\xi) = u_2 + \frac{u_3 - u_2}{L} \xi, \quad (6.4)$$

ahol a $u(\xi)$ jobb felső indexében a 2-es szám az elem sorszámára utal. Rendezzük át (6.4)-t a csomóponti elmozdulások szerint, majd sor és oszlop mátrixokkal is kifejezve az összefüggés az alábbi módon írható fel:

$$u^2(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{L} \right) u_2 + \frac{\xi}{L} u_3 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} \\ \frac{\xi}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

A 2-es elem approximációja alapján felírhatjuk egy általános e sorszámú és i, j csomópontú elem közelítését is

$$u^e(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{L} \right) u_i + \frac{\xi}{L} u_j = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} \\ \frac{\xi}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

A (6.6) képlet alkalmas az $e = l$ sorszámú elem elmozdulásának a leírására is a megfelelő $i = 1$ és $j = 2$ csomóponti elmozdulás behelyettesítésével.

A (6.6) elmozdulásmező ismeretében az (4.1) egyenlet segítségével számolhatjuk az alakváltozást (a deriválást értelemszerűen ξ szerint hajtjuk végre):

$$\varepsilon_x^e(\xi) = \frac{du^e(\xi)}{d\xi} = \frac{u_j - u_i}{L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Alkalmazva a (4.2) anyagtörvényt, meghatározható az elemen a rúderő is

$$N^e(\xi) = AE \varepsilon_x^e(\xi) = AE \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} AE. \quad (6.8)$$

Ezek után felírhatjuk az e -dik elem potenciális energiáját is (6.6) és (6.7) segítségével, (6.3) felhasználásával:

$$\Pi_p^e(u_i, u_j) = \frac{1}{2} \int_0^L \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} d\xi - \int_0^L \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} \\ \xi \\ L \end{bmatrix} f_x d\xi. \quad (6.9)$$

A (6.9) első integrálja az elem U^e alakváltozási energiája, a második integrál a megoszló erőrendszer W^e munkája. A csomóponti paraméterek az integrálás szempontjából konstansnak tekinthetők ezért kiemelhetjük az integrál jel elé

$$U^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & -\frac{AE}{L^2} \\ -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

A (6.10)-ben lévő mátrix egy elemének integrálja

$$\int_0^L \frac{AE}{L^2} d\xi = \frac{AE}{L^2} \xi \Big|_0^L = \frac{AE}{L}. \quad (6.11)$$

Ezt visszahelyettesítve (6.10)-be

$$U^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e, \quad (6.12)$$

ahol a 2×2 -es mátrixot az e elem merevségi mátrixnak nevezzük és $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^e$ -vel jelöljük, a függőleges 2×1 -es oszlopvektort és a vízszintes 1×2 -es sorvektort az e elem csomóponti elmozdulás vektorának nevezzük és $\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e, \underline{\underline{\mathbf{q}}}^{eT}$ -vel jelöljük, ahol T a transzponálás jele.

A (6.9)-ben szereplő második integrál a külső erő munkája az e elemen W^e

$$W^e = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} \\ \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} f_x d\xi. \quad (6.13)$$

A (6.13) oszlopvektor elemeinek integrálása után

$$\int_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) f_x d\xi = \left(\xi - \frac{\xi^2}{2L} \right) f_x \Big|_0^L = \frac{f_x L}{2}, \quad (6.14)$$

$$\int_0^L \frac{\xi}{L} f_x d\xi = \frac{\xi^2}{2L} f_x \Big|_0^L = \frac{f_x L}{2}, \quad (6.15)$$

azt kapjuk, hogy

$$W^e = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ \frac{f_x L}{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{q}}}^{eT} \underline{\underline{\mathbf{f}}}_p^e, \quad (6.16)$$

ahol a 2×1 -es oszlopvektor az elem tehervektora és $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_p^e$ -vel jelöljük.

