

## 12. lecke: Inverzmátrix

### Motivációs feladat

Tegyük fel, hogy egy vállalat  $n$  ágazatból áll és  $\underline{b}^T = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$  a bruttó kibocsátási vektor, a termelés szükségleteit megadó  $\mathbf{A}$  az ágazati kapcsolatok mátrixa,  $\mathbf{I}$  egy  $n \times n$  egységmátrix és  $\underline{n}$  pedig a nettó kibocsátás vektora, akkor a közöttük lévő kapcsolat:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\underline{b} = \underline{n}.$$

Levezethető, hogy ekkor az  $\underline{n}$  nettó kibocsátás ismeretében a  $\underline{b}$  bruttó kibocsátás felírható a következő alakban:  $\underline{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \underline{n}$ , ahol  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  mátrix az  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$  mátrix inverze.

Az  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  mátrixot szokás a teljes szükséglet mátrixának nevezni.

Ebben a fejezetben módszert adunk arra, hogy Gauss-Jordan eliminációval hogyan tudunk inverzmátrixot előállítani.

### Elméleti összefoglaló

#### definíció rész

**Definíció:** Legyen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Az  $\mathbf{A}^{-1}$  szintén  $n \times n$  típusú mátrixot az  $\mathbf{A}$  **mátrix inverzének** hívjuk, ha

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

#### normál rész

Nem minden négyzetes mátrixnak létezik inverze. Gondoljunk például a  $3 \times 3$ -as zérusmátrixra. Mivel minden eleme nulla, bármivel is szoroznánk, az eredmény biztosan egy zérusmátrix lesz.

**Tétel:** Egy négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha a mátrix determinánsának értéke nem nulla, azaz  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  és ekkor az inverz egyértelmű.

Próbáljunk meg módszert adni az inverz meghatározására.

Induljunk ki például az  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  mátrixból. Mivel  $\det(\mathbf{A}) = 1 \neq 0$ , van inverz.

A mátrix inverzét keressük a következő alakban:  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

A definíció szerint  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  kell, hogy teljesüljön.

Az inverz mátrix első illetve második oszlopában szereplő ismeretlen elemekre a következő egyenletrendszereket írhatjuk fel a szorzási szabály alapján:

$$\begin{array}{ll} 3a_{11} + 4a_{21} = 1 & 3a_{12} + 4a_{22} = 0 \\ 2a_{11} + 3a_{21} = 0 & 2a_{12} + 3a_{22} = 1 \end{array}$$

Gauss-Jordan módszert használva, a két egyenletrendszerhez a következő két bővített mátrix tartozik.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Jól látható, hogy az egyenletrendszerek mátrixai megegyeznek, csak a bővítő oszlopban van eltérés.

Ha a két egyenletrendszert egyidejűleg szeretnénk megoldani, akkor a Gauss-Jordan módszerhez az alábbi táblázatot kapjuk.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Tudjuk, hogy Gauss-Jordan elimináció alkalmazásánál a cél az, hogy olyan elimináló lépéseket kell végrehajtani, hogy a táblázat bal oldalán alakuljon ki az egységmátrix

Kezdjük el az eliminálást.

Az első sor első eleme 3. Ha ezzel a hármassal szeretnénk az alatta lévő kettest eltüntetni, akkor az

első sor  $\left(-\frac{2}{3}\right)$ -szorosával kellene számolni. Ahhoz, hogy ezt elkerüljük, próbáljunk meg helyette

hármassal helyére 1-et vagy  $(-1)$  behozni. Ehhez elegendő most a második sor  $(-1)$ -szeresét hozzáadni az első sorhoz

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Dolgozzunk az első oszlopban, azaz az első sor  $(-2)$ -szeresét adjuk a második sorhoz.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

A főátló alatt csak nulla van. Folytassuk a számolást a főátló felett. A második sor  $(-1)$ -szeresét adjuk hozzá az első sorhoz.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

A táblázat bal oldalán megkaptuk az egységmátrixot. Az eliminálásnak vége van.

