

11. lecke: Lineáris egyenletrendszerek

Motivációs feladat

A korábbiakban már láttuk, hogy gazdasági vagy termelési folyamatok egyszerűen és szemléletesen leírhatóak vektorokkal illetve mátrixokkal.

Tegyük fel, hogy egy vállalat n ágazatból áll és az egyes ágazatok egy bizonyos időszakban rendre $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ terméket állítanak elő. Ekkor a $\underline{b}^T = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ vektort a ún. bruttó kibocsátási vektornak, a termelés szükségleteit megadó $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot pedig ágazati kapcsolat mátrixának szokás nevezni. Ha az $\mathbf{A}\underline{b}$ szorzatmátrix a termelői fogyasztás vektora, akkor a bruttó kibocsátás és a termelői fogyasztás vektorának különbségét szokás nettó kibocsátásnak nevezni és \underline{n} -al jelölni. Tehát ha \mathbf{I} egy $n \times n$ -es egységmátrix, akkor

$$\underline{b} - \mathbf{A}\underline{b} = \mathbf{I}\underline{b} - \mathbf{A}\underline{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\underline{b} = \underline{n}$$

alapján a nettó és bruttó kibocsátás közti kapcsolat: $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\underline{b} = \underline{n}$.

Sokszor az előírt \underline{n} nettó kibocsátáshoz kell a \underline{b} bruttó kibocsátást meghatározni. A felírt mátrixegyenlet egy n egyenletből és n ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszerbe írható át. Ebben a leckében módszert adunk ezen egyenletrendszerek megoldására.

Elméleti összefoglaló

Tekintsük az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ismeretleneket. Egy ezekre az ismeretlenekre vonatkozó **lineáris egyenlet** úgy keletkezik, hogy minden ismeretlent megszorunk egy tetszőleges számmal, ezeket a szorzatokat összeadjuk, és az összeget egyenlővé tesszük egy számmal. (Azaz a lineáris kifejezés azt jelenti, hogy az ismeretlenek csak első hatványon szerepelhetnek és az egyenletekben nem fordul elő az ismeretlenek valamely szorzata.)

Egy **lineáris egyenletrendszer** ugyanazokra az ismeretlenekre kirótt néhány lineáris egyenlet együttese.

Például az alábbi az x_1, x_2, x_3 ismeretlenekre vonatkozó egyik lehetséges lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy hasonló egyenletekkel már két leckével korábban is találkoztunk. Az egyenletrendszerek megoldása teljesen ugyanaz lesz, csak arra fogunk törekedni, hogy a megoldás lépéseit minél egyszerűbben írjuk le mátrixok segítségével. A módszert Gauss-eliminációnak fogjuk nevezni.

Minden lineáris egyenletrendszer leírható mátrixok segítségével. Tegyük fel, hogy a lineáris egyenletrendszer n ismeretlenre vonatkozik és m egyenletből áll. Első lépésként, ha nem úgy lenne

először, minden egyenletben az ismeretleneket indexeik természetes sorrendje szerint rendezzük az egyenletek bal oldalán. Az ismeretlenek együtthatóira kettősindexek segítségével lehet célszerű jelölést bevezetni: a_{ij} azt fogja jelölni, hogy az i -edik egyenletben mennyi a j -edik ismeretlen együtthatója. Az egyenletek jobb oldalán álló számokat is index segítségével jelöljük: b_i az i -edik egyenletben a jobb oldalon álló számot fogja jelölni. Ekkor a lineáris egyenletrendszer a következő alakú:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Ekkor az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$ típusú mátrixot **együttható mátrixnak**, a $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$m \times 1$ típusú mátrixot **eredmény mátrixnak**, az $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $n \times 1$ típusú mátrixot az **ismeretlenek**

mátrixának hívjuk. Ezzel a jelöléssel, a mátrixok szorzásának és egyenlőségének definíciója alapján a fenti lineáris egyenletrendszer így írható:

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}.$$

Bevezetjük még az $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ $m \times (n+1)$ típusú **kibővített mátrixot** is. A

feladatok megoldásánál jó, ha egyértelműen látjuk a bővítő oszlopot, ezért a későbbiekben az utolsó oszlopot egy függőleges vonallal el fogjuk választani és a következő alakú táblázatot fogjuk mindig felírni.

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Vegyük észre, hogy a kibővített mátrix teljesen meghatározza az egyenletrendszert, hiszen az mindegy, hogy az ismeretleneket milyen betűvel jelöljük.

A lineáris egyenletrendszer egy **megoldását** úgy kapjuk, hogy minden ismeretlennek egy olyan értéket adunk, amelyre az összes egyenlet egyszerre teljesül.

