

További kidolgozott feladatok:

11. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ függvényt!

Megoldás: Amikor egy függvényt valamilyen szempontból vizsgálunk, akkor elsőként mindig az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Jelen esetben ki kell kötnünk, hogy a nevező nem lehet 0, s ebből az következik, hogy $x \neq -1$. A függvény értelmezési tartománya tehát:
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

A monotonitás vizsgálata azt jelenti, hogy meghatározzuk, hol nő, hol csökken a függvény. Ehhez elő kell állítanunk a függvény deriváltját. Alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1)^2 - x^2 \cdot 2(x+1)}{((x+1)^2)^2}$$

Ez ilyen formában nagyon csúnyán néz ki, ezért próbáljunk alakítani rajta. Emeljünk ki a számlálóban, amit csak lehet, a nevezőt pedig írjuk egyetlen hatványként.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)[(x+1) - x]}{(x+1)^4}$$

Ezután egyszerűsítsünk, és a szögletes zárójelen belül vonjunk össze.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^3}$$

A derivált minél egyszerűbb alakra hozása azért fontos, mert ezután meg kell oldanunk az $f'(x) = 0$ egyenletet, valamint vizsgálnunk kell majd a derivált előjelét. Ha a derivált bonyolult alakban van felírva, akkor mind az egyenlet megoldása, mind az előjel vizsgálata nehézségekbe ütközik. Általában elmondhatjuk, hogy ha lehetőség van kiemelésre, akkor ezzel a lehetőséggel élni kell, s törtek esetében egyszerűsítsünk, ha erre lehetőség van. Most oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet, hogy megkapjuk, hol lehet szélsőértéke a függvénynek.

$$\frac{2x}{(x+1)^3} = 0$$

Tört csak úgy lehet egyenlő 0-val, ha számlálója 0, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ezután a szokásos módon táblázatot készíthetünk. Elsőként csak az első sort töltjük ki, melyben feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit, melyeken belül már nem változik a derivált előjele. Az értelmezési tartományt a derivált zérushelye és az értelmezési tartományban levő szakadás bontja részekre. A szakadási hely oszlopában X-ekkel jelölhetjük, hogy ott a függvény nem értelmezett.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$		X			
$f(x)$		X			

Most vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes részekben. A derivált tört, így külön vizsgálhatjuk a számláló és a nevező előjelét, amiből következtethetünk a tört előjelére.

Ha $x < -1$, akkor a számláló, azaz $2x$ negatív, és a nevező, azaz $(x+1)^3$ is negatív, így a derivált ekkor pozitív. Ebben az esetben tehát nő a függvény.

Ha $-1 < x < 0$, akkor $2x$ negatív, de $(x+1)^3$ pozitív, így negatív lesz a derivált. A függvény tehát ekkor csökken.

Ha $0 < x$, akkor $2x$ is pozitív, és $(x+1)^3$ is pozitív, azaz pozitív lesz a derivált. Ebből következően itt nő a függvény.

Az $x = 0$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt szélsőértéke van a függvénynek. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Készítsük el a teljes táblázatot.

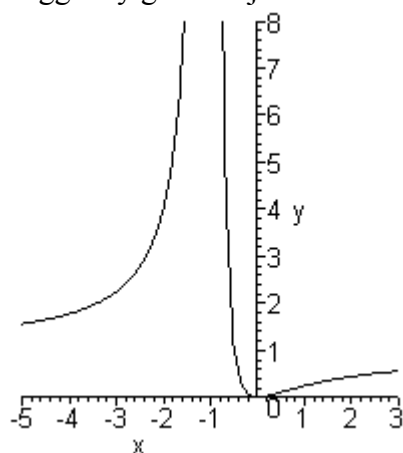
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	X	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	X	\searrow	lok. min.	\nearrow

A táblázattal így megadtuk, hogy hol nő, és hol csökken a függvény, valamint hol, milyen jellegű szélsőértéke van. Már csak egyetlen feladatunk van, megadni a szélsőérték nagyságát. Helyettesítsük be a függvénybe azt a helyet, ahol szélsőértéke van.

$$f(0) = \frac{0^2}{(0+1)^2} = 0$$

A lokális minimum értéke tehát 0.

