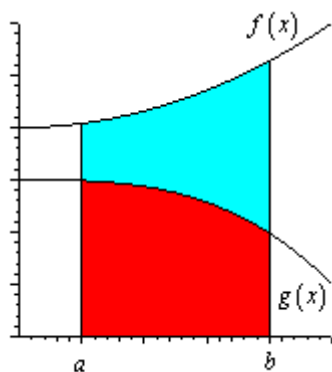


Elméleti összefoglaló: A határozott integrál nem csak olyan alakzatok területének meghatározását teszi lehetővé, melyek egy függvény grafikonja és az x -tengely között helyezkednek el, hanem más görbékkel határolt alakzatokét is. Ha például a folytonos $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai nem metszik egymást az $[a, b]$ intervallum belsejében, akkor a függvények grafikonjai, valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt síkrész területe, vagy máképp fogalmazva a függvények grafikonjai közti terület az $[a, b]$ intervallumon a következő:

$$T = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|.$$

Ha tudjuk, hogy az $[a, b]$ -n $f(x) \geq g(x)$, akkor az abszolút érték elhagyható, hiszen $f(x) - g(x)$ nem negatív értékű függvény az $[a, b]$ -n. Az állítás helyességét az egyszerűség kedvéért $f(x)$ és $g(x)$ $[a, b]$ -n pozitív függvények esetén az alábbi ábra segítségével láthatjuk be.



Ezen látható, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ megadja a pirossal és kékkel jelölt alakzatok területének

összeget, az $\int_a^b g(x) dx$ pedig csak a piros alakzat területét. A kékkel jelölt síkrész területe így

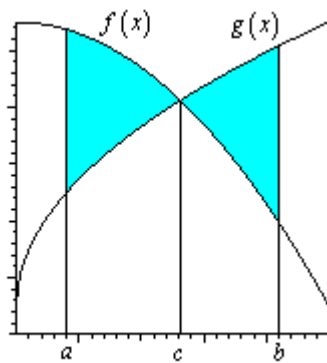
a kettő különbsége, tehát: $T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$. A határozott integrál tulajdonságai

között szerepelt, hogy azonos intervallumon vett integrálok különbsége megegyezik a függvények különbségének integráljával, azaz:

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Két függvény grafikonja közti területet tehát úgy kapjuk, hogy a nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbbat, s különbséget integráljuk.

Ha a két függvény grafikonja metszi egymást az $[a, b]$ intervallum belsejében, akkor a grafikonok közti területet részletekben számolhatjuk. Az alábbi ábrán látható, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai metszik egymást a c helyen.



Az $[a, c]$ intervallumon $f(x) \geq g(x)$, így ezen a részintervallumon $f(x) - g(x)$ -et integráljuk, míg a $[c, b]$ intervallumon $g(x) \geq f(x)$, így ezen a részintervallumon $g(x) - f(x)$ -et integráljuk. A terület tehát a következő:

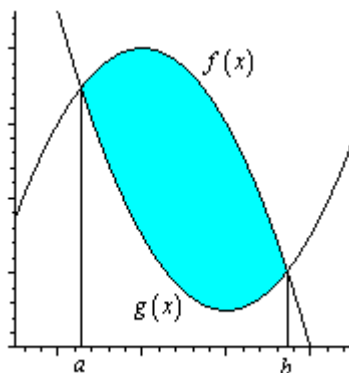
$$T = \int_a^c f(x) - g(x) dx + \int_c^b g(x) - f(x) dx.$$

Amennyiben nem szeretnénk vizsgálni, hogy az egyes részekben melyik függvény vesz fel nagyobb értékeket, akkor megtehetjük azt is, hogy tetszőlegesen vesszük a két függvény különbségét, azt integráljuk az egyes részekben, s az integráloknak vesszük az abszolút értékét. Ezt az alábbi módon írhatjuk.

$$T = \left| \int_a^c f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) - g(x) dx \right|$$

Ha a függvények grafikonjai nem csak egy helyen metszik egymást, akkor természetesen több részletben kell számolnunk.

