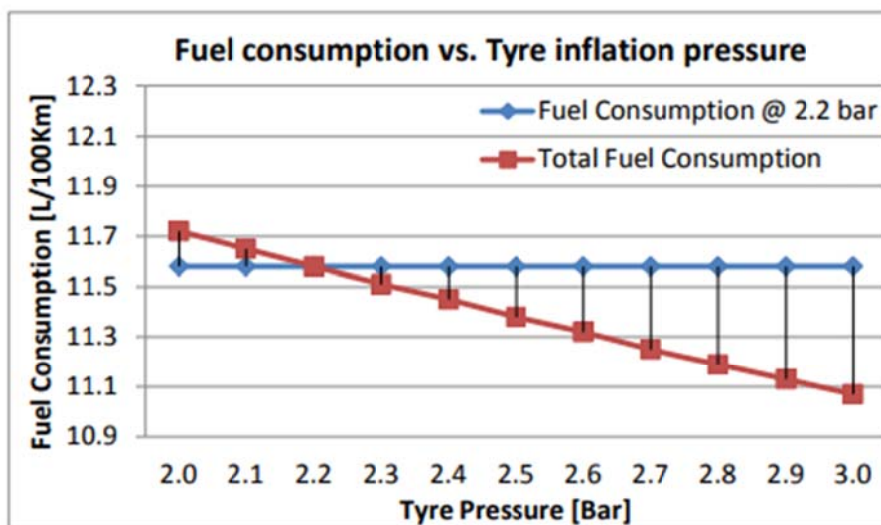


Elméleti összefoglaló

A mérnöki munka során gyakran hallunk olyan állításokat, hogy egy változó függvénye egy másik változónak. Például egy jármű maximális sebessége függ a motor maximális teljesítményétől, függ az út meredekségétől, a jármű frontális keresztmetszetétől, vagy éppen a jármű fogyasztása függ a guminyomástól. Két változó közötti összefüggés többféleképpen is megadható, csak néhányat említve diagrammal, táblázattal, grafikonnal, formulával.

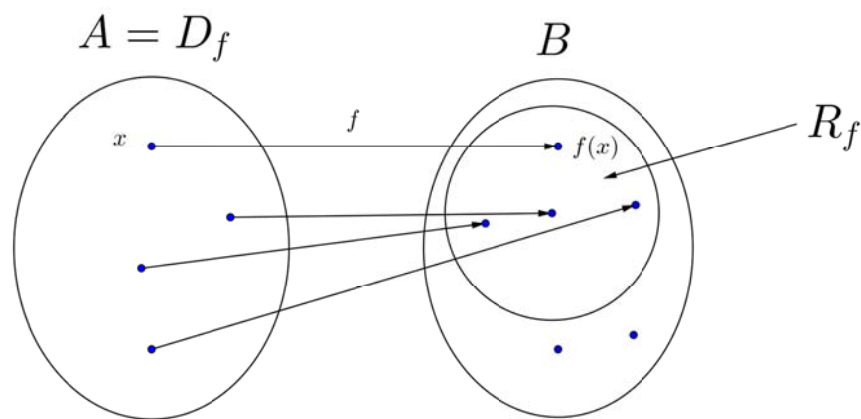
Észrevehetjük, hogy a fenti példákban a változóink egy-egy adott tartományból (halmazból) kerülnek ki. Például ha egy jármű fogyasztását vizsgáljuk a guminyomás függvényében, akkor a guminyomást 1,5 és 3 bar között érdemes vizsgálni, mivel alacsonyabb és magasabb érték túlzott kopáshoz vezet és csökken a gumi élettartama (1. ábra).



1. ábra. A fogyasztás változása a guminyomás függvényében

Nézzük a fenti függési viszonyok matematikai általánosítását.