A lineáris egyenletrendszerek megoldhatóság szempontjából háromféleképpen viselkedhetnek: egyértelmű megoldás van, végtelen sok megoldás van, végül egyáltalán nincs megoldás.

Vannak speciális szerkezetű lineáris egyenletrendszerek, amelyek megoldása könnyen megtalálható. Tekintsük például az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ & & & & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

A harmadik egyenletből $x_3 = 2$. Az x_3 ismeretében a második egyenlet $3x_2 + 4 = 7$ alakot ölt, amiből $x_2 = 1$. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve $x_1 + 2 - 2 = 1$, amiből $x_1 = 1$.

A fenti egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right).$$

Ez egy úgynevezett **felső háromszög mátrix**, mert a főátló alatt minden elem nulla. A főátlót azok az elemek alkotják, amelyeknek a két indexe megegyezik: a_{11} , a_{22} , a_{33} és így tovább, ha vannak még sorok.

A **Gauss-elimináció** lényege, hogy, ha a kibővített mátrix nem felső háromszög mátrix, akkor az egyenletrendszer ekvivalens átalakításaival érjük el, hogy az legyen.

Egy lineáris egyenletrendszer **ekvivalens átalakítása** egy olyan átalakítás, amelyik nem változtatja meg a megoldást.

Foglaljuk össze, hogy melyek is ezek az átalakítások:

Mivel egy egyenletrendszer megoldása nem változik meg, ha bármely két egyenletét felcseréljük, így a **bővített mátrix bármely két sora felcserélhető**.

Mivel egy egyenletrendszer megoldása nem változik meg, ha valamely sorát egy nullától különböző számmal megszorozzuk, **így a bővített mátrix valamely sora egy nullától különböző számmal megszorozható**.

Mivel egy egyenletrendszer megoldása nem változik meg, ha az egyik egyenlet valahányszorosát egy tőle különböző egyenlethez adjuk, **így a bővített mátrix valamely sorának bármilyen számszorosa egy másik sorhoz adható**.

Az alábbi jelölésekkel az ekvivalens átalakítások leírását egyszerűsíthetjük:

az i -edik és a j -edik egyenlet felcserélése, ezt $\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$ fogja jelölni;

az i -edik egyenlet megszorozása tetszőleges nullától különböző α számmal, ezt $(\alpha) \cdot \boxed{i.}$ fogja jelölni;

az i -dik egyenlet tetszőleges α számszorozásának hozzáadása a j -edik egyenlethez, és a j -edik egyenlet helyére ezt az új egyenletet írjuk, a többi egyenletet pedig változatlanul hagyjuk, ezt $(\alpha) \cdot \boxed{i.} + \boxed{j.} \rightarrow \boxed{j.}$ fogja jelölni.

Megmutatható, hogy ezek ismételt alkalmazásával a kibővített mátrix mindig felső háromszög mátrix alakra transzformálható. Az átalakítás lépéseit és a megoldás leolvasását feladatokon keresztül mutatjuk be.

A Gauss módszert lehet tovább finomítani. Ha nemcsak a főátló alatt, hanem a főátló felett is elvégezzük az eliminálásokat a tanult ekvivalens átalakításokkal, akkor a megoldásokat még egyszerűbben lehet leolvasni. Ezt a módszert a továbbiakban **Gauss-Jordan eliminációnak** fogjuk nevezni. Konkrét feladatok megoldásán keresztül nézzük meg mindkét módszert.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Oldjuk meg Gauss eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$$

Megoldás: Ha megnézzük az egyenletrendszert, akkor úgy indulnánk el, hogy az első egyenletet hozzáadnánk a másodikhoz, mert ekkor x_1 kiesik.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ & & 3x_2 & = & 6 \end{array}$$

A második egyenlet alapján $x_2 = 2$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve $x_1 + 4 = 5$, ahonnan $x_1 = 1$.

Most nézzük meg a számolást Gauss-eliminációval. Ugyanezeket a lépéseket fogjuk végrehajtani, de nem egyenletekkel, hanem mátrixokkal számolunk.

Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát. Az indexek természetes sorrendjét követve, az első oszlopba x_1 , a második pedig x_2 ismeretlen együtthatói kerüljenek. A bővítő oszlopba pedig írjuk be az egyenletek jobb oldalán szereplő konstansokat. Így az egyenletrendszerhez az alábbi bővített mátrix tartozik.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Most is az a cél, hogy a második egyenletből x_1 essen ki. Ez mátrix alakban azt jelenti, hogy második sor első eleme, ami most (-1) , legyen nulla. (Ha egy ismeretlen hiányzik valamelyik egyenletből,

akkor a mátrixban a helyére 0-t kell írni.) Ezt úgy tudjuk elérni, ha a bővített mátrix első sorát a másodikhoz adjuk. Ezzel (-1) kinullázódik.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Ennek az ekvivalens átalakításnak az lett az eredménye, hogy a kibővített mátrix felső háromszög mátrix alakúvá vált.

