

**K-1.:** (1/1-es lecke)

Egy hang hangnyomásszintjét 75 dB-nek mérjük 0,2 dB hibakorlással. Mekkora a hangintenzitás és annak relatív hibája?

**Megoldás:** Tudjuk, hogy az  $n$  hangnyomásszint az alábbi módon fejezhető ki az  $I$  intenzitásból:

$$n = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$

Innen egyszerű átrendezéssel megkapható az intenzitás, mint a hangnyomásszint függvénye:

$$I(n) = I_0 \cdot 10^{\frac{n}{10}}$$

Számszerűen ez:

$$I = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{7,5} = 3,16 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

A hibakorlátokra vonatkozó alapösszefüggés szerint a hangintenzitás hibakorlátja megkapható az intenzitás megadó fenti összefüggésből:

$$\delta(I) = |I'_n| \delta(n) = I_0 \cdot 10^{\frac{n}{10}} \ln 10 \frac{1}{10} \cdot 0,2 = 1,46 \cdot 10^{-6}$$

Így a relatív hiba:

$$\mathcal{R}(I) = \frac{\delta(I)}{|I|} = \ln 10 \frac{1}{10} \delta(n) = 0,046 = 4,6\%$$

(Érdekes, hogy a relatív hibából maga  $I$  értéke kiesett. Ebből az következik, hogy a 0,2 dB hibakorlát a hangnyomásszintben minden intenzitás esetén 4,6%-os relatív hibát jelent az intenzitásban.)

$\Rightarrow$  A hangintenzitás tehát  $3,16 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$ , ennek relatív hibája 4,6%-os.

**K-2.:** (1/1-es lecke)

Egy gépsor kis csődarabokat gyárt acélból, melyeknek hossza 100 mm, külső sugara 11 mm, belső sugara 9,5 mm. A megmunkálás kissé pontatlan, ezért mindhárom méretet csak 0,03 mm-es hibakorlással tudjuk beállítani.

Mekkora a csődarabok tömegének relatív hibája? Miért sokkal nagyobb ez, mint a bemenő adatok relatív hibája?

**Megoldás:** Jelöljük a cső belső sugarát  $r$ -rel, a külsőt  $R$ -rel, hosszát  $h$ -val. (Ezeknek értékei adottak.) Tudjuk még a  $\delta = \delta(r) = \delta(R) = \delta(h) = 0,02 \text{ mm}$  közös hibakorlát értékét is.

A csődarabok tömege nyilván:

$$m = \rho \cdot V = \rho(R^2 - r^2)\pi h$$

A tömeg hibakorlátja:

$$\delta(m) = |m'_r| \delta + |m'_R| \delta + |m'_h| \delta$$

Az egyes deriváltak nyilván:

$$m'_r = \pi \rho (-2r) h, \quad m'_R = \pi \rho (2R) h, \quad m'_h = \pi \rho (R^2 - r^2)$$

Ezeket beírva a tömeg hibakorlátja a következő lesz:

$$\delta(m) = \delta \pi \rho (2rh + 2Rh + R^2 - r^2)$$

A tömeg relatív hibája tehát:

$$\mathcal{R}(m) = \frac{\delta(m)}{|m|} = \frac{2h(R+r) + R^2 - r^2}{(R^2 - r^2)h} \delta = \left( \frac{2}{R-r} + \frac{1}{h} \right) \delta = 0,040 = 4,0\%$$

A bemenő adatok relatív hibája legfeljebb  $\mathcal{R}(r) = 0,03/9,5 = 0,0032 = 0,32\%$  volt. Az, hogy a végeredmény relatív hibája ennél lényegesen nagyobb, annak köszönhető, hogy közeli nagyságrendű pozitív számok kivonása is szerepel  $m$  képletében. ( $R^2 - r^2$ .)

⇒ A csődarabok tömegének relatív hibája tehát kb. 4%-os, ami főként azért sokkal nagyobb a bemenő adatokénál, mert közeli nagyságú, hibával rendelkező mennyiségek kivonása szerepel a végeredmény meghatározásában.

### K-3.: (1/1-es lecke)

Egy csillapodó rezgőmozgás  $\beta$  csillapodási tényezőjét szeretnénk meghatározni minél pontosabban. Megmérjük a kezdeti  $A_0$  amplitúdót, valamint egy  $t$  időpontbeli  $A$  amplitúdót.

Fejezze ki a mérési adatok segítségével a csillapítási tényezőt! Adja meg annak hibakorlátját, ha az  $\mathcal{R}(A_0)$ ,  $\mathcal{R}(A)$  és  $\mathcal{R}(t)$  relatív hibák ismertek. Milyen mérési időt kell választani, hogy  $\beta$  hibája minimális legyen?

**Megoldás:** Tudjuk, hogy:

$$A = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

ahonnt egyszerű átrendezéssel azt fejezhetjük ki:

$$\beta = \frac{1}{t} \ln \frac{A_0}{A} = \frac{1}{t} (\ln A_0 - \ln A)$$

Ennek hibakorlátja:

$$\delta(\beta) = |\beta'_{A_0}| \delta(A_0) + |\beta'_A| \delta(A) + |\beta'_t| \delta(t)$$

A deriválásokat igen könnyű elvégezni. A számítások során még az abszolút érték jeleknél kell figyelni.

$$\begin{aligned} \delta(\beta) &= \left| \frac{1}{t} \frac{1}{A_0} \right| \delta(A_0) + \left| -\frac{1}{t} \frac{1}{A} \right| \delta(A) + \left| -\frac{1}{t^2} (\ln A_0 - \ln A) \right| \delta(t) = \\ &= \frac{1}{t} \frac{1}{A_0} \delta(A_0) + \frac{1}{t} \frac{1}{A} \delta(A) + \frac{1}{t^2} (\ln A_0 - \ln A) \delta(t) = \\ &= \frac{1}{t} (\mathcal{R}(A_0) + \mathcal{R}(A)) + \mathcal{R}(t) \beta \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy ha a bemenő adatok relatív hibáján nem tudunk csökkenteni, akkor a lehető legnagyobb mérési időt kell választanunk, hogy a csillapítási tényezőt minél pontosabban megállapíthassuk.

⇒ A csillapítási tényező tehát:

$$\beta = \frac{1}{t} (\ln A_0 - \ln A)$$

ennek hibakorlátja:

$$\delta(\beta) = \frac{1}{t} (\mathcal{R}(A_0) + \mathcal{R}(A)) + \mathcal{R}(t) \beta$$

és a lehető legnagyobb mérési időt kell választanunk, ha kis relatív hibával akarjuk meghatározni a csillapítási tényezőt.

