

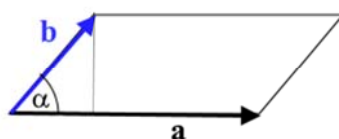
2.3. Vektorok vektoriális szorzata

Emlékeztető az 1. leckéből:

Definíció: Adott \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges \mathbf{a} -ra és \mathbf{b} -re, hossza $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi$, ahol φ az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által bezárt szög, és \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Tétel: Adott \mathbf{a} és \mathbf{b} nem nullvektorok esetén a vektoriális szorzatuk akkor és csak akkor nullvektor, ha a két vektor egymással párhuzamos.

Tétel: Adott \mathbf{a} és \mathbf{b} nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám.



$$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$

Tétel: Adott \mathbf{a} és \mathbf{b} nem nullvektorok által kifeszített háromszög területe éppen az $\frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{2}$ pozitív valós szám.

A vektoriális szorzat számolása koordinátákkal

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{i} - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{j} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \mathbf{k} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

1. feladat: Számítsa ki az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ értéket, ha $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 0, 2)$!

Megoldás

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0] \mathbf{i} - [2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)] \mathbf{j} + [2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)] \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Tehát:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, -3, 1).$$

2. feladat: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma területét és C csúcsának koordinátáit, ha $A(1,1,0)$, $B(-1,0,3)$ és $D(1,4,1)$!

Megoldás

A paralelogrammát lényegében az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AD} vektorok feszítik ki. Tudott összefüggés, hogy ebben az esetben a paralelogramma területe:

$$T = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|.$$

Állítsuk elő ezeket a vektorokat, ha a csúcsokba mutató helyvektorokat rendre \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{d} vektorokkal jelöljük.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, -1, 3) \quad \overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = (0, 3, 1)$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [(-1) \cdot 1 - 3 \cdot 3]\mathbf{i} - [(-2) \cdot 1 - 3 \cdot 0]\mathbf{j} + [(-2) \cdot 3 - 1 \cdot 0]\mathbf{k} = \\ &= -10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$T = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \|-10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\| = \sqrt{(-10)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{140}.$$

A C csúcs koordinátáinak meghatározásánál használjuk ki azt, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást. Ez a közös felezőpont a paralelogramma középpontja, jelöljük K -val.

K felezőpontja a BD átlónak ezért:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-1+1}{2} & k_1 &= 0 \\ k_2 &= \frac{0+4}{2} & k_2 &= 2 \\ k_3 &= \frac{3+1}{2} & k_3 &= 2, \end{aligned}$$

azaz

$$K(0, 2, 2).$$

Mivel K az AC átlónak is felezőpontja, ezért:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1+c_1}{2} & c_1 &= -1 \\ 2 &= \frac{1+c_2}{2} & c_2 &= 3 \\ 2 &= \frac{0+c_3}{2} & c_3 &= 4. \end{aligned}$$

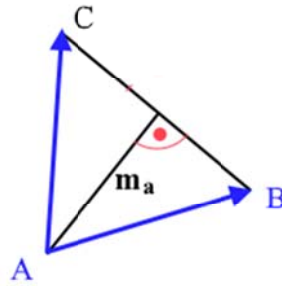
Tehát a keresett C csúcs:

$$C(-1, 3, 4).$$

3. feladat: Határozzuk meg az ABC háromszög A csúcsából induló magasságvonalának hosszát, ha $A(3, -3, 4)$, $B(-1, 2, 4)$ és $C(-1, 6, 1)$!

Megoldás

Készítsünk ábrát.



A megoldás során használjuk ki, hogy a háromszög területét kétféleképpen is ki tudjuk számolni:

$$T = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|,$$

valamint

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2},$$

ahol a szokásos jelölést megtartva $a = \|\overrightarrow{BC}\|$, m_a pedig az A csúcsból induló magasság.

Mivel a kétféleképpen felírt terület megegyezik, ezért:

$$\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC}\| m_a$$

ahonnan:

$$m_a = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}.$$

Állítsuk elő a számoláshoz szükséges vektorokat.