A függvény grafikonja az alábbi ábrán látható.



12. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitását és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 e^{-2x}$ függvényt!

Megoldás: Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. Nem kell kikötést tennünk, így $D_f = \mathbb{R}$.

Deriváljuk a függvényt. Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt, és ne feledkezzünk el arról, hogy szorzat második tényezője összetett függvény.

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2 e^{-2x} \cdot (-2)$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x) = 2xe^{-2x} (1 - x)$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$2xe^{-2x}(1-x) = 0$$

Egy három tényezős szorzat egyenlő 0-val, ami csak úgy lehetséges, ha valamelyik tényező 0. Így három egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$x = 0, \text{ vagy } e^{-2x} = 0, \text{ vagy } (1-x) = 0.$$

Az első egyenlettel semmit sem kell tenni, a harmadiknak pedig $x = 1$ megoldása.

A második egyenletnek nincs megoldása, mert exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel, azaz $e^{-2x} > 0$ minden x esetén, így $e^{-2x} \neq 0$.

A derivált zérushelyeinek ismertetében készítsük el a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes intervallumokon.

$$(-\infty, 0): f'(-1) = 2(-1)e^{-2(-1)}(1-(-1)) = -4e^2 < 0$$

$$(0, 1): f'(0.5) = 2 \cdot 0.5e^{-2 \cdot 0.5}(1-0.5) = 0.5e^{-1} > 0$$

$$(1, \infty): f'(2) = 2 \cdot 2e^{-2 \cdot 2}(1-2) = -4e^{-4} < 0$$

Megjegyezzük, hogy a derivált előjelét a szorzat egyes tényezőinek előjeléből is könnyen vizsgálhatjuk. Például a $(-\infty, 0)$ intervallumon x nyilván negatív, az e^{-2x} mindig pozitív, az $1-x$ szintén pozitív. Mivel a három tényezéből csak egy negatív, így negatív lesz a szorzat is. Hasonlóan járhatunk el a másik két intervallumon is.

Most töltsük az egész táblázatot.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow	lok. max.	\searrow

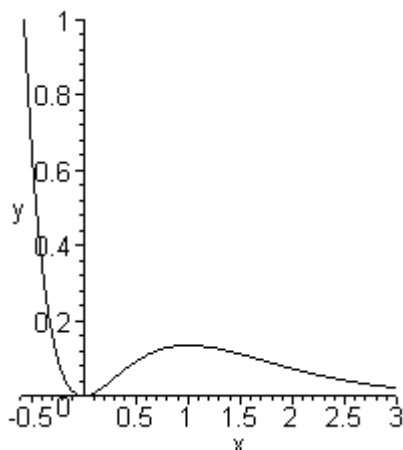
A táblázatból látható, hogy a függvény a $(-\infty, 0)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon csökken, a $(0, 1)$ intervallumon pedig nő. Az $x = 0$ helyen lokális minimuma, az $x = 1$ helyen pedig lokális maximuma van.

Határozzuk meg a minimum és maximum értékét is.

$$\text{A lokális minimum értéke: } f(0) = 0^2 e^{-2 \cdot 0} = 0.$$

$$\text{A lokális maximum értéke: } f(1) = 1^2 e^{-2 \cdot 1} = e^{-2} \approx 0.135.$$

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



13. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 \ln(x^2)$ függvényt!

Megoldás: Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. A logaritmus miatt kell kikötést tennünk. Mivel csak pozitív számoknak létezik logaritmusa, így kikötjük, hogy $x^2 > 0$. Ez minden 0-tól különböző szám esetén teljesül, így $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Előállítjuk a függvény deriváltját. Szorzatot deriválunk, melynek második tényezője összetett függvény.

$$f'(x) = 2x \ln(x^2) + x^2 \frac{1}{x^2} 2x = 2x \ln(x^2) + 2x$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x) = 2x(\ln(x^2) + 1)$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$2x(\ln(x^2) + 1) = 0$$

Vizsgáljuk külön a szorzat tényezőit, hogy mikor egyenlők 0-val.

Első tényező: $x = 0$. Ez nem eleme a függvény értelmezési tartományának.

