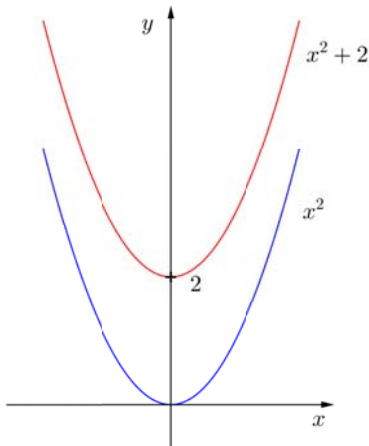
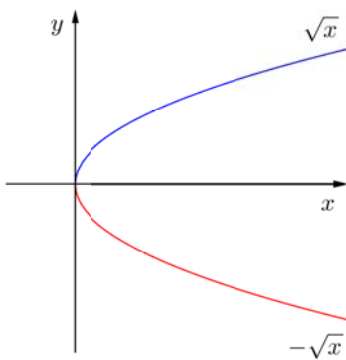
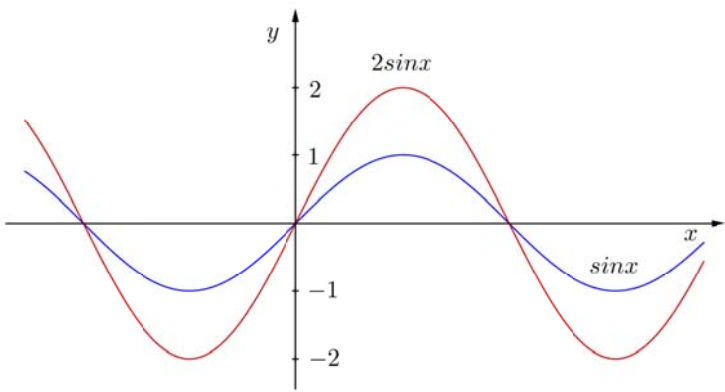
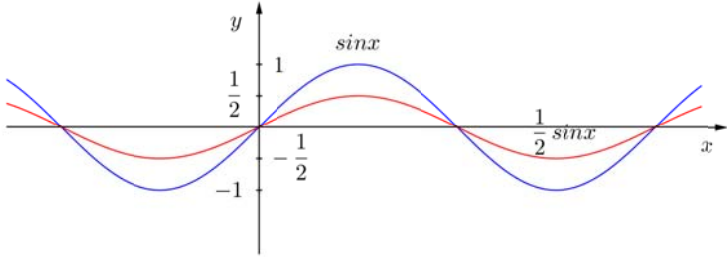
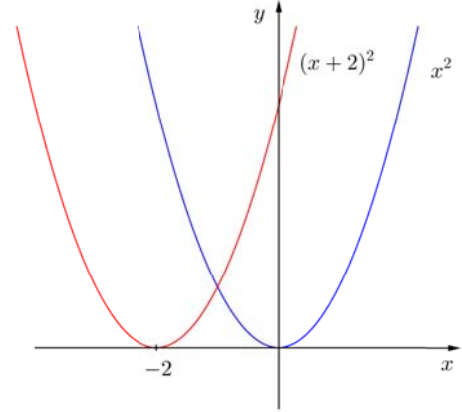
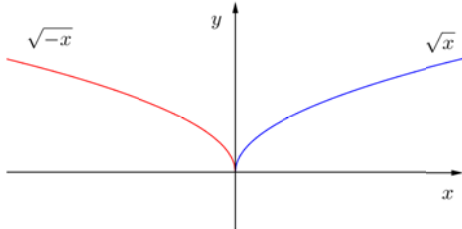
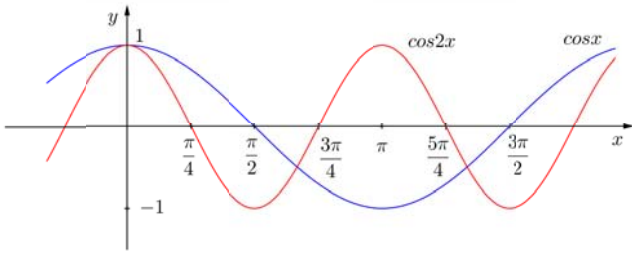
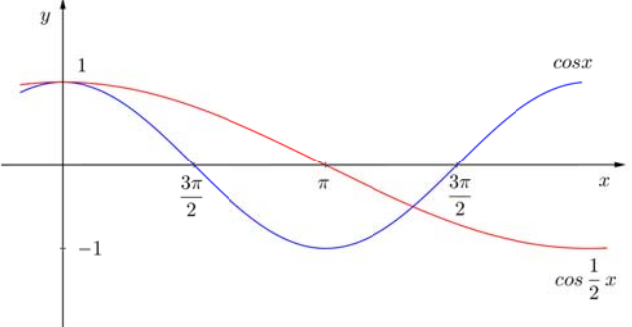


Elméleti összefoglaló:

Sokszor egy-egy függvény ábráját egy már ismert elemi függvény görbéjéből eltolással, tükrözéssel, nyújtással vagy zsugorítással, azaz transzformációval kapjuk meg.

