

Elméleti összefoglaló: Az eddigiekben megismertük azt a módszert, mellyel függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából vizsgálni tudunk. Most foglalkozunk azzal, hogyan tudjuk alkalmazni ezt a módszert a lecke elején vázolt problémákhoz hasonló esetekben, melyeket szöveges szélsőérték feladatoknak nevezhetünk. Az ilyen feladatokban első lépésként fel kell írunk, egy általunk választott független változó függvényében azt a mennyiséget, aminek a szélsőértékét keressük. Ezután meg kell határozni a feladat feltételeiből, hogy a független változó milyen értékeket vehet fel. Az így kapott, szöveg szerinti értelmezési tartományon kell aztán megkeresnünk a függvény szélsőértékeit a korábban megismert módon. A módszerrel az alábbi kidolgozott feladatokon keresztül ismerkedünk meg. Megoldjuk majd a lecke elején vázolt problémát is, de előbb egyszerűbb feladatokkal foglalkozunk.

Kidolgozott feladatok:

6. feladat: Mekkora kell választani egy 20 cm kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?

Megoldás: Jelöljük a téglalap egyik oldalát x -szel, a másikat pedig y -nal.

Ekkor a téglalap területe: $T = xy$.

Így felírva a területet, két változó mennyiség szerepel. Azonban a két változó között kapcsolat van, hiszen a kerület 20 cm. Írjuk fel a kerületet az oldalakkal.

$$K = 20 = 2x + 2y$$

Ebből az összefüggésből az egyik változó, pl. y kifejezhető.

$$y = 10 - x$$

Ha pedig ezután behelyettesítünk y helyére a területet leíró összefüggésben, akkor már egyváltozós függvényt kapunk. Ekkor már jelölhetjük azt is, hogy a terület az x változó függvénye.

$$T(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

Ezzel olyan függvényt kaptunk, ami a terület változását írja le az egyik oldal függvényében. Határozzuk meg ezután, hogy milyen határok között vehet fel értékeket a változó.

Nyilvánvaló, hogy az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell, hiszen egy téglalap oldala csak pozitív lehet. Az x -nek azonban 10-nél kisebbnek is kell lennie, hiszen a téglalap másik oldala $10 - x$, és ennek is pozitívnak kell lenni. Így a változóra a $0 < x < 10$ feltételt kapjuk. Ezen a halmazon kell keresnünk a fenti $T(x)$ függvény maximumát. Ehhez állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$T'(x) = 10 - 2x$$

Megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet.

$$10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

A deriválnak a zérushelye a $(0, 10)$ intervallumba esik, így szóba jöhet, mint lehetséges maximum hely. Annak eldöntésére, hogy az $x = 5$ helyen valóban maximuma van-e a területnek, célszerű elkészíteni a szokásos táblázatot.

Az első sor kitöltésekor vegyük figyelembe a $0 < x < 10$ feltételt.

A derivált előjelének vizsgálatát immár nem részletezzük, mert nyilvánvaló, hogy melyik intervallumon pozitív ill. negatív a derivált.

x	$(0,5)$	5	$(5,10)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	\nearrow	lok. max.	\searrow

Az $x = 5$ helyen tehát lokális maximuma van a függvénynek. Sőt ez a $0 < x < 10$ feltétel mellett nem csak lokális maximum, hanem ezen a halmazon ez globális maximum is, hiszen $x < 5$ esetén végig nő a függvény, $x > 5$ esetén pedig végig csökken.

A terület tehát akkor lesz maximális, ha az egyik oldal 5 cm hosszúságú. Persze ekkor a másik oldal hossza is 5 cm, azaz a téglalap ekkor négyzet.

A maximális területet kell még meghatároznunk. Helyettesítsük be a maximum helyét a függvénybe.

$$T_{\max} = T(5) = 5(10 - 5) = 25$$

A terület maximumának értéke tehát 25 cm^2 .

