

3.3. Tételek távolsága, hajlásszöge

Két pont távolsága

Definíció: Két pont távolságán az őket összekötő szakasz (vektor) hosszát értjük.

Tétel: Legyenek $A(a_1, a_2, a_3)$ és $B(b_1, b_2, b_3)$ adott pontok. Ekkor a két pont távolsága:

$$d_{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Pont és egyenes távolsága

Definíció: Egy pont és egy, a pontra nem illeszkedő egyenes távolságán a pontból az egyenesre bocsájtott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Legyen adott egy P pont és egy \mathbf{v} irányvektorú e egyenes. Ekkor ezek távolsága:

$$d_{pe} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

ahol P_0 az e egyenes egy tetszőleges pontja.

Pont és sík távolsága

Definíció: Pont és a pontra nem illeszkedő sík távolságán a pontból a síkra bocsájtott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Legyen adott egy P pont és egy \mathbf{n} normálvektorú S sík. Ekkor ezek távolsága:

$$d_{ps} = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}$$

ahol P_0 az S sík egy tetszőleges pontja.

1. feladat: Határozzuk meg az $A(2, -1, 5)$, $B(3, 2, 1)$ és $C(6, 4, 3)$ csúcspontú háromszög területét!

Megoldás

A háromszög területe az oldalai hosszának összegével egyenlő, azaz a csúcspontok egymástól mért távolságainak összegével.

Írjuk fel a vektorokat és számoljuk ki a hosszukat:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, -4) \quad d(AB) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, 5, -2) \quad d(AC) = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{45}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3, 2, 2) \quad d(BC) = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{17}$$

A háromszög területe: $K = \sqrt{26} + \sqrt{45} + \sqrt{17} \approx 15,93$

2. feladat: Határozza meg a $P(3, 2, -1)$ pont és az $e: x = 1 + t, y = -1 - 2t, z = -2 \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes távolságát!

Megoldás

A távolság meghatározásához szükségünk van egy pontra az egyenesről. Legyen ez $P_0(1, -1, -2)$, továbbá kell az egyenes irányvektor: $\mathbf{v} = (1, -2, 0)$. Ha $P(3, 2, -1)$, akkor

$$\overrightarrow{P_0P} = (2, 3, 1).$$

$$\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

A kapott vektor hossza:

$$\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{54}$$

Az irányvektor hossza:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

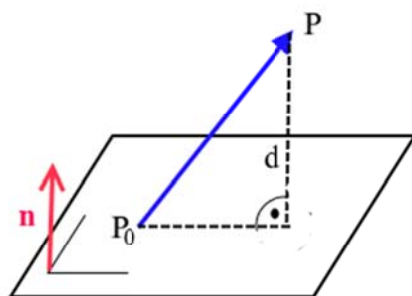
A keresett távolság:

$$d_{Pe} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}} \approx 3,29.$$

3. feladat: Határozza meg a $P(1, -2, -1)$ pont és az $S: 2x - 4y + z = 2$ sík távolságát!

Megoldás

A megoldáshoz szükségünk lesz a sík egy tetszőleges pontjára és a normálvektorra. Mivel egy olyan tetszőleges pontot keresünk, amely rajta van a síkon, ezért a pont két koordinátáját szabadon megválaszthatjuk, míg a harmadik koordinátát a sík egyenletébe való helyettesítéssel számoljuk. Keressük a $P_0(0, 0, z)$ síkbeli pontot. Könnyen számolható, hogy ekkor $z = 2$, tehát $P_0(0, 0, 2)$.



Ekkor:

$$\overrightarrow{P_0P} = (-1, 2, 3).$$

Olvassuk ki a sík egy normálvektorát és számoljuk ki a vektor hosszát:

$$\mathbf{n} = (2, -4, 1) \quad \|\mathbf{n}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$$

Behelyettesítve a távolságot megadó képletbe:

$$d_{PS} = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \left| \frac{-2-8+3}{\sqrt{21}} \right| = \left| \frac{-7}{\sqrt{21}} \right| = \frac{7}{\sqrt{21}} \approx 1,53.$$

Megjegyzés:

Két párhuzamos egyenes távolsága visszavezethető pont és egyenes távolságára. Ugyanis ilyenkor az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől mért távolságát kell meghatároznunk.

Két párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára, ugyanis ilyenkor az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól mért távolságát kell meghatároznunk.

Egy egyenes és egy vele párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára, ugyanis ilyenkor az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól mért távolságát kell meghatároznunk.

Tételek hajlásszöge

Tételek hajlásszöge minden esetben legfeljebb 90° lehet. Ezt a szöget α -val fogjuk jelölni.