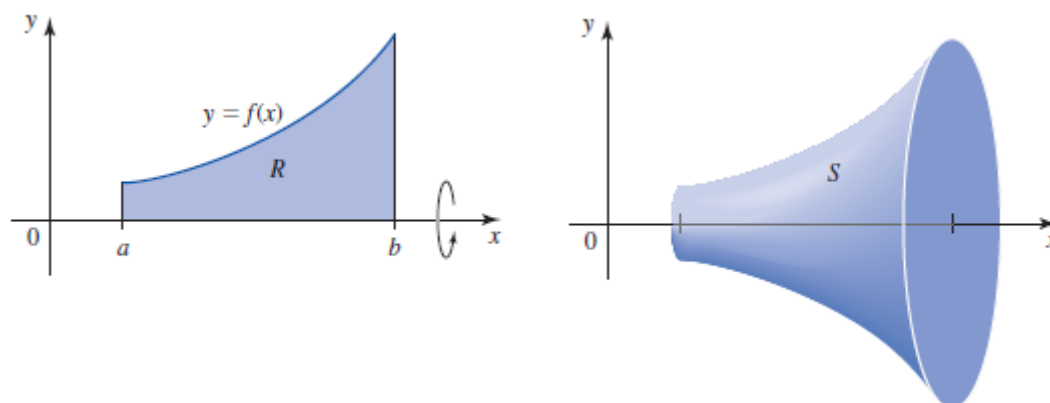
Lényegében ugyanígy járhatunk el, ha két függvény grafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés. Az ilyen alakzat a grafikonok metszéspontjai között helyezkedik el, amint az alábbi ábrán látható.



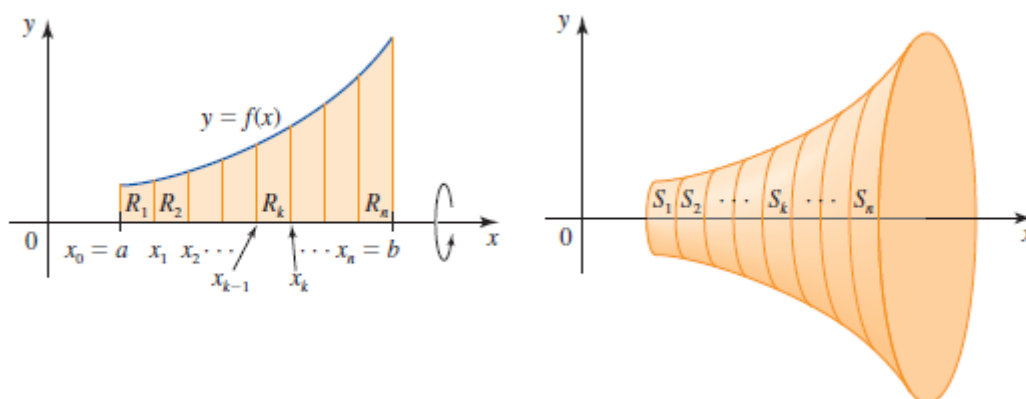
Ilyenkor először meg kell oldanunk az $f(x) = g(x)$ egyenletet. Ezzel kapjuk meg a metszéspontok helyét, azaz a -t és b -t. Ezek után az $[a, b]$ -n nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbat, s különbséget integráljuk $[a, b]$ -n.

A görbe vonallal határolt alakzatok területének számolása a határozott integrál legkézenfekvőbb alkalmazása. De a határozott integrál nem csak erre jó. Az alábbiakban a forgástestek térfogatának meghatározására ismerünk meg egy alkalmazást.

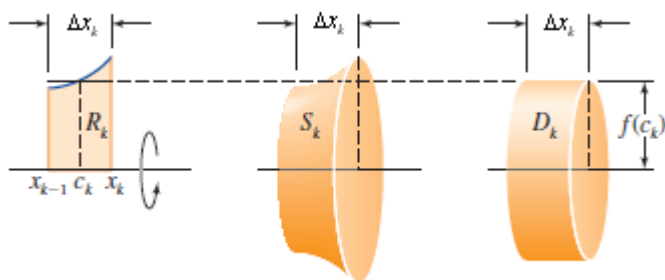
Tekintsük az $[a, b]$ intervallumon nem negatív, folytonos $f(x)$ függvényt. Az $f(x)$ grafikonja, az x -tengely, az $x = a$ és $x = b$ egyenes által határolt alakzatot forgassuk meg az x -tengely körül, így egy forgástestet kapunk. Ez látható az alábbi ábrákon.