Végül is egy e jelű elem potenciális energiája

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ \frac{f_x L}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

3.2. Szerkezeti mátrixok

Az elemek potenciális energiájának ismeretében felírhatjuk a szerkezet teljes potenciális energiáját

$$\Pi_p(u_1, u_2, u_3) = \sum_{e=1}^2 \Pi_p^e - F_x u_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ \frac{f_x L}{2} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{I}{2}[u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ \frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - [u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ \frac{f_x L}{2} \end{bmatrix} - F_x u_3. \quad (6.18)$$

A szerkezet teljes potenciális energiája tömörebben is átírható, hiszen a szomszédos elemek közös csomópontjában az elmozdulás megegyezik – jelen esetben u_2 – így értelemszerűen csak egyszer szerepeltetjük a kifejezésben, ezáltal biztosítjuk az elemek illesztését:

$$\Pi_p(u_1, u_2, u_3) = \frac{I}{2}[u_1 \quad u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 2\frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Az elemek illesztésén túl van egy másik fontos feltétel - amit még teljesítenünk kell - a kinematikai peremfeltétel. Ez azt jelenti, hogy a befalazásnál lévő csomópontban gondoskodnunk kell arról, hogy $u_1 = 0$ legyen

$$\Pi_p(u_2, u_3) = \frac{I}{2}[0 \quad u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 2\frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - [0 \quad u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \frac{f_x L}{2} \\ f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Figyeljük meg, hogy nullával szorozzuk a merevségi mátrix első sorát és oszlopát, a tehervektor vonatkozásában pedig csak az első elemet. Ezért az első sor és oszlop a szerkezeti mátrixból és első elem a szerkezeti vektorból elhagyható,

$$\Pi_p(u_2, u_3) = \frac{I}{2}[u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} 2\frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - [u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

ahol a jobboldal első tagjában a 2×2 -es mátrixot szerkezeti merevségi mátrixnak nevezzük és $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ -val jelöljük, a csomóponti elmozdulásokat tartalmazó függőleges 2×1 -es oszlop- és a vízszintes 1×2 -es sorvektort szerkezeti csomóponti elmozdulás vektornak nevezzük és $\underline{\underline{\mathbf{q}}}$ -vel jelöljük, végül a 2×1 -es oszlopvektort amely a szerkezet terhelését tartalmazza

szerkezeti tehervektornak nevezzük és $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ -vel jelöljük. E jelölések bevezetése után (6.21) a szerkezeti mátrixokkal is felírható:

$$\Pi_p(\underline{\underline{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{q}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{q}}} - \underline{\underline{\mathbf{q}}}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}. \quad (6.22)$$

3.3. A csomóponti elmozdulások meghatározása

A szerkezet (6.21) teljes potenciális energiája a csomóponti elmozdulási paraméterek kétváltozós függvénye. A potenciális energia minimum elv értelmében keressük ennek a többváltozós függvénynek a minimumát. A minimum létezésének szükséges feltétele a Ritz-módszernél is bemutatott (5.22) szerint

$$\min \Pi_p(u_2, u_3) \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial \Pi_p(u_2, u_3)}{\partial u_2}, \quad 0 = \frac{\partial \Pi_p(u_2, u_3)}{\partial u_3}. \quad (6.23)$$

Ugyanez tömörebben is felírható

$$\min \Pi_p(\underline{\underline{\mathbf{q}}}) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{0}}} = \frac{\partial \Pi_p(\underline{\underline{\mathbf{q}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{q}}}}. \quad (6.24)$$

A (6.24) alatti műveleteket elvégezve, a

$$\underline{\underline{\mathbf{0}}} = \frac{\partial \Pi_p(\underline{\underline{\mathbf{q}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{q}}}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{q}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{q}}} - \underline{\underline{\mathbf{q}}}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}} \right)}{\partial \underline{\underline{\mathbf{q}}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{q}}} - \underline{\underline{\mathbf{f}}}, \quad (6.25)$$

összefüggést kapjuk, ami átrendezés után egy lineáris algebrai egyenletrendszer:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{f}}}, \quad (6.26)$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 2 \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x L \\ \frac{f_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Ez a lineáris algebrai egyenletrendszer két egyenletet és két ismeretlent tartalmaz. Mivel az együtthatók mátrix determinánsa nyilvánvalóan nem nulla biztos, hogy megoldható a csomóponti elmozdulás paraméterekre:

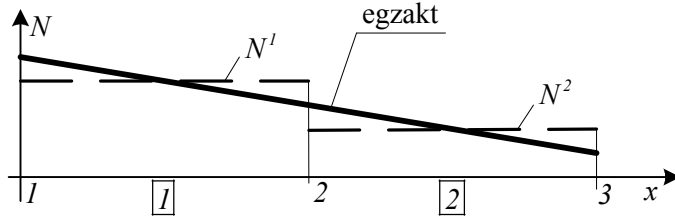
$$u_2 = \frac{3 f_x L^2}{2 AE} + \frac{F_x L}{AE}, \quad u_3 = 2 \frac{f_x L^2}{AE} + 2 \frac{F_x L}{AE}. \quad (6.28)$$

