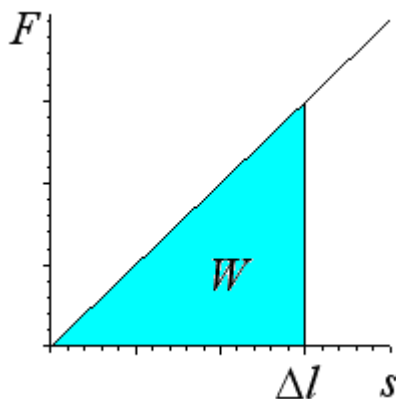


Motivációs példa: Mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy egy m tömegű űrhajót h távolságra juttassunk a Föld felszínétől?

Egy látszólag egyszerű feladattal állunk szemben, hiszen a munkát, amint azt középiskolában fizikából tanultuk, az erő és az erő irányába eső elmozdulás szorzataként számolhatjuk. Ezért először arra gondolhatunk, hogy meghatározzuk az űrhajóra ható gravitációs erőt, és ezt megszorozzuk h -val, hiszen a gravitációs erővel párhuzamos elmozdulás pontosan az, amennyivel az űrhajó eltávolodik a Föld felszínétől. De van egy kis gond, ami miatt ez mégsem ilyen egyszerű. Mivel h nagy, ezért az űrhajóra ható gravitációs erő nem tekinthető állandónak, hanem változik a Föld középpontjától való távolság függvényében. Márpedig a munkát csak akkor számolhatjuk a fenti egyszerű módon, ha az erő állandó. Változó erő munkájáról középiskolában azt tanultuk, hogy az erő-elmozdulás grafikon alatti alakzat területe adja meg az ilyen erő munkáját. Ennek jól ismert esete a rugó nyújtása. Ekkor tudjuk, hogy a rugó nyújtásához szükséges erő egyenesen arányos a rugó megnyúlásával. Ezt írja le az $F_{\text{rugó}} = D \cdot \Delta l$ összefüggés, melyben D a rugóállandó, Δl pedig a rugó megnyúlása. Ha ábrázoljuk az erőt megnyúlás függvényében, akkor egyszerű lineáris függvényt kapunk.



Ha a rugót nyújtatlan állapotból Δl -lel megnyújtjuk, akkor a közben végzett munka az ábrán kékkel jelzett alakzat területe. Ez most könnyen meghatározható, hiszen egy derékszögű háromszög területét kell kiszámolni.

$$W = \frac{1}{2} F_{\text{rugó}} \cdot \Delta l = \frac{1}{2} (D \cdot \Delta l) \cdot \Delta l = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$$

Az űrhajó esetén azonban a Föld által az űrhajóra kifejtett gravitációs erő nem lineáris a távolság függvényében, hanem a Föld középpontjától mért távolság négyzetével fordítva arányos. A gravitációs erőre az alábbi törvény ismert:

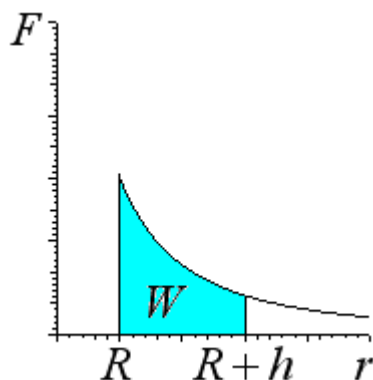
$$F_{\text{grav}} = k \frac{Mm}{r^2}.$$

Ebben k a gravitációs állandó $\left(k = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right)$, M a Föld tömege $(M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg})$,

m az űrhajó tömege, r az űrhajónak a Föld középpontjától mért távolsága. Most r tölti be a változó szerepét, azaz a gravitációs erő r -nek a függvénye. Jelölésben ezt az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$F_{\text{grav}} = F_{\text{grav}}(r) = k \frac{Mm}{r^2}.$$

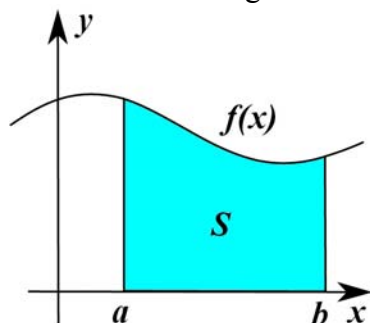
Ha most ábrázoljuk az erőt a Föld középpontjától mért távolság függvényében, akkor az alábbiakat kapjuk.