**K-4.:** (1/2-es lecke)

Egy gyárban 1 m élű betonkockákat gyártanak. A gyártás folyamat során a kockák élének szórása 1,5 cm-nek adódik. A beton sűrűsége  $2500 \text{ kg/m}^3$ , de ennek szórása  $50 \text{ kg/m}^3$  az alapanyag nem egyenletes volta miatt.

Mekkora a kockák tömegének szórása? Ha 5%-nyi betonkockát leselejtezhetünk, mekkora minimális és maximális tömeget tudunk garantálni? (Az eloszlásfüggvényeket tekinthetjük normálisnak.)

**Megoldás:** A kockák átlagos tömege nyilván:

$$m = \rho a^3 = 2500 \text{ kg}$$

A tömegek szórása a Gauss-féle hibaterjedési törvényből határozható meg:

$$\sigma^2(m) = (m'_a)^2 \sigma^2(a) + (m'_\rho)^2 \sigma^2(\rho)$$

A deriválásokat elvégezve:

$$\sigma^2(m) = (\rho \cdot 3a^2)^2 \sigma^2(a) + (a^3)^2 \sigma^2(\rho)$$

Számszerűen az eredmény:

$$\sigma(m) = 123 \text{ kg}$$

Normális eloszlás esetén az esetek 95%-ában a várható érték kétszeres szórás sugarú környezetébe eső eredményt kapunk, azaz:

$$m_{\min} = m - 2\sigma(m) = 2254 \text{ kg}$$

$$m_{\max} = m + 2\sigma(m) = 2746 \text{ kg}$$

$\Rightarrow$  A betonkockák tömegének szórása tehát 123 kg, így abban lehetünk biztosak, hogy a legyártott kockákból 5%-ot leselejtezve tartani lehet a 2250 és 2750 kg közti tartományt.

**K-5.:** (1/2-es lecke)

Egy automata gép fémlemezről téglalapokat vág ki, melyeknek egyformáknak kellene lenniük. Öt véletlenszerű termék rövidebb és hosszabb éleit lemérve a következő értékeket kaptuk mm-ben:

Rövidebbik oldal: 10,21; 10,58; 10,22; 10,46; 10,30

Hosszabbik oldal: 25,70; 25,75; 25,53; 25,80; 25,62

Mekkora az egyes oldalak tapasztalati várható értéke és -szórása? Mekkora lesz a lapok területének szórása? Milyen határok garantálhatóak a lapok 95%-ának területére ha a gép ugyanilyen beállításokkal fog üzemelni a továbbiakban is? (Feltételezhetjük a mennyiségek normális eloszlását.)

**Megoldás:** A rövidebbik oldal átlaga a definíció szerint:

$$\bar{a} = \frac{1}{5} (10,21 + 10,58 + 10,22 + 10,46 + 10,30) = 10,354 \text{ mm}$$

A tapasztalati szórás négyzetét célszerű meghatározni először:

$$s^2(a) = \frac{1}{5-1} \left( (10,21 - 10,354)^2 + (10,58 - 10,354)^2 + (10,22 - 10,354)^2 + (10,46 - 10,354)^2 + (10,30 - 10,354)^2 \right) = 0,0260$$

Így:

$$s(a) = 0,161 \text{ mm}$$

A hosszabbik oldal értékei hasonlóan határozhatók meg. Ezt terjedelmi okokból nem részletezzük itt, csak az eredményt adjuk meg.

$$\bar{b} = 25,680 \text{ mm} \quad s(b) = 0,107 \text{ mm}$$

A lapok területe nyilván  $A = a \cdot b$ . Az átlagos terület tehát:

$$\bar{A} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 265,89 \text{ mm}^2$$

A Gauss-féle hibaterjedési törvény szerint a terület szórásának négyzete:

$$\sigma^2(A) = (A'_a)^2 \sigma^2(a) + (A'_b)^2 \sigma^2(b) = b^2 \sigma^2(a) + a^2 \sigma^2(b)$$

A szórásokat a tapasztalati szórásokkal közelíthetjük, azaz  $\sigma(a) = s(a)$  és  $\sigma(b) = s(b)$ . Így

$$\sigma(A) = 4,28 \text{ mm}^2$$

adódik.

Normális eloszlás esetén a várható érték kétszeres szórásnyi környezetébe esik az értékek 95%-a. Feladatunkban ez az intervallum:

$$[\bar{A} - 2\sigma(A); \bar{A} + 2\sigma(A)] = [257,3; 274,4] \text{ mm}^2$$

$\Rightarrow$  A rövidebb oldal tapasztalati várható értéke tehát 10,354 mm, -szórása 0,161 mm, a hosszabik tapasztalati várható értéke 25,680 mm, -szórása 0,107 mm.

Tehát kb. 257 és 274 mm<sup>2</sup> közé fog esni a lapok területének 95%-a.

Megjegyzés: a gyakorlatban 5-nél sokkal több adattal érdemes ilyen jellegű számításokat végezni, hogy a tapasztalati értékek minél jobban közelítsék az elméletieket. Az adatok számának növelése azonban elvi újdonságot nem tartalmaz, ezért egy ilyen példában elegendőnek tartottuk az 5 adatra való számolást.

---

#### K-6.: (1/2-es lecke)

$U_0 = 12 \text{ V}$ -os feszültségforrásra egy  $R_1 = 50 \Omega$  és egy  $R_2 = 70 \Omega$  ellenállású ellenállást kötünk sorba. Mekkora  $U_1$  feszültség mérhető ekkor  $R_1$ -en?

Legfeljebb mekkora lehet  $R_1$  és  $R_2$  szórása, ha azt akarjuk, hogy az  $U_1$  feszültség az esetek 95%-ában legfeljebb 0,1 V-tal térjen el a pontos értéktől? (Tegyük fel, hogy a két ellenállás azonos szórású normális eloszlást követ.)

**Megoldás:** Tudjuk, hogy a feszültség ebben az esetben az ellenállások arányában osztódik, azaz:

$$U_1 = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 5 \text{ V}$$

A Gauss-féle hibaterjedési törvény szerint:

$$\begin{aligned} \sigma^2(U_1) &= \left( \frac{\partial U_1}{\partial R_1} \right)^2 \sigma^2(R_1) + \left( \frac{\partial U_1}{\partial R_2} \right)^2 \sigma^2(R_2) = \\ &= U_0^2 \left( \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right)^2 \sigma^2(R_1) + U_0^2 \left( -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} \right)^2 \sigma^2(R_2) \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy  $\sigma(R_1) = \sigma(R_2) = \sigma(R)$  és egyszerűsítve:

$$\sigma(U_1) = U_0 \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{(R_1 + R_2)^2} \sigma(R)$$

A feladat szövege szerint  $\sigma(U_1) = 0,05 \text{ V}$ , hisz normális eloszlás esetén ennek kétszerese az, amely meghatározza azt a környezetet, melybe az esetek 95%-ában beleesik a végeredmény.