Megjegyzés: Az ilyen feladatokban nem egyértelmű, hogy mit lesz majd a legjobb független változónak tekinteni. Jelen feladatban elég egyértelmű volt, hogy a téglalap egyik oldalát célszerű választani, de eljárhattunk volna más módon is. Mivel a két oldal összege 10, így az egyik oldal ugyanannyival rövidebb 5-nél, mint amennyivel a másik hosszabb 5-nél.

Választhattuk volna változónak ezt a mennyiséget is, amivel az oldalak az 5-től eltérnek. Természetesen ekkor másik függvény írja le területet, és más a szöveg szerinti értelmezési tartomány is. Ennek megmutatása végett megoldjuk most a feladatot másik módon is.

Jelölje a téglalap két oldalát a és b . Tegyük fel, hogy a a nem rövidebb oldal, b pedig a nem hosszabb oldal, azaz $a \geq b$.

Jelölje x az oldalak hosszának 5-től való eltérését.

$$\text{Ekkor } a = 5 + x, \quad b = 5 - x.$$

A téglalap terület: $T = ab$, amibe behelyettesítve a fentieket, egy függvényt kapunk, aminek változója x lesz.

$$T(x) = (5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$$

Ne feledkezzünk el annak vizsgálatáról, hogy a szöveg milyen értékeket enged meg a változóra. Jelen esetben $0 \leq x$, hiszen egy eltérés nem lehet negatív, $x < 5$, mert a b oldalnak, azaz $5 - x$ -nek is pozitívnak kell lenni. Ez együttesen $0 \leq x < 5$, vagy $x \in [0, 5)$ formában írható. Amint látható, most olyan intervallumon keressük a maximumot, aminek egyik vége zárt, másik vége nyitott.

Vegyük a területfüggvény deriváltját.

$$T'(x) = -2x$$

Itt kell felhívni azonban a figyelmet arra, hogy a derivált csak a T függvény értelmezési tartományának belső pontjaiban értelmezhető, így a derivált esetén már $0 < x < 5$, azaz $x \in (0, 5)$.

Ha megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet, ami $-2x = 0$, akkor abból $x = 0$ következik.

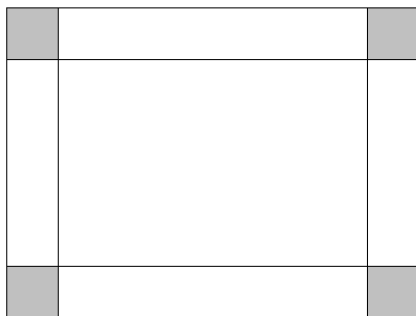
Ez azonban nem eleme T' értelmezési tartományának. Ennek ellenére olyan érzésünk támadhat, hogy ha van szélsőérték, akkor az most csak az $x = 0$ esetén lehet. Ennek igazolására készítsünk táblázatot. Az $x = 0$ értéket kezeljük külön, és itt a derivált sorában azt tüntetjük fel, hogy az nem értelmezett.

x	0	(0,5)
$T'(x)$	nem értelmezett	neg. (-)
$T(x)$	maximum	\searrow

A táblázatból leolvasható, hogy a függvény végig csökken, s ebből következően a maximumát az értelmezési tartomány alsó határán, azaz $x = 0$ esetén veszi fel. Megkaptuk tehát most is, hogy akkor van szélsőérték, ha a téglalap négyzet.