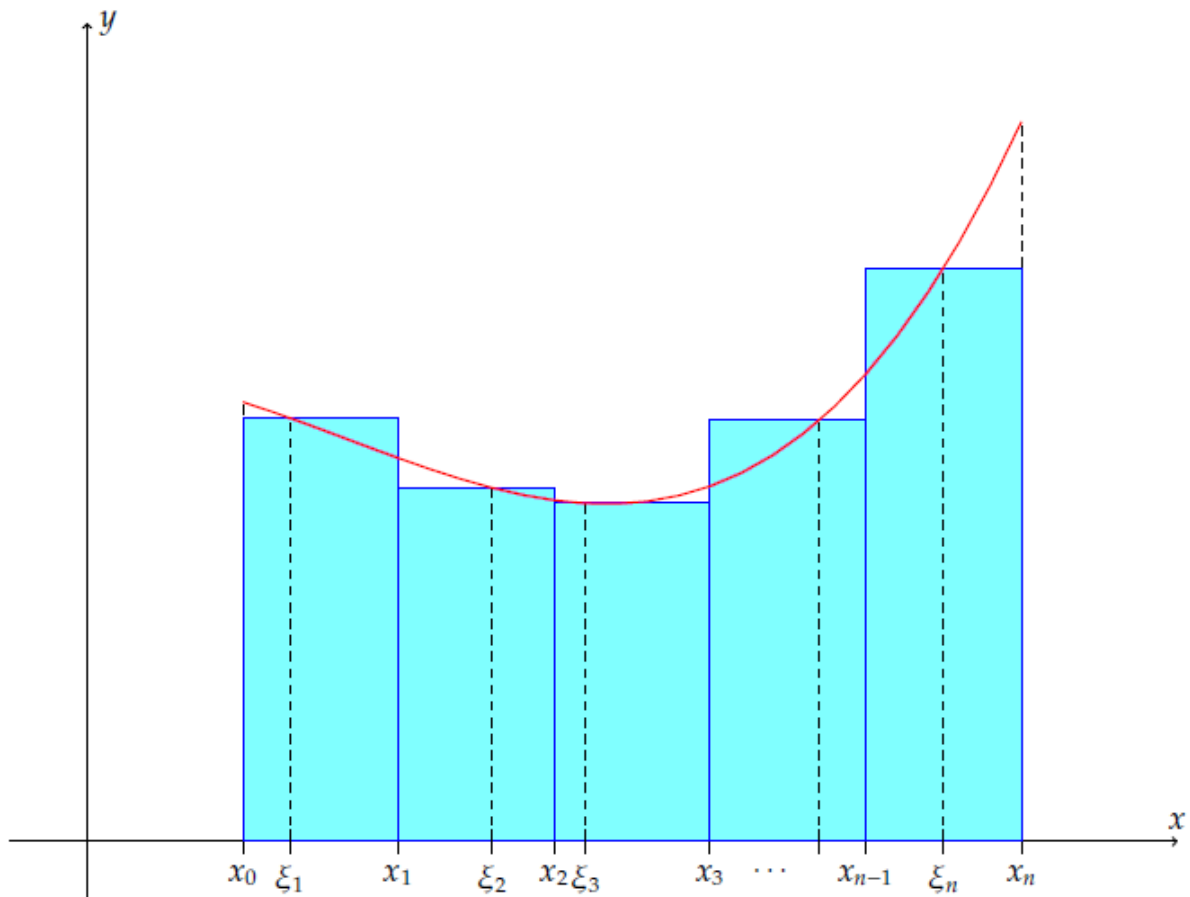
Ezen az ábrán a késsel jelzett alakzat területe adja meg azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy az űrhajó a Föld felszínétől h magasságra távolodjon el. Most egy olyan alakzat területét kell meghatároznunk, melyet egyik oldaláról a vízszintes tengely egy szakasza, két másik oldaláról a függőleges tengellyel párhuzamos szakaszok, negyedik oldaláról pedig egy függvény grafikonja határol. Mivel például változó erő munkájának számolásához szükség volt ilyen alakzatok területének meghatározására, ki kellett dolgozni egy módszert, amivel ilyen görbe vonalú alakzatok területe egzakt módon meghatározható. Ez vezetett el a határozott integrál fogalmához, amivel az alábbiakban ismerkedünk meg.