Így viszont már a keresett  $\sigma(R)$  könnyen kiszámítható:

$$\sigma(R) = \sigma(U_1) \frac{(R_1 + R_2)^2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \frac{1}{U_0} = 0,70 \Omega$$

$\Rightarrow$  Az  $R_1$  ellenálláson tehát 5 V-ot mérhetünk és ha azt akarjuk, hogy ettől a mért értékek legfeljebb 0,1 V-tal térjenek el az esetek 95%-ában, akkor az ellenállások szórása tehát legfeljebb 0,7  $\Omega$  lehet.

**K-7.:** (1/3-es lecke)

Egy ismeretlen tömegű dobozba különböző számú ( $N$ ) egyforma csapágygolyót teszünk. Több esetben megmérve a doboz és a golyók együttes  $M$  tömegét az alábbi eredményt kapjuk:

$N$	10	20	30	35
$M$ [g]	37	54	70	78

A legkisebb négyzetek módszerével határozza meg ebből a doboz és egyetlen csapágygolyó tömegét!

**Megoldás:** Jelölje  $m_0$  a doboz,  $m_1$  egy csapágygolyó tömegét. Ekkor nyilván:

$$M = m_0 + m_1 \cdot N$$

Így  $M$  lineáris függvénye  $N$ -nek, mely függvény meredeksége  $m_1$ , tengelymetszete  $m_0$ . Könnyű tehát az egyenesillesztés tanult formuláját alkalmazni erre az esetre, csupán az általános formulákba  $x$  helyére  $N$ -t,  $y$  helyére  $M$ -et,  $a$  helyére  $m_1$ -et,  $b$  helyére  $m_0$ -t kell írunk.

A normálegyenletek tehát:

$$\begin{aligned} m_1 \sum N_i^2 + m_0 \sum N_i &= \sum N_i M_i \\ m_1 \sum N_i + m_0 n &= \sum M_i \end{aligned}$$

Itt egyszerű alpműveletekkel meghatározhatjuk az egyenlet együtthatóit. Ennek eredménye:

$$\begin{aligned} m_1 2625 + m_0 95 &= 6280 \\ m_1 95 + m_0 4 &= 239 \end{aligned}$$

Ebből  $m_0$  és  $m_1$  egyszerűen meghatározható. A számolás eredménye:

$$m_0 = 20,9 \quad m_1 = 1,64$$

⇒ Az üres doboz tömege tehát 20,9 g, a golyók átlagtömege 1,64 g.

Megjegyzés: Ilyen jellegű számításoknak akkor van értelme, ha vagy nem tudjuk a golyókat tetszésünk szerint ki-be rakni a dobozba vagy ha a közvetlen mérésnél pontosabb eredményt szeretnénk kapni. Elvileg ugyanis a mérleg segítségével közvetlenül is meghatározhatók a kért mennyiségek, ha a golyókat kivehetjük a dobozból. Mégis, sok mérés eredményének együttes felhasználása a legkisebb négyzetek módszerének segítségével lehetővé teszi a közvetlen mérés pontosságának meghaladását. Így a gyakorlatban a feladatbeli 4 mérési adatnál jóval több (10 vagy 20) mérési adattal megismételve a számolást, a doboz tömege pontosabban kapható meg, mintha közvetlenül megmérnénk azt.

**K-8.:** (1/3-es lecke)

1 mm átmérőjű, kör keresztmetszetű gumiszál hosszát mérjük különböző erővel való nyújtás esetén és az alábbi adatokat kapjuk:

$F$ [N]	2	5	10	20
$l$ [m]	0,572	0,588	0,613	0,664

Feltételezve a lineáris erő-törvényt (Hooke-törvény) határozza meg a gumi Young-modulusát és a szál nyújtatlan hosszát a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával.

**Megoldás:** A gumiszál keresztmetszete:

$$A = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = 7,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$$

Hooke törvényét felírva erre az esetre:

$$F = EA \frac{\Delta l}{l_0} = EA \frac{l - l_0}{l_0} = l \frac{EA}{l_0} - EA$$

$F$  tehát lineáris függvénye  $l$ -nek, így  $F$  és  $l$  fenti adatsorára alkalmazhatjuk az egyenesillesztés tanult módszerét. (Megjegyezzük, hogy a két lehetséges út közül az egyiket járjuk végig, tehát amikor  $F$ -et tekintjük  $l$  függvényének és nem fordítva. Mindegyik megközelítés helyes.)

Az előző formula alapján azt mondhatjuk tehát, hogy  $F$   $l$ -nek lineáris függvénye, melynek meredeksége  $m = EA/l_0$ , tengelymetszete  $b = -EA$ . Így a tanult normálegyenletek ezt az alakot öltik:

$$\begin{aligned} m \sum l_i^2 + b \sum l_i &= \sum l_i F_i \\ m \sum l_i + b n &= \sum F_i \end{aligned}$$

Az együtthatókat kiszámítva ennek számszerű alakja:

$$\begin{aligned} m 1,4896 + b 2,437 &= 23,494 \\ m 2,437 + b 4 &= 37 \end{aligned}$$

Ennek megoldása:

$$m = 195,9 \quad b = -110,1$$

Ezzel még nem végeztünk, mert ezekből vissza kell következtetni a kért mennyiségekre. Ezt azonban egyszerűen megtehetjük, hisz pl.  $b = -EA$ , ahonnan:

$$E = \frac{-b}{A} = 1,40 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

továbbá  $m = EA/l_0$  alapján:

$$l_0 = \frac{EA}{m} = 0,562 \text{ m}$$

$\Rightarrow$  A gumi Young-modulusza tehát  $1,40 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , a gumiszál nyújtatlan hossza  $0,562 \text{ m}$ .

### K-9.: (1/3-es lecke)

Egy  $U$  nagyságú feszültségforrásra két ellenállás van párhuzamosan kötve. Az egyik ( $R_1$ ) változtatható nagyságú. Ennek különböző értékeinél megmérjük a feszültségforráson átfolyó áram  $I$  erősségét. Az alábbi táblázatot kapjuk:

$R_1 [\Omega]$	300	600	900	1200
$I [\text{mA}]$	54,6	35,2	28,2	25,1

A legkisebb négyzetek módszerének segítségével állapítsa meg a másik ellenállás nagyságát ( $R_2$ ) és az  $U$  feszültség értékét!