Második tényező: $\ln(x^2) + 1 = 0$. Ez átrendezve $\ln(x^2) = -1$ lesz.

A -1 -et írjuk fel $\ln(e^{-1})$ formában, így az $\ln(x^2) = \ln(e^{-1})$ egyenletet kapjuk.

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt elhagyhatjuk az egyenlet két oldaláról a logaritmust. Így kapjuk $x^2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Ennek megoldásai: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Most készítsük el a szokásos táblázatunkat. Ez most egy kicsit hosszabb lesz mint az eddigiek, hiszen a deriválnak két zérushelye is van, és a függvény értelmezési tartományában is van szakadás. Egyelőre csak az első sort töltjük ki, és a szakadást jelöljük.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$
$f'(x)$				X			
$f(x)$				X			

Határozzuk meg f' előjelét az egyes intervallumokon.

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right): f'(-1) = 2 \cdot (-1) \left(\ln\left((-1)^2\right) + 1\right) = -2(0+1) = -2 < 0$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right): f'\left(-\frac{1}{e}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{e}\right) \left(\ln\left(\left(-\frac{1}{e}\right)^2\right) + 1\right) = -\frac{2}{e}(-2+1) = \frac{2}{e} > 0$$

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right): f'\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{e}\right) \left(\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2\right) + 1\right) = \frac{2}{e}(-2+1) = -\frac{2}{e} < 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right): f'(1) = 2 \cdot 1 \left(\ln(1^2) + 1\right) = 2(0+1) = 2 > 0$$

Most töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+	X	-	0	+
$f(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow	X	\searrow	lok. min.	\nearrow

A táblázatból látható, hogy a függvény csökken a $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ és $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ intervallumokon,

nő a $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$ intervallumokon. Két lokális minimuma van az $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$

helyeken.

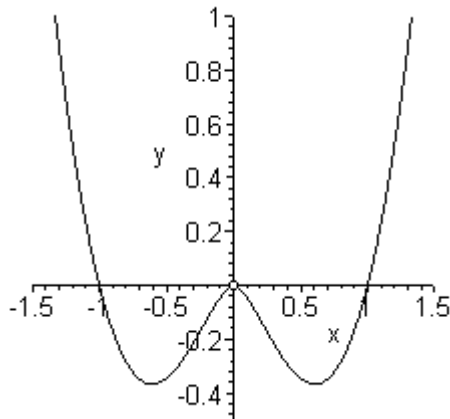
Határozzuk meg a lokális minimumok értékét is.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0.368$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0.368$$

A két minimum értéke megegyezik.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható. Az origóban az üres karika jelzi a függvény szakadását.

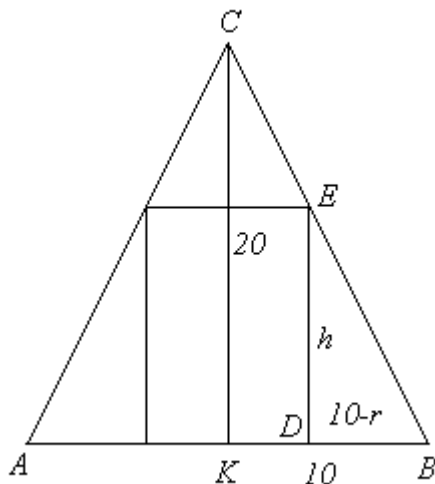


14. feladat: Egy 10 cm sugarú, 20 cm magasságú egyenes körkúpba hengert írunk úgy, hogy forgástengelye megegyezik a kúp forgástengelyével, alapköre a kúp alapkörére esik, fedőköre pedig érinti a kúp palástját. Mekkora legyen a henger sugara és magassága, hogy térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?