Definíció: Legyen A és B két nem üres halmaz. Ha az A halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük a B halmaz egy-egy elemét, akkor az A halmazon egy **függvényt** értelmeztünk. Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya**, a B halmaz pedig a függvény **képhalmaza**. B -nek azon elemei, amelyek a hozzárendelésben részt vesznek, a függvény **értékkészletét** alkotják. Tehát az értékkészlet a képhalmaz része. Jelölés: az f függvény értelmezési tartománya D_f , az f függvény értékkészlete R_f (2. ábra).



2. ábra. Függvény értelmezési tartománya, képhalmaza, értékkészlete

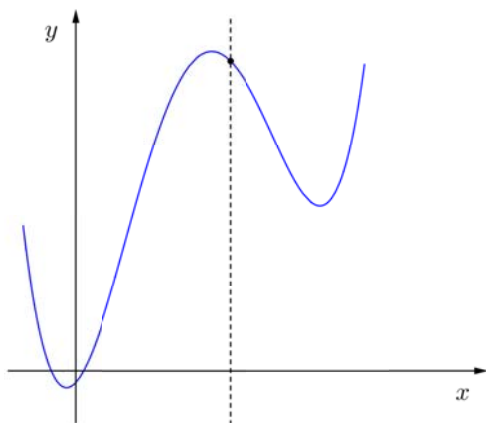
Definíció: Ha a függvényt f jelöli és $x \in A$, akkor az x -hez rendelt B -beli elemet $f(x)$ -el jelöljük, amit az f függvény x helyhez tartozó **helyettesítési értékének** nevezzük.

Definíció: Az x változó neve **független változó** (vagy argumentum), az $f(x)$ neve pedig **függő változó**, amit szokás $y = f(x)$ -el is jelölni.

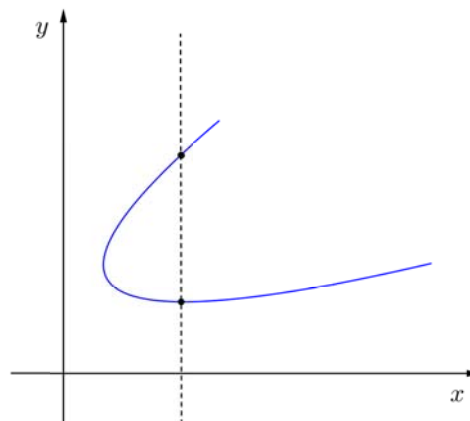
Definíció: Azokat a függvényeket, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is valós számokból áll, **egyváltozós valós függvényeknek** nevezzük.

Definíció: A $P(x, f(x)), x \in D_f$ pontok halmazát az f függvény **grafikonjának** nevezzük, ahol x végigfutja az f értelmezési tartományát.

A grafikonok rengeteg különböző alakot ölthetnek, de fontos megjegyezni, hogy nem minden síkgörbe függvény grafikonja. Egy függvény az értelmezési tartományának tetszőleges pontjához csak egyetlen y értéket rendel. Ez a tulajdonság könnyen ellenőrizhető, mivel a függvény grafikonát az x tengely bármely pontján átmenő függőleges egyenes legfeljebb egy pontban metszi (3-4. ábra).



3. ábra. Ez a görbe függvénygrafikon



4. ábra. Ez a görbe nem függvénygrafikon

A mérnöki munka során gyakori feladat, hogy mérési eredményekből az adott folyamatot jól leíró, képességgel is megadható függvényt határozzunk meg.

A függvények ábrázolásakor sokszor elegendő egy jelleggörbe megrajzolása, mely egyértelműen mutatja a függvény előjelviszonyait (az értelmezési tartomány mely részein halad a függvény az x tengely alatt és felett), a zérushelyeket, a szakadási helyek és a végtelen(ek) környezetében való viselkedését.

Egy függvény megadásához meg kell adni az értelmezési tartományt, a képhalmazt és a hozzárendelési szabályt, melynek segítségével minden $x \in A$ elemhez meghatározható a hozzátartozó $f(x) \in B$ elem. Általában a hozzárendelési szabályt képlettel adjuk meg.

