

## Elméleti összefoglaló:

**Tétel:** Minden  $\alpha \neq 1$  valós szám esetén

$$\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c.$$

**Bizonyítás:** A tételt az integrálás eredményének deriválásával igazoljuk. Eközben felhasználjuk az összetett függvény deriválási szabályát, amikor az  $f^{\alpha+1}(x)$  függvényt deriváljuk. Ekkor a külső függvény  $x^{\alpha+1}$ , a belső függvény pedig  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \right)' &= \left( \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} \right)' + c' = \frac{1}{\alpha+1} (f^{\alpha+1}(x))' + 0 = \\ &= \frac{1}{\alpha+1} (\alpha+1) f^\alpha(x) \cdot f'(x) = f^\alpha(x) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

A tételt szövegben is megfogalmazhatjuk a feladatokban való alkalmazáshoz. Ha olyan szorzatot kell integrálnunk, melynek egyik tényezője egy függvény hatványa (a kitevő  $\neq -1$ ), másik tényezője pedig a hatványozott függvény deriváltja, akkor az integrálás eredményében eggyel alacsonyabb hatványra emeljük a függvényt, és osztunk az új kitevővel.

## Kidolgozott feladatok:

**6. feladat:**  $\int (x^2 + 5)^6 \cdot 2x dx$

**Megoldás:** Az integrandusban most azt ismerhetjük fel, hogy egy függvény hatványa áll benne megszorozva a hatványozott függvény deriváltjával. Úgy is mondhatjuk, hogy az integrandus  $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$  típusú. Alkalmazhatjuk a most megismert szabályt.

Ebben a feladatban nyilván  $f(x) = x^2 + 5$  az a függvény, aminek a hatványa szerepel, s mellette ott áll szorzóként a deriváltja, hiszen  $(x^2 + 5)' = 2x$ .

A szabály azt mondja ki, hogy ilyen esetben a függvény 1-gyel magasabb kitevőjű hatványa lesz az integrál, elosztva ezen 1-gyel nagyobb kitevővel. Így az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int (x^2 + 5)^6 \cdot 2x dx = \int (x^2 + 5)^6 \cdot (x^2 + 5)' dx = \frac{(x^2 + 5)^7}{7} + c.$$

Látható, hogy a megoldás során nem volt szükség az integrandus hosszas átalakítására. Az volt a fontos, hogy felismerjük, az integrandus típusát. Erre akkor van csak esélyünk, ha rendelkezünk az alapderiváltak biztos ismeretével.

**7. feladat:**  $\int (x^2 - 1)^3 x dx$

**Megoldás:** Az előző feladat megoldásának mintájára azt mondhatjuk, hogy legyen  $f(x) = x^2 - 1$ , hiszen ennek a függvénynek hatványa szerepel az integrandusban. A gondot az okozza, hogy ennek deriváltja  $(x^2 - 1)' = 2x$ , és nem pontosan ez szerepel a függvény hatványa mellett szorzóként, hanem csak  $x$ . Ezen azonban segíthetünk, ha az integrandust szorozzuk is, és osztjuk is 2-vel. Így elérjük, hogy a függvény hatványa mellett a hatványozott függvény deriváltja álljon.

$$\int (x^2 - 1)^3 x dx = \int \frac{(x^2 - 1)^3 2x}{2} dx =$$

Mivel konstans szorzó kiemelhető az integrálból, ezért a 2 -vel osztás helyett célszerűbb  $\frac{1}{2}$  -del szorzást írni az integrál elé. Így az integrandus egyértelműen  $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$  típusú.

$$\int \frac{(x^2 - 1)^3 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^3 2x dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 - 1)' dx$$

Alkalmazzuk a fent megismert szabályt.

$$\frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 - 1)' dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 1)^4}{4} + c = \frac{1}{8} (x^2 - 1)^4 + c$$

A megoldásból látható, hogy ha az integrandus egyik tényezője egy függvény hatványa, a másik pedig ezen hatványozott függvény deriváltjának szám szorosa, akkor kialakítható az  $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$  típusú integrandus. Ilyenkor megfelelő konstanssal szorzunk is és osztunk is, hogy a hatványozott függvény deriváltja jelenjen meg. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ilyen csak akkor tehetünk, ha a hatványozott függvény deriváltjától csak konstans szorzó erejéig tér el a tényező. Ha nem konstans szorzó az eltérés, akkor a függvény nem integrálható ilyen módon.

**8. feladat:**  $\int \sqrt[3]{\cos x} \cdot \sin x dx$

**Megoldás:** Az előző két feladatban egyértelműen látható volt egy függvény hatványa, most ehhez egy kicsit alakítanunk kell az integranduson. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

$$\int \sqrt[3]{\cos x} \cdot \sin x dx = \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x dx$$

Így már megvan, hogy a  $\cos x$  függvény hatványa szerepel az integrandusban egyik tényezőként. Mellette  $\sin x$  áll, ami csak egy előjelben különbözik a  $\cos x$  deriváltjától, hiszen  $(\cos x)' = -\sin x$ . Értjük el, hogy megjelenjen a negatív előjel az integrandusban. Ha két negatív előjelet is kiteszünk, akkor mintha nem is tettünk volna semmit. Az egyiket tegyük ki az integrál elé, a másikat pedig belül a  $\sin x$  -hez. Így elérjük, hogy a hatványozott függvény deriváltja álljon az integrandusban.

$$\int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x dx = - \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (-\sin x) dx = - \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\cos x)' dx$$

Ezután már alkalmazható az  $\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$  szabály, s az alábbi eredményt kapjuk:

$$- \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\cos x)' dx = - \frac{(\cos x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = - \frac{3}{4} (\cos x)^{\frac{4}{3}} + c.$$

**9. feladat:**  $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx$

**Megoldás:** Ebben a feladatban sem nyilvánvaló, hogy függvény hatványa szerepel, ezért alakítunk az integranduson. A tört helyett most írunk negatív kitevős hatvánnyal való szorzást.

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x dx$$

Már csak annyit kell észrevenni, hogy  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ , tehát a második tényezőben a hatványozott függvény deriváltja áll.

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)' dx$$

Alkalmazva a megfelelő szabályt, a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)' dx = \frac{(\operatorname{ch} x)^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2(\operatorname{ch} x)^2} + c.$$

**10. feladat:** 
$$\int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} dx$$

**Megoldás:** Tudjuk, hogy  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ . Ezért célszerűnek látszik két tört szorzatára

bontani az integrandust, majd negatív kitevős hatványt írni. Így jól láthatóvá tehetjük, hogy az integrandus  $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$  típusú.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} dx &= \int \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{(1+x^2)} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{-2} dx = \int (\operatorname{arctg} x)^{-2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx \end{aligned}$$

Alkalmazzuk az  $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$  típusú függvényekre vonatkozó integrálási szabályt.

$$\int (\operatorname{arctg} x)^{-2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\operatorname{arctg} x} + c$$

**11. feladat:** 
$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

**Megoldás:** Tudjuk, hogy  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , ezért célszerű a törtet szorzattá bontani. Még annyit kell

felismernünk, hogy a  $\ln x$ -et is tekinthetjük egy függvény hatványának, hiszen  $(\ln x)^1$ -ről van szó, csak az 1-et nem írtuk ki a kitevőben. Így jól láthatóvá válik, hogy az integrandus  $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$  típusú függvény.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int (\ln x)^1 \cdot (\ln x)' dx$$

Alkalmazva a megfelelő integrálási módszert, a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\ln x)^1 \cdot (\ln x)' dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c = \frac{1}{2} \ln^2 x + c.$$