Megoldás: Jelöljük a henger sugarát r -rel, magasságát pedig h -val. Ekkor a henger térfogata, aminek szélsőértéke kell, hogy legyen, az alábbi módon írható fel:

$$V_{\text{henger}} = \pi r^2 h$$

Ebben két változó van, hiszen ha változik a henger sugara, akkor a magasság is változik. Amint azt korábbi feladatban tettük, itt is összefüggést keresünk a két változó között. Ehhez szükségünk lesz egy ábrára. Képzeletben vágjuk el a kúpot és a hengert egy a közös forgástengelyre illeszkedő síkkal, és a síkmetszetről készítsünk ábrát. Ezen metszeten a kúp nyilván egyenlő szárú háromszögnek látszik majd, a henger pedig egy olyan téglalapnak, amely ezen háromszögbe van írva úgy, hogy két csúcsa az alapra, másik két csúcsa pedig egy-egy szárra esik.



Az ábráról nyilvánvaló, hogy a KBC derékszögű háromszög hasonló a DBE derékszögű háromszöghöz, így a két háromszögben megegyezik a befogók aránya. Írjuk ezt fel.

$$\frac{h}{10-r} = \frac{20}{10} = 2$$

Fejezzük ki ebből h -t az r -rel.

$$h = 20 - 2r$$

Helyettesítsük be ezt a henger térfogatába, s így olyan függvényt kapunk, amiben már csak r lesz a változó.

$$V(r) = \pi r^2 (20 - 2r) = 20\pi r^2 - 2\pi r^3$$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a maximumát. A változóra nyilván a $0 < r < 10$ feltételnek kell teljesülni. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy szigorú egyenlőtlenségek vannak, mert egyenlőség esetén a henger elfajulna. Az $r = 0$ esetben egy szakasszá, a kúp magasságává válna a henger, az $r = 10$ esetben pedig egy körlappá, a kúp alapkörévé válna. Ezután a szokott módon határozzuk meg a szélsőértéket. Állítsuk elő a térfogatfüggvény deriváltját.

$$V'(r) = 40\pi r - 6\pi r^2$$

Oldjuk meg a $V'(r) = 0$ egyenletet. Ehhez célszerű a deriváltat szorzattá alakítani.

$$V'(r) = 2\pi r(20 - 3r) = 0$$

Így nyilvánvaló, hogy az egyenletnek két megoldása van, az egyik $r = 0$, a másik

pedig $r = \frac{20}{3}$. Az $r = 0$ nem felel meg a $0 < r < 10$ feltételnek, így csak a másik zérushellyel

kell foglalkoznunk. Készítsük el a megszokott táblázatot, melyet töltsünk most ki egyből teljesen. A derivált előjelét például a következő módon kaphatjuk meg a két intervallumon.

$$\left(0, \frac{20}{3}\right): V'(1) = 40\pi \cdot 1 - 6\pi \cdot 1^2 = 34\pi > 0$$

$$\left(\frac{20}{3}, 10\right): V'(8) = 40\pi \cdot 8 - 6\pi \cdot 8^2 = -64\pi < 0$$

x	$\left(0, \frac{20}{3}\right)$	$\frac{20}{3}$	$\left(\frac{20}{3}, 10\right)$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	\nearrow	lok. max.	\searrow

Látható, hogy az $r = \frac{20}{3}$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami a $0 < r < 10$ feltétel mellett globális maximum is.

A henger térfogat tehát akkor maximális, ha $r = \frac{20}{3}$.

Ekkor a henger magassága a következő:

$$h = 20 - 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{20}{3}.$$

Végül a maximális térfogat:

$$V_{\max} = V\left(\frac{20}{3}\right) = \pi \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{20}{3} = \pi \frac{8000}{27} \approx 930.84.$$

Utolsó feladatként pedig, amint azt korábban ígértük, visszatérünk a lecke elején vázolt probléma megoldásához.

15. feladat: Egy telep üresjárási feszültsége U_0 , belső ellenállása R_b . Mekkora R_k külső ellenállást kell a telepre kapcsolni, hogy a külső ellenállás teljesítménye P_k maximális legyen? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

Megoldás: Amint az a középiskolai fizika anyagból ismert, az R_k külső ellenállás teljesítménye a raja átfolyó áram erősségének négyzete szorozva az ellenállással, azaz $P = I^2 R_k$.