Tekintsük át a leggyakrabban előforduló függvény transzformációkat, s azok hatását a függvénygörbére.

	Transzformált függvény	Transzformáció hatása a függvénygörbére	
Érték transzformáció	$f(x) + a$	eltolás a -val az y tengely irányában a előjelének megfelelően	
	$-f(x)$	tükrözés x tengelyre	
	$cf(x)$ $c > 0$	y tengely irányú c -szeres nyújtás	

Változó transzformáció	$cf(x)$ $c < 0$	y tengely irányú c -szeres zsugorítás	
	$f(x + a)$	eltolás a -val x tengely mentén a előjével ellentétes irányban	
	$f(-x)$	tükrözés y tengelyre	
	$f(cx)$ $c > 1$	x tengely irányú $\frac{1}{c}$ -szeres zsugorítás	
	$f(cx)$ $0 < c < 1$	x tengely irányú $\frac{1}{c}$ -szeres nyújtás	

Érdemes megjegyezni, hogy ha egy függvény esetében több transzformációt kell elvégezni, akkor először a változó transzformációkat, majd az érték transzformációkat kell elvégezni. A

változó transzformációk az értelmezési tartományra, míg az érték transzformációk az értékkészletre hatnak, s azt változtatják meg.

Korábbi leckében láttuk, hogy a függvényekkel különféle műveleteket lehet végezni. Gyakran előfordul, hogy két függvény (f és g) összegét, különbségét, szorzatát vagy hányadosát kell ábrázolni, azaz

$$y = f(x) + g(x), \quad y = f(x) - g(x), \quad y = f(x)g(x), \quad y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

egyenletű görbéket. Ilyenkor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell összeadni, kivonni, szorozni vagy osztani. Nézzünk minden műveletre egy példát. Legyen $f(x) = \sin x$ $g(x) = x$.

Általában néhány nevezetes pontban vett helyettesítési érték kiszámításával felrajzolható a jelleggörbe.

Nézzünk néhány konkrét x -re kiszámolva a helyettesítési értékeket

ha $x = 0$, akkor $y = f(0) + g(0) = \sin 0 + 0 = 0$

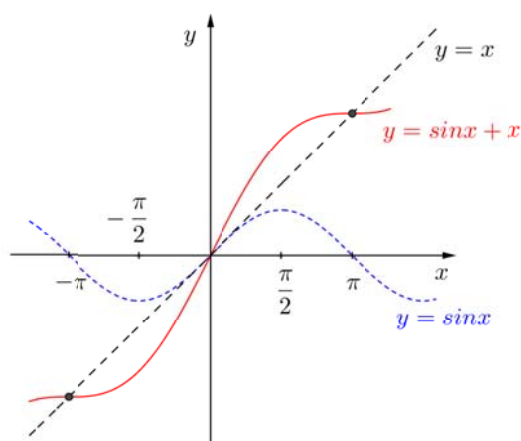
ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor $y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \approx 1 + 1,57 \approx 2,57$

ha $x = \pi$, akkor $y = f(\pi) + g(\pi) = \sin \pi + \pi \approx 3,14$

ha $x = -\frac{\pi}{2}$, akkor $y = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \approx -2,57$

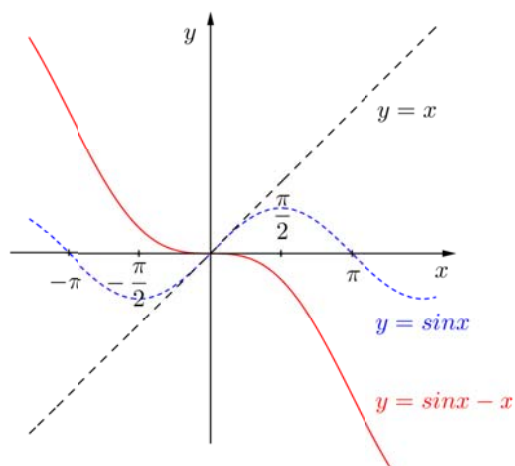
ha $x = -\pi$, akkor $y = f(-\pi) + g(-\pi) = \sin(-\pi) - \pi \approx -3,14$

Ábrázoljuk az eredeti függvényeket és a kiszámolt néhány helyettesítési érték alapján az összeg függvényt (1. ábra).