Olvassuk le, hogy a táblázat milyen új egyenletrendszert takar.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ 3x_2 & = & 6 \end{array}$$

Most már az új egyenletrendszerrel dolgozzunk tovább. A második egyenlet alapján $x_2 = 2$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $x_1 = 1$.

A megoldás tehát most is $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

A megoldás helyességéről az eredeti egyenletrendszerbe való behelyettesítéssel könnyen meg lehet győződni. Ennek elvégzését az olvasóra bízunk.

Mivel maga az egyenletrendszer nagyon egyszerű volt, a bővített mátrixszal való számolás bonyolításnak tűnik. De ha az egyenletek és ismeretlenek számát növeljük, akkor látható lesz milyen jól működik a módszer.

2. feladat: Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Megoldás: Az indexek természetes sorrendjét követve írjuk fel a bővített mátrixot, azaz a mátrix első oszlopába x_1 , a másodikba x_2 , a harmadikba pedig x_3 ismeretlen együtthatói kerüljenek. A bővítő oszlopba pedig az egyenletek jobb oldalán szereplő konstansokat írjuk be.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Ha egyenletekkel dolgoznánk, akkor eliminálással el kellene érni, hogy egy egyenlet maradjon három ismeretlennel, egy amelyikben kettő van és egy amelyikben már csak egy ismeretlen van.

A bővített mátrixszal való számolás esetén ez azt jelenti, hogy ekvivalens átalakításokkal érjük el, hogy egy felső háromszög mátrixot kapjunk.

Jelöljük be azokat a számokat, amelyeket ki kellene nullázni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & -2 & -3 & 6 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Ha most az első sor $\left(-\frac{1}{2}\right)$ szeresét hozzáadnánk a második sorhoz, kinullázódna a második sor első pozícióján álló 1, de törtekkel kéne számolni. Ezt, hacsak lehet, kerüljük el.

A könnyebb számolás érdekében cseréljük fel a mátrix első és második sorát.

Igy az első sor első eleme 1 lesz, amivel a legkönnyebb az alatta lévő elemeket kinullázni. Ha sorcserét hajtunk végre, akkor a táblázatban ez legyen az egyetlen átalakítás.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 6 \\ \boxed{2} & -3 & 1 & -1 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Az eliminálást kezdjük mindig az első oszlopban. Most az első sor (-2) -szeresét adjuk a második sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Most az első sor (-2) -szeresét hozzáadjuk a harmadikhoz is.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & \boxed{5} & 7 & -9 \end{array} \right)$$

Az első oszlop készen van. A harmadik sorban kell még eliminálni. Fontos, hogy csak olyan művelet engedhető meg, amely a kialakított nullákat meghagyja. Ez csak akkor teljesül, ha a második sor

(-5) -szörösét adjuk hozzá a harmadik sorhoz. (Ha az első sor $\frac{5}{2}$ -szeresét hozzáadnánk a harmadik sorhoz, az ötös kinullázódna, de a mellette lévő nulla helyére $\frac{5}{2}$ kerülne.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & -28 & 56 \end{array} \right)$$

Írjuk fel a táblázat alapján az egyenletrendszer új alakját!

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 7x_3 &= -13 \\ -28x_3 &= 56 \end{aligned}$$

Olvassuk le a megoldást.

Az utolsó egyenletből adódik, hogy:

$$x_3 = -2$$

Ha ezt a második egyenletbe behelyettesítjük, akkor adódik, hogy:

$$x_2 = 1$$

Behelyettesítve az első egyenletbe x_3 és x_2 értékeit kapjuk, hogy:

$$x_1 = 2$$

$$\text{Tehát a megoldás: } \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

3. feladat: Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Megoldás: Felírjuk a kibővített mátrixot, és megjelöljük a főátló alatti elemeket:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 3 & 6 \\ \boxed{1} & \boxed{5} & -2 & 2 \end{array} \right).$$

A megjelölt elemeket kell kinullázni. Ahhoz, hogy ne keveredjünk bele a számolásba, most is első lépésben a megjelölt elemek első oszlopát nullázzuk ki az első sor felhasználásával.