Elméleti összefoglaló:

Induljunk ki tehát abból, hogy adott egy $[a, b]$ -n értelmezett folytonos $f(x)$ függvény, melyre $f(x) > 0$ teljesül az $[a, b]$ -n, és szeretnénk meghatározni az $y = f(x)$, az $y = 0$, az $x = a$ és az $x = b$ görbék által határolt alakzat területét. Ez az alakzat látható az alábbi ábrán.



Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n részre valamilyen $F_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ halmazzal, amelyre $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ teljesül. Ezt az F_n halmazt az $[a, b]$ intervallum egy felosztásának nevezzük. Egy-egy részintervallum hosszát a szomszédos osztópontok különbségeként kaphatjuk meg. Az i -edik részintervallum hossza például $x_i - x_{i-1}$, melyet Δx_i -vel is jelölünk. (A részintervallumok nem feltétlenül egyforma hosszúak.) A felosztás finomságának nevezzük a leghosszabb részintervallum hosszát, azaz $\max \Delta x_i$ -t. Válasszunk ki mindegyik $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumból egy ξ_i számot. Emeljünk mindegyik részintervallum fölé $f(\xi_i)$ magasságú téglalapot.



Ezen téglalapok területének összegével közelítjük a meghatározandó területet. Ezt az összeget az adott felosztáshoz tartozó közelítő összegnek nevezzük, és σ_n -nel jelöljük. Írjuk fel ezt az összeget. Az első téglalap területe: $T_1 = f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1$, a második téglalap

területe $T_2 = f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) = f(\xi_2) \cdot \Delta x_2$, az i -edik téglalap területe

$T_i = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Ezek alapján a közelítő összeg a következő:

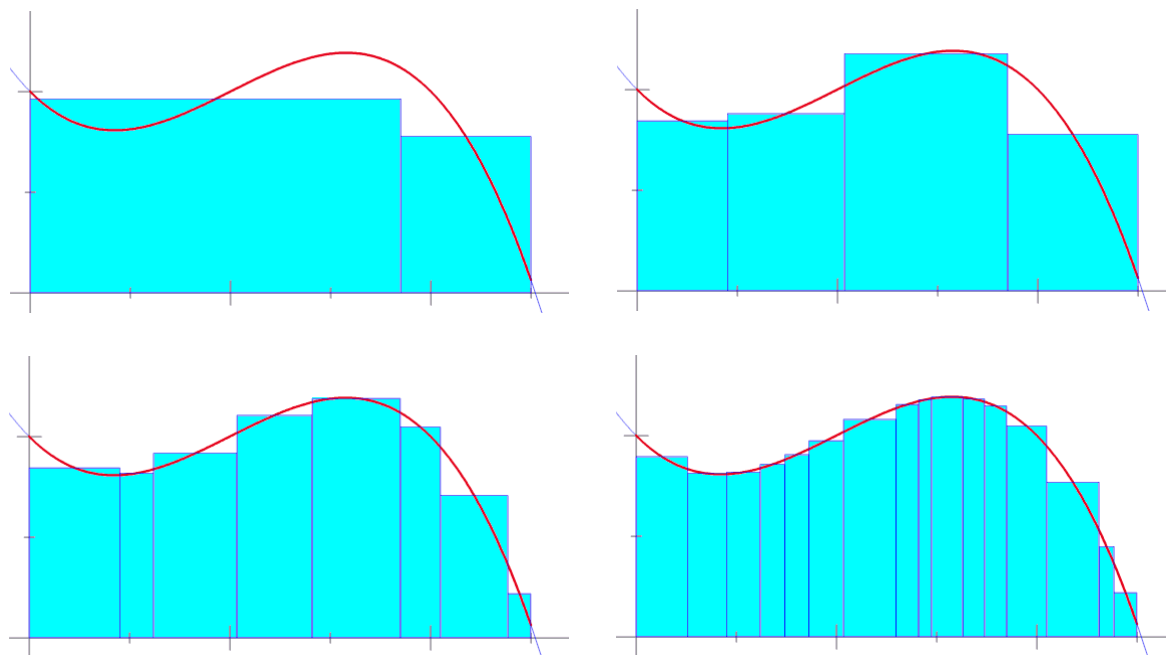
$$\begin{aligned} \sigma_n &= T_1 + T_2 + \dots + T_n = f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) = \\ &= f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n. \end{aligned}$$

