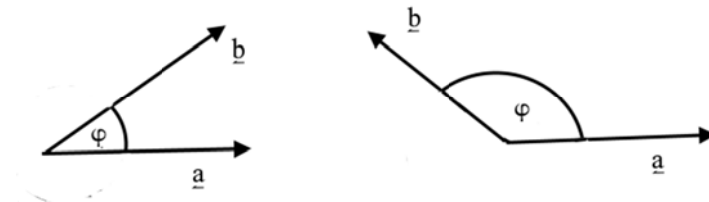


1.2. Vektorok szorzatai

Skaláris szorzat

Gyakran szükségünk van arra, hogy ismerjük egy testre ható **F** erőnek a mozgás irányába eső összetevőjét. Megmutatjuk, hogyan lehet egyszerűen kiszámítani két vektor által közbezárt szöget. A számítás kulcsa a *skalárszorzatnak* nevezett kifejezés, amit *belső szorzatként* vagy *skaláris szorzatként* is emlegetnek. Azért beszélünk skalárszorzatról, mert az eredmény egy skalár (valós szám), nem pedig vektor. A skalárszorzat segítségével ki tudjuk számítani egy vektor másik vektorra vonatkozó vetületét és valamely állandó erő által az elmozdulás irányában végzett munkát is.

Definíció: Két egyállású vektor esetében ha a vektorok egyirányúak, akkor hajlásszögük 0° , ha pedig ellentétes irányúak, akkor hajlásszögük 180° . Nem egyállású vektorok esetén a vektorok hajlásszögén a közös pontból kiinduló vektorok által bezárt konvex szöget értjük.



Definíció: Tetszőleges **a** és **b** vektor skaláris szorzatán az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi$ mennyiséget értjük, ahol φ a két vektor által közbezárt szög.

A skaláris szorzat tulajdonságai:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$$

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Definíció: ha két vektor merőleges egymásra, akkor ezeket ortogonális vektoroknak nevezzük.

Tétel: Két vektor hegyesszöget zár be egymással akkor és csak akkor, ha skaláris szorzatuk pozitív. Két vektor tompaszöget zár be egymással akkor és csak akkor, ha skaláris szorzatuk negatív.

A skaláris szorzat egyik fontos alkalmazási területe: adott **a** és **b** vektorok esetén az **a** vektort egyértelműen fel tudjuk bontani **b**-vel párhuzamos és **b**-re merőleges összetevőkre.

Tétel: Legyen adott **a** és **b** vektor, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ekkor az **a** vektor **b** irányába eső merőleges vetületvektora (az **a** vektor **b**-vel párhuzamos összetevője):

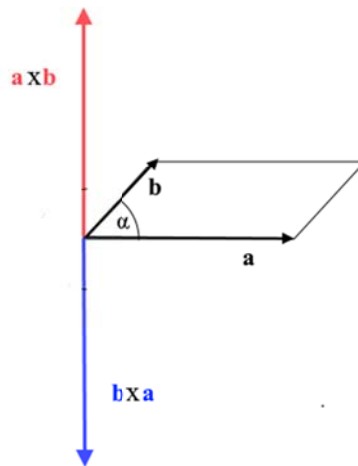
$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$$

Vektoriális szorzat

Két vektor esetében értelmezhetünk egy másféle szorzási műveletet is. Ennek a szorzásnak az eredménye egy új vektor, az elnevezése pedig vektoriális szorzat lesz.

A vektoriális szorzat fogalmát széleskörűen alkalmazzák az elektromosság, mágnesesség, az áramlástan és az égi mechanika jelenségeinek leírásában.

Definíció: Adott **a** és **b** vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges **a**-ra és **b**-re, hossza $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi$, ahol φ az **a** és **b** vektorok által bezárt szög, és **a**, **b**, **a x b** ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.



A vektoriális szorzat tulajdonságai:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

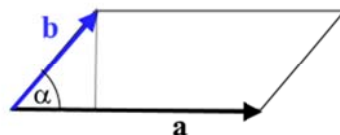
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Tétel: Adott **a** és **b** nem nullvektorok esetén a vektoriális szorzatuk akkor és csak akkor nullvektor, ha a két vektor egymással párhuzamos.

Tétel: Adott **a** és **b** nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám.



$$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$

Tétel: Adott \mathbf{a} és \mathbf{b} nem nullvektorok által kifeszített háromszög területe éppen az $\frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{2}$ pozitív valós szám.

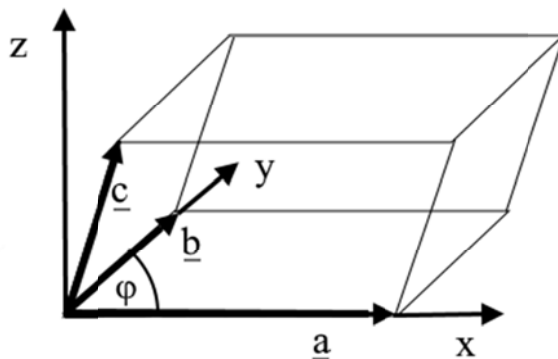
Vegyesszorzat

A vegyesszorzat elnevezés arra utal, hogy ennek kiszámításánál mindkét vektorszorzás műveletre szükségünk lesz.