A másik fontos dolog, hogy ügyeljünk minél kevesebb táblázattal dolgozni. Ezért az első oszlopban való két eliminálást egymás után, de egy táblázatban fogjuk leírni. A determinánsoknál használt jelölésekkel is fel fogjuk írni, hogy milyen műveleteket hajtottunk végre. Tehát kezdjük. Az első sor egyszerűsítését adjuk a második sorhoz, majd az első sor mínusz egyszerűsítését a harmadikhoz. (Nem kell sorcsere, mivel az első sor első eleme 1, ezzel a legegyszerűbb a számolás.) Ekkor kapjuk, hogy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 3 & 6 \\ \boxed{1} & \boxed{5} & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(1)\cdot\boxed{1}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2} \\ (-1)\cdot\boxed{1}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}}]{(1)\cdot\boxed{1}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 1 \end{array} \right).$$

(A nyílra írt átalakítások sorrendje, mint a determinánsok kiszámításánál is volt, felülről lefelé halad.)

Mivel a kialakított nullákat nem szeretnénk elrontani, az első sorral további eliminálást nem fogunk végrehajtani. (Például a még bekeretezve maradt 3-at kinullázhatnánk úgy is, hogy az első sor mínusz másfélszeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz, de akkor a harmadik sor első nullája elveszne, ami nem jó nekünk.) Pontozott vonallal leválasztottuk a maradék sorokat, jelölve, hogy ezekkel kell továbbdolgozni. A maradék táblázatot nézve a második sor mínusz egyszerűsítését kell a harmadik sorhoz adni, hogy a bekeretezett elem kinullázódjon.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{2}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right).$$

Elértük, hogy a kibővített mátrix felső háromszög mátrix alakot öltött. Írjuk fel azt az új egyenletrendszer, amit az utolsó táblázatunk takar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{rrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ & & & & -3x_3 & = & -6 \end{array}$$

A megoldás innen már sorozatos visszahelyettesítéssel megkapható.

Az utolsó egyenletet szerint $x_3 = 2$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe: $3x_2 + 4 = 7$ kapjuk, hogy $x_2 = 1$. A két kiszámolt értéket behelyettesítve az egyenletbe, azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$. A megoldás tehát

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

4. feladat: Oldjuk meg Gauss-eliminációval a

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer.

Megoldás: Írjuk fel a bővített mátrixot, megjelölve a kinullázandó elemeket:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Ha most az első sor $\frac{1}{2}$ szeresét hozzáadnánk a második sorhoz, kinullázódna a második sor első pozícióján álló (-1) , de törtekkel kellene számolni. Ezt, hacsak lehet, kerüljük el.

Ezért felcseréljük az első és a negyedik sort. Így az első sor első eleme 1 lesz, amivel a könnyű lesz az alatta lévő elemeket kinullázni. (Az első és második sor cseréje is jó ötlet lenne.) Ha sorcserét hajtunk végre, akkor csak ez legyen az egyetlen átalakítás.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{1} \leftrightarrow \boxed{4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array} \right).$$

A számolást most is az első oszlopban kezdjük:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1) \cdot \boxed{1} + \boxed{2} \rightarrow \boxed{2} \\ (-3) \cdot \boxed{1} + \boxed{3} \rightarrow \boxed{3} \\ (-2) \cdot \boxed{1} + \boxed{4} \rightarrow \boxed{4} \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{3} & 3 & 1 \end{array} \right).$$

További számoláshoz az első sor nem használható, ezért szaggatott vonallal leválasztjuk a maradék táblázatot. A második oszlopban lévő bekeretezett számok kinullázása legyen a következő lépés. Az egyszerűbb számolás miatt cseréljük fel a második és negyedik sort.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{3} & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{2} \leftrightarrow \boxed{4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 & -3 \end{array} \right).$$

Elimináljuk ki (-2) -t és a 3 -t.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(-2)\cdot\boxed{2}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3} \\ (3)\cdot\boxed{2}+\boxed{4}\rightarrow\boxed{4}}]{\substack{(-2)\cdot\boxed{2}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3} \\ (3)\cdot\boxed{2}+\boxed{4}\rightarrow\boxed{4}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 9 & 0 \end{array}\right).$$

További számoláshoz az első két sor nem használható, szaggatott vonallal kijelöljük a maradék

táblázatot. A számolás úgy a legegyszerűbb, ha megszorozzuk a negyedik sort $\frac{1}{9}$ -del, azaz elosztjuk

kilencel, majd felcseréljük a harmadik és negyedik sort. Ezt két lépésben hajtjuk végre.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\left(\frac{1}{9}\right)\cdot\boxed{4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{3}\leftrightarrow\boxed{4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Az utolsó elem kinullázáshoz értünk: a harmadik sor kétszeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\cdot\boxed{3}+\boxed{4}\rightarrow\boxed{4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Írjuk fel azt az új egyenletrendszert, amit az utolsó táblázat takar.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{rrrrrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$

Ezzel az egyenletrendszerrel dolgozzunk tovább.