Ugyanezt rövidebben is írhatjuk:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Növeljük a felosztásban a részintervallumok számát, így újabb és újabb felosztásokat kapunk. Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük akkor így felosztásoknak egy sorozatát kapjuk. Várhatóan az egyre több osztóponttal rendelkező felosztások egyre pontosabban fogják közelíteni az alakzatot, melynek területét meghatározni szeretnénk. Ez azonban csak akkor lesz igaz, ha a felosztás az osztópontok számának növelésével egyre finomodik is, azaz nem marad benne sehol túl hosszú részintervallum. Ezt fejezzük ki azzal, hogy olyan felosztássorozatot készítünk, amiben a felosztás finomsága nullához tart, azaz $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Nem történhet meg olyan a felosztássorozatban, hogy az $[a, b]$ intervallum egyik részén egyre sűrűsödik a felosztás, de valahol máshol benne marad egy hosszabb

részintervallum. Az ilyen felosztássorozatot végtelenül finomodó felosztássorozatoknak nevezzük. Az alábbi ábrákon ilyen egyre finomodó felosztások láthatók.



Definíció: Azt mondjuk, hogy az $[a, b]$ -n értelmezett $f(x)$ függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ -n, ha a σ_n közelítő összegek sorozata minden végtelenül finomodó felosztássorozat esetén konvergens, és ugyanahhoz a számhoz tart. Ekkor ezt a számot az $f(x)$ függvény

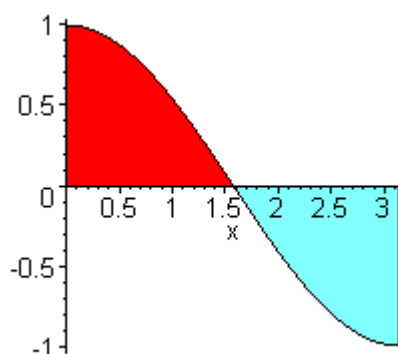
$[a, b]$ -n vett Riemann-integráljának, vagy határozott integráljának nevezzük és $\int_a^b f(x) dx$ -

szel jelöljük. Ez rövidebben az alábbi jelölésekkel írható:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Itt kell megjegyeznünk, hogy az egyszerűség kedvéért az elején olyan függvényről beszéltünk, ami az $[a, b]$ -n pozitív értékeket vesz fel. Ekkor a fenti definíció valóban a függvény grafikonja és az x -tengely között elhelyezkedő alakzat területét adja meg az $[a, b]$ -n. Ha azonban a függvény negatív értékeket is felvehet, akkor a téglalapokkal történő közelítésben $f(\xi_i)$ is lehet negatív, így az $f(\xi_i) \Delta x_i$ szorzat az i -edik téglalap területét előjelesen adja meg. Ha $f(\xi_i) > 0$, a közelítésben a téglalap az x -tengely felett helyezkedik el. Ekkor $f(\xi_i) \Delta x_i$ pozitív, tehát valóban a téglalap területét kapjuk. De ha $f(\xi_i) < 0$, a téglalap az x -tengely alatt helyezkedik el. Ekkor $f(\xi_i) \Delta x_i$ negatív, s a téglalap területének -1 -szeresével egyenlő. Ebből következően, az integrál a függvény grafikonja és az x -tengely között elhelyezkedő alakzat területét előjelesen adja meg. Ha a függvény pozitív, azaz grafikonja az x -tengely felett halad, akkor valóban területet kapunk, de ha a függvény negatív, akkor a terület -1 -szeresét kapjuk. Ezért kapjuk azt, hogy ha egy függvény előjele megváltozik az $[a, b]$ belsejében, és a pozitív illetve negatív részen egyenlő nagyságú a

terület a függvény grafikonja és az x -tengely között, akkor nulla a függvény integrálja az $[a, b]$ intervallumon. Erre példa mondjuk az $f(x) = \cos x$ függvény a $[0, \pi]$ -n.



Amint az ábrán látható, a pirossal illetve kékkel jelölt alakzatok szimmetria miatt egyenlő területűek, de míg a piros az x -tengely felett, a kék az x -tengely alatt helyezkedik el. Az integrálás így a piros alakzat területét, a kék alakzat területének pedig -1 -szeresét adja. Így a függvény integrálja a teljes $[0, \pi]$ intervallumon ezek összeg, azaz nulla lesz.