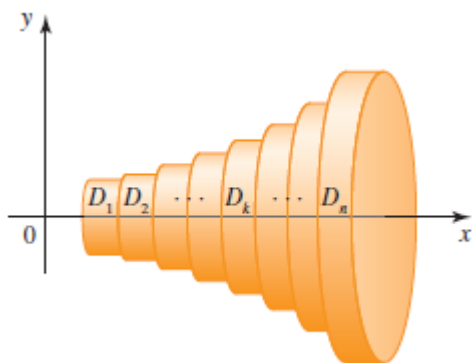
Határozzuk meg ennek a forgástestnek a térfogatát. Használjuk ehhez azt az eljárást, amit a terület meghatározásakor alkalmaztunk. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n részre. Az intervallum felosztása a forgástestet vékony rétegekre bontja.



A vékony rétegekben határozzuk meg közelítőleg a térfogatot úgy, hogy lapos hengerrel közelítünk. Tekintsük a k -adik részintervallumot, melynek szélessége Δx_k . Válasszunk a részintervallumból egy számot, legyen ez c_k . Hanyagoljuk el a függvény változását a részintervallumon, és tekintsük úgy, mintha az egész részen az $f(c_k)$ értéket venné fel a függvény. A forgatás során így az ívelt oldalú rétegből egy lapos henger lesz, melynek sugara $f(c_k)$ -val egyenlő, magassága pedig Δx_k . Ez látható az alábbi ábrán.



Hajtsuk végre ezt a közelítést minden részintervallumon, így a forgástestet egymás melletti lapos hengerek sokaságával közelítjük.



Írjuk fel, hogyan számolható ki egy ilyen lapos henger térfogata. Mivel a k -adik henger sugara $f(c_k)$, magassága pedig Δx_k a térfogata az alábbi:

$$V_k = \pi f^2(c_k) \Delta x_k.$$

Összegezzük ezután a hengerek térfogatát, ezzel egy közelítést kapunk a forgástest térfogatára.

$$V \approx \sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n \pi f^2(c_k) \Delta x_k$$

Ebben az összegben felismerhető, hogy a $\pi f^2(x)$ függvény integrálközelítő összege.

A közelítés nyilván annál pontosabb lesz, minél laposabbak a hengerek. Növeljük ezért az osztópontok számát, s vegyük a fenti összeg határértékét $n \rightarrow \infty$ esetén, miközben a felosztás finomsága egyre kisebb lesz, azaz $\max \Delta x_k \rightarrow 0$. Ha létezik a határérték, megkapjuk a pontosan a test térfogatát. A közelítő összeg határértéke pedig nem más, mint a $\pi f^2(x)$ függvény határozott integrálja az $[a, b]$ intervallumon.

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n V_k = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \pi f^2(c_k) \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

A konstans π kiemelhető az integrálból, s így a forgástest térfogatára az alábbi összefüggést kapjuk:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Ezzel olyan képlethez jutottunk, amibe egy konkrét feladat esetén csak be kell helyettesítenünk az adott függvényt és az intervallum határait, majd végre kell hajtunk az integrálást.

A fenti eljárás segítségével sok más dologra lehet olyan képletet levezetni, amiben integrál szerepel. Ilyenek például a görbe ívhossza, forgástest palástjának felszíne, kiterjedt test tömegközéppontja és tehetetlenségi nyomatéka.

Kidolgozott feladatok:

15. feladat: Mekkora az $f(x) = 4x - x^2 + 1$ és $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények grafikonjai közötti terület az $[1, 4]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a két függvényről a megadott intervallumon. Ha kiszámoljuk a két függvény értékét az intervallum végpontjaiban, akkor a görbék jelleg alapján könnyű elkészíteni az ábrát.

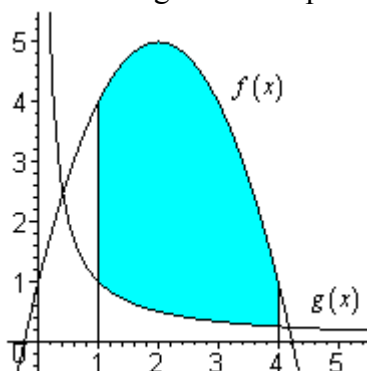
$$f(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 + 1 = 4$$

$$f(4) = 4 \cdot 4 - 4^2 + 1 = 1$$

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(4) = \frac{1}{4}$$

Az $f(x)$ grafikonja egy konkáv parabola, $g(x)$ grafikonja pedig hiperbola. Illesszünk ilyen görbéket a meghatározott pontokra.