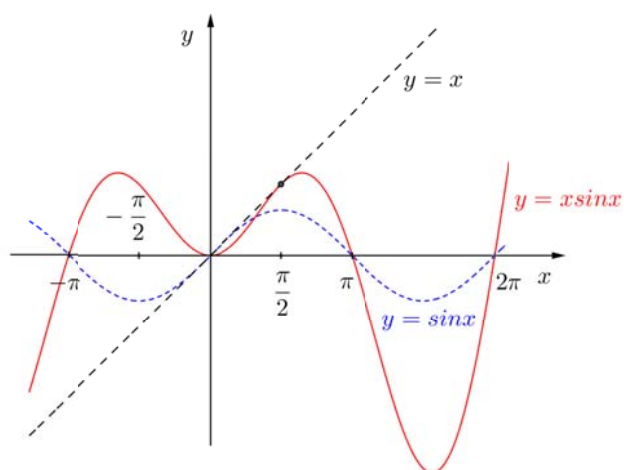
1. ábra. $f(x) = \sin x + x$ függvény ábrája

Hasonlóan az előző feladathoz, néhány helyettesítési érték kiszámolásával felrajzolható a jelleggörbe. A függvények különbségekor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell kivonni egymásból (2. ábra).



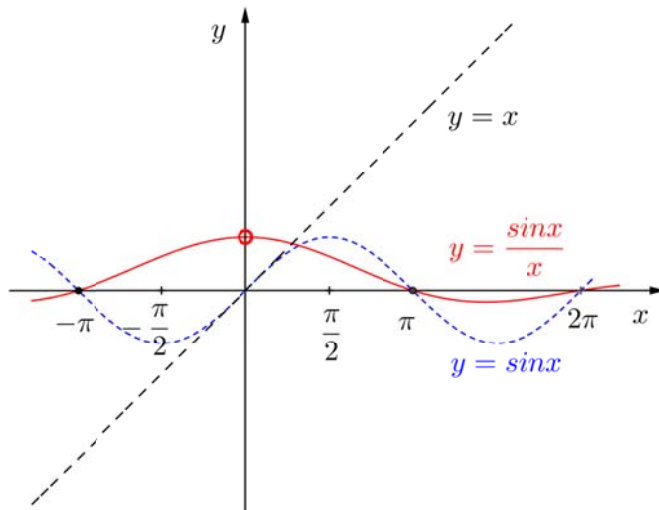
2. ábra. $f(x) = \sin x - x$ függvény ábrája

A függvények szorzatakor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell összeszorozni egymással (3. ábra).



3. ábra. $f(x) = x \sin x$ függvény ábrája

A függvények hányadosa esetében az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell egymással elosztani (4. ábra).



4. ábra. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvény ábrája

Vizsgáljuk meg az értelmezési tartományokat.

$$f(x) = \sin x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x \quad D_g = \mathbb{R}$$

Korábban láttuk, hogy a függvényekkel végzett műveletek esetén az új értelmezési tartomány az eredeti függvények értelmezési tartományainak metszete.

Így $D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$, s hasonlóan $D_{f-g} = \mathbb{R}$, $D_{fg} = \mathbb{R}$. A két függvény hányadosa esetében viszont a $g(x) \neq 0$, azaz $x \neq 0$. Ennek megfelelően $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mely a 4. ábrán is látható.

Két függvény szorzatára gyakorlati példa a csillapított rezgést leíró függvény. A valóságban a testek ritkán végeznek időben állandósult harmonikus rezgőmozgást, mivel a rugó által kifejtett visszatérítő erőn kívül is hat még fékező erő (ez lehet súrlódás, közegellenállás).

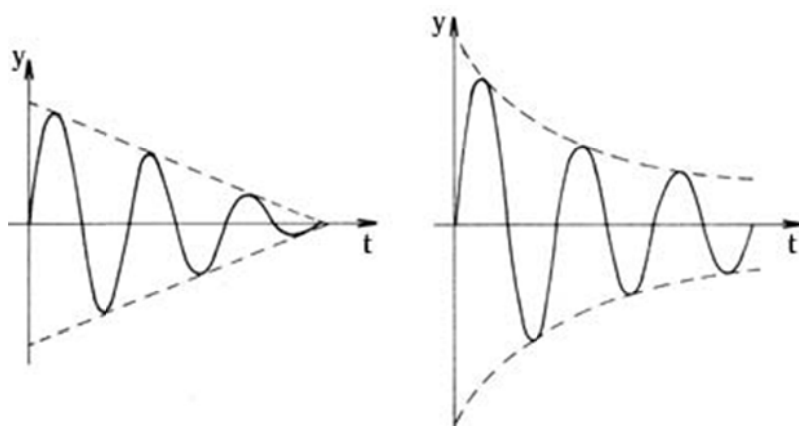
A csillapított rezgőmozgást leíró egyenlet megoldása nem túl nagy csillapítás esetén ($\beta < \omega_0$)

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega' t + \varphi_0),$$

ahol $\beta = \frac{k}{2m}$, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, ω_0 saját-körfrekvencia, A amplitúdó, φ_0 kezdőfázis.