A Riemann-integrál hosszadalmas definíciója után felvetődik az a kérdés, hogy milyen függvények integrálhatóak. Ezzel kapcsolatban két tételt mondunk ki bizonyítás nélkül.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f(x)$ ezen az intervallumon korlátos. A korlátosság tehát szükséges feltétele az integrálhatóságnak. (Nem minden $[a, b]$ -n korlátos függvény integrálható $[a, b]$ -n.)

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor integrálható is $[a, b]$ -n. A folytonosság tehát elégséges feltétele az integrálhatóságnak. (Nem minden $[a, b]$ -n integrálható függvény folytonos $[a, b]$ -n.)

A határozott integrálra vonatkozóan sok tétel bizonyítható. Ezeket szokták a határozott integrál tulajdonságainak nevezni. Vannak köztük olyanok, melyek hasonlóak, mint a határozatlan integrál tulajdonságai.

Tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálhatóak az $[a, b]$ -n, k pedig tetszőleges valós szám, akkor a $k \cdot f(x)$, $f(x) + g(x)$ és $f(x) - g(x)$ függvények is integrálhatóak $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Tehát amint a határozatlan integrálnál, úgy a határozott integrálnál is konstans szorzó kiemelhető az integrálból, valamint összeget és különbséget tagonként integrálhatunk. A különbségre vonatkozó állítás a másik kettőből már egyszerűen következik.

A határozott integrálnak vannak olyan tulajdonságai is, amelyekben az integrálási intervallumnak fontos szerepe van. A határozatlan integrálnál ilyen tulajdonságok nyilván nem voltak.

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható a -tól b -ig, akkor integrálható b -től a -ig is, és

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Azaz ha felcseréljük az integrálási határokat, az integrál -1 -szeresét kapjuk.

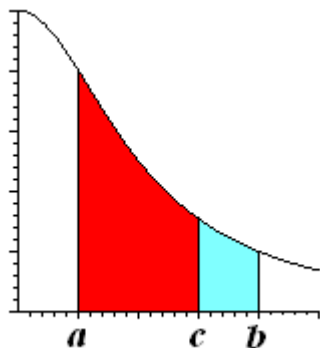
Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ -n, akkor integrálható $[a, b]$ bármely részintervallumán is.

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ -n, és $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy az integrálás az $[a, b]$ -n részletekben is végrehajtható.

Pozitív értékű függvény esetén szemléletesen arról van szó, hogy a függvény grafikonja és az x -tengely közti terület az $[a, b]$ -n úgy is meghatározható, hogy vesszük a területet az $[a, c]$ -n, és hozzáadjuk a területet $[c, b]$ -n. (Az $[a, b]$ intervallumon a terület a piros és kék alakzat területének összege.)



Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon, akkor integrálható az $[a, b]$ intervallumon is, és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ -n, és $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Ha nem negatív függvényt integrálunk, akkor az integrál sem negatív.

Tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálhatóak az $[a, b]$ -n, valamint $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor

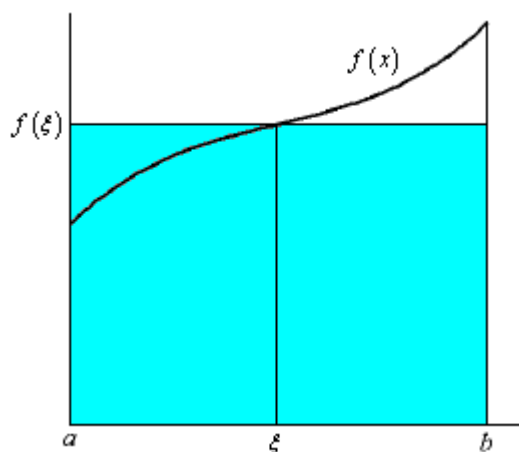
$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Más megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy a nem kisebb értékű függvény integrálja sem kisebb.

Tétel: (Az integrálszámítás középértéktétele) Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ -n, akkor létezik legalább egy $\xi \in [a, b]$, melyre igaz, hogy

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Pozitív értékű függvény esetén szemléletes arról van szó, hogy az $f(x)$ függvény grafikonját tudjuk metszeni olyan vízszintes egyenessel, ami alatt az $[a, b]$ -n pontosan akkora területű téglalap van, mint a függvény és az x -tengely közti alakzat területe az $[a, b]$ -n. Az ábrán kékkel jelölt téglalap területe $f(\xi) \cdot (b - a)$, mely megegyezik a függvény grafikonja és az x -tengely közti területtel.