Definíció: Adott \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} nem nullvektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ valós számot értjük.

Tétel: Az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok akkor és csak akkor egysíkúak, ha $\mathbf{abc}=0$. Ha a vegyesszorzat nem nulla, akkor annak abszolút értéke az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített paralelepipedon V_p térfogatát adja:

$$V_p = |\mathbf{abc}|.$$



Az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített tetraéder V_t térfogata:

$$V_t = \frac{|\mathbf{abc}|}{6}.$$

1. feladat: Legyen \mathbf{a} és \mathbf{b} két olyan vektor, melyek hajlásszög $\frac{\pi}{6}$, valamint $\|\mathbf{a}\| = 5$ és

$\|\mathbf{b}\| = 4$. Számolja ki az alábbi skaláris szorzatok értékét:

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- \mathbf{a}^2
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$
- $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$
- $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$

Megoldás

$$a) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \mathbf{a}^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| \cos 0^\circ = 5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} + \|\mathbf{b}\|^2 = 25 + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \approx 74,64. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 &= \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} + \|\mathbf{b}\|^2 = 25 - 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \approx 5,36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) &= \langle 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} \rangle = 3\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 6\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - 4\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= 3\|\mathbf{a}\|^2 + 4\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} - 4\|\mathbf{b}\|^2 = 75 + 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 64 \approx 80,28 \end{aligned}$$

2. feladat: Határozzuk meg az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok szögét, ha $\|\mathbf{a}\| = 5$, $\|\mathbf{b}\| = 4$ és $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -50$.

Megoldás

A skaláris szorzat definíciója szerint: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \varphi$, ahol φ a két vektor által bezárt szög. Innen:

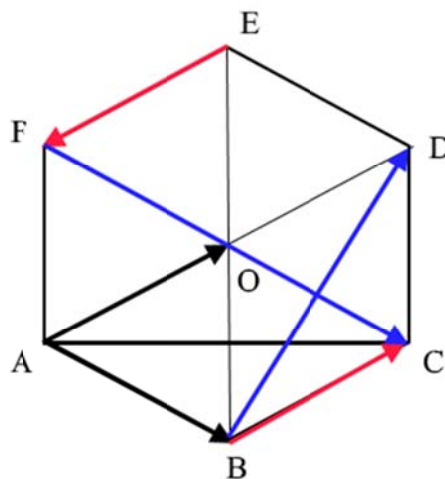
$$\cos \varphi = \frac{-10}{5 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \varphi = 120^\circ.$$

3. feladat: Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza 10, a hatszög középpontja O . Számítsa ki a következő skaláris szorzatokat:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \rangle, \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle, \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF} \rangle, \langle \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{BD} \rangle, \langle \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{EF} \rangle.$$

Megoldás

Rajzoljuk fel a szabályos hatszöget.



$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \rangle = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50.$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 10 \cdot 10 \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 100 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 150.$$

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF} \rangle = 10 \cdot 10 \cdot \cos 180^\circ = -100.$$

$$\langle \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 20 \cdot 10\sqrt{3} \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$\langle \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{EF} \rangle = 20 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ = 200 \cdot (-0,5) = -100.$$

4. feladat: Mekkora az **a** és **b** egységvektorok szöge, ha $\langle \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = 0,5$.

Megoldás

Az egyenlet bal oldalán végezzük el a műveleteket és használjuk ki az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 = 1$ és $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\|^2 = 1$ összefüggést:

$$\langle \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 1\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - 4\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 2 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + 2 = 4 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Eszerint:

$$4 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0,5 \rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{3,5}{5} \rightarrow \varphi = 45,57^\circ.$$

5. feladat: Határozzuk meg az **a** és **b** vektorok által kifeszített paralelogramma területét, ha a két vektor egymással 30° -os szöget zár be és $\|\mathbf{a}\| = 5$ valamint $\|\mathbf{b}\| = 10$!

Megoldás

Tudjuk, hogy az **a** és **b** nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám, azaz

$$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi = 5 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 25.$$

6. feladat: Tekintsük az **i**, **j**, **k** egységvektorokat. Milyen eredményt ad a $(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$ művelet?

Megoldás

A keresett művelet eredménye egy vektor lesz, mivel két vektoriális szorzatot kell egymás után elvégezni. Tudjuk, hogy a vektoriális szorzat eredménye egy vektor, így ezt kétszer egymás után elvégezve is egy vektort kapunk. Ha a jobbsodrású koordináta rendszerre gondolunk, akkor tudjuk, hogy

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{k}$$

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = -(-\mathbf{i}) = \mathbf{i}.$$

7. feladat: Tekintsük az $ABCDEF$ szabályos hatszöget, melynek oldaléle 15 cm hosszú. Mivel egyenlő az \overrightarrow{ABBCCD} ?

Megoldás

Tudott, hogy az \overrightarrow{ABBCCD} vegyesszorzat abszolút értéke az \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} és \overrightarrow{CD} vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát adja meg. Ebben az esetben, mivel ezek a vektorok egy szabályos hatszög oldal vektorai, ezért ezek egy síkban vannak. Ha a vektorok egy síkban vannak, akkor nem feszítenek ki testet, tehát a vegyesszorzat értéke nulla.

Eszerint:

$$\overrightarrow{ABBCCD} = 0.$$