Itt egy exponenciális és egy szinusz függvény szorzata adja a csillapított rezgőmozgást leíró függvényt.

Súrlódásos csillapítás esetén az amplitúdók egy egyenesre illeszkednek, míg közegellenállásos csillapításkor a maximum kitérés az idővel exponenciálisan csökken (5. ábra).



5. ábra. Súrlódásos és közegellenállásos csillapítás esetében a rezgőmozgás

Kidolgozott példák:

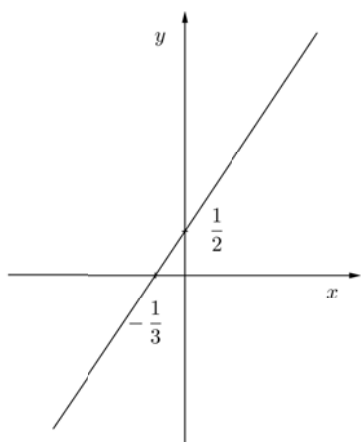
1. feladat: Ábrázolja az $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ függvényt.

Megoldás: Függvényábrázolásakor érdemes először az értelmezési tartományt megvizsgálni a tanult módon, s az ábrázolást követően pedig ellenőrizni, hogy az ábra valóban megfelel az értelmezési tartomány miatt tett kikötéseknek. Ebben az esetben a lineáris függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tenni, a függvény a teljes \mathbb{R} -en értelmezve van.

Az ábrázolás előtt egy átalakítást kell elvégezni

$$f(x) = \frac{3x+1}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Ebből az alakból már látható, hogy egy lineáris egyenes lesz a függvény képe. Az x együtthatója adja a meredekséget ($m = \frac{3}{2}$), és a konstans tag pedig, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt (y tengely menti eltolás pozitív irányba $\frac{1}{2}$ -el). Ezek alapján a függvényt a 6. ábra mutatja.

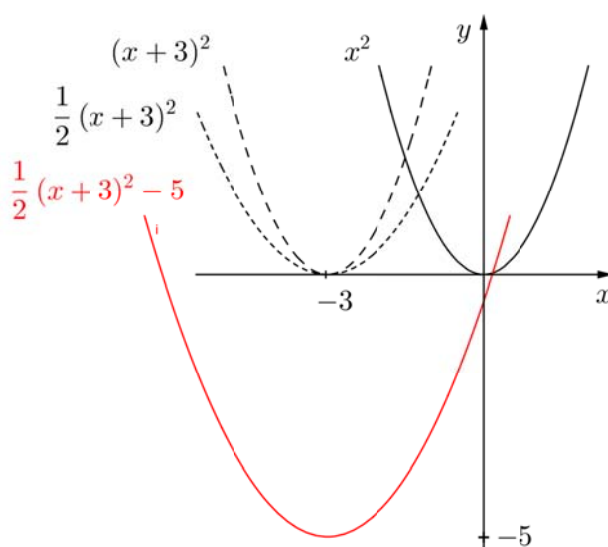


6. ábra. $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ függvény ábrája

2. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 5$ függvényt.

Megoldás: A másodfokú függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tenni, a függvény a teljes \mathbb{R} -en értelmezve van. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. x^2
2. $(x+3)^2$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 3-mal balra eltoljuk)
3. $\frac{1}{2}(x+3)^2$ (Az előző görbét az y tengely mentén felére zsugorítjuk)
4. $\frac{1}{2}(x+3)^2 - 5$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 5-tel eltoljuk) (7. ábra)



7. ábra. Függvény transzformáció több lépésben

3. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ függvényt.

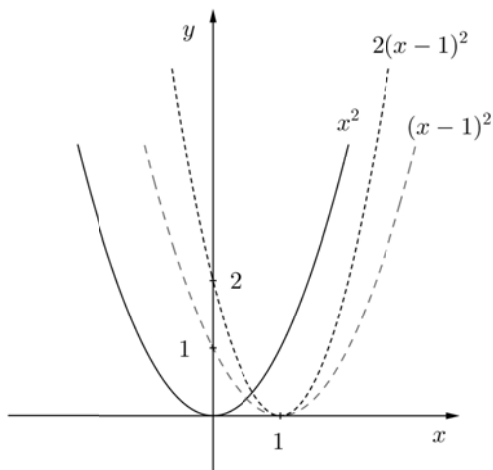
Megoldás: A másodfokú függvény értelmezési tartománya \mathbb{R} . Ez a másodfokú függvény az előző függvény felírásától abban különbözik, hogy nem olvashatóak le róla közvetlenül a függvény transzformációs lépések (a függvényben több helyen szerepel az x változó). Ehhez először teljes négyzetté kell alakítanunk:

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6 = -2(x^2 - 2x - 3) = -2((x-1)^2 - 4) = -2(x-1)^2 + 8$$

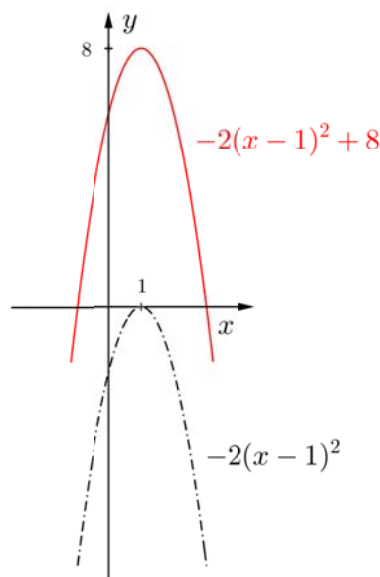
Ez alapján a függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. x^2
2. $(x-1)^2$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 1-el jobbra eltoljuk)
3. $2(x-1)^2$ (Az előző görbét az y tengely mentén kétszeresére nyújtjuk)
4. $-2(x-1)^2$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)

5. $-2(x-1)^2 + 8$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 8-al eltoljuk) (8-9. ábra)



8. ábra. Függvénytranszformáció első három lépése



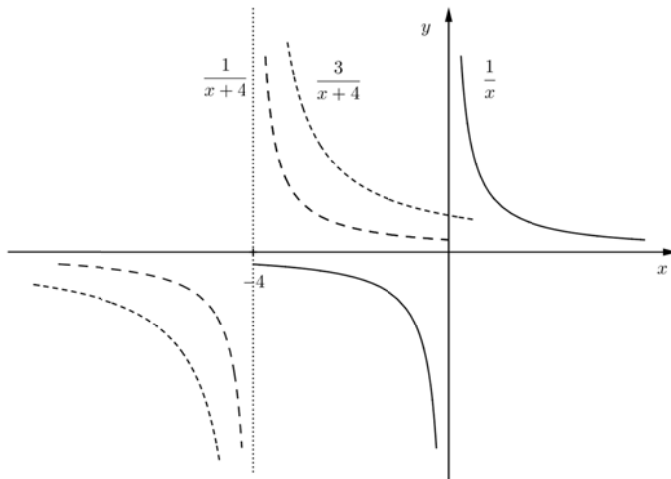
9. ábra. Függvénytranszformáció utolsó két lépése

4. feladat: Ábrázolja lineáris függvénytranszformációk segítségével az $f(x) = 2 - \frac{3}{x+4}$ függvényt, majd az ábráról olvassa le, hogy hol van a függvénynek aszimptotája.

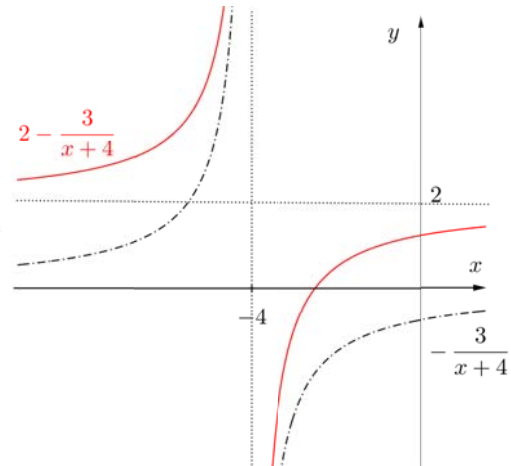
Megoldás: A törtfüggvény esetében a nevezőre kikötést kell tennünk, mégpedig a nevező nem lehet 0, azaz $x + 4 \neq 0$, amiből $x \neq -4$. Tehát az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\frac{1}{x}$
2. $\frac{1}{x+4}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 4-el balra eltoljuk)
3. $\frac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az y tengely mentén háromszorosára nyújtjuk)
4. $-\frac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)
5. $2 - \frac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 2-vel eltoljuk) (10-11. ábra)

Az 11. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban nincs az $x = -4$ -ben értelmezve, függőleges aszimptotája van ott. Valamint vízszintes aszimptotát látunk az $y = 2$ -ben.



10. ábra. Függvény transzformáció első három lépése



11. ábra. Függvény transzformáció utolsó két lépése

5. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ függvényt.