Tétel: (Newton-Leibniz-formula) Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ -n, és $F(x)$ egy tetszőleges primitív függvénye $f(x)$ -nek, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

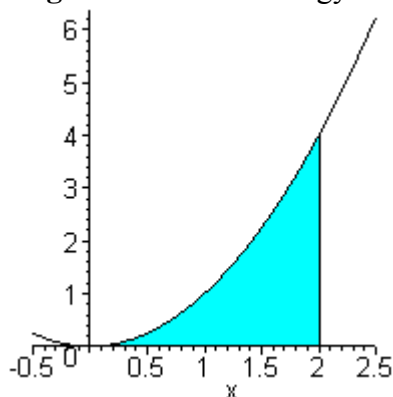
Az $F(b) - F(a)$ különbség rövidebb írására gyakran használatos az $[F(x)]_a^b$ jelölés.

Ezt a tételt gyakran nevezik az integrálszámítás alaptételének is, mert a határozott integrál és a primitív függvény közötti kapcsolatot mondja ki. Ezzel lehetővé teszi számunkra a határozott integrál pontos kiszámolását olyan esetekben, amikor a definíció alapján ezt nem tudnánk elvégezni. Márpedig a definíció alapján csak nagyon kevés esetben számolható ki pontosan a határozott integrál, s általában akkor is nagyon nehézkes.

Kidolgozott feladatok:

8. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[0, 2]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát az alakzatról.



Amint látható, egy olyan háromszöghöz hasonló alakzat területe a kérdés, amit felülről az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja, azaz egy parabola határol. Mivel a függvény a $[0, 2]$ intervallumon nem vesz fel negatív értéket, így a területet megkapjuk, ha a függvényt integráljuk ezen az intervallumon.

$$T = \int_0^2 x^2 dx$$

Meg kell határoznunk $f(x)$ egy primitív függvényét, így először határozatlanul integrálunk. Hatványt integrálunk, tehát eggyel növeljük a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Mivel csak egy primitív függvényre van szükségünk, így c -t tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legegyszerűbb a $c = 0$ választás. Így kapjuk, hogy $f(x) = x^2$ egy primitív függvénye

$$F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Ezután helyettesítünk a Newton-Leibniz-formulába.

$$T = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

A kért terület tehát $\frac{8}{3}$ egységnyi.

A későbbiekben az ehhez hasonló feladatok megoldását rövidebben írjuk majd. A primitív függvényt nem határozzuk meg külön, hanem a határozott integrál után egyből írjuk a primitív függvényt $[]$ -ben, feltüntetve a zárójel után az integrálási határokat. Így a megoldás lényegében csak az utolsó sorból áll majd. Ha a primitív függvény meghatározása nem ilyen egyszerű mint most, akkor célszerű lehet külön elvégezni a határozatlan integrálást, és utána visszatérni a határozott integrálhoz.

9. feladat: Határozzuk meg az $\int_1^4 x\sqrt{x} dx$ határozott integrált!

Megoldás: A megoldás során először primitív függvényt kell keresnünk, amihez alakítsuk át az integrandust úgy, hogy egyetlen hatványt kapjunk.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} \, dx = \int_1^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} \, dx = \int_1^4 x^{1+\frac{1}{2}} \, dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \, dx$$

Adjuk meg a primitív függvényt, hivatkozva a hatványok alapintegráljára, azaz növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel. A primitív függvényt tegyük a $\left[\right]$ -be, és tüntessük fel mögötte az integrálási határokat. A primitív függvényt írjuk minél egyszerűbb alakban.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} \, dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{5} \sqrt{x^5} \right]_1^4$$

Helyettesítsük be a primitív függvénybe a felső integrálási határt, majd vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét, és végezzük el a műveleteket.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{5} \sqrt{x^5} \right]_1^4 = \frac{2}{5} \sqrt{4^5} - \frac{2}{5} \sqrt{1^5} = \frac{2}{5} \cdot 32 - \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{62}{5} = 12.4$$

10. feladat: $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

Megoldás: Járjunk el úgy mint az előző feladatban, azaz írjuk hatványként az integrálandó függvényt.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt, s hozzuk minél egyszerűbb alakra.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_1^8 = \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_1^8$$