Megjegyezzük, hogy ha a második megoldásunk során nem éltünk volna az $a \geq b$ feltevással, akkor x negatív értékeket is felvehetett volna. Ekkor egyrészt a $-5 < x$ feltételnek kellett volna teljesülni amiatt, hogy az a oldalnak, azaz $x + 5$ -nek pozitívnak kell lenni. Másrészt az $x < 5$ feltételnek kell fennállni, mert a b oldalnak, azaz $5 - x$ -nek pozitívnak kell lenni. A kettőből együttesen kapjuk, hogy $-5 < x < 5$, azaz $x \in (-5, 5)$. Ekkor ugyanúgy az értelmezési tartomány belső pontjában kapjuk a szélsőértéket, mint az első megoldásunkban. A fentiekből jól látható, hogy a független változó megválasztása nagyban befolyásolja a feladat megoldásának további részét. Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a szélsőértéket nagyon sok esetben a derivált alkalmazása nélkül is meghatározhatjuk. Ha például a második megoldásunkban kapott területet leíró függvényt $T(x) = 25 - x^2$ vizsgáljuk, akkor egyértelműen $x = 0$ esetén van maximuma a függvénynek. Ennek oka, hogy egy konstansból vonunk x^2 -et, aminek legkisebb értéke a 0, az $x = 0$ esetben. Így amikor x^2 a legkisebb, akkor lesz $25 - x^2$ a legnagyobb. Sok esetben viszont nem találunk ilyen elemi megoldást, s így ilyenkor nem tudjuk elkerülni a derivált alkalmazását.

7. feladat: Egy téglalap alakú lemezből, melynek oldalai 30 cm és 40 cm hosszúak, mindegyik sarkánál négyzet alakú darabokat vágunk ki az ábrán látható módon. A megmaradt lemez füleit felhajtjuk, és az éleket összehegesztve felül nyitott téglatest alakú dobozt kapunk. Mekkora a válasszuk a kivágott négyzetek oldalát, ha azt szeretnénk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



Megoldás: Jelöljük a kivágott kis négyzetek oldalát x -szel, és tekintsük az alábbi ábrát.

	x	x	
x	$30-2x$		x
x	$40-2x$		x
	x	x	

Ezen láthatjuk, hogy dobozunk alapja egy $30-2x$, és $40-2x$ oldalú téglalap, magassága pedig x . Téglatest térfogata a három oldal szorzatából kapható, így felírhatjuk a doboz térfogatát az x változó függvényében.

$$V(x) = (30-2x)(40-2x)x = 1200x - 140x^2 + 4x^3$$

Határozzuk meg, hogy milyen intervallumon belül mozoghat x értéke. Egyrészt nyilván $0 < x$, másrészt $x < 15$, mert a doboz alapjának rövidebb oldala, azaz $30-2x$ pozitív kell legyen. A függvényünk szöveg szerinti értelmezési tartománya tehát $0 < x < 15$, azaz $x \in (0,15)$. A szélsőértéket csak ezen a halmazon keressük.

Deriváljuk a függvényt.

$$V'(x) = 1200 - 280x + 12x^2$$

Oldjuk meg a $V'(x) = 0$ egyenletet.

$$1200 - 280x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 70x + 300 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet, melynek gyökei az alábbiak.

$$x_{1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 3 \cdot 300}}{2 \cdot 3} = \frac{70 \pm \sqrt{1300}}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{35 + \sqrt{325}}{3} = \frac{35 + 5\sqrt{13}}{3} \approx 17.68 \\ x_2 = \frac{35 - \sqrt{325}}{3} = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3} \approx 5.66 \end{cases}$$

A két megoldás közül csak $x_2 = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$ esik a $(0,15)$ intervallumba ezt kell vizsgálni.

Készítsük el a szokásos táblázatot.

x	$\left(0, \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}\right)$	$\frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$	$\left(\frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}, 15\right)$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	\nearrow	lok. max.	\searrow

A $V'(x)$ sorában az előjeleket például a következő módon kaphattuk meg. Választunk egy

számot a $\left(0, \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}\right)$ intervallumból, mondjuk az 1-et, mert azzal könnyű lesz számolni.