Megoldás: A törtfüggvény esetében a nevezőre itt is kikötést kell tennünk, mégpedig a nevező nem lehet 0, azaz $x - 3 \neq 0$, amiből $x \neq 3$. Tehát az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

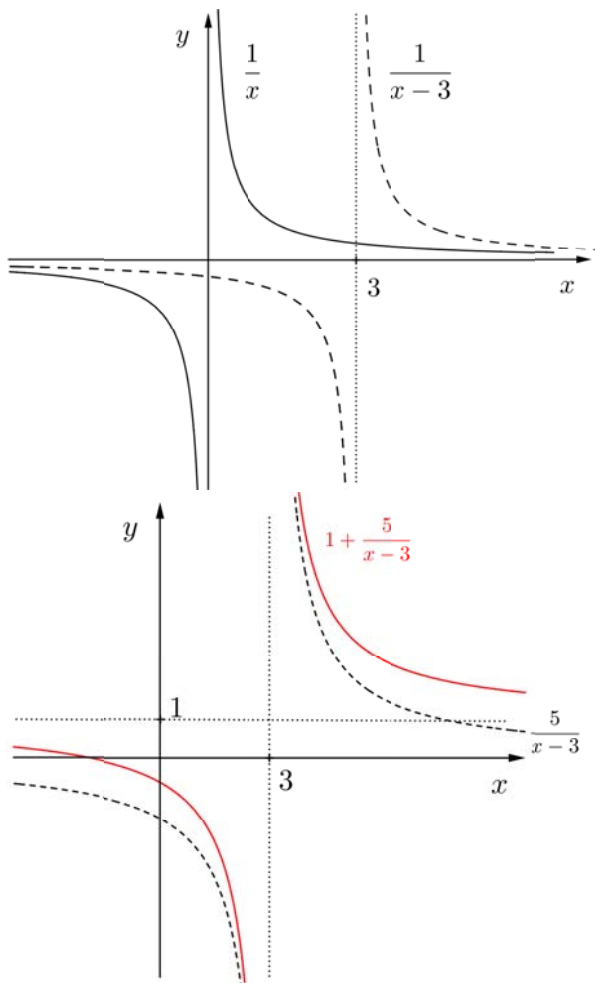
Ez a tört függvény az előző függvény felírásától abban különbözik, hogy nem olvashatóak le róla közvetlenül a függvény transzformációs lépések (a függvényben több helyen szerepel az x változó). Ehhez először a következő átalakításokra van szükség (a nevezőt kialakítjuk a számlálóban, majd egyszerűsítünk):

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = \frac{(x-3)+5}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}$$

Erről a felírásból már egyértelműen leolvashatóak a függvény transzformációs lépések, melyeket a következő sorrendben érdemes elvégezni:

1. $\frac{1}{x}$
2. $\frac{1}{x-3}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 3-al jobbra eltoljuk)
3. $\frac{5}{x-3}$ (Az előző görbét az y tengely mentén ötszörösére nyújtjuk)
4. $1 + \frac{5}{x-3}$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 1-el eltoljuk) (12-13. ábra)

A 13. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban nincs az $x = 3$ -ban értelmezve, függőleges aszimptotája van ott.



12. ábra. Függvény transzformáció első három lépése

13. ábra. Függvény transzformáció utolsó két lépése

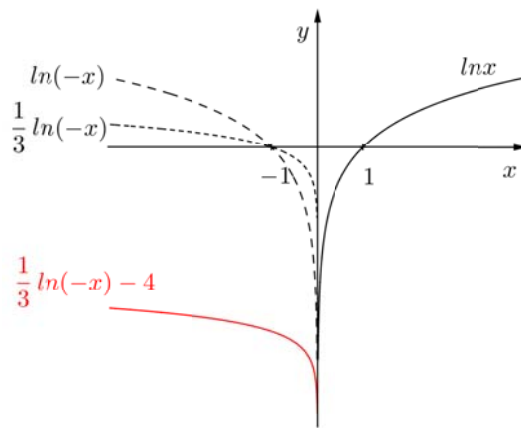
6. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \frac{1}{3}\ln(-x) - 4$ függvényt.

Megoldás: A logaritmus függvény argumentumára kikötést kell tennünk, mégpedig az argumentumnak 0-nál nagyobbak kell lennie, azaz $-x > 0$, amiből $x < 0$. Tehát az értelmezési tartomány $x \in (-\infty, 0)$.

A logaritmus függvény ábrázolásakor mindig meg kell néznünk a logaritmus alapját, mert az alap határozza meg a függvény monotonitását. Itt a logaritmus alapja e , ami 1-nél nagyobb ($e \approx 2,71$), így a logaritmus függvény ebben az esetben szigorúan monoton növekvő lesz. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\ln(x)$
2. $\ln(-x)$ (Az alapfüggvényt az y tengelyre tükrözzük)
3. $\frac{1}{3}\ln(-x)$ (Az előző görbét az y tengely mentén $\frac{1}{3}$ -szorosára zsugorítjuk)
4. $\frac{1}{3}\ln(-x) - 4$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 4-el eltoljuk) (14. ábra)

A 14. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban csak negatív értékekre van értelmezve, s az $x = 0$ -ban függőleges aszimptotája van.