Az első egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{cases} 3a_{11} + 4a_{21} = 1 \\ 2a_{11} + 3a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 3 \\ a_{21} = -2 \end{cases}$$

A második egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{cases} 3a_{12} + 4a_{22} = 0 \\ 2a_{12} + 3a_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = -4 \\ a_{22} = 3 \end{cases}$$

A jobb oldali mátrix első illetve második oszlopa éppen megadja az inverz mátrix első illetve második oszlopában lévő elemeket. Ez azt jelenti, hogy a jobb oldali táblázat maga az inverz mátrix.

Tehát:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

A megadott módszer működik tetszőleges négyzetes mátrixra is. Tehát egy  $n \times n$ -es inverz mátrix ismeretlen oszlopvektoraira  $n$  db egyenletrendszer írható fel. Ezeket Gauss-Jordan módszerrel egyidejűleg megoldva egy olyan táblázattal dolgozunk, ahol a bal odalon mindig az eredeti mátrix, a jobb oldalon pedig az egységmátrix szerepel. Az eliminálással el kell érünk, hogy a táblázat bal oldalán szerepeljen az egységmátrix és akkor jobb oldalon megjelenik a keresett inverz.

$$\left( \mathbf{A} | \mathbf{E} \right) \rightarrow \left( \mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1} \right)$$

Kétszer kettes mátrixok esetén azonban az inverz sokkal egyszerűbben is megadható.

Ha egy  $2 \times 2$ -es  $\mathbf{A}$  mátrixnak létezik inverze ( $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ) és  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , ahol  $a, b, c, d$  valós számok, akkor levezethető, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Azaz első lépésként adjuk meg azt a  $2 \times 2$  mátrixot, amelyet az eredetiből úgy képezünk, hogy a főátlóban felcseréljük az elemeket, a mellékátlóban pedig előjelet váltunk. A kapott mátrixot pedig szorozni kell az eredeti mátrix determinánsának reciprokával. A mintapéldánál a determináns értéke éppen 1, így az osztás elhagyható. De a hely és előjel csere valóban megtörtént. A leírt módszer csak  $2 \times 2$  mátrixra igaz.

## Kidolgozott feladatok

**1. feladat:** Határozzuk meg az  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix inverzét.

**Megoldás:** Tudjuk, hogy ha  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  és  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , akkor  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Most  $\det(\mathbf{A}) = 13$ .

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

**2. feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix inverzét Gauss-Jordan eliminációval.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

**Megoldás:** A mátrix determinánsának meghatározásával vizsgáljuk meg, hogy létezik-e a feladatnak megoldása. Mivel  $\det(\mathbf{A}) = -20 \neq 0$  van inverz.

Készítsük el a számoláshoz szükséges táblázatot.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Gauss-Jordan eliminációval olyan lépéseket kell végrehajtani, hogy a táblázat bal oldalán jelenjen meg az egységmátrix. Ha ez sikerül, akkor a jobb oldali táblázatban megjelenik a mátrix inverze. Mivel sok nulla szerepel a mátrixban, a sorok rendezésével el tudjuk érni, hogy a főátló alatt csak nullák legyenek.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Most már alakítsuk ki a főátló felett is a nullákat. Jelöljük ki a főátló felett azokat a számokat, amelyeket ki kell nullázni. Majd kezdjük a számolást a harmadik oszlopban. A harmadik sor  $(-1)$ -szeresét adjuk hozzá a második sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{10} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{10} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

Térjünk át második oszlopra. Már csak 10-t kell kiküszöbölni. A második sor 2-szeresét adjuk hozzá az első sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sikerült kialakítani a diagonális mátrixot. A főátlóban megjelennek az egyesek, ha soronként leosztunk a főátlóban lévő elemekkel.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Most már olvassuk le a keresett inverzet.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 0 & -0,2 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Végezzük el az ellenőrzést. Ha az  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$  vagy  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$  szorzás eredménye az egységmátrix lesz, akkor jól számoltunk.

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 0 & -0,2 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát helyes az eredmény.