A rúderőket (6.8) felhasználásával állíthatjuk elő:

$$N^1(\xi) = AE \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{3}{2} \frac{f_x L^2}{AE} + \frac{F_x L}{AE} \right) \end{bmatrix} = \frac{3}{2} f_x L + F_x,$$

$$N^2(\xi) = AE \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} \frac{f_x L^2}{AE} + \frac{F_x L}{AE} \right) \\ \left(2 \frac{f_x L^2}{AE} + 2 \frac{F_x L}{AE} \right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_x L + F_x.$$

A 10. ábrán ábrázolt eredmények alapján láthatjuk, hogy a rúderő vonatkozásában a rúd-elemek felező pontjai optimális kiértékelő helyek bizonyulnak. Ez általában csak akkor áll fenn, ha a tartományt egyenlő hosszúságú elemekre osztjuk.



10. ábra: A rúderő eloszlása a szerkezet mentén

Megjegyzés: A (6.23) alatti műveleteket az alábbiakban az érthetőség kedvéért más módon is bemutatjuk a lépések teljes részletezésével.

Először végezzük el (6.21)-ben kijelölt szorzásokat

$$\Pi_p(u_2, u_3) = \frac{1}{2} \frac{AE}{L} \left[2(u_2)^2 - 2u_2 u_3 + (u_3)^2 \right] - u_2 f_x L - u_3 \left(\frac{f_x L}{2} + F_x \right), \quad (6.29)$$

és az eredményt helyettesítsük be (6.23) megfelelő egyenleteibe:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \Pi_p(u_2, u_3)}{\partial u_2} &= \frac{\partial \left\{ \frac{1}{2} \frac{AE}{L} \left[2(u_2)^2 - 2u_2 u_3 + (u_3)^2 \right] - u_2 f_x L - u_3 \left(\frac{f_x L}{2} + F_x \right) \right\}}{\partial u_2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{AE}{L} [4(u_2) - 2u_3] - f_x L = \frac{AE}{L} [2(u_2) - u_3] - f_x L, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$0 = \frac{\partial \Pi_p(u_2, u_3)}{\partial u_3} = \frac{\partial \left\{ \frac{1}{2} \frac{AE}{L} \left[2(u_2)^2 - 2u_2 u_3 + (u_3)^2 \right] - u_2 f_x L - u_3 \left(\frac{f_x L}{2} + F_x \right) \right\}}{\partial u_3} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{AE}{L} [-2u_2 + 2u_3] - \left(\frac{f_x L}{2} + F_x \right) = \frac{AE}{L} [-u_2 + u_3] - \left(\frac{f_x L}{2} + F_x \right). \quad (6.31)$$

Ha megnézzük a (6.30) alatt kapott eredményt, akkor látjuk, hogy (6.27) első sorát kaptuk vissza, hasonlóan (6.31) alatti eredmény a (6.27) összefüggés második sorával egyezik meg.

3.4. A végelem módszer gondolatmenetének összefoglalása

A végelem-módszernek a 6. fejezetben bemutatott eljárása alapján összefoglaljuk a legfontosabb lépéseket, amelyek egy általános térbeli rugalmas feladatra is fennállnak [6].

A végelem módszer lépései:

- A vizsgált szerkezetet gondolatban véges számú részre, azaz elemekre bontjuk.
- A keresett megoldást elemenként külön - külön közelítjük.
- Az elemek valóságos kapcsolódásának megfelelően az elemeket egymáshoz illesztjük. Erre szolgálnak az elemek határain kijelölt kapcsolódási pontok, vagy csomópontok, illetve azok elmozdulásai. Így a teljes szerkezetre érvényes közelítést kapunk, amely már csak a csomópontok jellemző elmozdulásait foglalja magába.
- A teljes szerkezetre ismert közelítés alapján felírható a szerkezet alakváltozási energiája és a külső erők munkája (azaz a teljes potenciális energia) a csomóponti elmozdulások függvényében.
- A szerkezet mozgását korlátozó kényszereket is csomópontokra vonatkozó kinematikai előírásokkal vesszük figyelembe. Ez többnyire azt jelenti, hogy a megfelelő csomópont minden-, vagy adott irányú elmozdulását meggátoljuk.
- Energetikai megfontolásokból (a teljes potenciális energia minimum elve) származtatható a közelítésben felvett összes csomóponti paraméter (elmozdulási koordináták) kiszámítására szolgáló egyenletrendszer. Lineárisan rugalmas szerkezet statikus terhelése mellett ez gyakran nagyméretű lineáris algebrai egyenletrendszer. Az egyenletrendszer a szerkezet egyensúlyát fejezi ki.
- Az egyenletrendszer megoldása után a csomóponti paraméterek ismeretében, meghatározható bármelyik szerkezeti elem szilárdságtani állapota, azaz tetszőleges pontban megkaphatjuk az elmozdulási, alakváltozási és feszültségi állapot jellemzőit.