Amint látható, a megadott intervallumon belül nem metszi egymást a két függvény. Így egyszerűen vennünk kell a két függvény különbségét, s azt kell integrálnunk a megadott intervallumon. Mivel tudjuk, hogy az adott intervallumban $f(x) > g(x)$, így ha az

$f(x) - g(x)$ különbséget vesszük, akkor nincs szükség abszolút értékre.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1 \right) - \frac{1}{x} dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1 \right) - \frac{1}{x} dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x \right]_1^4$$

Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x \right]_1^4 = \left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} + 4 - \ln 4 \right) - \left(2 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} + 1 - \ln 1 \right) = \\ &= \left(32 - \frac{64}{3} + 4 - \ln 4 \right) - \left(2 - \frac{1}{3} + 1 - 0 \right) = 12 - \ln 4 \approx 10.61 \end{aligned}$$

A kérdéses terület tehát közelítőleg 10.61 egység.

16. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = e^x$ és $g(x) = x^2 - 2x + 1$ függvények grafikonjai közti területet a $[-1, 1]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk most is ábrát a két függvényről. Célszerű most is meghatározni a függvények értékét a megadott intervallum végpontjaiban.

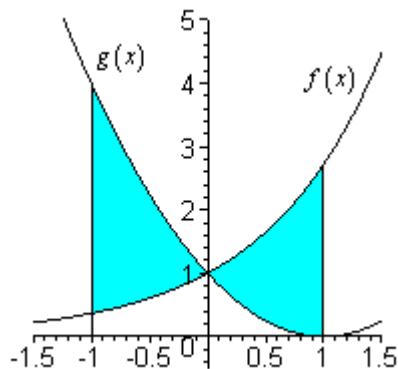
$$f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37$$

$$f(1) = e^1 = e \approx 2.72$$

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 4$$

$$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

Az $f(x)$ exponenciális függvény, $g(x)$ pedig másodfokú tehát parabola. A görbék jellege alapján így már könnyű ábrázolni a függvényeket.



Az ábráról úgy látszik, a két grafikon $x = 0$ -nál metszi egymást. Ezt a függvényekbe helyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük.

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$g(0) = 0^2 - 0 \cdot 1 + 1 = 1$$

Mindkét függvény 1-et vesz fel, tehát az $x = 0$ helyen valóban metszik egymást. Más metszéspont nincs.

A kért területet a metszéspont miatt most két részletben integrálva tudjuk meghatározni. Az első részen -1 és 0 között $g(x) > f(x)$, így itt a $g(x) - f(x)$ függvényt integráljuk, a második részen 0 és 1 között $f(x) > g(x)$, ezért itt az $f(x) - g(x)$ függvényt integráljuk, majd a két integrált összeadjuk. Így nem szükséges az abszolút értékét venni egyik integrálnak sem.

$$T = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x + 1) - e^x dx + \int_0^1 e^x - (x^2 - 2x + 1) dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényeket.

$$T = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) - e^x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \right]_0^1$$

Helyettesítsük a Newton-Leibniz-formulának megfelelően az integrálási határokat, és hajtsuk végre a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{0^3}{3} - 0^2 + 0 - e^0 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 + (-1) - e^{-1} \right) + \left(e^1 - \frac{1^3}{3} + 1^2 - 1 \right) - \left(e^0 - \frac{0^3}{3} + 0^2 - 0 \right) = \\ &= (-1) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{e} \right) + \left(e - \frac{1}{3} \right) - (1) = e + \frac{1}{e} \approx 3.09 \end{aligned}$$

A kérdéses terület tehát közelítőleg 3.09 egység.

17. feladat: Mekkora területű síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^2 - 1$ és $g(x) = 1 - x$ függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két görbe által közrezárt síkrész területe a kérdés, ezért meg kell határoznunk a metszéspontjaikat. Oldjuk meg tehát az $f(x) = g(x)$ egyenletet.

