Megoszló erőrendszer – oktatási segédlet

Erő, erőrendszer, koncentrált erő, megoszló erőrendszer

Az erő: Az egymással kapcsolatban levő testek mechanikai kölcsönhatásának mértéke.
Az erő vektor mennyiség: irány és nagyság (előjel és mértékegység) jellemzi.

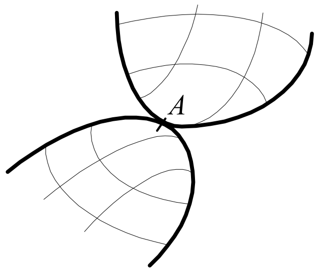
Erőrendszer (ER): Valamely szempontból kapcsolatban álló erők összessége.
Pl. ugyanarra a testre hatnak.

Rendszer: azoknak a testeknek az összessége, amelyeket együtt vizsgálunk.

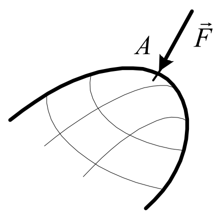
Terhelés: - a rendszerhez nem tartozó testeknek a rendszerre gyakorolt hatása,
- ismert nagyságú erőhatás.

Koncentrált erő (koncentrált terhelés):

Két test pontszerű érintkezésénél átadódó hatás.
Jele: $\vec{F}$, mértékegysége: N (Newton).



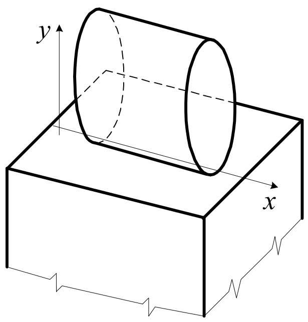
A – az erő támadáspontja.

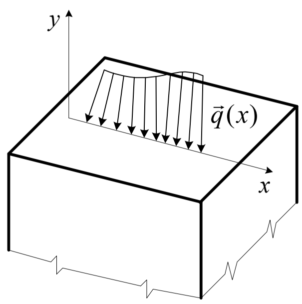


Pl.: biliárdgolyók.

Vonal mentén megoszló erő (terhelés):

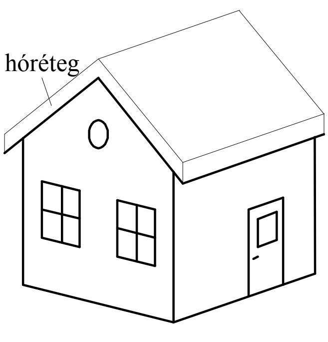
Két test vonal mentén történő érintkezésénél átadódó erőhatás.
Jele: $\vec{q}$, mértékegysége: N/m.

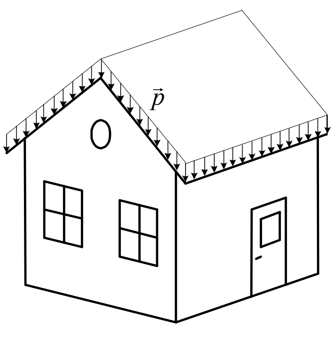




Felületen megoszló erő (terhelés):

Két test felület mentén történő érintkezésénél átadódó erőhatás.
Jele: $\vec{p}$, mértékegysége: N/m^2.





Térfogaton megoszló erő (terhelés):

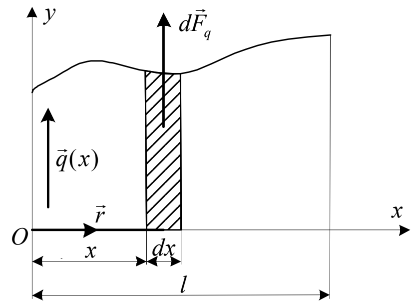
A testek kölcsönhatása erőtér közvetítésével jön létre.

Jele: $\vec{f}$, mértékegysége: N/m^3.

Pl. önsúly (a gravitációs erőtér hatására jön létre).

Vonal mentén megoszló erőrendszer

Csak a vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszereket vizsgáljuk.



A vonal mentén megoszló erőrendszer sűrűségvektora (intenzitásvektora):

$\vec{q}\left(x\right)=q\left(x\right)\vec{j}$.

A sűrűségvektor mértékegysége: N/m

Az elemi erő: $d\vec{F}_q=\vec{q}\left(x\right)dx$.

Az elemi erő nagysága egyenlő az ábrán sraffozott területtel.

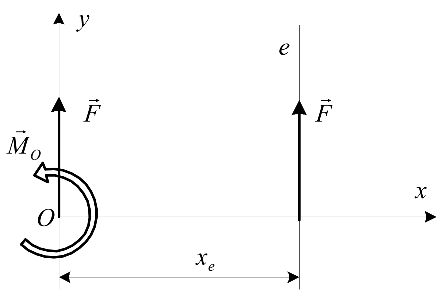
Az eredő erő: $\vec{F}_q=\int\limits_{(l)}\vec{q}\left(x\right)dx$.

Az eredő erő nagysága egyenlő a $q\left(x\right)$ görbe alatti területtel.