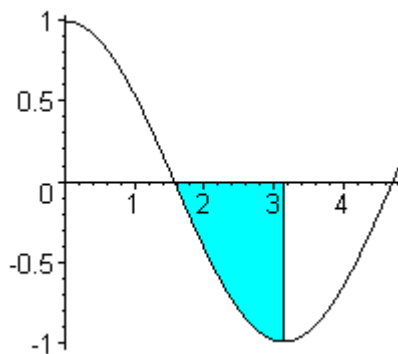
Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a két helyettesítési érték különbségét. A felső határ helyettesítési értékéből vonjuk az alsó határ helyettesítési értékét. A műveleteket ezután végezzük el.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_1^8 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{8^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} = \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{9}{2} = 4.5$$

Ha a primitív függvényben szerepel valamilyen konstans szorzó, mint jelen esetben a $\frac{3}{2}$, akkor azt határok behelyettesítéskor rögtön kiemelhetjük, így nem kell kétszer leírunk.

11. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk ábrát a függvényről és a kérdéses alakzatról.



Amint látható, a függvény a megadott intervallumon negatív értékeket és a 0-t veszi fel, így az alakzat területe a függvény integráljának -1 -szerese lesz. Persze ezt úgy is mondhatnánk, hogy az integrál abszolút értéke lesz a terület.

$$T = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx \right| = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

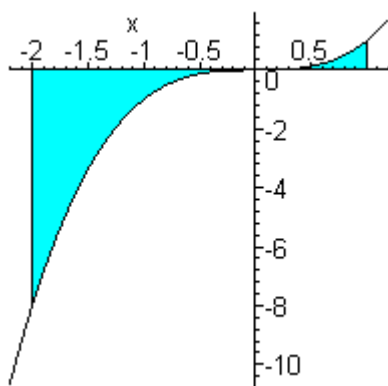
Helyettesítsük a felső integrálási határt, majd vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét, és végezzük el a műveleteket.

$$T = - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = -(0 - 1) = 1$$

A kért terület tehát pontosan 1 egységnyi.

12. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[-2, 1]$ intervallumon.

Megoldás: Most is egy ábrával célszerű kezdenünk a megoldást.



Amint látható, a függvénynek az $x = 0$ -nál zérushelye van, s a $[-2, 0)$ intervallumon negatív, a $(0, 1]$ pedig pozitív. A területet így két részletben kell számolnunk. Integráljuk egyrészt a

függvényt a $[-2, 0]$ intervallumon, és ennek az integrálnak vesszük az abszolút értékét, mert itt a függvény negatív vagy 0. Ezzel megkapjuk a függvény és az x -tengely közti területet $[-2, 0]$ intervallumon. Valamint vesszük a függvény integrálját a $[0, 1]$ intervallumon, ami megegyezik itt a függvény és az x -tengely közti területtel, mert a függvény itt pozitív vagy 0. A teljes területet pedig a két terület összegeként kapjuk.

$$T = \left| \int_{-2}^0 x^3 dx \right| + \int_0^1 x^3 dx = - \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = - \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = - \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

Mindkét esetben helyettesítsük az integrálási határokat, és felső határ helyettesítési értékéből vonjuk ki az alsó határ helyettesítési értékét. A számolásokat ezután végezzük el.

$$T = - \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \right) + \left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = -(0 - 4) + \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{17}{4} = 4.25$$

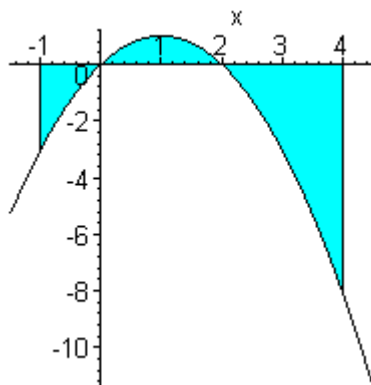
A kért terület tehát 4.25 egység.

13. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2x - x^2$ függvény grafikonja és az x -tengely közötti alakzat területét a $[-1, 4]$ intervallumon.

Megoldás: Most is célszerű ábrázolni a függvény adott intervallumba eső részét. Mivel másodfokú függvényt kell ábrázolnunk, célszerű meghatározni a zérushelyeket. Emeljünk ki x -et, mert így azt kell vizsgálnunk, hogy egy szorzat mikor egyenlő nullával.