Ezt behelyettesítjük $V'(x)$ -be.

$$V'(1) = 1200 - 280 \cdot 1 + 12 \cdot 1^2 = 932 > 0$$

Hasonlóan választunk egy számot a $\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{3}, 15\right)$ intervallumból. Legyen ez mondjuk a

10, mert ezzel is könnyű lesz számolni.

$$V'(10) = 1200 - 280 \cdot 10 + 12 \cdot 10^2 = -2800 < 0$$

Ezután már kijelenthetjük, hogy az $x = \frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ helyen lokális maximuma van a $V(x)$

függvénynek. A $(0, 15)$ intervallumon ez nem csak lokális, hanem globális maximum is,

hiszen $x = \frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ előtt végig nő a függvény, $x = \frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ után pedig végig csökken.

8. feladat: Két pozitív szám szorzata 100. Melyik ez a két szám, ha összegük minimális? Mekkora a minimális összeg?

Megoldás: Legyen a két szám x és y . Tudjuk, hogy $xy = 100$. Fejezzük ki ebből y -t.

$$y = \frac{100}{x}$$

Írjuk a két szám összegét ezután x függvényeként.

$$f(x) = x + \frac{100}{x}$$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a minimumát a $(0, \infty)$ intervallumon.

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x) = \left(x + \frac{100}{x}\right)' = \left(x + 100x^{-1}\right)' = 1 + 100(-1)x^{-2} = 1 - \frac{100}{x^2}$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$$

Minimum szempontjából nyilván csak az $x = 10$ esettel kell foglalkoznunk, hiszen most $x > 0$.

Készítsük el a már jól ismert táblázatot.

x	$(0, 10)$	10	$(10, \infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow

Az $f'(x)$ sorában az előjeleket például $x = 1$ és $x = 100$ deriváltba történő helyettesítésével kaphatjuk.

$$f'(1) = 1 - \frac{100}{1^2} = -99 < 0$$

$$f'(100) = 1 - \frac{100}{100^2} = 0.99 > 0$$

Amint látható, a függvénynek az $x = 10$ helyen lokális minimuma van, ami pozitív x -ekre egyben globális minimum is.

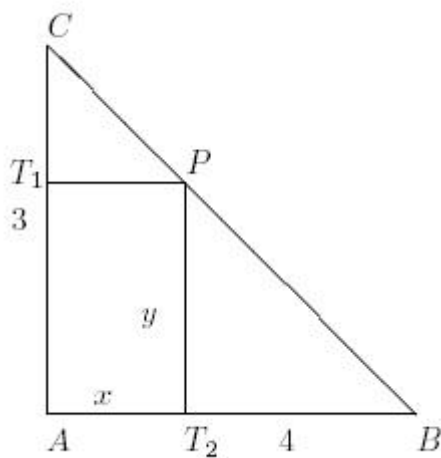
Határozzuk meg ezután a másik számot, tehát y -t is.

$$y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10} = 10$$

Az összeg tehát akkor lesz minimális, ha mindkét szám 10. Ekkor az összegük 20, ez a minimális összeg.

9. feladat: Adott egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög. Tekintsük azokat a háromszögbe írható téglalapokat, amelyeknek egyik csúcsa a háromszög derékszöge, az ezzel szemközti csúcs pedig az átfogóra esik. A legnagyobb területű ilyen téglalapnak mekkorák az oldalai?

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a háromszögről és a belé írt téglalapról.



A téglalap x -szel és y -nal jelölt oldala között most hasonlóság alapján lehet összefüggést találni. A PT_2B és CAB derékszögű háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{y}{4-x} = \frac{3}{4}$$

Rendezzük ezt y -ra.

$$y = \frac{3}{4}(4-x) = 3 - \frac{3}{4}x$$

Ezt felhasználva felírhatjuk a téglalap területét az x függvényében.

$$T(x) = x \left(3 - \frac{3}{4}x \right) = 3x - \frac{3}{4}x^2$$

Az x változó most nyilván a $(0, 4)$ intervallumba esik, így ezen a halmazon keressük a függvény maximumát.