3.5. Végelem programrendszerek általános felépítése

a) Adatbeviteli rész/modul:

- A szerkezet geometriai felépítésének megadása: pontok, vonalak, felületek, térfogatok.
- A szerkezet végelem hálózatának megadása: elemek, csomópontok.

Szemponatok:

- Azokon a tartományokon legyen sűrített a felosztás, ahol a mechanikai mennyiségek erőteljesebb változása várható.
- A koncentrált erők / nyomatékok támadáspontjára essen csomópont.
- A megtámasztási helyekre szintén legyen felvéve csomópont.
- A szerkezet anyagának megadása.

Az anyagjellemzők geometriai (vonal, felület, térfogat), vagy végeelem jellemzőkhöz (véges elemek) is megadhatók.

Speciális eset:

- Rúdfeladatoknál itt kell megadni a rúd keresztmetszeti jellemzőit is.
Pl. A, I_x, \dots
- Héj-, lemez- és tárcsafeladatoknál itt kell megadni a vastagsági méretet.
- A szerkezet terhelésének megadása (koncentrált, megoszló terhelés, hőmérséklet eloszlás,
- A szerkezet megtámasztásának megadása.
 - Megtámasztás (nincs elmozdulás),
 - Rugalmas ágyazás (rugóállandók),
 - Előírt elmozdulás (kinematikai terhelés).

b) A végeelem-számítási rész/modul.

- Az elemek merevségi mátrixainak és csomóponti terhelésvektorainak előállítás.
- Az egész szerkezet merevségi mátrixának és terhelési vektorainak (egyszerre több jobb oldal is lehetséges) előállítás.
- A kinematikai peremfeltételek figyelembevétele (megfelelő sorok és oszlopok törlése).
- A szerkezet lineáris algebrai egyenletrendszerének megoldása \Rightarrow a szerkezet csomóponti elmozdulásainak meghatározása.
- Alakváltozás, feszültség (belső erők) számítása elemenként a csomópontokban, vagy az elem belső pontjaiban. A csomóponti értékeket az egyes elemek csomóponti értékeinek átlagolásával szokás előállítani.

c) Az eredmények szemléltetését végző rész/modul.

- A felhasználó eldönti, hogy a szerkezet szilárdságtani állapotai közül mit vizsgál részletesen, mit szemléltet.
- A szerkezet pontjainak elmozdulását (deformált alak).
- Feszültségeket (az egyes feszültség-koordinátákat külön-külön, vagy a redukált feszültségeket), igénybevételeket, támasztóerőket.

4. IZOPARAMETRIKUS ELEMCSALÁD

A kereskedelmi szoftverekben leggyakrabban ún. izoparametrikus elemeket alkalmaznak. Az „izoparametrikus” jelző azt jelenti, hogy a geometria leképzésére alkalmazott (csomóponti) paraméterek száma azonos az ismeretlen mező közelítésére felvett paraméterek számával [1]. Ez azt is jelenti, hogy ugyan azon alakfüggvényeket alkalmazzuk a geometria leképezésére, mint az ismeretlen mező közelítésére. Az elem típus széleskörű elterjedése elsősorban annak köszönhető, hogy az elem merevségi mátrixának és tehervektorának előállításakor az integrálás könnyen végrehajtható. Egyaránt alkalmazható egy-, két- és háromdimenziós feladatokra.

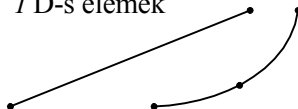
A valóságban jelentkező mechanikai feladatok általában térbeli jellegűek, azonban a mechanikai problémák egy része bizonyos feltételek esetén visszavezethető 1 dimenziós (1D-s), illetve síkbeli 2 dimenziós (2D-s) feladatokra. A 2D-s feladatok közül az alábbi három formalizmusát tekintve hasonlóan tárgyalható [1], [6], [8], [14]:

- általánosított síkfeszültségi állapotú feladat, azaz tárcsafeladat,
- síkalakváltozási feladat,
- tengelyszimmetrikus feladat.