Az utolsó egyenlet $2x_4 = -2$, amiből $x_4 = -1$. A harmadik egyenlet a behelyettesítés után

$x_3 - 1 = 0$, amiből $x_3 = 1$. A második egyenlet a behelyettesítések után $-x_2 + 3 - 3 = 1$, innen

$x_2 = -1$. Végül az első egyenletbe behelyettesítve $x_1 - 1 - 1 + 1 = 0$, amiből $x_1 = 1$.

A megoldás tehát
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}.$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

5. feladat: Oldjuk meg Gauss-eliminációval a $-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -5$ lineáris

$$5x_1 - x_2 - x_3 = 5$$

egyenletrendszert.

Megoldás: Most is a kibővített mátrix felírásával és a kinullázandó elemek kijelölésével kezdünk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ \boxed{-3} & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & -1 & 5 \end{array} \right).$$

Láttuk, hogy előnyös volna, ha az első sor első eleme ± 1 lenne. Ezt most sorcseréssel nem lehet elérni. De hozzáadhatjuk a második sort az elsőhöz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ \boxed{-3} & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & -1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)\boxed{2}+\boxed{1}\rightarrow\boxed{1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ \boxed{-3} & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & -1 & 5 \end{array} \right).$$

Most már könnyű a kinullázás az első oszlopban.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ \boxed{-3} & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & -1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(-3)\boxed{1}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2} \\ (5)\boxed{1}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}}]{(-1)\boxed{1}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & -17 & 7 \\ 0 & \boxed{14} & 34 & -15 \end{array} \right).$$

Szerencsés a maradék táblázat, mivel (-7) -tel az alatta lévő 14-t könnyű kinullázni. Tehát most elég a második sor kétszeresét hozzáadni a harmadikhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & -17 & 7 \\ 0 & \boxed{14} & 34 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)\boxed{2}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & -17 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

A kibővített mátrix felső háromszög mátrix, véget ért az eliminálás folyamata. Hátra van a megoldás leolvasása. Írjuk fel az új egyenletrendszert.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & -17 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -4 \\ -7x_2 - 17x_3 = 7 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1 \end{array}$$

Az utolsó egyenletet egy nyilvánvaló ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása. Általában is kimondhatjuk, az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha a Gauss-eliminálás során keletkezik egy sor, amelyben az együttható mátrix részen csupa nulla áll, de a sor utolsó eleme nem nulla.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

6. feladat: Oldjuk meg Gauss-eliminációval az $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$ lineáris

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

egyenletrendszert.

Megoldás: A kibővített mátrix a kinullázandó elemekkel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Számoljunk az első oszlopban:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(2) \cdot \boxed{1} + \boxed{3} \rightarrow \boxed{3}}]{\substack{(1) \cdot \boxed{1} + \boxed{2} \rightarrow \boxed{2}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & -15 \end{array}\right).$$

Számolás a második sorban:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(1) \cdot \boxed{2} + \boxed{3} \rightarrow \boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A kibővített mátrix felső háromszög mátrix, véget ért az eliminálás folyamata.

Írjuk fel az új egyenletrendszert.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ + 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \end{array}$$

Az utolsó egyenlet szerint most $0 = 0$, ami igaz (itt nincs ellentmondás). De ez az egyenlet nem ad új információt az ismeretlenekre nézve. A második egyenlet

$$3x_2 + 3x_3 = 15.$$

Egyszerűsítés után

$$x_2 + x_3 = 5.$$

Ebből sem az x_2 , sem az x_3 nem számolható ki egyértelműen. Akármilyen értéket adunk az egyik ismeretlennek, a másik ismeretlen már egyértelműen meghatározható úgy, hogy teljesüljön az egyenlet. Ha például $x_3 = 2$, akkor $x_2 = 3$. Ha bevezetjük az $x_3 = t$ paramétert, amely tetszőleges valós értéket felvehet, akkor adódik, hogy $x_2 = 5 - t$. Ha x_2 -t és x_3 -t ezen szabály szerint választjuk, akkor teljesül az egyenlet. Ha ezeket behelyettesítjük az első egyenletbe, akkor

$$x_1 + 2(5 - t) + t = 8,$$

amiből

$$x_1 = -2 + t.$$

Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ -re az $x_1 = -2 + t$, $x_2 = 5 - t$, $x_3 = t$ három olyan szám amire mindhárom eredeti egyenlet teljesül. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és ez kényelmesen az

$$\begin{cases} x_1 = -2 + t \\ x_2 = 5 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ x_3 = t \end{cases}$$

formában adható meg.