Deriváljuk a függvényt.

$$T'(x) = 3 - \frac{3}{2}x$$

Megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet.

$$3 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

A szokásos táblázat segítségével megvizsgáljuk, hogy ezen a helyen valóban van-e maximuma a függvénynek.

x	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	\nearrow	lok. max.	\searrow

A második sorban T' előjelét például $x=1$ és $x=3$ helyettesítésével vizsgálhattuk.

$$T'(1) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} > 0$$

$$T'(3) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2} < 0$$

Amint látható, az $x=2$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami egyben globális maximum is.

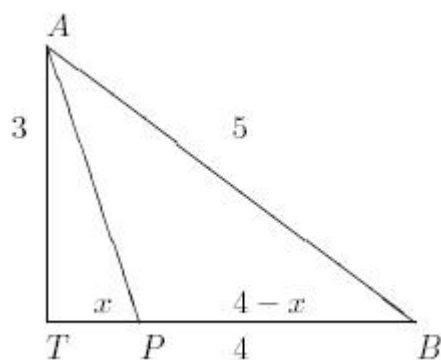
Már csak a téglalap másik oldalát kell kiszámolnunk.

$$y = 3 - \frac{3}{4}x = 3 - \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

A maximális területű téglalap oldalai tehát 2 és $\frac{3}{2}$ hosszúságúak.

10. feladat: Egy ember 3 km-re van egy csónakban az egyenes tóparttól. Egy parton elhelyezkedő, tőle 5 km távolságban lévő helyre akar a lehető legrövidebb idő alatt eljutni. Evezni $v_1 = 3$ km/h, gyalogolni $v_2 = 6$ km/h sebességgel tud. Mennyi az a legrövidebb idő, ami alatt eljuthat a céljába?

Megoldás: Készítsünk egy ábrát!



Az ember helyét a csónakkal a tapon A jelöli, az egyenes tópart a T és B pontok által meghatározott egyenes, melynek B pontjába szeretne emberünk eljutni. Egy lehetőség a B pontba jutásra, hogy emberünk az AB szakasz mentén egyenes odaévez B -be. De valószínűleg nem ez lesz időben a legrövidebb. Mivel a parton gyorsabban halad mint a vízben, várhatóan jobban jár, ha a partnak valamilyen közelebbi P pontjáig evez, majd onnan gyalog folytatja az utat. A partra érkezés helye, azaz a P pont a legrövidebb idő esetén nyilvánvalóan a T és B pontok közé esik.

Válasszuk független változónak a P pont T -től való távolságát, és jelöljük ezt x -szel. Próbáljuk meg ezzel kifejezni az A pontból B pontba jutás idejét.

Elsőként határozzuk meg a TB szakasz hosszát. Ez a Pitagorasz-tétel alapján nyilván 4 km. (A 3, 4, 5 a legismertebb pitagorasz-i számhármasság.)

Bontsuk az utat két szakaszra, első az evezés, a második a gyaloglás.

Az első szakasz hosszát ismét a Pitagorasz-tételből kapjuk, amit az ATP derékszögű háromszögben az AP átfogóra írunk fel. AP hosszát jelölje s_1 .

$$s_1 = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$$

Az ennek megtételéhez szükséges időt, amit jelöljünk t_1 -gyel, megkapjuk, ha ezt osztjuk az evezés sebességével.

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$$

Ezzel órában mérve kapjuk meg AP szakaszon végigevezés idejét.

Most nézzük az út második szakaszát. Az itt megtett távolság a PB szakasz hossza, amit jelöljön s_2 , nyilván $4 - x$ km. Az ennek megtételéhez szükséges időt jelölje t_2 . Az út gyalogos részének megtételéhez szükséges idő is az út és sebesség hányadosaként kapható, de nyilván most a gyaloglás sebességével kell osztanunk.

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4 - x}{6}$$

A két időt összeadva felírhatjuk a teljes út megtételéhez szükséges időt az x változó függvényében.