**3. feladat:** Határozzuk meg  $\lambda$  értékét úgy, hogy következő mátrixnak legyen inverze.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ 4 & -4 & 8 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Megoldás:** A mátrixnak van inverze, ha determinánsa nem nulla. Tehát a  $\lambda$  értékét úgy kell megválasztanunk, hogy a mátrix determinánsának értéke ne legyen nulla, azaz

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ 4 & -4 & 8 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Írjuk fel a mátrix determinánsát  $\lambda$ -val kifejezve. Használjuk az első sor szerinti kifejtést:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ 4 & -4 & 8 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(-8-8) - 1(8-8\lambda) + \lambda(4+4\lambda)1 = 16 - 8 + 8\lambda + 4\lambda + 4\lambda^2$$

Rendezzük a kapott kifejezést, majd oldjuk meg nullára.

$$4\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Használjunk gyökképletet.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

Két esetben lesz a determináns értéke nulla, ha  $\lambda_1 = -1$  vagy  $\lambda_2 = -2$ .

És ezekben az esetekben nem létezik inverz.

Ha azonban  $\lambda \neq -1$  és  $\lambda \neq -2$ , akkor létezik a mátrixnak inverze.

**4. feladat:** Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az **A** mátrixnak ne legyen inverze!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 6 \end{pmatrix}$$

**Megoldás:** Az osztás miatt a megoldást az  $x \neq 0$  valós számok halmazán kell keresni. A mátrixnak nincs inverze, ha determinánsa nulla. Első lépésként fejezzük ki  $x$ -szel a mátrix determinánsának értékét. Az első sor szerinti kifejtéssel a következőt kapjuk:

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{x}(6-x^2) - 0 + 1(-1) = \frac{1}{x}(6-x^2) - 1$$

Ezek szerint úgy kell megválasztani  $x$  értékét, hogy  $\frac{1}{x}(6-x^2) - 1 = 0$  teljesüljön. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát  $x$ -szel, majd rendezzük a kapott egyenletet!

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

A kapott egyenletet oldjuk meg a gyökképlettel:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2}$$

$$x_1 = -3 \quad \text{és} \quad x_2 = 2$$

Tehát a mátrixnak nincs inverze, ha  $x_1 = -3$  vagy  $x_2 = 2$ .

**5. feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Megoldás:** Először nézzük meg, hogy van-e inverze a mátrixnak. Határozzuk meg a mátrix determinánsának értékét. Ezt megtehetjük a szokásos első sor szerinti kifejtéssel. De a számolás gyorsabb, ha észrevevessük, hogy az utolsó sort hozzáadva az első sorhoz, akkor két nulla is megjelenik. Most már számoljuk ki a determináns értékét az első sor szerint.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1(1-2) = 1$$

Tehát  $\det(\mathbf{A}) = 1 \neq 0$ , van inverze a mátrixnak.

Az inverzet Gauss-Jordan eliminációval fogjuk megoldani. Készítsük el a kiindulási táblázatot.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Az első sor első eleme 2. Elimináló elemként célszerű egyet vagy mínusz egyet választani. Így az első lépésben cseréljük fel az első és második sort, majd jelöljük be a főátló alatti kinullázandó elemeket.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-2} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{-2} & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Majd végezzük el az első oszlop eliminálását. Jelöljük ki az oszlopban azokat az elemeket, amelyeket szeretnénk kinullázni. Az első sor  $(-2)$ -szeresét adjuk hozzá a második sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{-2} & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Majd az első sor 2-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Az utolsó lépéssel kialakult a felső háromszögmátrix. A mátrix főátlója felett folytassuk az eliminálást. Jelöljük be a főátló feletti kinullázandó elemeket. Majd kezdjük a harmadik oszlopban a számolást. A harmadik sort adjuk hozzá a második sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Majd az utolsó sor  $(-1)$ -szeresét adjuk hozzá az első sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Már csak egyetlen elemet kell eliminálni a második oszlopban. A második sor  $(-1)$ -szeresét adjuk az első sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ha pedig az első sort végig szorozzuk  $(-1)$ -gyel, akkor kialakult a táblázat bal oldalán az egységmátrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

A jobboldali mátrix lesz a keresett inverzmátrix.



Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Számolásunkat ellenőrizzük le. Ha elvégezzük az  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$  vagy  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$  szorzatok valamelyikét és az eredmény az egységmátrix lesz, akkor jól számoltunk.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát helyes az eredmény.