**Megoldás:** A párhuzamos kötés miatt mindkét ellenállásra az  $U$  feszültség esik, a két ellenállás áramának pedig az összege folyik át az áramforráson. Azaz:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

Tehát nem  $I$  és  $R_1$ , hanem  $I$  és  $1/R_1$  közt van lineáris kapcsolat. Az egyenesillesztést tehát az alábbi két adatsor közt lehet elvégezni: (SI-egységekben)

$1/R_1$	$3,333 \cdot 10^{-3}$	$1,667 \cdot 10^{-3}$	$1,111 \cdot 10^{-3}$	$8,33 \cdot 10^{-4}$
$I$	0,0546	0,0352	0,0282	0,0251

A fenti egyenlet szerint az erre az adatsorra illesztett egyenes  $m$  meredeksége  $U$  lesz,  $b$  tengelymet-szete pedig  $U/R_2$ .

Az illesztendő egyenes normálegyenletei az alábbiak lesznek: (a megfelelő összegek kiszámítását nem részletezzük)

$$\begin{aligned}1,58 \cdot 10^{-5}m + 6,944 \cdot 10^{-3}b &= 2,929 \cdot 10^{-4} \\ 6,944 \cdot 10^{-3}m + 4b &= 0,1431\end{aligned}$$

Ennek megoldása:

$$m = 11,9 \quad b = 1,52 \cdot 10^{-2}$$

Innét a fentiek alapján a két keresett mennyiség megkapható:

$$U = m = 11,9 \text{ V} \quad R_2 = \frac{U}{b} = 790 \Omega$$

$\Rightarrow$  A feszültségforrás tehát 11,9 V-os, a másik ellenállás pedig 790 ohm-os.

Vigyázat! A számolás közben legalább 4 értékes jegyet meg kell tartani, hogy ne szaporodjanak fel a kerekítési hibák!

---

**K-10.:** (2/1-es lecke)

A Föld mágneses tere átlagosan  $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  erősségű a légkörben. Mekkora az elektronok körfrekvenciája itt? Mekkora a pályasugara egy, az erővonalakra merőlegesen mozgó elektronnak, ha mozgási energiája  $1/40 \text{ eV}$ ?

**Megoldás:** Az elektronok körfrekvenciája a ciklotronfrekvencia:

$$\omega = \eta B = \frac{q}{m} B = 8,9 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}$$

Az  $1/40 \text{ eV}$  mozgási energia Joule-ban:

$$E = \frac{1}{40} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

A mozgási energia viszont a sebességgel áll egyszerű kapcsolatban:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

innen a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 9,43 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Az egyenletes körmozgásra vonatkozó  $v = r\omega$  összefüggés alapján a keresett pályasugár:

$$r = \frac{v}{\omega} = 0,011 \text{ m}$$

$\Rightarrow$  Az elektronok körfrekvenciája a Föld mágneses terében mintegy  $9 \text{ MHz}$ , az  $1/40 \text{ eV}$  mozgási energiájú elektronok pályasugara  $11 \text{ mm}$

Megjegyzés: az  $1/40 \text{ eV}$  mozgási energia a szobahőmérsékletű hőmozgásnak felel meg. Látjuk, hogy ekkor a mozgási sebesség sokkal kisebb a fény sebességénél. Ekkor valóban jogosak az itt alkalmazott formulák. A következő lecke alapján látni fogjuk, hogy ez az elektronok esetén nem mindig magától értetődő.

**K-11.:** (2/2-es lecke)

Mekkora feszültséggel kell gyorsítani egy elektront, hogy fajlagos töltése a nyugalmi értéknél 2%-kal kisebb legyen? Mekkora ilyenkor a sebessége?

**Megoldás:** A fajlagos töltés azért változik, mert a sebesség növelése a tömeget növeli. (A töltés állandó marad.) Azaz:

$$\eta = \frac{q}{m} = 0,98 \cdot \eta_0 = 0,98 \frac{q}{m_0}$$

Innét:

$$m = \frac{1}{0,98} m_0$$

Tudjuk, hogy:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Ezeket összevetve:

$$0,98 = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Ebből a keresett sebesség egyszerű átrendezéssel:

$$v = c \sqrt{1 - 0,98^2} = c \cdot 0,199 = 5,97 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



A mozgási energia megegyezik a gyorsításkor felvett energiával:

$$qU = E_{mozg} = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{0,98} - 1 \right)$$

Innét a keresett feszültség:

$$U = \frac{m_0c^2}{q} \left( \frac{1}{0,98} - 1 \right) = 10\,300 \text{ V}$$

⇒ Az elektron fajlagos töltése tehát 10 300 V gyorsítás esetén lesz 2%-kal kisebb a nyugalmi értéknél. Ekkor sebessége  $5,97 \cdot 10^7$  m/s, azaz kb. a fénysebesség ötödrésze.

---

**K-12.:** (2/2-es lecke)

1 000 000 V feszültséggel elektront gyorsítunk, majd homogén mágneses térbe lőjük, ahol 0,55 m sugarú, vízszintes síkú körpályára áll. Mekkora erősségű és milyen irányú a mágneses tér? Mekkora az elektron keringési ideje?

**Megoldás:** A gyorsítófeszültség elég nagy, tehát mindenképp a relativisztikus formulával kell számolnunk:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left( \frac{qU}{m_0c^2} + 1 \right)^2}}$$

A formula kiértékelésekor célszerű a  $qU/(m_0c^2)$  értékét kiszámolni.

$$\frac{qU}{m_0c^2} = 1,98$$

Így áttekinthetőbb a sebességet megadó formula:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1,98 + 1)^2}} = c \cdot 0,942 = 2,82 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ki kell számolnunk még az elektron tömegét is, hisz az is nyilván megváltozott:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2,98 \cdot m_0 = 2,68 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

A pályasugárrol tudjuk, hogy:

$$R = \frac{v}{\eta B}$$

ahonnt

$$B = \frac{v}{\eta R} = \frac{mv}{qR} = 8,58 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

A mágneses tér tehát 8,58 mT erősségű és nyilván függőlegesen mutat, hisz körmozgás homogén mágneses térben mindig a mágneses térre merőleges síkban történik. (Az, hogy felfele, vagy lefele mutat a térerősség, nem határozható meg a feladat szövegéből, mert nem adták meg a keringési irányt.)