14. ábra. Függvénytranszformáció több lépésben

7. feladat: Ábrázolja lineáris függvénytranszformációk segítségével az $f(x) = -5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 1$ függvényt. Hol metszi a függvény az y tengelyt?

Megoldás: Az exponenciális függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tennünk, így a függvény a teljes \mathbb{R} -en értelmezve van.

Az exponenciális függvény esetében is hasonlóan a logaritmus függvényhez mindig meg kell vizsgálnunk az alapot, mert az alap itt is meghatározza a függvény monotonitását. Ebben az esetben az exponenciális kifejezés alapja $\frac{1}{3}$, ami 1-nél kisebb, de 0-nál nagyobb, így az exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő lesz.

A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

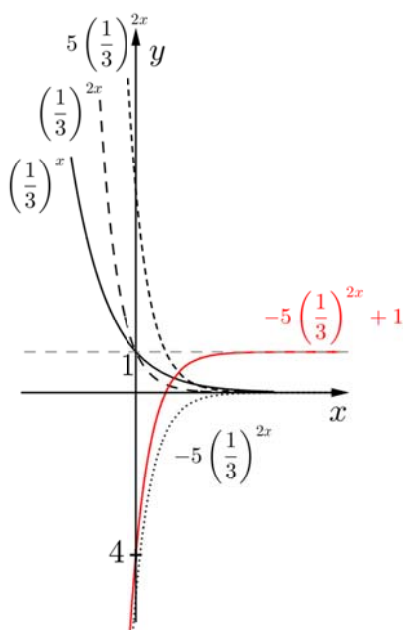
1. $\left(\frac{1}{3}\right)^x$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén felére zsugorítjuk)
3. $5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az előző görbét az y tengely mentén ötszörösére nyújtjuk)
4. $-5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)
5. $-5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 1$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 1-el eltoljuk) (15. ábra)

A 15. ábráról leolvasható, hogy a függvény az $y = -4$ -ben metszi az y tengelyünket. (Egyszerűen végiggondolható, hogy miért. Az alapfüggvény az $y = 1$ -ben metszi az y tengelyt. A 2. transzformációs lépés ezt a metszéspontot nem változtatja, míg a következő lépésben az ötszörösét kell venni, azaz felkerül a metszéspont az $y = 5$ -be. A tükrözés során $y = -5$ -be kerül, s az utolsó lépésben 1-et hozzáadva $y = -4$ -et kapunk.)

Egy lépéssel kevesebbet is végezhetünk volna, ha egy hatványazonosságot alkalmazunk az ábrázolás előtt, mégpedig

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^x.$$

Ezzel az átalakítással a második transzformációs lépés kihagyható, s alapfüggvényként az $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ kerül ábrázolásra, a többi lépés megegyezik az előzővel.



15. ábra. Függvény transzformáció több lépésben

8. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \sqrt{3x+6} + 5$ függvényt. Az ábráról olvassuk le a globális szélsőértéket.

Megoldás: A gyökfüggvény esetében a gyök alatti kifejezésnek nemnegatívnak kell lennie, azaz $3x + 6 \geq 0$, amiből $x \geq -2$. Tehát az értelmezési tartomány $x \in [-2, \infty)$.

Az ábrázolás előtt az argumentumon átalakítást kell végezni a következőképp

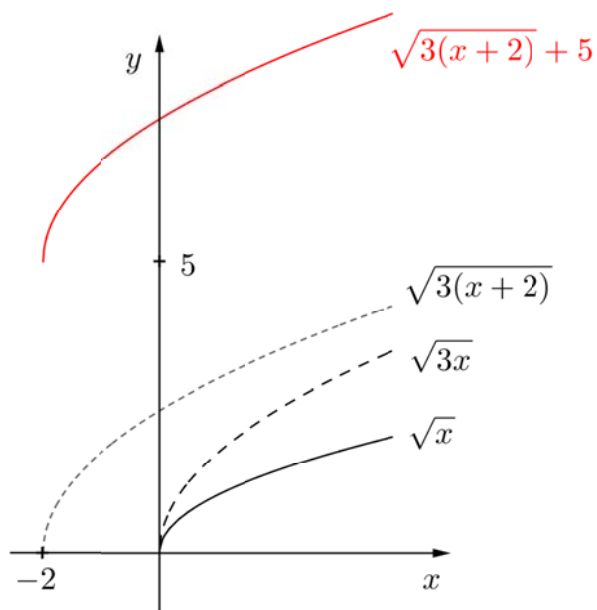
$$f(x) = \sqrt{3x+6} + 5 = \sqrt{3(x+2)} + 5$$

Ezt követően már leolvashatóak a függvény transzformációs lépések:

1. \sqrt{x}
2. $\sqrt{3x}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén harmadára zsugorítjuk)
3. $\sqrt{3(x+2)}$ (Az előző görbét az x tengely mentén 2-vel balra eltoljuk)
4. $\sqrt{3(x+2)} + 5$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 5-el eltoljuk)
(16. ábra)

A 16. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban csak az $x \geq -2$ értékekre van értelmezve.