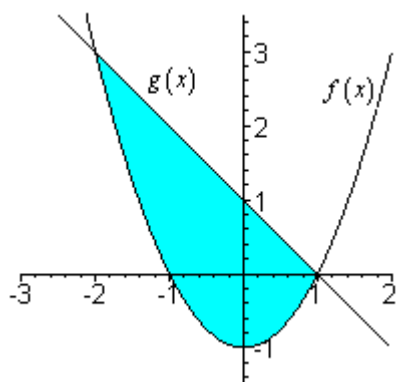
$$x^2 - 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

A kért területet ezután úgy kaphatjuk, hogy a két függvény különbségét integráljuk a két metszéspont között, azaz a $[-2, 1]$ intervallumon, s vesszük az integrál abszolút értékét. Ha azonban el tudjuk dönteni, melyik függvény nagyobb az intervallum belsejében, és a nagyobb értékű függvényből vonjuk ki a kisebb értékűt, akkor nincs szükség az abszolút értékre. Ha készítünk egy ábrát, akkor arról ezt le tudjuk majd olvasni. Az intervallum végpontjaiban a két függvény most ugyanazon értékeket veszi fel. Mivel $g(x)$ az egyszerűbb, így ebbe célszerű helyettesíteni.

$$f(-2) = g(-2) = 1 - (-2) = 3$$

$$f(1) = g(1) = 1 - 1 = 0$$

Az $f(x)$ másodfokú függvény, grafikonja konvex parabola, $g(x)$ elsőfokú, grafikonja egyenes. Ezek után már könnyű egy jó ábrát készíteni.



A $[-2, 1]$ intervallum belsejében láthatóan $g(x) > f(x)$, ezért a $g(x) - f(x)$ függvényt integráljuk, s így nem lesz szükség abszolút értékre.

$$T = \int_{-2}^1 (1 - x) - (x^2 - 1) dx = \int_{-2}^1 2 - x - x^2 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_{-2}^1 2 - x - x^2 dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1$$

Helyettesítsük a határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = 4.5 \end{aligned}$$

A két grafikon által közrezárt terület tehát 4.5 egység.

18. feladat: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény $[0, 8]$

intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt, és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: A megadott függvényt és intervallumot helyettesítsük be a forgástest térfogatának képletébe, amit az elméleti összefoglalóban ismertünk meg.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x})^2 dx$$

Alakítsuk át az integrandust egyetlen hatvánnyá, majd határozzuk meg a primitív függvényt.

$$V = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \int_0^8 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \pi \int_0^8 x^{\frac{2}{3}} dx = \pi \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = \frac{3}{5} \pi \left[\sqrt[3]{x^5} \right]_0^8$$

Helyettesítsük a felső határt, és vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét. Azután végezzük el a műveleteket.

$$V = \frac{3}{5} \pi \left[\sqrt[3]{x^5} \right]_0^8 = \frac{3}{5} \pi \left(\sqrt[3]{8^5} - \sqrt[3]{0^5} \right) = \frac{3}{5} \pi (32 - 0) = \frac{96}{5} \pi \approx 60.32$$

A keletkező forgástest térfogata tehát közelítőleg 60.32 egység.

19. feladat: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ függvény $[1, 5]$

intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt, és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: Mint az előző feladatban, most is behelyettesítünk a forgástest térfogatának képletébe.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_1^5 \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} \right)^2 dx$$

Végezzük el a négyzetre emelést.

$$V = \pi \int_1^5 \frac{x+1}{x^2} dx$$

Bontsuk fel a törtet két tört összegére, és végezzük el külön-külön az osztást.

$$V = \pi \int_1^5 \frac{x+1}{x^2} dx = \pi \int_1^5 \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} dx = \pi \int_1^5 \frac{1}{x} + x^{-2} dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$V = \pi \int_1^5 \frac{1}{x} + x^{-2} dx = \pi \left[\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^5 = \pi \left[\ln x - \frac{1}{x} \right]_1^5$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a Newton-Leibniz-formula szerint, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\ln x - \frac{1}{x} \right]_1^5 = \pi \left(\left(\ln 5 - \frac{1}{5} \right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{1} \right) \right) = \pi \left(\left(\ln 5 - \frac{1}{5} \right) - (0 - 1) \right) = \\ &= \pi \left(\ln 5 + \frac{4}{5} \right) \approx 7.57 \end{aligned}$$

A forgástest térfogata közelítőleg 7.57 egység.