Ebben a fejezetben az 1D-s és 2D-s elemekkel részletesen foglalkozunk, a 3D-s elemek származtatása az előzőekhez nagyon hasonlóan történik.

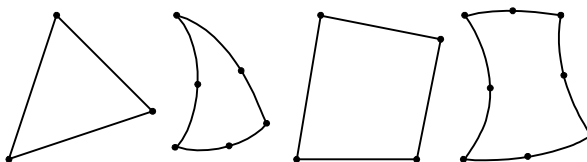
A leggyakrabban alkalmazott izoparametrikus elemek:

1D-s elemek



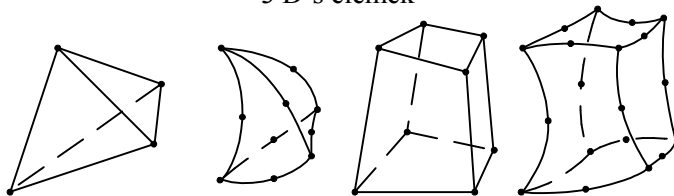
13. ábra: 2 és 3 csomópontú rúdelemek

2D-s elemek



14. ábra: 3 és 6 csomópontú háromszög-, 4 és 8 csomópontú négyszög elemek

3D-s elemek



15. ábra: 4 és 10 csomópontú tetrahedron-, 8 és 20 csomópontú hexahedron elemek

Az itt ábrázolt egyenes élű elemek - csak az élek végpontjain tüntettünk fel csomópontot - lineáris közelítést tartalmaznak, míg a görbült élű elemek, amelyeknél az oldalfelezőnél is látható csomópont kvadratikus közelítést alkalmaznak mind a geometriára és mind az elmozdulásmezőre nézve. A kvadratikus elemekkel pontosabb megoldás nyerhető, hiszen a vizsgált tartomány geometriáját jobban megközelíthetjük és az ismeretlen elmozdulásmező is magasabb fokú függvénnyel approximáljuk.

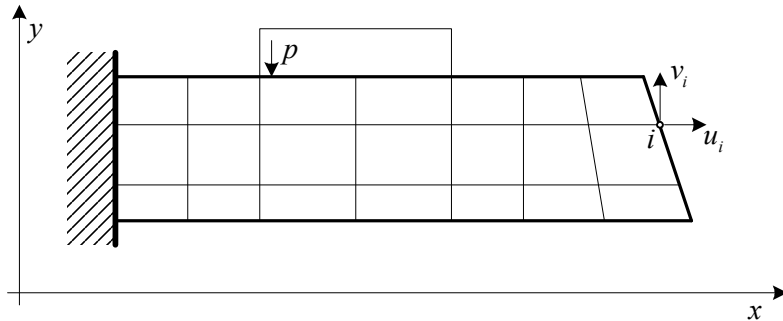
Az 1D-s elemekkel természetesen síkbeli és térbeli szerkezetek is vizsgálhatóak, mint ahogy a 2D-s elemek lehetnek héjelemek is, amelyek alkalmasak térbeli lemez-, illetve héjszerkezetek vizsgálatára is. A tetrahedron és hexahedron görög kifejezések rendre a megfelelő geometriai alakzat oldallapjainak a számát jelentik, azaz tetra= 4, hexa=6.

A továbbiakban részletesen megmutatjuk a két csomópontú rúdelem és a négy csomópontú síkbeli elem merevségi mátrixának és tehervektorának izoparametrikus származtatását.

4.1. Általánosított síkfeszültségi állapot

Az általánosított síkfeszültségi állapotot (ÁSF), szokás tárcsafeladatnak, illetve a végelem programokban „Plane stress problem”-nak nevezni [1], [6], [8].

Tárcsa: Olyan test amelynek egyik mérete lényegesen kisebb mint a másik kettő, értelemzhető középsík és a terhelésvastagság menti eredője a középsíkba esik.



18. ábra: Általánosított síkfeszültségi feladat

A tárcsa saját síkjában terhelt lemez. A formulákban alkalmazott feszültségek valójában a b falvastagság mentén képezett átlagértékek, de ezt külön nem jelöljük.