**6. feladat:** Határozzuk meg az a következő mátrix inverzét Gauss-Jordan elimináció használatával.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

**Megoldás:** Először nézzük meg, hogy van-e inverze a mátrixnak. Határozzuk meg a mátrix determinánsát. Vegyük észre, hogyha az első oszlop  $(-2)$ -szeresét hozzáadjuk a harmadik oszlophoz, akkor a harmadik oszlopban két nullát kapunk. Így a harmadik oszlop szerint kifejtést használva a determináns értéke gyorsan meghatározható:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot (6 - 5) = -1$$

Tehát a determináns értéke nem nulla, van inverze az  $\mathbf{A}$  mátrixnak.

Írjuk fel a Gauss eliminációhoz tartozó táblázatot.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Kezdjük el a számolást. Eddig mindent nagyon részletesen leírtunk, egy táblázatban csak egy elem eliminálását végeztük el. A megoldás gyorsabb és átláthatóbb lesz, ha egy oszlopon belüli számolást egy táblázatban írunk le. De most is elsőre a főátló alatt számoljunk és kezdjük az első oszloppal. Az első sor első eleme 1, használhatjuk elimináló elemként. Adjuk az első sor  $(-1)$ -szeresét a második és harmadik sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{6} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A második oszlopban folytassuk az eliminációt. A második sor  $(-2)$ -szeresét adjuk a harmadik sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

A főátló alatt kialakultak a nullák. Folytassuk az eliminálást a főátló felett. Kezdjük a harmadik oszlopban. A harmadik sort adjuk hozzá a második, majd az első sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{4} & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{4} & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Már csak a második oszlopban kell kiküszöbölni a 4-et. A második sor  $(-4)$ -szeresét adjuk hozzá az első sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Majd az utolsó sort szorozzuk végig  $(-1)$ -gyel. Ezzel a táblázat bal oldalán megjelent az egységmátrix.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Számolásunkat ellenőrizzük le. Végezzük el az  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$  szorzást. Ha eredmény az egységmátrix lesz, akkor jól számoltunk.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát helyes az eredmény.

**7. feladat:** Határozzuk meg az  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  mátrix inverzét Gauss-Jordan elimináció

használatával.

**Megoldás:** A feladat megoldását próbáljuk meg még egyszerűbben leírni.

Használjuk a szokott jelöléseket az ekvivalens átalakításokra:

az  $i$ -edik és a  $j$ -edik sor felcserélése, ezt  $\boxed{i.} \leftrightarrow \boxed{j.}$  fogja jelölni;

az  $i$ -edik sor megszorozása tetszőleges nullától különböző  $\alpha$  számmal, ezt  $(\alpha) \cdot \boxed{i.}$  fogja jelölni;

az  $i$ -dik sor tetszőleges  $\alpha$  számszorozásának hozzáadása a  $j$ -edik sorhoz, és a  $j$ -edik sor helyére ezt az új sort írjuk, a többi sort pedig változatlanul hagyjuk, ezt  $(\alpha) \cdot \boxed{i.} + \boxed{j.} \rightarrow \boxed{j.}$  fogja jelölni.

Írjuk fel a kiindulási táblázatot.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Majd jelöljük be a főátló alatti kinullázandó elemeket.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{4} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Legyen a bal oldali mátrix első sorának első eleme 1

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{4} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \cdot \boxed{2} + \boxed{1} \rightarrow \boxed{1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{4} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

Végezzük el az eliminálást az első oszlopban.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{4} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(3)\cdot\boxed{1}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}}]{\substack{(1)\cdot\boxed{1}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{16} & 17 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right),$$

Folytassuk a számolást a főátló alatt a második oszlopban.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{16} & 17 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(7)\cdot\boxed{3}}]{\substack{(16)\cdot\boxed{2}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 112 & 112 & 16 & 32 & 0 \\ 0 & \boxed{112} & 119 & 21 & 21 & 7 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 112 & 112 & 16 & 32 & 0 \\ 0 & \boxed{112} & 119 & 21 & 21 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\left(\frac{1}{16}\right)\cdot\boxed{2}}]{\substack{(-1)\cdot\boxed{2}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -11 & 7 \end{array}\right),$$

A bal oldali táblázat egyszerű marad, ha a második és harmadik sorban egyszerűsítünk.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 5 & -11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(-1)\cdot\boxed{3}+\boxed{1}\rightarrow\boxed{1}}]{\substack{(-1)\cdot\boxed{3}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & 1 \end{array}\right),$$

Kialakult a felső háromszög mátrix.