Például, ha $t = 0$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy az $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$ számhármass egy megoldás. Ha $t = 1,1$, akkor az $x_1^* = -0,9$, $x_2^* = 3,9$, $x_3^* = 1,1$ számhármass egy másik megoldás, és így tovább.

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \end{array} \quad \text{lineáris}$$

egyenletrendszert.

Megoldás: A kibővített mátrix, megjelölve a kinullázandó elemeket:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{-1} & 3 & 3 & 8 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{1} & -4 & 1 \end{array} \right).$$

Első oszlop eliminálása:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{-1} & 3 & 3 & 8 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{1} & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (-1)\boxed{1}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2} \\ (-3)\boxed{1}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3} \\ (-1)\boxed{1}+\boxed{4}\rightarrow\boxed{4} \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{4} & \boxed{0} & -6 & -2 \end{array} \right).$$

Második oszlopban lévő kijelölt elemek eliminálása:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{4} & \boxed{0} & -6 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (-1)\boxed{2}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3} \\ (-2)\boxed{2}+\boxed{4}\rightarrow\boxed{4} \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{array} \right).$$

A felső háromszög mátrix elég gyorsan kialakult, az eliminálás befejeződött.

Egy érdekes eset adódott, mivel két csupa nulla sorunk van. Ezek nem ellentmondó egyenleteket, hiszen azt jelentik, hogy $0 = 0$, ami igaz. De az ismeretleneinkre nézve nem hordoznak semmilyen érdemi információt. Tehát a táblázat alapján csak két egyenletet tudunk felírni a négy ismeretlenre.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{rclclcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & 2x_2 & & & - & 3x_4 & = & -1 \end{array}$$

Vizsgáljuk azt az egyenletet, amelyik kevesebb ismeretlent tartalmaz, azaz a másodikat.

$$2x_2 - 3x_4 = -1.$$

Ez azt jelenti, hogy ha a két ismeretlen közül az egyiknek adunk valamilyen értéket, akkor a másik egyértelműen megadható. Válasszuk ki x_4 -t (x_2 -t is lehetne) és helyére vezessük be a v paramétert, azaz, ha $x_4 = v$, akkor átrendezés után

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}v.$$

Az x_2 és x_4 paraméteres értékét az első egyenletbe beírjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$x_1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}v\right) + x_3 + 2v = 3.$$

Rendezve

$$x_1 + x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}v.$$

Ebből sem x_1 , sem x_3 nem fejezhető ki egyértelműen, egyik helyére egy új paramétert kell bevezetni.

Legyen $x_3 = u$. Ekkor

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}v - u.$$

A megoldás tehát

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}v - u \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}v, & u \in \mathbb{R} \\ x_3 = u & v \in \mathbb{R} \\ x_4 = v \end{cases}.$$

Például, ha $u = 1$, $v = 1$, akkor kapjuk az $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ megoldást, amit könnyű ellenőrizni.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$$

8. feladat: Oldjuk meg az $2x_1 + x_2 - x_3 = 9$ egyenletrendszert Gauss-Jordan

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

eliminációval.

Megoldás: Most is azzal kezdünk, hogy felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Jelöljük be a kinullázandó elemeket. Most nemcsak a főátló alatti, hanem a főátló feletti elemeket is ki kell eliminálni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-1} & \boxed{2} & -1 \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{-1} & 9 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Haladjunk fokozatosan, első lépésként csak a főátló alatt elimináljunk, ahogy eddig is tettük.

Jelöljük be a kinullázandó elemeket.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 9 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Az első sor első eleme 1, kezdhethetjük a szokásos módon megoldani az egyenletrendszert.

Első oszlopban dolgozzunk. Az első sor (-2) -szeresét adjuk a második sorhoz, majd az elsőt a harmadikhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -1 \end{array} \right)$$

Most a második sorban lévő 3-sal kellene kieliminálni az 1-t. Már tudjuk, hogy fordítva egyszerűbb, így cseréljük fel a második és harmadik sort.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & -5 & 11 \end{array} \right)$$

A második sor (-3) -szorosával ki tudjuk eliminálni a harmadik sorban lévő hármat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array} \right)$$

Ha leosztunk (-14) -gyel az utolsó sorban, akkor leolvashatnánk, hogy $x_3 = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Gauss-Jordan eliminációval dolgozunk, ezért itt még nem állhatunk meg. A főátló felett is szeretnénk folytatni az eliminálást. Most is jelöljük ki a kinullázandó elemeket.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-1} & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 1 & \boxed{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Most úgy kell számolnunk, hogy a már meglévő nulláknak meg kell maradniuk. Haladjunk a harmadik oszlopban és az utolsó sorral eliminálunk. Adjuk a harmadik sor (-3) -szorosát a másodikhoz, majd a (-2) -szeresét az elsőhöz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Ha a második sort hozzáadjuk az elsőhöz, akkor elvégeztük az eliminálásokat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Írjuk fel az új egyenletrendszert.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

Vagyis az új egyenletek valójában a megoldást adják.