A keringési időt egyszerű meghatározni, hisz egyenletes körmozgásról van szó:

$$T = \frac{2\pi}{\eta B} = \frac{2\pi m}{qB} = 1,23 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

⇒ A mágneses tér függőleges irányú és  $8,58 \cdot 10^{-3}$  T erősségű, az elektronok keringési ideje pedig  $1,23 \cdot 10^{-8}$  s.

Megjegyzés: A relativisztikus hatások ebben a feladatban alapvető fontosságúak, ezektől eltekintve teljesen rossz eredményt kapunk, pl. a sebesség fénysebesség felettinek adódik.

---

**K-13.:** (2/2-es lecke)

5000 V-tal gyorsított elektron homogén mágneses térbe kerül. Itt spirálpályájának sugara 8 mm, menetemelkedése 5 mm. Mekkora a mágneses tér erőssége és az az idő, ami alatt az elektron egy menetemelkedést megtesz?

**Megoldás:** A felgyorsított elektron sebessége:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{qU}{m_0 c^2}\right)^2}} = 0,14c = 4,19 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ekkora sebesség esetén a tömegváltozással is számolnunk kell:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,01m_0 = 9,09 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

A spirálpálya paramétereiről tudjuk, hogy:

$$R = \frac{v \sin \alpha}{\eta B}$$

$$h = \frac{2\pi}{\eta B} v \cos \alpha$$

Innen a két egyenlet elosztásával:

$$\frac{R}{h} = \frac{1}{2\pi} \tan \alpha$$

ahonnan a mágneses tér és a sebességvektor által bezárt szög megkapható:

$$\alpha = \arctan \left( 2\pi \frac{R}{h} \right) = 84,3^\circ$$

Innét pl. a fenti  $r$ -t megadó egyenlet átrendezésével a kért mágneses térerősség:

$$B = \frac{v \sin \alpha}{\eta r} = \frac{mv \sin \alpha}{qr} = 0,030 \text{ T}$$

A kért periódusidő egyszerűen megkapható, hisz a sebességtől függetlenül  $\omega = \eta B$  a mozgás körkörös komponensének frekvenciája:

$$T = \frac{2\pi}{\eta B} = \frac{2\pi m}{qB} = 1,20 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$\Rightarrow$  A mágneses tér tehát 0,03 T erősségű, és egy menetemelkedéshez  $1,20 \cdot 10^{-9}$  s-ra van szüksége az elektronnak

Megjegyzés: Ebben a feladatban is fontos volt a relativisztikus hatások figyelembe vétele. Ha ezt elhagynánk és nem számolnánk a tömegnövekedéssel illetve a  $v = \sqrt{2\eta U}$  képletből vennénk a sebességet, néhány százalékos hibát követnénk el.

**K-14.:** (2/3-es lecke)

Egy elektronmikroszkópban 100 V feszültség gyorsítja az elektronokat. Becsülje meg ez alapján az elektronmikroszkóp elvi felbontóképességét!

**Megoldás:** A gyorsítófeszültség itt elég kicsi, ezért számolhaunk a klasszikus fizikai közelítéssel, így az elektron sebessége:

$$v = \sqrt{2eU} = 5,96 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ez valóban sokkal kisebb, mint a fénysebesség, tehát jogos volt ez a közelítés és a tömegnövekedés is elhanyagolható. (Számolhattunk volna a relativisztikus formulával is, de a megadott tizedesjegyekben nem történne változás. De természetesen nem baj, ha a relativisztikus formulákat használjuk, csak akkor sokkal több művelettel tudjuk a sebességet meghatározni.)

Az elvi felbontóképesség a de Broglie-hullámhossz (lásd első féléves fizika, kvantummechanika):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

⇒ Tehát elvileg  $1,24 \cdot 10^{-10}$  m-es részleteket is megpillanthatunk egy ilyen mikroszkóppal.

Megjegyzés: a gyakorlatban az elektromos lencsékkel kapcsolatos technikai problémák miatt inkább ezen érték 100-szoros körül van az a felbontóképesség, ami ténylegesen kihozható ezekből a berendezésekből.

---

**K-15.:** (3/1-es lecke)

A levegő átlagos molekulatömege 29 g/mol. Számolja ki, hány méter szintkülönbség esetén csökken a légnyomás 10%-nyit, ha a hőmérséklet  $-20^\circ\text{C}$ !

**Megoldás:** A barometrikus magasságformula szerint:

$$p(h) = p(0)e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

A feladatban  $p(h) = 0,9p(0)$ , így

$$0,9p(0) = p(0)e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Innét a keresett magasság egyszerű átrendezéssel megkapható: ( $p(0)$  kiesik)

$$h = -\frac{kT}{mg} \ln 0,9$$

Egy molekula  $m$  tömege az alapján kapható meg, hogy tudjuk, hogy egy mólnyi, azaz  $6 \cdot 10^{23}$  db levegőmolekula 29 g tömegű:

$$m = \frac{0,029 \text{ kg}}{6 \cdot 10^{23}} = 4,83 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Ezt és  $T = 253 \text{ K}$ -t beírva a számszerű eredmény:

$$h = 776 \text{ m}$$

$\Rightarrow$  Tehát 776 m magasan csökken a légnyomás 10%-nyit, ha  $-20^\circ\text{C}$  a hőmérséklet.

**K-16.:** (3/1-es lecke)

A tiszta szilícium Fermi-szintje 0,4 eV-nyira van a vezetési sáv alatt. Hányszor kisebb értéket vesz fel a betöltési valószínűség-függvény a vezetési sáv alján, mint a Fermi-szinten, ha a hőmérséklet 300 K, illetve ha 400 K? Mit mondhatunk ez alapján a két esetbeli vezetőképességekről?

**Megoldás:** A betöltési valószínűség függvény:

$$p = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

A Fermi-szinten  $E - E_F = 0$ , ezért a hőmérséklettől függetlenül itt a betöltési valószínűség függvény értéke:

$$p_F = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

Feladatunk szövege szerint a vezetési sáv alján  $E - E_F = 0,4 \text{ eV} = 0,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 6,4 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ . Így már a két esetben egyszerű behelyettesítéssel megkapható a betöltési valószínűség függvény értéke. Az eredmények:

$$T_1 = 300 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad p_1 = 1,93 \cdot 10^{-7}$$

$$T_2 = 400 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad p_2 = 9,22 \cdot 10^{-6}$$

A feladat ezek és  $p_F$  arányát kérdezi.  $T_1 = 300 \text{ K}$ -en ez az arány:

$$\frac{p_F}{p_1} = 2,59 \cdot 10^6$$

míg  $T_2 = 400 \text{ K}$  esetében:

$$\frac{p_F}{p_2} = 5,42 \cdot 10^4$$

$\Rightarrow$  A vezetési sáv alján tehát mindkét esetben sokkal kisebb a betöltési valószínűség függvény értéke, mint a Fermi-szinten (értékeket lásd előbb), de mintegy 50-szeres különbség van a két hőmérséklet esetében az értékek közt, ami azt jelenti, hogy 400 K-en sokkal több elektron jut fel a hőmozgás miatt a vezetési sávba, mint 300 K-en, így 400 K-en a szilícium sokkal jobban vezet.