Folytassuk a számolást a főátló felett a harmadik oszlopban.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{4} & \boxed{5} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(-5)\cdot\boxed{3}+\boxed{1}}]{\substack{(-1)\cdot\boxed{3}+\boxed{2}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{4} & 0 & -\frac{18}{7} & \frac{62}{7} & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{13}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & 1 \end{array}\right)$$

Már csak egyetlen elemet kell eliminálni.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{4} & 0 & -\frac{18}{7} & \frac{62}{7} & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{13}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-4)\cdot\boxed{2}+\boxed{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{10}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{13}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & 1 \end{array}\right)$$

Az utolsó táblázatból kiolvasható, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{10}{7} & -1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{13}{7} & -1 \\ \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ennek helyességét úgy érdemes ellenőrizni, hogy kiemelünk  $\mathbf{A}^{-1}$ -ből  $\frac{1}{7}$ -et:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 10 & -7 \\ -4 & 13 & -7 \\ 5 & -11 & 7 \end{pmatrix},$$

és nézzük meg, hogy teljesül-e az

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 10 & -7 \\ -4 & 13 & -7 \\ 5 & -11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

egyenlőség.

**8. feladat:** Egy vállalatnál az ágazati kapcsolatok mátrixa a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,12 & 0,14 \\ 0,10 & 0,44 & 0,18 \\ 0 & 0,20 & 0,40 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ -vel jelölt ún. teljes szükséglet mátrixát.

**Megoldás:** Első lépésként szükségünk van az  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  mátrix előállítására.

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-0,30 & 0-0,12 & 0-0,14 \\ 0-0,10 & 1-0,44 & 0-0,18 \\ 0-0 & 0-0,20 & 1-0,40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,70 & -0,12 & -0,14 \\ -0,10 & 0,56 & -0,18 \\ 0 & -0,20 & 0,60 \end{pmatrix}$$

Most már a szokott módon számolhatunk. Csak az a különbség, hogy az eddigi szép egész számok helyett tizedes törtekkkel kell számolni.

Kezdjük a táblázat elkészítésével.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0,70 & -0,12 & -0,14 & 1 & 0 & 0 \\ -0,10 & 0,56 & -0,18 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,20 & 0,60 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ha eddig eliminálásra a legjobb elem 1 vagy  $(-1)$  volt, akkor most legyen ezen számok tizede, azaz  $(-0,1)$ . Így a könnyebb számolás miatt cseréljük fel az első és második sort. Jelöljük be a kinullázandó elemeket a főátló alatt.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0,56 & -0,18 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0,70} & -0,12 & -0,14 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-0,20} & 0,60 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Az első sor 7-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0,56 & -0,18 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3,8 & -1,4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & \boxed{-0,20} & 0,60 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A második oszlopban folytatjuk az eliminációt. Egyszerűbb számolás miatt a második és harmadik sort cseréljük fel.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0,56 & -0,18 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,20 & 0,60 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3,8} & -1,4 & 1 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

A második sor 19-szeresét adjuk a harmadik sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0,56 & -0,18 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,20 & 0,60 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 7 & 19 \end{array} \right)$$

Az utolsó sorban osztani kell 10-zel. A számolást segíti, ha a második sort pedig szorozzuk  $(-10)$ -zel.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0,56 & -0,18 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{array} \right)$$

Folytassuk a számolást a főátló felett. Jelöljük ki a kinullázandó elemeket.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0,56 & -0,18 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{array} \right)$$

A harmadik sor 6-szorosát adjuk hozzá a második sorhoz, majd a harmadik sor 0,18-szorosát az első sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0,56 & 0 & 0,018 & 1,126 & 0,342 \\ 0 & 2 & 0 & 0,6 & 4,2 & 1,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{array} \right)$$

Osszunk le a második sorban 2-vel.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0,56 & 0 & 0,018 & 1,126 & 0,342 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 & 2,1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{array} \right)$$

A második sor  $(-0,56)$ -szorosát adjuk hozzá az első sorhoz.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -0,10 & 0 & 0 & -0,15 & -0,05 & -0,05 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 & 2,1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{array} \right)$$

Szorozzuk meg az első sort  $(-10)$ -zel.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3 & 2,1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{array} \right)$$

Tehát a teljes szükséglet mátrixa:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 2,1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{pmatrix}$$