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{vagy} \\ 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

A zérushelyek tehát $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$. Ezek ismeretében már könnyen ábrázolható a parabola. Mivel x^2 együtthatója negatív, ezért konkáv parabolát kell rajzolnunk.



A kérdéses alakzat most három részből áll, mivel a függvény két helyen is metszi az x -tengelyt az adott intervallumon belül. Az első rész a $[-1, 0]$ intervallumhoz tartozó rész, a második a $[0, 2]$ intervallumhoz tartozó rész, s a harmadik a $[2, 4]$ intervallumhoz tartozó

rész. Mivel az első és a harmadik részen a függvény nem pozitív, így a terület meghatározásához ezeken a részekben a függvény integráljának abszolút értékét kell venni.

$$T = \left| \int_{-1}^0 2x - x^2 dx \right| + \int_0^2 2x - x^2 dx + \left| \int_2^4 2x - x^2 dx \right| = -\int_{-1}^0 2x - x^2 dx + \int_0^2 2x - x^2 dx - \int_2^4 2x - x^2 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = -\int_{-1}^0 2x - x^2 dx + \int_0^2 2x - x^2 dx - \int_2^4 2x - x^2 dx = -\left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4$$

Helyettesítsük mindhárom esetben az integrálási határokat a Newton-Leibniz-formulának megfelelően, majd hajtsuk végre a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= -\left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \\ &= -\left(\left(0^2 - \frac{0^3}{3} \right) - \left((-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) + \left(\left(2^2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(0^2 - \frac{0^3}{3} \right) \right) - \left(\left(4^2 - \frac{4^3}{3} \right) - \left(2^2 - \frac{2^3}{3} \right) \right) = \\ &= -\left(0 - \left(1 + \frac{1}{3} \right) \right) + \left(\left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 \right) - \left(\left(16 - \frac{64}{3} \right) - \left(4 - \frac{8}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \left(-\frac{16}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Amint látható, minél több helyen metszi a függvény grafikonja az adott intervallumon belül a x -tengelyt, annál több részben kell számolnunk a területet. Mindig figyeljünk oda arra, hogy mely részhelyeken halad a függvény grafikonja a x -tengely alatt. Ezeken a részekben az integrál abszolút értékét kell vennünk, azaz szorozni kell az integrált -1 -gyel.

Ezek után térjünk vissza ahhoz a motivációs példához, ami a határozott integrál bevezetése előtt szerepelt.

14. feladat: Mennyi munkát kell végezünk ahhoz, hogy egy m tömegű űrhajót h távolságra juttassunk a Föld felszínétől?

Megoldás: Amint az korábban szerepelt, az űrhajóra a Föld által kifejtett gravitációs erő hat,

amit $F_{\text{grav}} = F_{\text{grav}}(r) = k \frac{Mm}{r^2}$ összefüggéssel írhatunk le a Föld középpontjától mért távolság

függvényében. A munka az $F_{\text{grav}}(r)$ függvény grafikonja alatti terület az $[R, R+h]$

intervallumon. Amint az egy korábbi ábrán látható volt, a függvény pozitív értékeket vesz fel, így a terület a függvény ezen intervallumon vett integráljával egyenlő. A változó szerepét most r tölti be, így r szerint integrálunk.

$$W = \int_R^{R+h} k \frac{Mm}{r^2} dr$$

Mivel k , M , m konstansok, így kiemelhetők az integrálból.

$$W = kMm \int_R^{R+h} \frac{1}{r^2} dr$$

Az integrandust ezután írjuk negatív kitevős hatvány formájában. Így már könnyen meghatározható a primitív függvény, amit hozzunk minél egyszerűbb alakra.

$$W = kMm \int_R^{R+h} r^{-2} dr = kMm \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_R^{R+h} = kMm \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{R+h}$$

Helyettesítsük be ezután az integrálási határokat, s vegyük a két helyettesítési érték különbségét.

$$W = kMm \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{R+h} = kMm \left(-\frac{1}{R+h} - \left(-\frac{1}{R} \right) \right) = kMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

Ezzel olyan összefüggést kaptunk a munkára, amibe csak az űrhajó tömegét és a felszíntől való eltávolodását kell behelyettesíteni. Ha ezeket az adatokat ismerjük, a munka pontosan kiszámolható.