A 16. ábráról leolvasható a globális minimum helye $x = -2$, értéke $y = 5$. (Egyszerűen végiggondolható, hogy miért. Az alapfüggvénynek az origóban van globális minimuma. Az első transzformációs lépés nem változtat ezen, a következő viszont eltolja balra 2-vel, azaz átkerül az $x = -2, y = 0$ -ba. Az utolsó transzformáció során a felfelé tolással az y értéke változik a minimumnak, így lesz a minimum helye $x = -2$, értéke $y = 5$.)



16. ábra. Függvény transzformáció több lépésben

9. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x + \pi) - 1$ függvényt.

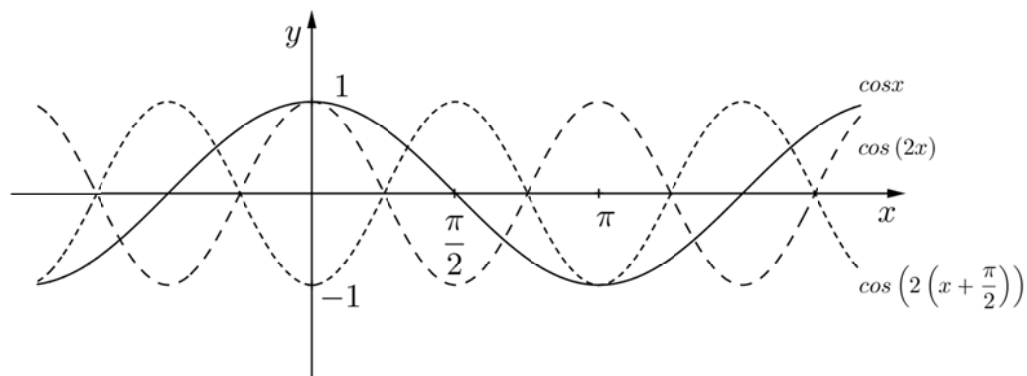
Megoldás: A koszinusz függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tennünk, így az értelmezési tartomány \mathbb{R} .

Az ábrázolás előtt itt is az argumentumon átalakítást kell végezni a következőképp

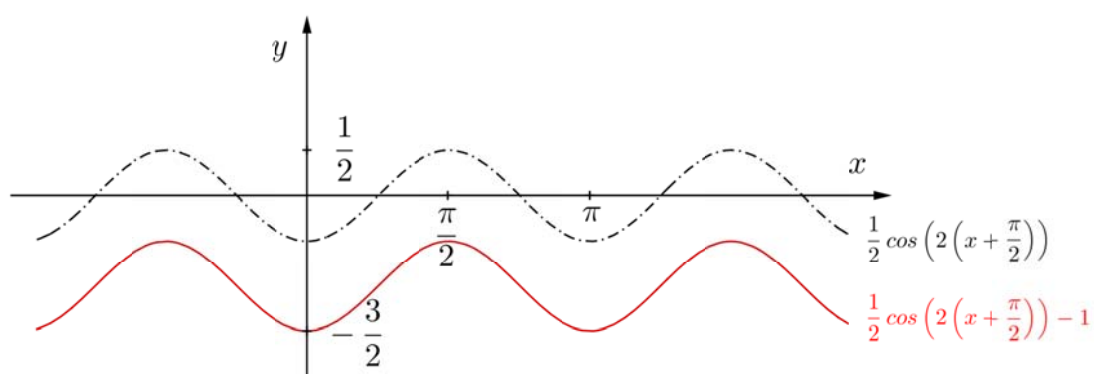
$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x + \pi) - 1 = \frac{1}{2}\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1$$

A függvényt ilyen alakban már a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\cos x$
2. $\cos 2x$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén felére zsugorítjuk)
3. $\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (Az előző görbét az x tengely mentén $\frac{\pi}{2}$ -vel balra eltoljuk)
4. $\frac{1}{2}\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (Az előző görbét az y tengely mentén felére zsugorítjuk)
5. $\frac{1}{2}\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 1-el eltoljuk) (17-18. ábra)



17. ábra. Függvény transzformáció első három lépése



18. ábra. Függvény transzformáció utolsó két lépése