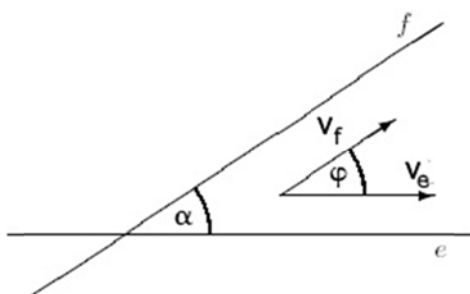
Két egyenes hajlásszöge

Definíció: Két metsző egyenes hajlásszöge megegyezik az egyenesek által közbezárt kisebbik szöggel. Ha a két egyenes nem metszi egymást, akkor párhuzamos eltolással metsző helyzetbe hozhatók.

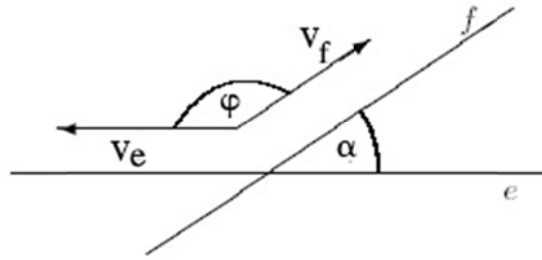
Ez a hajlásszög meghatározható a két egyenes irányvektorából. Jelöljük az e és f egyenesek egy-egy irányvektorát \mathbf{v}_e és \mathbf{v}_f -fel. Ekkor az irányvektorok által bezárt szög skaláris szorzat felhasználásával a következő összefüggésből számolható:

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_f \rangle|}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{v}_f\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = 180^\circ - \varphi$ a két egyenes hajlásszöge.



4. feladat: Határozza meg az $e: x = 3 - 2t, y = 1 + t, z = 4 - 5t \quad t \in \mathbb{R}$ és az $f: x - 1 = \frac{z - 1}{3}, y = 5$ egyenesek hajlásszögét!

Megoldás

Első lépésként meg kell adni mindkét egyenes egy-egy irányvektorát és azok hosszát:

$$\mathbf{v}_e = (-2, 1, -5) \quad \|\mathbf{v}_e\| = \sqrt{30}$$

$$\mathbf{v}_f = (1, 0, 3) \quad \|\mathbf{v}_f\| = \sqrt{10}.$$

Ekkor a keresett szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_f \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{v}_f\|} = \frac{-17}{\sqrt{300}} \approx -0,98 \rightarrow \varphi \approx 168,52^\circ.$$

Mivel ez tompaszög, ezért a keresett hajlásszög:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 168,52^\circ \approx 11,48^\circ.$$

5. feladat: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma átlóinak hajlásszögét, ha $A(2, 3, -1)$, $B(5, 4, 3)$, $C(2, -1, 6)$ és $D(-1, -3, 2)$.

Megoldás

A két átló egyenes irányvektorának szögét határozzuk meg először. Az egyik egyenes irányvektora az \overrightarrow{AC} , a másiké pedig a \overrightarrow{BD} vektor is lehet. Adjuk meg ezen vektorok koordinátáit:

$$\overrightarrow{AC} = (0, -5, 7) \quad \overrightarrow{BD} = (-6, -7, -1).$$

Számoljuk ki a vektorok által bezárt szögét:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle}{\|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{BD}\|} = \frac{28}{\sqrt{0^2 + (-5)^2 + 7^2} \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + (-1)^2}} = \\ &= \frac{28}{\sqrt{74} \sqrt{86}} \approx 0,3510 \rightarrow \varphi \approx 69,45^\circ. \end{aligned}$$

Mivel $\varphi < 90^\circ$, ezért a keresett hajlásszög $\alpha = 69,45^\circ$.

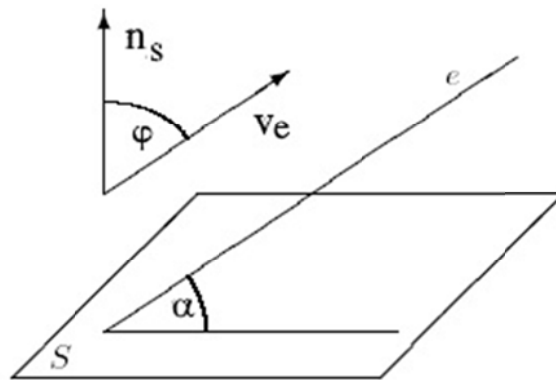
Egyenes és sík hajlásszöge

Definíció: Egyenes és sík hajlásszögén az egyenes és az egyenes síkra eső merőleges vetületének hajlásszögét értjük.