Az O pontra számított eredő nyomaték:

$$\vec{M}_O=\int\limits_{(l)}\vec{r}\times\vec{q}\,dx=\int\limits_{(l)}\left[\left(x\vec{i}\right)\times\left(q\left(x\right)\vec{j}\right)\right]dx=\int\limits_{(l)}x\,q\left(x\right)dx\cdot\vec{k}$$

Az eredő helyének meghatározása:



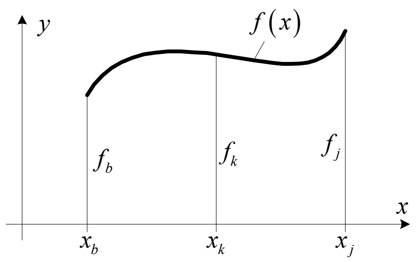
A $\vec{q}\left(x\right)$ erőrendszert helyettesítettük az $\vec{F}, \vec{M}_O$ redukált vektorkettőssel.

e – az eredő hatásvonala.

Az eredő hatásvonal helyének meghatározása:

$$M_O=x_eF \quad\Rightarrow\quad x_e=\frac{M_O}{F}$$

Az integrálok kiszámítása a Simpson formulával:



Az integrál kiszámítására alkalmas közelítő képlet:

$$\int\limits_{(l)}f(x)\,dx\cong\frac{l}{6}\left(f_b+4f_k+f_j\right).$$

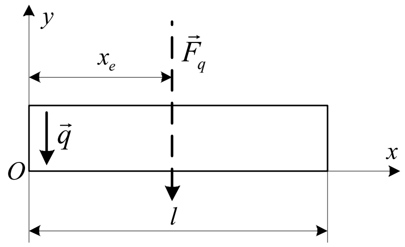
l – az integrálási tartomány mérete (hossza),

f_b, f_k, f_j - az integrálandó függvény helyettesítési értéke a tartomány bal szélén, a közepén és a jobb szélén.

A Simpson formula (képlet) harmadfokú polinomig bezárólag az integrál pontos értékét adja meg. A formula harmadfokúnál magasabb fokú integrandusz esetén közelítő eredményt szolgáltat.

Gyakorló feladatok vonal mentén megoszló erőrendszer eredőjének meghatározására

1. feladat: Egyenletesen megoszló terhelés

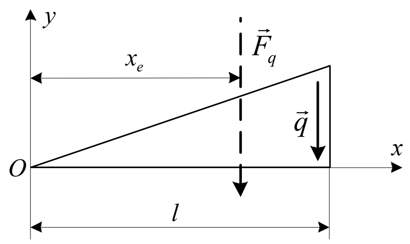


$$F_q = \frac{l}{6}\left(q + 6q + q\right) = q\,l\ ,$$

$$M_o = \frac{l}{6}\left(0 \cdot q + 4\frac{l}{2}q + l\,q\right) = \frac{ql^2}{2}\ ,$$

$$x_e = \frac{M_O}{F} = \frac{\frac{ql^2}{2}}{ql} = \frac{l}{2}\ .$$

2. feladat: Lineárisan változó terhelés

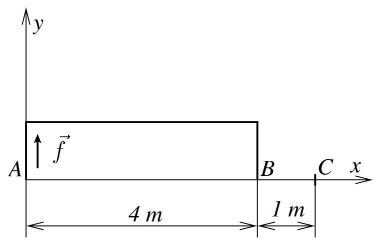


$$F_q = \frac{l}{6}\left(0 + 4\frac{q}{2} + q\right) = \frac{ql}{2}\ ,$$

$$M_o = \frac{l}{6}\left(0 \cdot 0 + 4\frac{l}{2}\frac{q}{2} + l\,q\right) = \frac{q\,l^2}{3}\ ,$$

$$x_e = \frac{M_o}{F_q} = \frac{\frac{q\,l^2}{3}}{\frac{q\,l}{2}} = \frac{2}{3}l\ .$$

3. feladat: Vonal mentén megoszló erőrendszer eredő vektorkettőse



<u>Adott:</u> $\vec{f} = (2\vec{j})\,\dfrac{\text{kN}}{\text{m}}$.

<u>Feladat:</u> Az erőrendszer A és C pontbeli eredő vektorkettősének meghatározása.

$$\vec{F} = \int_{(l)} \vec{f}\,dx = (4 \cdot 2)\vec{j} = \underline{\underline{(8\vec{j})\ \text{kN}}}\ ,$$