Például: $f(x) = \sqrt{x+4}$

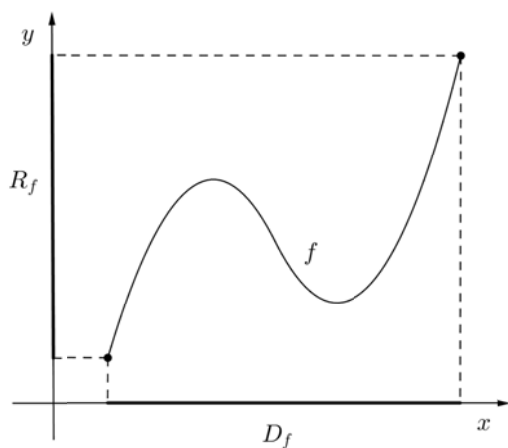
A gyakorlatban nem mindig adjuk meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet. Ilyenkor azon x számok halmazát értjük az értelmezési tartomány alatt, amelyekre a hozzárendelési utasítás elvégezhető, illetve azon y értékek halmazát értjük értékkészlet alatt, amelyek egy-egy x számhoz tartoznak.

Ebből kifolyólag, ha nem adunk meg értelmezési tartományt a lineáris függvény, hatványfüggvény, exponenciális függvény, szinusz függvény, koszinusz függvény esetén, akkor a legbővebb halmaz, melyen ezek a függvények értelmezve vannak a valós számok halmaza (\mathbb{R}).

Azonban néhány függvény esetében nem minden valós számra végezhető el a hozzárendelési utasítás. Ide tartozik a páros pozitív egész kitevőjű gyökfüggvény, a valós törtfüggvény és a logaritmus függvény. Vegyük sorra, hogy melyik függvény esetében milyen kikötést kell tenni.

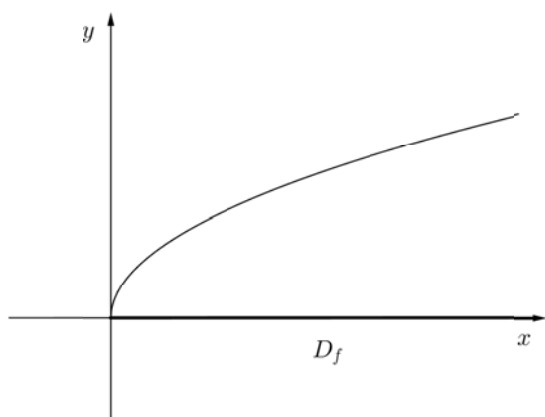
- a) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, ahol n páros pozitív egész
Negatív számokból nem tudunk gyököt vonni a valós számok halmazán (csak komplex számok körében, ahogy az előző leckékben láttuk), így az argumentum nagyobb egyenlő, mint 0, azaz $x \geq 0$.
- b) $f(x) = \log_a x$, ahol $a \neq 1$, $a > 0$
0-nál nagyobb számoknak van csak logaritmusa, azaz a kikötés $x > 0$.
- c) $f(x) = \frac{1}{x}$
Egy tört nevezője nem lehet 0, mivel 0-val nem tudunk osztani, azaz a kikötés $x \neq 0$.

Vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány és az értékkészlet fogalmát szemléletesen a függvények ábrájához kapcsolódóan. A függvények ábrájáról az értelmezési tartományt az x tengelyről, míg az értékkészletet az y tengelyről olvassuk le.