A feszültségi tenzor és a független elemeiből képzett feszültségi vektor:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Hasonló alakot ölt az alakváltozási tenzor és a független elemekből képzett alakváltozási vektor:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

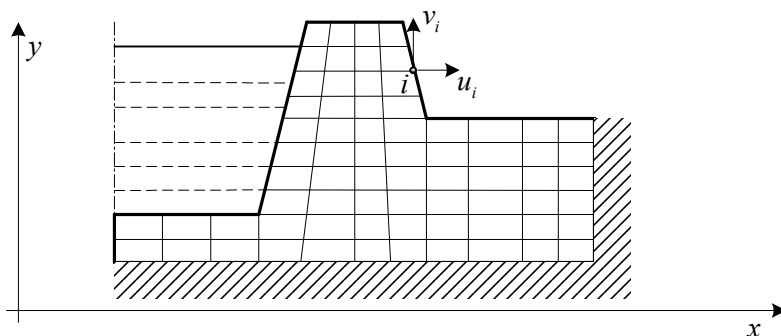
Az alakváltozási vektorban ε_z mennyiséget azért nem tüntettük fel, mert feszültségi párja $\sigma_z = 0$, és így az alakváltozási energiában nem játszik szerepet.

A feladat jellemzője, hogy a végelem háló csomópontjaiban csak x, y irányú u_i, v_i elmozdulás ismeretlen paraméterekről beszélünk, valamint ennek megfelelő F_{xi}, F_{yi} erők működtethetők.

4.2. Sík alakváltozási állapot

Az általánosított sík alakváltozási állapot (SA) kifejezést a végelem programokban „Plane strain problem”-nak nevezik [1], [6], [8].

Síkalakváltozásról beszélünk, ha a vizsgált testnek van egy kitüntetett síkja, amellyel párhuzamos valamennyi sík alakváltozása azonos és a síkok távolsága sem változik.



19 ábra: Egy folyómentén épített gát keresztmetszete

Feltételezéseink szerint a keresztmetszett síkjára merőlegesen végtelen hosszúnak tekintett test bármelyik keresztmetszetében ugyanolyan alakváltozási és feszültségi állapot ébred. Az ilyen testek mechanikai modellje egységnyi vastagságú metszetet. Ebben az esetben alakváltozási tenzor és a független elemekből képzett alakváltozási vektor:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

Hasonló alakot ölt a feszültségi tenzor és a független elemekből képzett feszültségi vektor:

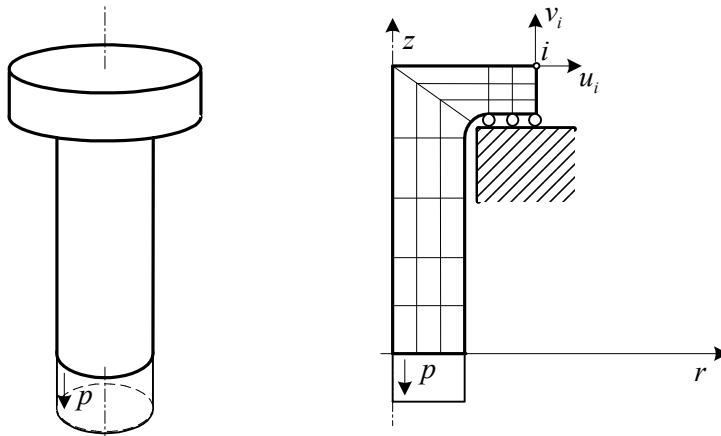
$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

A feszültségi vektorban σ_z mennyiséget azért nem tüntettük fel, mert az alakváltozási energiába nem játszik szerepet, hiszen az alakváltozási párja zérus.

A feladat kitűzése hasonló a síkfeszültségi állapothoz, vagyis a végelem háló csomópontjaiban csak x, y irányú u_i, v_i elmozdulás ismeretlen paraméterekről beszélünk, valamint ennek megfelelő F_{xi}, F_{yi} erők működtethetők.

4.3. Tengelyszimmetrikus feladat

Forgás vagy tengelyszimmetrikus állapot kifejezést a végelem programokban „Axisymmetric problem”-nak nevezik [1], [6], [8].