**K-17.:** (3/2-es lecke)

Az Al fajlagos ellenállása  $0,026 \Omega\text{mm}^2/\text{m}$ , sűrűsége  $2700 \text{ kg}/\text{m}^3$ , atomsúlya  $27 \text{ g}/\text{mol}$ , és 3 vegyértékű. Határozza meg ezekből az elektronmozgékonytságot az Al belsejében!

Mekkora az elektronok átlagsebessége, ha egy  $1 \text{ mm}^2$  keresztmetszetű Al-huzalban  $2 \text{ A}$  erősségű áram folyik?

**Megoldás:**  $1 \text{ m}^3$  Al  $2700 \text{ kg}$  tömegű, ezért  $2700/0,027 \text{ mol}$  anyagot, tehát

$$n_0 = \frac{2700}{0,027} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{28}$$

Al atomot tartalmaz.

Minden Al atom 3 vezetési elektront ad a kristálynak, mivel 3 vegyértékű fém. Ezért a vezetési elektronok koncentrációja számértékileg megegyezik az  $1 \text{ m}^3$  alumíniumban található atomok számának 3-szorosával.

$$n = 3n_0 = 1,8 \cdot 10^{29} \frac{1}{\text{m}^3}$$

A  $\sigma = en\mu$  összefüggés alapján az elektronmozgékonytságot:

$$\mu = \frac{\sigma}{en}$$

Használjuk fel a vezetőképesség és a fajlagos ellenállás kapcsolatát, azaz helyettesítsünk  $\sigma$  helyére  $1/\rho_e$ -t. A feladat szövege szerint  $\rho_e = 0,026 \Omega\text{mm}^2/\text{m} = 2,6 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$

Így az elektronmozgékonytságot számszerűen megkaphatjuk:

$$\mu = \frac{1}{\rho_e en} = 1,34 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

Tudjuk, hogy az áramsűrűség és az átlagos elektronsebesség közt egyszerű kapcsolat van:  $j = en\bar{v}$ , továbbá hogy az áramsűrűség az áramerősség és a keresztmetszet hányadosa, azaz  $j = I/A$ . Ezek alapján nyilvánvalóan:

$$\bar{v} = \frac{j}{en} = \frac{I}{enA} = 6,94 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\Rightarrow$  Az Al-ban tehát az elektronmozgékonytságot  $0,00134 \text{ SI}$  egység, és a megadott vezetékben az elektronok átlagos (drift) sebessége kb.  $0,07 \text{ mm}/\text{s}$ .

Megjegyzés: Nem irreális ez az alacsony drift sebesség, mivel az elektronok csak sodródhatnak az elektromos térrel, a jelet a vezeték körüli elektromos tér szállítja, ami körülbelül a közegbeli fénysebességgel terjed.

**K-18.:** (3/2-es lecke)

Egy fémhuzal keresztmetszete  $2,5 \text{ mm}^2$ , hossza  $100 \text{ m}$ , ellenállása  $2,0 \Omega$ . Mekkora a vezetőképessége?

Azt is tudjuk, hogy anyagában  $1,8 \cdot 10^{29} 1/\text{m}^3$  koncentrációban vannak vezetési elektronok. Mekkora benne az elektronmozgékonytságot?

Ha a vezetékben  $15 \text{ A}$  erősségű áram folyik, mekkora az elektronok átlagsebessége?

**Megoldás:** Középiskolából ismert, hogyan kapható meg a vezeték ellenállása a fajlagos ellenállás ( $\rho_e$ ), a vezeték hossz ( $l$ ) és a keresztmetszet ( $A$ ) függvényében, valamint az, hogy a vezetőképesség ( $\sigma$ ) a fajlagos ellenállás reciproka. Ezért:

$$R = \rho_e \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A}$$

ahonnan a keresett vezetőképesség:

$$\sigma = \frac{l}{AR} = 2,0 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega\text{m}}$$

Ismert az is hogy:

$$\sigma = en\mu$$

( $n = 1,8 \cdot 10^{29}$  az elektronkoncentráció.)

Innét az elektronmozgékonyosság:

$$\mu = \frac{\sigma}{en} = 6,94 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{V s}}$$

Tudjuk, hogy az áramsűrűség:

$$j = \frac{I}{A} = en\bar{v}$$

A keresett átlagsebesség most már könnyen meghatározható:

$$\bar{v} = \frac{I}{enA} = 2,09 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\Rightarrow$  A huzal anyagának vezetőképessége  $2,0 \cdot 10^7 \text{ 1/(\Omega m)}$ , az elektronmozgékonyosság  $6,94 \cdot 10^{-4} \text{ SI-egység}$ , és a megadott esetben kb.  $0,2 \text{ mm/s}$  átlagsebességgel sodródnak az elektronok.

---

### K-19.: (3/3-es lecke)

Egy félvezető diódán  $0,47 \text{ V}$  nyitófeszültség esetén  $0,2 \text{ A}$  erősségű áram folyik. Mekkora a dióda záróárama?

Mekkora nyitófeszültség esetén lesz az áramerősség a fenti érték  $1/10$  része, azaz  $0,02 \text{ A}$ ? (Tegyük fel, hogy a hőmérséklet  $300 \text{ K}$ .)

**Megoldás:** A dióda karakterisztikája:

$$I = I_0 \left( e^{U/U_T} - 1 \right)$$

ahol az  $U_T$  termikus feszültség értéke  $300 \text{ K}$ -en:

$$U_T = \frac{kT}{e} = 0,0259 \text{ V}$$

A dióda karakterisztikájából egyszerűen kifejezhető a záróáram a megadott paraméterekkel:

$$I_0 = \frac{I}{e^{U/U_T} - 1} = 2,63 \cdot 10^{-9} \text{ A} = 2,63 \text{ nA}$$

A második kérdés: milyen  $U_2$  feszültségnél lesz a dióda árama  $I_2 = 0,02 \text{ A}$ . Ez is könnyen meghatározható a karakterisztikából, hisz a 2. estere felírva azt:

$$I_2 = I_0 \left( e^{U_2/U_T} - 1 \right)$$

Egyszerű átrendezésekkel a kért feszültség:

$$U_2 = U_T \ln \left( \frac{I_2}{I_0} + 1 \right) = 0,41 \text{ V}$$

$\Rightarrow$  A dióda záróárama tehát  $2,63 \text{ nA}$ , és  $0,41 \text{ V}$  nyitófeszültség esetén már a tizede lesz az átfolyó áram az eredeti,  $0,47 \text{ V}$ -on vett értéknek.