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{4 - x}{6}$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát a $0 \leq x < 4$ halmazon.

Állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$\begin{aligned} t'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{4 - x}{6} \right)' = \left(\frac{1}{3} (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6}x \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Megoldjuk $t'(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow$$

$$4x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

A $-\sqrt{3}$ hamis gyök, így csak a $\sqrt{3}$ -mal kell foglalkoznunk.

Elkészítjük a szokásos táblázatot.

x	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 4)$
$t'(x)$	$-$	0	$+$
$t(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow

A második sorban az előjeleket például $x = 1$ és $x = 2$ helyettesítésével kapjuk.

$$t'(1) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1^2 + 9}} - \frac{1}{6} \approx -0.06 < 0$$

$$t'(2) = \frac{1}{3} \frac{2}{\sqrt{4^2 + 9}} - \frac{1}{6} \approx 0.018 > 0$$

A függvénynek tehát lokális minimuma van az $x = \sqrt{3}$ helyen, ami egyben globális minimum is a $(0, 4)$ intervallumon.

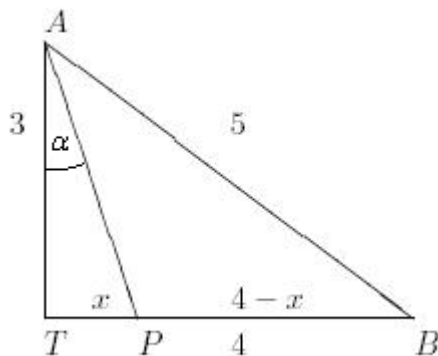
Még a legrövidebb időt kell kiszámolnunk.

$$t_{\min} = t(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 9}}{3} + \frac{4 - \sqrt{3}}{6} \approx 1.53$$

Tehát emberünknek az A pontból B pontba eljutás legalább 1.53 óráig tart.

Vázlatosan megoldjuk a feladatot egy másik úton is.

Válasszuk most független változónak az ATP derékszögű háromszög A csúcsnál lévő szögét, és jelöljük ezt α -val.



A TP szakasz hossza, ami az evezéssel megtett út, ekkor $s_1 = \frac{3}{\cos \alpha}$. Az ennek megtételéhez

$$\text{szükséges idő } t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{3}{\cos \alpha}}{3} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

A PB szakasz hossza, ami a gyalogolva megtett út, ekkor $s_2 = 4 - 3 \operatorname{tg} \alpha$. (Az x távolság az ATP derékszögű háromszögből kifejezhető, s $x = 3 \operatorname{tg} \alpha$.)

$$\text{A gyaloglásra fordított idő } t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4 - 3 \operatorname{tg} \alpha}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Az út megtételéhez szükséges teljes idő az alábbi.

$$t(\alpha) = t_1 + t_2 = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

Az α radiánban mért szög nyilván 0 és a $TAB \sphericalangle = \arctg \frac{4}{3} \approx 0.93$ közé esik. Ezen értékek

között keressük a $t(\alpha)$ függvény minimumát.

Deriváljuk a függvényt.

$$t'(\alpha) = \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right)' = \frac{0 \cdot \cos \alpha - 1(-\sin \alpha)}{(\cos \alpha)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos \alpha)^2} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos \alpha)^2} = \frac{\sin \alpha - \frac{1}{2}}{(\cos \alpha)^2}$$

Ebből következik, hogy $t'(\alpha) = 0$ akkor teljesül, ha $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, amiből $\alpha = \frac{\pi}{6}$ következik.

A megoldás befejezéshez el kell készíteni a táblázatot, amelyből megállapítható, hogy ezen a helyen valóban minimuma van a függvénynek, majd kiszámolható a legrövidebb idő is.

Ezeket a lépéseket már nem hajtjuk végre, hanem az olvasóra bízunk. Természetesen így is ugyanarra az eredményre jutunk.