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 5, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-4, 9, -3) \quad \overrightarrow{BC} = (0, 4, -3)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = [5 \cdot (-3) - 0 \cdot 9] \mathbf{i} - [(-4) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4)] \mathbf{j} + [(-4) \cdot 9 - 5 \cdot (-4)] \mathbf{k} = \\ &= -15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \\ m_a &= \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2}}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5. \end{aligned}$$

Vektorok vegyesszorzata

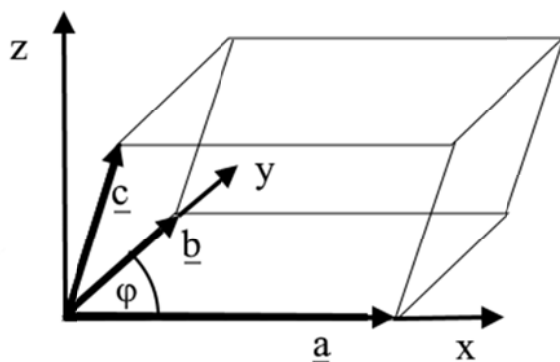
Emlékeztető az 1. leckéből:

A vegyesszorzat elnevezés arra utal, hogy ennek kiszámításánál mindkét vektorszorzás műveletre szükségünk lesz.

Definíció: Adott \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} nem nullvektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ valós számot értjük.

Tétel: Az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok akkor és csak akkor egysíkúak, ha $\mathbf{abc}=0$. Ha a vegyesszorzat nem nulla, akkor annak abszolút értéke az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített paralelepipedon V_p térfogatát adja:

$$V_p = |\mathbf{abc}|.$$



Az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített tetraéder V_t térfogata:

$$V_t = \frac{|\mathbf{abc}|}{6}.$$

4. feladat: Határozzuk meg az \mathbf{abc} értékét, ha $\mathbf{a} = (2, -4, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 5)$ és $\mathbf{c} = (-2, 3, 1)$.
Egysíkúak-e ezek a vektorok?

Megoldás

Tudjuk, hogy $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Először az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort számoljuk ki.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [(-4) \cdot 5 - 3 \cdot (-1)]\mathbf{i} - [2 \cdot 5 - 3 \cdot 1]\mathbf{j} + [2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1]\mathbf{k} = \\ &= -17\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

A most kapott vektort skalárisan szorozzuk \mathbf{c} -vel:

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (-17, -7, 2), (-2, 3, 1) \rangle = (-17) \cdot (-2) + (-7) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 15.$$

Mivel a vegyesszorzat nem lett nulla, ezért ezek a vektorok nem egysíkúak.

5. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ és $\mathbf{c} = (-1, 2, -5)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

Megoldás

Tudjuk, hogy a $V_p = |\mathbf{abc}|$, azaz ki kell számolni a három vektorok vegyesszorzatát, majd az eredmény abszolút értékét kell venni. A számolást most is két lépésben fogjuk elvégezni.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (2, -10, 2), (-1, 2, -5) \rangle = -32.$$

Ebból a keresett térfogat:

$$V = |-32| = 32.$$

6. feladat: Egysíkúak-e az alábbi pontok: $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(2, 0, -2)$ és $D(1, 1, -2)$?

Megoldás

Ha a négy pont egy síkban van, akkor az egyik pontból a másik három pontba irányított vektor is egy közös síkban van. Ez az állítás fordítva is igaz. Ha kiválasztjuk az A pontot, és képezzük az \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} és \overrightarrow{AD} vektorokat, akkor ha ezen vektorok vegyesszorzata nulla értéket ad, akkor a vektorok egysíkúak, de ekkor a pontok is olyanok.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2) \quad \overrightarrow{AD} = (0, 2, -2).$$

Képezzük az

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$$

vegyesszorzatot. Ezt most is két lépésben fogjuk számolni.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-3, -3, -3), (0, 2, -2) \rangle = 0.$$

Mivel a három vektor vegyesszorzata nulla, ezért a három vektor egysíkú. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha az eredeti négy pont is egysíkú.

7. feladat: Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $A(1, -1, 0)$, $B(-6, 0, -1)$, $C(-2, -4, 1)$ és $D(-2, -4, -3)$?

Megoldás

Tudjuk, hogy a tetraéder térfogata vegyesszorzat segítségével számolható, ha rendelkezünk egy közös csúcsból induló három élvektorral. Ennek érdekében válasszuk ki az A csúcsot, és határozzuk meg a többi csúcsba mutató élvektort.

$$\overrightarrow{AB} = (-7, 1, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (-3, -3, 1) \quad \overrightarrow{AD} = (-3, -3, -3)$$

Képezzük először az

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$$

vegyesszorzatot. Ezt most is két lépésben fogjuk számolni.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 24\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \left\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left\langle (-2, 10, 24), (-3, -3, -3) \right\rangle = -96.$$

Innen a tetraéder térfogata:

$$V_t = \frac{|\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|}{6} = \frac{|-96|}{6} = 16.$$