Megjegyzés: A feladat jól tükrözi a dióda erősen nemlineáris viselkedését: egyrészt záróirányban kb. százmilliószor kisebb áram folyik rajta át, mint nyitó  $0,47 \text{ V}$  esetében, de még nyitóirányban is  $0,06 \text{ V}$  feszültésgváltozás tizedére csökkentette a dióda áramát.

**K-20.:** (3/3-es lecke)

Egy félvezető dióda hőmérséklete az áramkör bekapcsolásakor 20°C, de folytonos üzem mellett ez 50°C-ra emelkedik. Ha közben végig 0,42 V nyitófeszültség esett rajta, az eredeti érték hány százalékára csökkent a rajta átfolyó áram erőssége eközben?

**Megoldás:** Induljunk ki a dióda karakterisztikájának következő alakjából:

$$I = I_0 \left( e^{\frac{qU}{kT}} - 1 \right)$$

Ezt  $T_1 = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$  és  $T_2 = 50^\circ\text{C} = 323\text{ K}$  esetére felírhatjuk és kifejezhetjük a két esetbeli  $I_1$  és  $I_2$  áramerősségeket. Ezek számszerű értékét nem tudjuk megkapni a záróáram ( $I_0$ ) ismeretének hiányában, de a feladat szövege úgyis csak ezek arányát kérdezi. Ekkor viszont a záróáram kiesik a számolások során.

Az üzemi és a kezdeti áramerősség aránya tehát:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_0 \left( e^{\frac{qU}{kT_2}} - 1 \right)}{I_0 \left( e^{\frac{qU}{kT_1}} - 1 \right)} = 0,21$$

(Itt  $q$ -val jelöltük az elemi töltést a szokásos  $e$  helyett, hogy véletlenül sem keverjük a természetes alapú logaritmus alapszámával.)

⇒ Az új áramerősség az eredetinek 21%-a.

Jól mutatja ez a feladat a félvezető eszközök erős hőmérsékletfüggését.

---

**K-21.:** (4/1-es lecke)

Egy lézer  $T = 300 \text{ K}$ -en működve  $7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  hullámhosszúságú sugárzást bocsát ki. Miért nem működhet optikai rezonátor nélkül? Válaszát számolással is indokolja!

**Megoldás:** Az optikai rezonátor nélküli kvantumerősítők működésének egyik alapfeltétele az, hogy a p-arány 1-nél nagyobb legyen. (A p-arány az indukált- és spontán fotonkibocsátások aránya, a lézer fényben pedig az indukált fotonkibocsátásoknak kell többségben lenniük.)

Ebben az esetben ez nem teljesül, ezért nem működhet a berendezés optikai rezonátor nélkül. Ugyanis a p-arány ekkor:

$$p = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

A  $\nu$  frekvencia pedig:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 4,29 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

így tehát

$$p = \frac{1}{e^{68,3} - 1} = 2,13 \cdot 10^{-30} \ll 1$$

$\Rightarrow$  Tehát a p-arány valóban nagyságrendekkel kisebb mint 1, így a lézer nem tudna működni optikai rezonátor nélkül.

**K-22.:** (4/1-es lecke)

A Nap felszíne kb.  $6000 \text{ K}$  hőmérsékletű és legerősebben  $6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  hullámhosszon sugároz fotonokat. Az ilyen hullámhosszúságú fotonok esetén hányszor több foton keletkezik spontán emisszióval, mint indukálttal? Mekkora az a hullámhossz, mely esetén az indukált- és spontán emissziók száma épp megegyezik? Milyen színek tartományba esik ez? (Rádió, infravörös, ultraibolya, ...)

**Megoldás:** Az első kérdésre a választ (definíció szerint) a p-arány adja meg. Azaz az indukált és spontán emissziók számaránya:

$$p = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

A feladat adataival:

$$p = 0,0186$$

Tehát az indukált emisszióval keletkező fotonok kb.  $1/p \approx 54$ -szer kevesebben vannak, mint spontán emisszióval keletkezők.

A második kérdésben keresett hullámhossz esetén a p-arány épp 1 lesz, azaz:

$$\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT}} - 1} = 1$$

Innét egyszerű átrendezéssel:

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\ln 2 kT} = 3,46 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Ez az infravörös tartományba esik.

$\Rightarrow$  Tehát a Nap fényében a  $6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  hullámhosszúságú fotonok közt 54-szer több a spontán emisszióval keletkező, mint az indukálttal. Az a hullámhossz, ahol a kétféle kibocsátás száma megegyezik:  $3,46 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ , és ez infravörös sugárzást jelent.



**K-23.:** (4/1-es lecke)

Valaki  $5 \cdot 10^{-8}$  m hullámhosszúságú sugárzást szeretne optikai rezonátor nélküli lézerrel előállítani. (Röntgenlézer.) Milyen hőmérséklettartományban képes egy ilyen berendezés elvileg üzemelni?

**Megoldás:** Optikai rezonátor nélkül akkor működik egy lézer, ha a p-arány 1-nél nagyobb, azaz ha

$$p = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} > 1$$

Ezt átrendezve:

$$\frac{h\nu}{kT} < \ln 2$$

Kihasználva, hogy  $\nu = c/\lambda$ :

$$\frac{hc}{\lambda kT} < \ln 2$$

Átrendezve:

$$T > \frac{hc}{\lambda k \ln 2} = 4,14 \cdot 10^5 \text{ K}$$

$\Rightarrow$  A röntgenlézer tehát legalább 414 000 K-es hőmérséklet esetén üzemel.

Megjegyzés: Ez természetesen azt jelenti, hogy normál körülmények közt nem tudunk röntgentartományban üzemelő lézert előállítani.

---

**K-24.:** (5/1-es lecke)

Egy hangszóró 500 Hz-es hangot egyenletesen sugároz a tér minden irányába. Kimenő hangteljesítménye 1,5 W. Mekkora a levegőrészek elmozdulása és a maximális nyomásváltozás tőle 3 m távolságban? (A hangelnyelődést hanyagoljuk el.)