A megoldás tehát

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$$

Megjegyzés: Továbbiakban, ha az egyenletrendszernél az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, akkor a Gauss-Jordan eliminációt úgy végezzük el, hogy a táblázat bal oldalán jelenjen meg az egységmátrix. A bővítő oszlopban pedig ott lesznek a megoldások az ismeretlenekre. (Természetesen, ha van megoldás.)

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

9. feladat: Oldjuk meg a $2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4$ egyenletrendszert Gauss-Jordan

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$

eliminációval.

Megoldás: Most is azzal kezdünk, hogy felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Jelöljük be a kinullázandó elemeket.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{-1} & \boxed{1} & 3 \\ \boxed{2} & 2 & \boxed{-4} & 4 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 3 & 1 \end{array}\right)$$

A főátló alatt kezdünk eliminálni. Az egyszerűbb számolás miatt cseréljük fel az első és utolsó sort.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ \boxed{2} & 2 & -4 & 4 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{1} \leftrightarrow \boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & -4 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{-1} & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Végezzük el az eliminálást az első oszlopban a jelölések szerint.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & -4 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{-1} & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (-2)\boxed{1} + \boxed{2} \rightarrow \boxed{2} \\ (-2)\boxed{1} + \boxed{3} \rightarrow \boxed{3} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{0} & 6 & -10 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Mielőtt eliminálnánk a második sorban, cseréljünk sorokat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{2} \leftrightarrow \boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & -10 & 2 \end{array}\right)$$

Folytassuk az eliminálást.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & -10 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\boxed{2} + \boxed{3} \rightarrow \boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kialakult a felső háromszög mátrix. De vegyük észre, hogy most a teljes harmadik sor kinullázódott. Nincs ellentmondó sor a táblázatban, de az utolsó sor nem ad érdemi információt az ismeretlenekre nézve.

Tehát csak két egyenletünk van a három ismeretlenre. Írjuk fel a táblázat alapján az új egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\3x_2 - 5x_3 &= 1\end{aligned}$$

Az előző feladatok megoldásából tudjuk, hogy ilyenkor a második egyenletből kiválasztunk egy ismeretlent és egy paraméterrel helyettesítjük. Gauss-Jordan módszer szerint is ezt fogjuk tenni.

Például most legyen $x_3 = t$. Ezt az egyenletet hozzávesszük az előbb kapott két egyenlethez, majd felírjuk az új bővített mátrixot.

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\3x_2 - 5x_3 &= 1 \\x_3 &= t\end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

További feladatoknál az egyenletek felírása nélkül a táblázatban csak a következő átakakítást hajtjuk végre.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

Most már a szokott módon haladunk tovább. Harmadik oszlopot elimináljuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 3 & \boxed{-5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-5)\cdot\boxed{3}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2} \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (3)\cdot\boxed{3}+\boxed{1}\rightarrow\boxed{1} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & 0 & 1-3t \\ 0 & 3 & 0 & 1+5t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

A második oszlopban folytatjuk, de előbb a hármas helyére 1-t hozunk be.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & 0 & 1-3t \\ 0 & 3 & 0 & 1+5t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\boxed{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & 0 & 1-3t \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+5t}{3} \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

Nullázzuk ki a (-2) -t a második sorral.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & 0 & 1-3t \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+5t}{3} \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{(2)\cdot\boxed{2}+\boxed{1}\rightarrow\boxed{1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5+t}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+5t}{3} \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

Kialakult az egységmátrix. Olvassuk le a megoldásokat.