Az áram erősségét az Ohm-törvényből kapjuk.

$$I = \frac{U_0}{R_k + R_b}$$

Ezután a külső ellenállás teljesítménye:

$$P = \left(\frac{U_0}{R_k + R_b} \right)^2 R_k = U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2}$$

Mivel U_0 és R_b konstansok, ebben csak az R_k külső ellenállás a változó, azaz a fenti összefüggés pontosan a teljesítményt írja le az R_k függvényében. Ezt jelölésben is hangsúlyozzuk.

$$P(R_k) = U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2}$$

Az R_k külső ellenállás nyilván a $(0, \infty)$ intervallumba esik, így itt keressük ennek a függvénynek a maximumát.

Mivel a feladatban most nem szerepelnek konkrét szám adatok, kicsit jobban kell figyelni arra, hogy melyik betű jelenti a változót az összefüggésben, és melyek konstansok. Ha valakit zavar ilyen formában a jelölés, akkor változtassa meg, és közelítse a szokásos matematika jelölésekhez. A R_k helyett használjon x -et, $P(R_k)$ helyett $f(x)$ -et, az U_0 és R_b konstansok

helyett pedig a -t és b -t. Így a következőt kapja: $f(x) = a^2 \frac{x}{(x+b)^2}$. Mi most nem kívánunk

élni ezzel, hanem szeretnénk az eredeti jelöléssel végigvinni a megoldást.

Deriváljuk most a $P(R_k)$ függvényt az R_k változó szerint. A konstans szorzót emeljük ki a deriválás során, s alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$\begin{aligned} P'(R_k) &= \left(U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2} \right)' = U_0^2 \left(\frac{R_k}{(R_k + R_b)^2} \right)' = \\ &= U_0^2 \frac{R_k' \cdot (R_k + R_b)^2 - R_k \cdot ((R_k + R_b)^2)'}{((R_k + R_b)^2)^2} = \\ &= U_0^2 \frac{1 \cdot (R_k + R_b)^2 - R_k \cdot 2(R_k + R_b)}{(R_k + R_b)^4} \end{aligned}$$

Emeljük ki a számlálóban $(R_k + R_b)$ -t, és egyszerűsítsünk.

$$P'(R_k) = U_0^2 \frac{(R_k + R_b)((R_k + R_b) - 2R_k)}{(R_k + R_b)^4} = U_0^2 \frac{R_b - R_k}{(R_k + R_b)^3}$$

Ezután határozzuk meg, hogy a $P'(R_k)$ derivált mikor 0.

$$U_0^2 \frac{R_b - R_k}{(R_k + R_b)^3} = 0 \Leftrightarrow R_b - R_k = 0 \Leftrightarrow R_k = R_b$$

A megszokott táblázatunk segítségével ellenőrizzük le, hogy ezen a helyen a $P(R_k)$ függvénynek valóban maximuma van. Töltsük ki egyből a teljes táblázatot. A második sorban az előjeleket például az alábbiakból kaphatjuk.

$$(0, R_b): P'\left(\frac{R_b}{2}\right) = U_0^2 \frac{R_b - \frac{R_b}{2}}{\left(\frac{R_b}{2} + R_b\right)^3} = U_0^2 \frac{\frac{1}{2}R_b}{\left(\frac{3}{2}R_b\right)^3} = U_0^2 \frac{\frac{1}{2}R_b}{\frac{27}{8}R_b^3} = \frac{4}{27} \frac{U_0^2}{R_b^2} > 0$$

$$(R_b, \infty): P'(2R_b) = U_0^2 \frac{R_b - 2R_b}{(2R_b + R_b)^3} = U_0^2 \frac{-R_b}{(3R_b)^3} = U_0^2 \frac{-R_b}{27R_b^3} = -\frac{1}{27} \frac{U_0^2}{R_b^2} < 0$$

R_k	$(0, R_b)$	R_b	(R_b, ∞)
$P'(R_k)$	+	0	-
$P(R_k)$	\nearrow	lok. max.	\searrow

Amint látható, amikor a külső ellenállás megegyezik a belső ellenállással akkor valóban maximuma lesz a külső ellenállás teljesítményének.

A maximális teljesítmény a következő:

$$P_{\max} = P(R_b) = U_0^2 \frac{R_b}{(R_b + R_b)^2} = U_0^2 \frac{R_b}{4R_b^2} = \frac{U_0^2}{4R_b}.$$