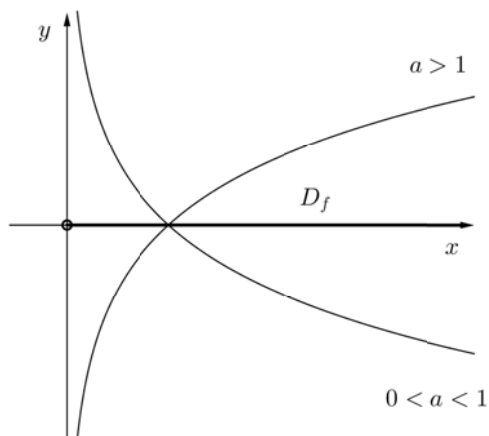


5. ábra. Az értelmezési tartomány és értékkészlet leolvasása a tengelyekről

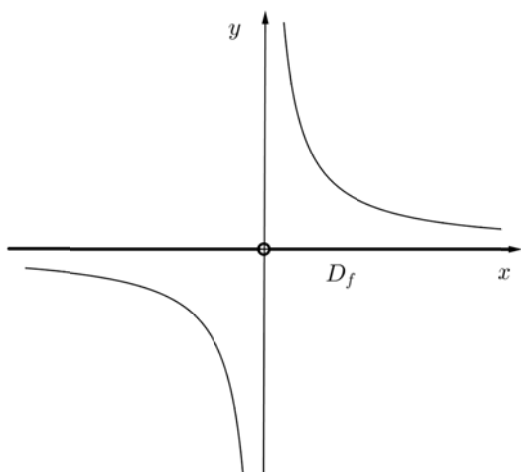
A függvények értelmezési tartományának meghatározásakor láttuk, hogy mely függvények esetében milyen kikötést kell tennünk. Nézzük meg most ezen függvények ábráját, s ez alapján is olvassuk le az értelmezési tartományt az x tengelyről.



6. ábra. Gyök függvény értelmezési tartománya



7. ábra. Logaritmus függvény értelmezési



8. ábra. Tört függvény értelmezési tartománya

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: A függvény hozzárendelési utasítása egy tört. Tudjuk, hogy egy tört nevezője nem lehet nulla. Most tehát a valós számok közül azokat kell kizárni az értelmezési tartományból, amelyekre a nevező nulla. Megoldjuk tehát az

$$x^2 + x = 0$$

egyenletet. Használhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét, vagy az $x(x+1) = 0$ szorzatra bontást.

Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azt kapjuk, hogy egyenletünk két megoldása: $x_1 = -1$ és $x_2 = 0$.

Ebből a két számból álló halmazt kell tehát a valós számok halmazából kivonni. Így az f függvény D_f -el jelölt értelmezési tartománya:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty).$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Négyzetgyököt a valós számok körében csak nemnegatív számból vonhatunk. Ezért az a feltétel, hogy

$$x^2 - x - 2 \geq 0.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldáshalmaza adja az értelmezési tartományt.

A másodfokú egyenlőtlenség megoldását a következőképp kaphatjuk meg. Először megoldjuk az

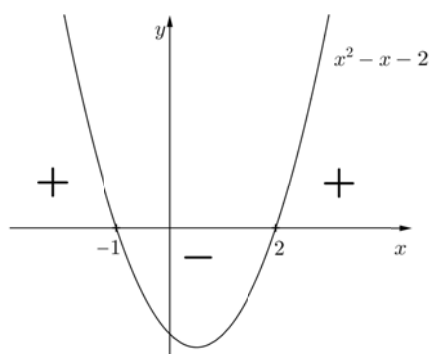
$$x^2 - x - 2 = 0$$

egyenletet. Szorzatra bontva a másodfokú kifejezést

$$(x+1)(x-2) = 0,$$

a két gyök tehát $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. Persze a megoldóképletet is használhattuk volna.

A másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, így grafikonja egy felfelé nyíló parabola, tehát a kifejezés a két gyökén kívül pozitív, és a két gyöke között negatív (9. ábra). Az értelmezési tartományt úgy kapjuk meg, hogy a valós számok közül elhagyjuk azokat, ahol a másodfokú kifejezés negatív, azaz a $(-1, 2)$ nyílt intervallum pontjait.