**Megoldás:** A 1,5 W teljesítmény 3 m sugarú gömb felszínén oszlik el egyenletesen. Ezért a hangintenzitás:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1,5}{4\pi 3^2} = 1,33 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

A hang körfrekvenciája:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 500 \text{ Hz} = 3142 \frac{1}{\text{s}}$$

Tudjuk, hogy a nyomásváltozások maximuma: ( $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 330 \text{ m/s}$ .)

$$p_m = \sqrt{2\rho_0 c I} = 3,37 \text{ Pa}$$

A levegőrészek maximális elmozdulása pedig:

$$\xi_m = \frac{p_m}{\omega \rho_0 c} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$\Rightarrow$  A levegőrészek elmozdulása a kérdéses helyen  $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ , a nyomásváltozások pedig 3,37 Pa nagyságúak.

**K-25.:** (5/1-es lecke)

Egy falon a beeső hangintenzitás 0,05%-a hatol át. Hány decibellel hangosabb az egyik oldalon a hang, mint a másikon? Hogyan aránylanak egymáshoz a két oldalon mérhető nyomásváltozások?

**Megoldás:** Legyen a beeső hangintenzitás jele  $I_1$ , a kimenőé  $I_2$ . A feladat szerint:

$$I_2 = I_1 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$$

A hangnyomásszint (decibel-skála) definíciója szerint a fal túloldalán mérető hangnyomásszint: ( $I_0$  a küszöbintenzitás)

$$n_2 = 10 \lg \frac{I_2}{I_0}$$

Egyszerű átalakításokkal:

$$n_2 = 10 \lg \frac{I_2}{I_0} = 10 \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \right) = 10 \lg \frac{I_1}{I_0} + 10 \lg(5 \cdot 10^{-4})$$

Itt viszont felismerhetjük, hogy beeső hang hangnyomásszintje lép fel, azaz:

$$n_2 = n_1 + 10 \lg(5 \cdot 10^{-4}) = n_1 - 33,0$$

A kért decibelérték különbség tehát:

$$n_1 - n_2 = 33 \text{ dB}$$

A nyomásváltozás és az intenzitás közti  $p_m = \sqrt{2\rho_0 c I}$  összefüggés alapján a nyomásváltozások kért aránya:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{2\rho_0 c I_1}}{\sqrt{2\rho_0 c I_2}} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 10^{-4}}} = 44,7$$

$\Rightarrow$  A hangnyomásszintek 33 dB-lel különböznek, a nyomásváltozások aránya pedig 44,7.

**K-26.:** (4/2-es lecke)

Vonatablakon kihajolva egy sín melletti duda hangját 954 Hz-esnek halljuk, amikor közeledünk feléje és 903 Hz-esnek, amikor már távolodunk tőle. Mekkora a vonat sebessége és a duda frekvenciája? (Tegyük fel, hogy szélcsend van.)

**Megoldás:** Vegyük észre, hogy a forrás a közeghez képest áll ( $v_f = 0$ ), a közeledéskor a megfigyelő sebessége  $v_{m1} = +v$ , a távolodáskor  $v_{m2} = -v$ . Így a két esetben a Doppler-effekust leíró összefüggést alkalmazva:

$$\nu_1 = \nu_f \frac{c + v}{c}, \quad \nu_2 = \nu_f \frac{c - v}{c}$$

Ebből átrendezésekkel:

$$v = c \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = 9,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\nu_f = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = 928,5 \text{ Hz}$$

$\Rightarrow$  A vonat sebessége 9,06 m/s, a duda frekvenciája 928,5 Hz.

**K-27.:** (4/2-es lecke)

Egy autó közeledik felénk. Hangját 550 Hz-esnek halljuk. Amikor elment mellettünk, és azonos sebességgel távolodik, a hangja 430 Hz-es lesz. Mekkora az autó sebessége?

**Megoldás:** Legyen az 1-es eset a közeledés, a 2-es a távolodás esete.

1-es esetben a megfigyelő áll, a forrás  $v$  sebességgel közeledik:

$$\nu_1 = \nu_f \frac{c}{c - v}$$

2-es esetben a megfigyelő áll, a forrás  $v$  sebességgel távolodik:

$$\nu_2 = \nu_f \frac{c}{c - (-v)}$$

Ebből az egyenletrendszerből az autó sebessége egyszerűen kifejezhető:

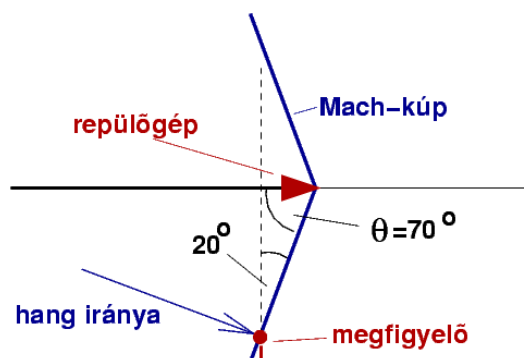
$$v = c \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = 0,122 c = 40,4 \text{ m/s}$$

$\Rightarrow$  Az autó tehát 40,4 m/s sebességgel halad.

**K-28.:** (4/2-es lecke)

Egy szuperszonikus repülőgép repül el a fejünk felett vízszintesen, egyenletes sebességgel. Amikor a hangját hirtelen meghalljuk, a repülő nem a fejünk felett van, hanem tőlünk számított iránya  $20^\circ$ -ot zár be a függőleges iránnyal. Becsülje meg a repülőgép sebességét! Milyen irányból halljuk meg a repülő hangját legelőször? (Célszerű ábrát készíteni.)

**Megoldás:** A feladat szövegéből nyilvánvaló, hogy a repülő Mach-kúpjának nyílásszöge  $\Theta = 70^\circ$ -os.



Ez a szög viszont a repülési sebességgel ( $v$ ) van kapcsolatban:

$$\sin \Theta = \frac{c}{v}$$

ahonnan:

$$v = \frac{c}{\sin \Theta} = 1,06 c \approx 351 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Amikor legelőször halljuk meg a repülő hangját, akkor épp a Mach-kúp felületén vagyunk. Ezért a hang a kúp felületére merőleges irányból ér el minket, ami azt is jelenti, hogy a repülőgépre merőleges irányból. A hangot tehát olyan irányból halljuk meg először, amelyik irány merőleges a repülőgép irányával és a repülő egy olyan korábbi helyzetébe mutat, amikor a repülő még közeledett felénk. (Lásd a fenti ábra.)

⇒ A repülő sebessége tehát kb. 350 m/s és amikor meghalljuk hangját, a hang iránya merőleges a repülő ekkori irányára, és a vízszintessel  $20^\circ$ -os szöget zár be.

---