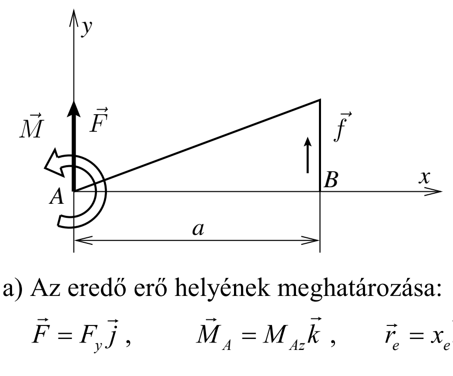
$$\vec{M}_A = \int_{(l)} \vec{r} \times \vec{f}\,dx = \frac{l}{6}(x_b f_b + 4x_k f_k + x_j f_j)\underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} = \frac{4}{6}(0 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2)\vec{k} = \underline{\underline{(16\vec{k})\ \text{kNm}}}\ .$$

$$\vec{M}_C = \int_{(l)} \vec{r}^{\,*} \times \vec{f}\,dx = \frac{4}{6}(-5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2)\vec{k} = \underline{\underline{(-24\vec{k})\ \text{kNm}}}\ .$$

Ellenőrzés: $\vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AC} = (16 - 40)\vec{k} = (-24\vec{k})$ kNm .

$$\vec{F} \times \vec{r}_{AC} = 8\,\vec{j} \times 5\vec{i} = (-40\vec{k})\ .$$

4. feladat: Vonal mentén megoszló erőrendszer jellemzőinek meghatározása



<u>Adott:</u> Az $\vec{f} = f_y(x)\vec{j}$ lineárisan megoszló erőrendszer redukált vektorkettőse:

$\vec{F} = (12\,\vec{j})$ N ,

$\vec{M}_A = (48\vec{k})$ Nm .

<u>Feladat:</u> a) Az eredő helyének meghatározása.

b) $f_B = ?$, $a = ?$

a) Az eredő erő helyének meghatározása:

$$\vec{F} = F_y\vec{j}\ , \qquad \vec{M}_A = M_{Az}\vec{k}\ , \qquad \vec{r}_e = x_e\vec{i}\ .$$

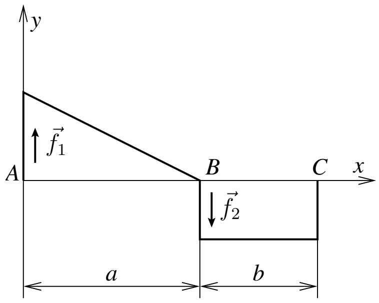
$$M_{Az} = x_e F_y \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{M_{Az}}{F_y} = \frac{48}{12} = 4\ m. \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_e = (4\vec{i}) \quad m.$$

b) Az f_B sűrűség (intenzitás) és az a hossz meghatározása:

$$x_e = \frac{2}{3}a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2}x_e = \frac{3}{2}4 = \underline{\underline{6\ \text{m}}},$$

$$F = \frac{1}{2}a\, f_B \quad \Rightarrow \quad f_B = \frac{2F}{a} = \frac{2 \cdot 12}{6} = \underline{\underline{4\frac{\text{N}}{\text{m}}}}.$$

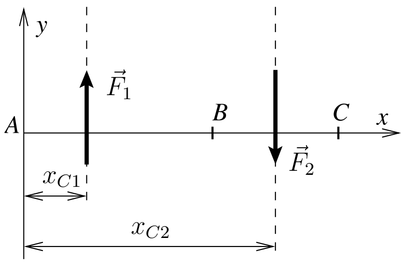
5. feladat: *Vonal mentén megoszló erőrendszer eredője*



Adott: $\vec{f}_1 = (4\vec{j})$ kN/m, $a = 3$ m,
$\vec{f}_2 = (-\vec{j})$ kN/m, $b = 2$ m.

Feladat: a) A megoszló erőrendszer helyettesítése két koncentrált erővel.
b) A megoszló erőrendszer eredőjének meghatározása szerkesztéssel.

a) Az erőrendszer helyettesítése koncentrált erőkkel:



$$\vec{F}_1 = \frac{a\, f_1}{2}\vec{j} = \frac{3 \cdot 4}{2}\vec{j} = \underline{\underline{(6\vec{j})\ \text{kN}}},$$

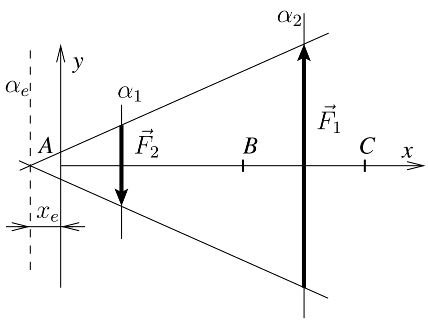
$$x_{C1} = \frac{a}{3} = \underline{\underline{1\ \text{m}}}.$$

$$\vec{F}_2 = -f_2 b\,\vec{j} = (-1 \cdot 2)\vec{j} = \underline{\underline{(-2\vec{j})\ \text{kN}}},$$

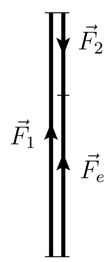
$$x_{C2} = a + \frac{b}{2} = \underline{\underline{4\ \text{m}}}.$$

b) Az eredő erő (nagyságának és hatásvonalának) meghatározása szerkesztéssel:

Helyzetábra



Erőábra



$$\vec{F}_{er} = \underline{\underline{(4\vec{j})\ \text{kN}}}, \qquad x_e = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\ m}}.$$