9. ábra

Ezek alapján

$$D_f = \mathbb{R} \setminus (-1, 2) = (-\infty, -1] \cup [2, \infty).$$

Figyeljünk a zárójelekre! Az előző feladatban a valós számok halmazából egy kételemű halmazt vontunk ki, ezért használtunk ott kapcsos zárójelet. A mostani feladatban egy nyílt intervallum összes elemét kellett elhagyni a valós számok halmazából.

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 2x + 1)}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Most két dolog jelent korlátozást. Az első az, hogy logaritmusát csak pozitív számnak vehetjük, tehát teljesülnie kell az

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$

egyenlőtlenségnek.

A második az, hogy a nevezőben nem állhat nulla.

Az értelmezési tartományt tehát úgy kapjuk meg, hogy a fenti egyenlőtlenség megoldáshalmazából elhagyjuk a nevező gyökhelyeit.

Megoldjuk az $x^2 - 2x + 1 > 0$ egyenlőtlenséget. Mivel $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, a másodfokú kifejezés minden 1-től különböző szám esetén pozitív (grafikonja egy felfelé nyíló parabola, zérushelye $x = 1$ -ben). Tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza

$$H_1 = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

A második feltételnek megfelelően $\ln(x^2 - 2x + 1) \neq 0$. Mivel a logaritmus függvény csak 1-ben nulla, a nevező akkor lesz nulla, ha

$$x^2 - 2x + 1 = 1,$$

azaz, ha

$$x^2 - 2x = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a két megoldása $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$. Ezt a két számot kell tehát még elhagyni a H_1 halmazból.

Ezek alapján végül is

$$D_f = H_1 \setminus \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty).$$

4. feladat: Mi az értelmezési tartománya az $f(x) = \sqrt{2-x} + \ln(x-1)$ függvénynek?

Megoldás: Nyilván értelmesnek kell lenni külön a gyökös és külön a logaritmikus kifejezésnek is.

Jelölje H_1 azt a halmazt, ahol a gyökös kifejezés értelmes, H_2 azt a részhalmazt, ahol a logaritmikus kifejezés értelmes.

A D_f ennek a két halmaznak a metszete.

Meghatározzuk először H_1 -et. Az a feltétel, hogy

$$2 - x \geq 0,$$

azaz $x \leq 2$ legyen. Ez alapján

$$H_1 = (-\infty, 2].$$

H_2 esetén az a feltétel, hogy

$$x - 1 > 0,$$

azaz $x > 1$ legyen. Ebből

$$H_2 = (1, \infty).$$

Ennek a két halmaznak a metszetéből kapjuk, hogy

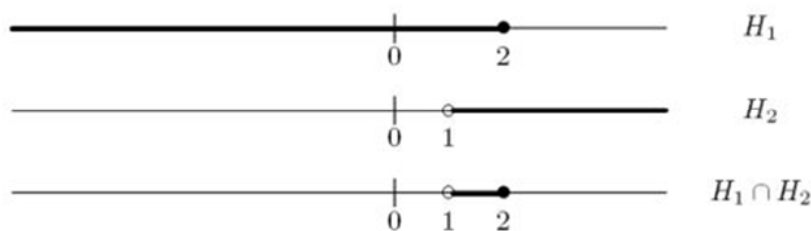
$$D_f = (1, 2].$$

Egyváltozós függvények értelmezési tartományát gyakran valós számok részhalmazainak metszeteként, vagy uniójaként kapjuk meg. Metszetet használunk abban az esetben, ha egyik és másik feltételnek is egyszerre kell teljesülnie. Uniót használunk olyankor, mikor az egyik vagy a másik feltétel teljesül.