20. ábra: Egy csavar tengelyszimmetrikus terhelése és modellje

A forgásszimmetrikus test geometriája és terhelése is forgásszimmetrikus, bármelyik meridián metszetében ugyan olyan alakváltozási és feszültségi állapot ébred. Ebben az esetben az alakváltozási tenzor és a független elemekből képzett alakváltozási vektor:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{rz} \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zr} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

Hasonló alakot ölt a feszültségi tenzor és a független elemekből képzett feszültségi vektor:

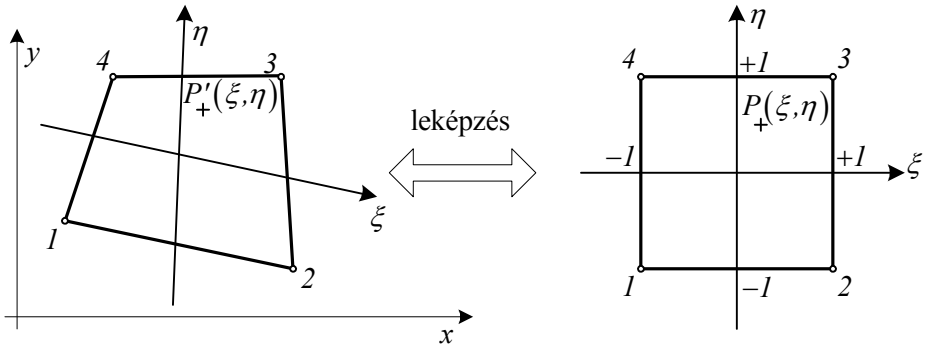
$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ \tau_{zr} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

A feladat megadása a síkfeszültségi és síkalakváltozási állapottal megegyezik, vagyis a végelem háló csomópontjaiban csak r, z irányú u_i, w_i elmozdulás ismeretlen paraméterekről beszélünk, valamint ennek megfelelő F_{r_i}, F_{z_i} erők működtethetők. A végelem programokban általában az r koordinátának az x koordináta felel meg.

A három feladat végelelemes vizsgálata azért nagyon hasonló, mert a csomóponti elmozdulásnak csak síkba eső koordinátája fordul elő. A továbbiakban részletesen csak a síkfeszültségi állapotú végelelemes előállítását részletezzük.

4.4. Lineáris izoparametrikus végelem

Síkbeli esetben most az elmhez egy lokális ξ, η természetes koordinátarendszert kötünk. A ξ, η lokális- és a x, y globális koordinátarendszer pontjai között kapcsolatot a leképzés teremti meg.



22. ábra: A globális x, y és a természetes ξ, η lokális koordinátarendszer közötti leképezés

A leképezés alkalmazásának előnye elsősorban abban jelentkezik, hogy a ξ, η természetes koordinátarendszerbeli integrálásra létezik könnyen programozható numerikus algoritmus.

A geometria leképezése:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) y_i, \quad (7.29)$$

ahol az alakfüggvények

$$\begin{aligned} h_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & h_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ h_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & h_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned}$$

Az elmozdulás közelítése:

Az izoparametrikus elnevezésből következően ugyanazokat az alakfüggvényeket alkalmazzuk az elmozdulási mező közelítésére is mint a geometria leképezésére

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) u_i, \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) v_i. \quad (7.30)$$

Az alakváltozási mennyiségek előállításánál szükség van a Jacobi mátrix inverzére, illetve a Gauss-féle numerikus integrálásnál a Jacobi determinánsra.

Közvetlenül a Jacobi mátrix inverze nem állítható elő, de a Jacobi mátrix igen:

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) x_i & \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) y_i \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) x_i & \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) y_i \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

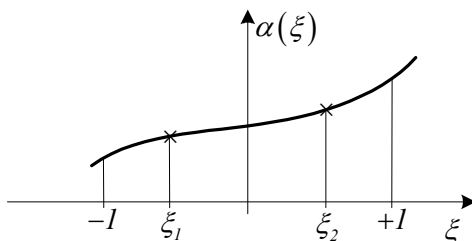
A Jacobi mátrix ismeretében az inverz képzést alkalmazzuk a numerikus számításoknál

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{-1}(\xi, \eta) = \frac{adj(\underline{\underline{\mathbf{J}}})}{det|\underline{\underline{\mathbf{J}}}|}. \quad (7.36)$$

A Jacobi mátrix determinánsa igen fontos szerepet játszik az elem leképezésének ellenőrzése során is, ha az értéke zérus, akkor a leképezés szinguláris. Ha a gyakorlati számítás során azt

érzékeli, hogy a Jacobi-féle determináns előjelet vált a különböző pontokban, akkor az elem nagyon eltorzult alakú és az eredmény nem megbízható. Ilyen esetben a végelem felosztást úgy kell módosítani, hogy ez ne forduljon elő.