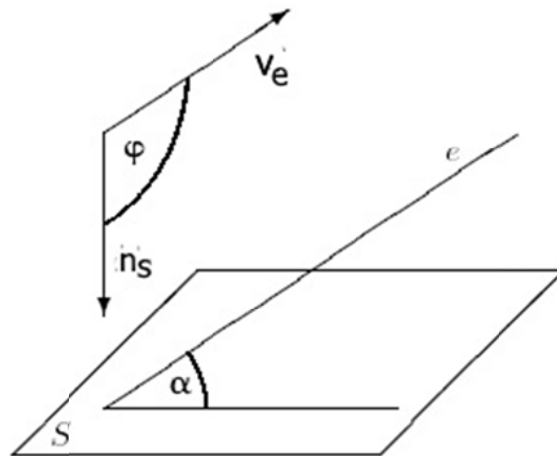
Ha ismerjük a sík egy \mathbf{n}_s normálvektorát és az egyenes egy \mathbf{v}_e irányvektorát, akkor a két vektor által bezárt szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{n}_s \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{n}_s\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = 90^\circ - \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = \varphi - 90^\circ$ hajlásszög.



6. feladat: Határozza meg az y tengely és az $S: 2x + z = 2 + 4y$ sík hajlásszögét!

Megoldás

A számoláshoz ismernünk kell az egyenes egy irányvektorát és a sík egy normálvektorát, valamint ezen vektorok hosszát.

$$\mathbf{v}_e = (0, 1, 0) \quad \|\mathbf{v}_e\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\mathbf{n}_s = (2, -4, 1) \quad \|\mathbf{n}_s\| = \sqrt{21}.$$

A keresett szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{n}_s \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{n}_s\|} = \frac{-4}{\sqrt{21}} \approx -0,87 \rightarrow 150,46^\circ$$

Ez alapján az egyenes és sík hajlásszöge:

$$\alpha = \varphi - 90^\circ \approx 150,46^\circ - 90^\circ \approx 60,46^\circ.$$

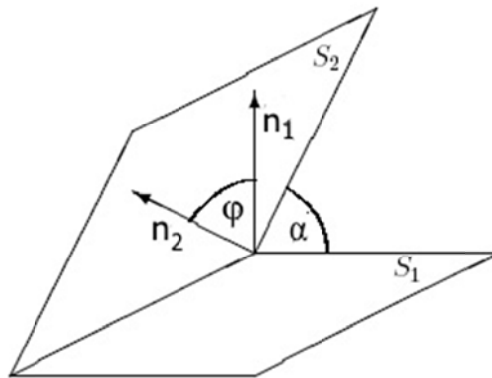
Két sík hajlásszöge

Definíció: Két sík hajlásszöge normálvektoraik hajlásszöge, ha az hegyesszög. Tompaszög esetén 180° -ból azt kivonva kapjuk a síkok szögét.

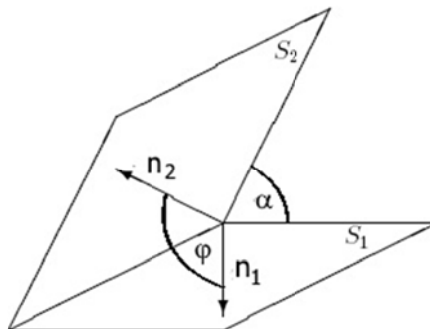
Ha ismerjük a két sík \mathbf{n}_1 és \mathbf{n}_2 normálvektorát, akkor

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = 180^\circ - \varphi$ a két sík hajlásszöge.



7. feladat: Határozza meg az $S_1 : x + y - z = 1$ és $S_2 : x - 2y + z = 0$ síkok hajlásszögét!

Megoldás

Kiolvasva a síkok egy-egy normálvektorát és meghatározva azok hosszát:

$$\mathbf{n}_{s_1} = (1, 1, -1) \quad \|\mathbf{n}_{s_1}\| = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{n}_{s_2} = (1, -2, 1) \quad \|\mathbf{n}_{s_2}\| = \sqrt{6}.$$

Majd ezekkel az adatokkal számolva:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_{s_1}, \mathbf{n}_{s_2} \rangle}{\|\mathbf{n}_{s_1}\| \|\mathbf{n}_{s_2}\|} = \frac{-2}{\sqrt{18}} \quad \varphi \approx 118,12^\circ.$$

Innen az általunk keresett hajlásszög:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 118,12^\circ \approx 61,88^\circ.$$