A valós számok részhalmazai ábrázolhatók a valós számegyenesen. Az ilyen részhalmazok metszeteit és unióit, különösen, ha azok tagjai több darabból állnak, grafikusan célszerű meghatározni a következő módon. A metszet, vagy unió minden tagját feltüntetjük egy valós számegyenesen, úgy, hogy a halmazhoz tartozó pontokat megvastagítjuk. Ezeket egymás alá rajzoljuk, úgy, hogy a origók egy függőleges vonalban legyenek. Az egységet is mindegyik ábrán ugyanakkorának választjuk. Az üres kör azt jelzi, hogy az a szám nincs a halmazban, a teli kör azt, hogy benne van.

Ezután a metszetet úgy kapjuk, hogy legalul felvesszünk még egy számegyenest, ügyelve arra, hogy az origója és az egysége a fentiek alá essen, és azon megjelöljük azokat a pontokat, amelyek mindegyik számegyenesen meg voltak jelölve. Az uniónál azokat a pontokat kell a legalsó számegyenesen megjelölni, amelyek valamelyik fent meg voltak jelölve.

A feladatunk esetében ezt mutatja az alábbi ábra.



5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Annak kell teljesülni, hogy

$$\frac{x-2}{x+1} \geq 0.$$

Ez akkor igaz, ha a tört értéke nulla, ami a valós számok egy H_1 részhalmazán teljesül, vagy ha a tört értéke pozitív, ami egy H_2 részhalmazon teljesül. Most ennek a két halmaznak az uniója adja a D_f -et.

Kezdjük H_1 meghatározásával.

Egy tört akkor nulla, ha a számlálója nulla, és a nevező pedig értelmes. Az $x - 2 = 0$ feltétel teljesül, ha $x = 2$. Mivel 2-ben a nevező nem nulla, így ez a tört egyetlen zérushelye, vagyis

$$H_1 = \{2\}.$$

Rátérünk H_2 meghatározására.

Egy tört két esetben pozitív. Ha mind a számláló, mind a nevező pozitív, ez egy H'_2 halmaz pontjaiban teljesül, vagy ha mind a számláló, mind a nevező negatív, ez egy H''_2 pontjaiban teljesül. Ezek uniója adja H_2 -t.

Meghatározzuk először H'_2 -t. Annak kell teljesülni, hogy

$$x - 2 > 0,$$

$$\text{azaz } x > 2,$$

és

$$x + 1 > 0,$$

$$\text{azaz } x > -1.$$

Ez a két egyenlőtlenség egyszerre az $x > 2$ számokra teljesül, tehát

$$H'_2 = (2, \infty).$$

H''_2 esetén annak kell teljesülni, hogy

$$x - 2 < 0,$$

$$\text{azaz } x < 2,$$

és $x + 1 < 0$,

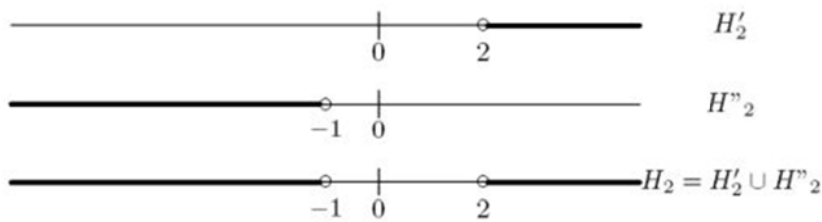
azaz $x < -1$.

Ez a két egyenlőtlenség egyszerre az $x < -1$ számokra teljesül, vagyis

$$H_2'' = (-\infty, -1).$$

Ezeket felhasználva, amint az az alábbi ábráról is leolvasható

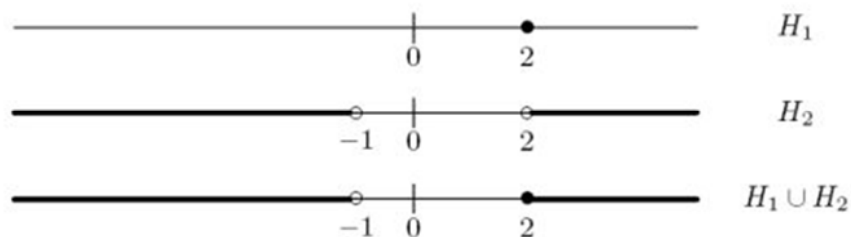
$$H_2 = H_2' \cup H_2'' = (-\infty, -1) \cup (2, \infty).$$



Végül is

$$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -1) \cup [2, \infty).$$

Az D_f grafikus előállítása szerepel a következő ábrán.



6. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: A logaritmus argumentumára vonatkozó kikötés alapján teljesül az

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} > 0$$

egyenlőtlenség.

Egy tört két esetben pozitív. Ha mind a számláló, mind a nevező pozitív, vagy ha mind a kettő negatív.

Bevezetjük a következő jelöléseket.

$\frac{+}{+}$		$\frac{-}{-}$	
H_1 -el jelöljük azt a halmazt, ahol a számláló és a nevező is pozitív.		H_2 -vel azt a halmazt, ahol mindkettő negatív.	
H'_1 jelölje azt a halmazt, ahol a számláló pozitív.	H''_1 az a halmaz, ahol a nevező pozitív.	H'_2 az a halmaz, ahol a számláló negatív.	H''_2 az a halmaz, ahol a nevező negatív.
Ezek metszete $H_1 = H'_1 \cap H''_1$.		Ezek metszete $H_2 = H'_2 \cap H''_2$	
Ezek uniója adja az értelmezési tartományt.			
$D_f = H_1 \cup H_2$			

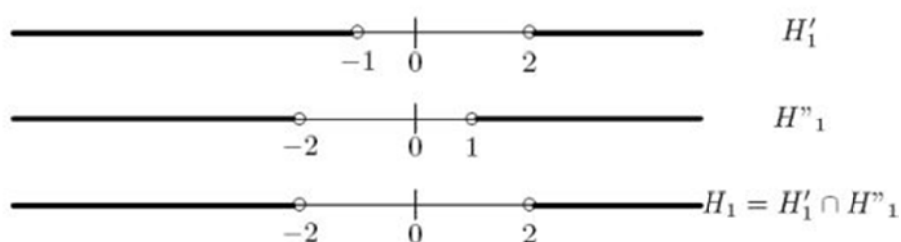
Kezdjük H_1 meghatározásával.

Mivel a számláló és a nevező képe is felfelé nyíló parabola, ezek a gyökeiken kívül pozitívak, és a gyökeik között negatívak.

Egyenlővé téve a számlálót is és a nevezőt is nullával, és megoldva az egyenleteket, azt kapjuk, hogy a számláló gyökei -1 és 2, a nevező gyökei pedig -2 és 1.

A lenti ábráról leolvashatjuk, hogy

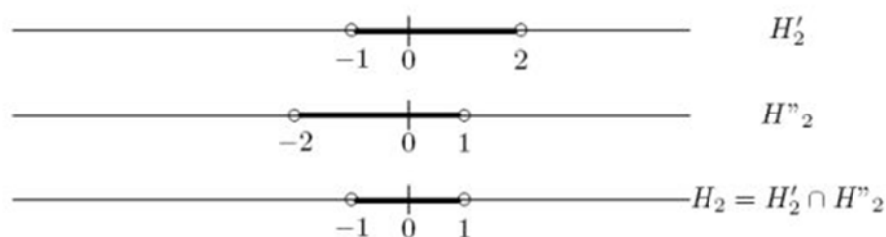
$$H_1 = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$



Térjünk rá H_2 meghatározására.

Mivel a számláló és a nevező képe is felfelé nyíló parabola, ezért gyökeik között negatívak (Láttuk, hogy a számláló gyökei -1 és 2, a nevező gyökei pedig -2 és 1). A lenti ábra alapján meghatározható a metszet.

$$H_2 = (-1, 1).$$



Végül, az uniót is grafikusan meghatározva, az alábbi ábrából kapjuk, hogy

$$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty).$$