Numerikus integrálás (Gauss kvadrátúra):



26. ábra: Az $\alpha(\xi)$ folytonos függvény a $[-1,+1]$ intervallumon

Vonalintegrál:

$$\int_{-1}^{+1} \alpha(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{NG} \alpha(\xi_i) W_i, \quad (7.41)$$

ahol ξ_i, W_i a Gauss koordináták és a hozzájuk tartozó Gauss súlyok, NG a Gauss-féle integrációs pontok száma. Polinomok esetén a kvadrátúra $(2 \cdot NG - 1)$ fokig pontos értéket szolgáltat.

1 Táblázat: Gauss koordináták és Gauss súlyok [1]

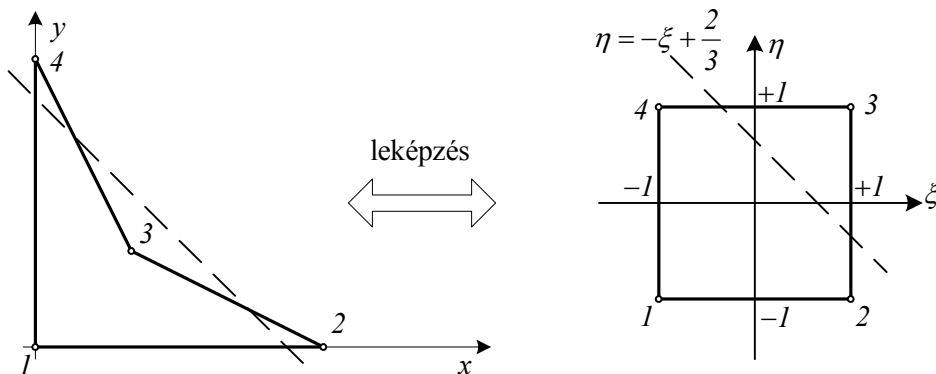
NG	ξ_i	W_i
1	0	2.0
2	-0.57735 02691 89626 0.57735 02691 89626	1.0 1.0
3	-0.77459 66692 41483 0.0 0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55555 0.88888 88888 88888 0.55555 55555 55555

Felületi integrál:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \beta(\xi, \mu) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} \beta(\xi_i, \mu_j) W_i W_j. \quad (7.42)$$

A továbbiakban alkalmazzuk a (7.41) és (7.42) formulákat a merevségi mátrix és tehervektor meghatározására.

4.5. Egy példa torzult síkbeli elem elfajuló leképzésére



27. ábra: Torzult négyszög alakú elem

Az ábrán vázolt elem sarokpontjainak koordinátái a 2. táblázatban adottak.

2. táblázat: Az elem sarok pontjainak koordinátái

Csomópont	x	y
1	0	0
2	4	0
3	1	1
4	0	4

Az elem leképzése:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) x_i = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)4 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)0 = \frac{1}{4}(1+\xi)(5-3\eta),$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)0 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)4 = \frac{1}{4}(1+\eta)(5-3\xi).$$

A Jacobi mátrix (7.35) alapján

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(5-3\eta)}{4} & \frac{-3(1+\eta)}{4} \\ \frac{-3(1+\xi)}{4} & \frac{(5-3\xi)}{4} \end{bmatrix}.$$

A leképzés elfajulóvá válik, ha a Jacobi mátrix determinánsa nulla:

$$\begin{aligned} \det|\mathbf{J}(\xi, \eta)| = 0 &= \begin{vmatrix} \frac{(5-3\eta)}{4} & \frac{-3(1+\eta)}{4} \\ \frac{-3(1+\xi)}{4} & \frac{(5-3\xi)}{4} \end{vmatrix} = \frac{25-15\xi-15\eta+9\xi\eta}{4} - \frac{9+9\xi+9\eta+9\xi\eta}{4} = \\ &= \frac{16-24\xi-24\eta}{4} = 4-6\xi-6\eta = 0. \end{aligned}$$

Az $\eta = -\xi + \frac{2}{3}$ egyenes azon pontok mértani helye, ahol a leképezés szingulárisává válik. A leképezés ilyenkor nem egyértelmű, pl. a tartomány egy része a tartományon kívülre képeződik le. Az elemnek ez a torzultsága matematikai és mechanikai szempontból nem engedhető meg. Az ilyen elem alakváltozási energiája negatív is lehet, ami fizikailag elképzelhetetlen. Egy elem hasonló torzultsága esetén, a végelem programrendszerek „Negative Jacobian” hiba-üzenetet írnak ki a képernyőre.