A megoldás:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5+t}{3} \\ x_2 = \frac{1+5t}{3} \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

10. feladat: Oldjuk meg egyszerre Gauss-Jordan eliminációval az alábbi két egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 & \text{és} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 & & -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \end{array}$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a két egyenletrendszernek ugyanaz az együttható mátrixa, csak a bővítő oszlopban van eltérés. Mivel a bal oldali táblázat határozza meg a lépéseket, ezért egyetlen táblázattal is tudunk dolgozni. A kibővített mátrix most olyan lesz, ahol a jobb oldali táblázatban két oszlop is van. Az egyenletrendszerek jobb oldali konstansait fogjuk betölteni ezekbe az oszlopokba.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Most már a szokott módon számoljunk. Elimináljuk ki az elemeket a főátló alatt, majd felett is.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & -1 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{1} & 0 & 6 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & -3 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Mivel az egyenletek és ismeretlenek száma is három, ekvivalens átalakításokkal érjük el, hogy a táblázat bal oldalán jelenjen meg az egységmátrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & -1 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{1} & 0 & 6 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & -3 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Első lépésként dolgozzunk csak a főátló alatt, tehát csak ott jelöljük ki az elemeket, amelyeket ki kell küszöbölni.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 6 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & -3 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

Az első oszlop eliminálásával kezdjük.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 6 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & -3 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(-2)\cdot\boxed{1}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2} \\ (1)\cdot\boxed{1}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}}]{\substack{(-2)\cdot\boxed{1}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2} \\ (1)\cdot\boxed{1}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Második oszlopban folytassuk, de csak a főátló alatt.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)\cdot\boxed{2}+\boxed{3}\rightarrow\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \end{array} \right).$$

Az együtttható mátrix felső háromszög mátrix, folytassuk az eliminálást a főátló felett.

Mivel utolsó sorral fogunk dolgozni, hozzunk be osztással a (-5) helyére egy 1-et.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Elimináljunk a jelölések szerint.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & -1 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(-1)\cdot\boxed{3}+\boxed{1}\rightarrow\boxed{1}}]{\substack{\boxed{3}+\boxed{2}\rightarrow\boxed{2} \\ (-1)\cdot\boxed{3}+\boxed{1}\rightarrow\boxed{1}}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)\cdot\boxed{2}+\boxed{1}\rightarrow\boxed{1}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Már csak egy szorzást kell elvégezni a második sorban és a megoldásokat le lehet olvasni.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)\cdot\boxed{2}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

A leolvasásnál arra kell ügyelni, hogy az első egyenletrendszer megoldásait a táblázat jobb oldalán lévő első oszlopból vegyünk. A második egyenletrendszer megoldásait pedig a második oszlopból.

Az első egyenletrendszer megoldása tehát
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Az második egyenletrendszer megoldása tehát
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

10. feladat: Egy gazdaságban két ágazat van. Az ágazatok közötti kapcsolati mátrix legyen:

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Ha az ágazatokhoz tartozó nettó kibocsátási vektor $\underline{n} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \end{pmatrix}$, akkor határozzuk meg a bruttó kibocsátási vektort.

Megoldás: Tudjuk, hogy a nettó és bruttó kibocsátás közti kapcsolat: $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\underline{b} = \underline{n}$, ahol \mathbf{A} az ágazati kapcsolatok mátrixa és \mathbf{I} egy kétszer kettes egységmátrix. A mátrixegyenletbe helyettesítsünk be:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \end{pmatrix},$$

ahol $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ a keresett bruttó kibocsátás vektora és b_1 és b_2 az ismeretlen koordináták, amelyeket meg szeretnénk határozni.

Írjuk fel a mátrixegyenlethez tartozó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} 0,8b_1 - 0,3b_2 &= 120 \\ -0,4b_1 + 0,9b_2 &= 90 \end{aligned}$$

Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát és Gauss-Jordan eliminációval oldjuk meg az egyenletrendszert.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,8 & -0,3 & 120 \\ -0,4 & 0,9 & 90 \end{array} \right)$$

Végezzük el a számolást a szokott módon.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,8 & -0,3 & 120 \\ -0,4 & 0,9 & 90 \end{array} \right) \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [2]} \left(\begin{array}{cc|c} -0,4 & 0,9 & 90 \\ 0,8 & -0,3 & 120 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \cdot [1] + [2] \rightarrow [2]} \left(\begin{array}{cc|c} -0,4 & 0,9 & 90 \\ 0 & 1,5 & 300 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,4 & 0,9 & 90 \\ 0 & 1,5 & 300 \end{array}\right) \xrightarrow{\left(\frac{1}{1,5}\right) \boxed{2} \rightarrow \boxed{2}} \left(\begin{array}{cc|c} -0,4 & 0,9 & 90 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{(-0,9) \cdot \boxed{2} + \boxed{1} \rightarrow \boxed{1}} \left(\begin{array}{cc|c} -0,4 & 0 & -90 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,4 & 0 & -90 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\left(\frac{1}{-0,4}\right) \boxed{1} \rightarrow \boxed{1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 225 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Olvassuk le a megoldás: $b_1 = 225$ és $b_2 = 200$.

Tehát a bruttó kibocsátás vektora:

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 225 \\ 200 \end{pmatrix}$$