

További kidolgozott feladatok:

20. feladat: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

Megoldás: Egy csúnya törtet kellene integrálnunk, és a törtek integrálásra nincs általános integrálási szabály. Ezért át kell alakítanunk valahogy az integrandust. Középiskolából ismert a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azonosság. Használjuk fel elsőként ezt.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx$$

A számlálóban felismerhetjük, hogy egy $a^2 - b^2$ típusú kifejezés, amiben a szerepét most $\cos x$, b szerepét pedig $\sin x$ tölti be. Mivel $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, a számlálót szorzattá tudjuk alakítani.

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx$$

Ezek után pedig egyszerűsíthetjük a törtet $\cos x - \sin x$ -szel.

$$\int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx = \int \cos x + \sin x dx$$

Ezzel nincs többé tört, hanem csak két alapintegrál összege szerepel, melyeket tagonként integrálunk.

$$\int \cos x + \sin x dx = \int \cos x dx + \int \sin x dx = \sin x - \cos x + c$$

21. feladat: $\int \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} dx$

Megoldás: Mivel a számlálóban egy különbség áll, a törtet felbonthatjuk két tört különbségére.

$$\int \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} dx$$

Mindkét tört egyszerűsíthető, az első x^2 -tel, a második $\sin^2 x$ -szel.

$$\int \frac{x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} dx$$

A második törtben egy hatvány reciproka áll, amit írjunk inkább negatív kitevős hatványként.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - x^{-2} dx$$

Így már csak alapintegrálok különbsége szerepel, melyeket külön-külön integrálunk.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} - x^{-2} dx = -\operatorname{ctg} x - \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x + c$$

22. feladat: $\int \frac{5x^2 + 2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx$

Megoldás: Az integrandus egy elég bonyolult tört, azonban észrevehető, hogy a számláló olyan összegre bontható, melynek egyik tagja a nevező egyik tényezőjének, másik tagja pedig a nevező másik tényezőjének a szám szorosa.

$$\int \frac{5x^2 + 2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx = \int \frac{3x^2 + 2(x^2 + 1)}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx$$

Ez azért jó, mert így a törtet két tört összegére bonthatjuk, és a keletkező törteken belül egyszerűsíthetünk.

$$\int \frac{3x^2 + 2(x^2 + 1)}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx = \int \frac{3x^2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} dx = \int \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2} dx$$

Az összeget természetesen tagonként integráljuk, a konstans szorzók pedig kiemelhetők.

$$\int \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2} dx = \int \frac{3}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2} dx = 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Az első tag alapintegrál, a második tagban pedig a reciprok helyett írjunk inkább negatív kitevős hatványt.

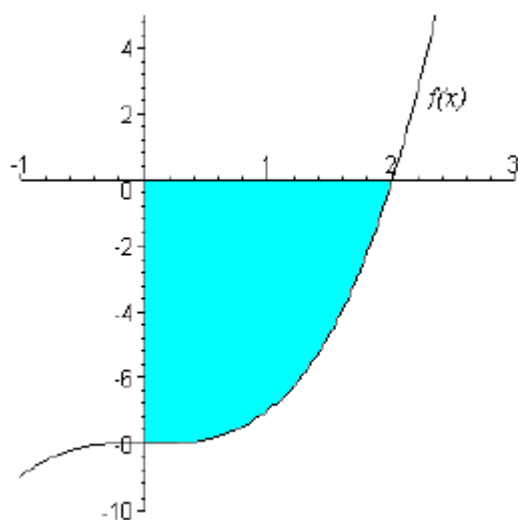
$$3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx = 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int x^{-2} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a megfelelő alapintegrálokat.

$$3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int x^{-2} dx = 3 \arctg x + 2 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 3 \arctg x - \frac{2}{x} + c$$

23. feladat: Határozzuk meg azon véges síkrész területét, melyet a koordináta-rendszer két tengelye és az $f(x) = x^3 - 8$ függvény grafikonja határol.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a függvényről, hogy láthassuk, hogyan is helyezkedik el a kérdéses alakzat a koordináta-rendszerben. Az ábrázolás könnyű, hiszen az x^3 grafikonját kell 8-cal lefelé eltolnunk az y -tengely mentén.



Amint látható, a negyedik síknegyedben van olyan síkrész, ami a feladat feltételeinek megfelel. Nyilván szükségünk van arra, hogy meghatározzuk, hol metszi a függvény grafikonja az x -tengelyt. Az ábráról sejthető, hogy $x = 2$ a zérushely, s ez a függvénybe helyettesítéssel könnyen ellenőrizhető is. Természetesen az $x^3 - 8 = 0$ egyenletet is

megoldhatjuk, s ezzel is igazolhatjuk, hogy 2-nél van a metszéspont. Így egyértelmű, hogy az alakzat a $[0, 2]$ intervallumon található. Mivel itt a függvény negatív értékeket vesz fel, így a területet a függvény ezen intervallumon vett integráljának -1 -szerese adja.

$$T = -\int_0^2 x^3 - 8x \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = -\left[\frac{x^4}{4} - 8x\right]_0^2$$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba, és hajtsuk végre a műveleteket.

$$T = -\left(\left(\frac{2^4}{4} - 8 \cdot 2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 8 \cdot 0\right)\right) = -((4 - 16) - 0) = 12$$

24. feladat: Mekkora területű véges síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^3 + x$ és $g(x) = 5x$ függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két függvénygrafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés, így először meg kell határoznunk, hol metszik egymást a grafikonok. Oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet.

$$x^3 + x = 5x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

Ha az első tényező nulla, akkor az $x = 0$ megoldást kapjuk.

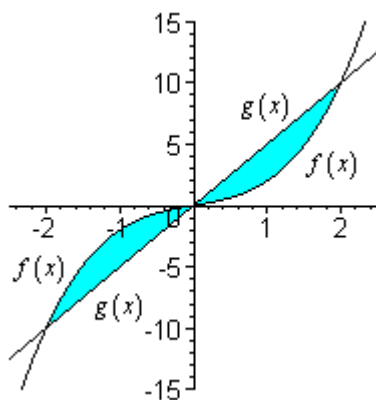
Ha a második tényező nulla, akkor $x^2 = 4$, amiből vagy $x = 2$ vagy $x = -2$.

A két függvény grafikonja tehát 3 helyen is metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy a két grafikon által közrezárt alakzat két részből áll, mert van közrezárt alakzat az első két metszéspont és a második két metszéspont között is. Ezt jól láthatjuk, ha ábrázoljuk a két függvényt. Az ábrázoláshoz célszerű meghatározni a függvények értékét a metszéspontokban. Ezeken a helyeken a két függvény azonos értéket vesz fel. Mivel $g(x)$ az egyszerűbb függvény, így célszerű abba helyettesítve számolni.

$$f(-2) = g(-2) = 5 \cdot (-2) = -10$$

$$f(0) = g(0) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$f(2) = g(2) = 5 \cdot 2 = 10$$



A kérdéses területe két integrállal határozhatjuk meg. Mivel a $[-2, 0]$ intervallum belsejében $f(x) > g(x)$, ezért ezen az intervallumon integráljuk az $f(x) - g(x)$ függvényt, s mert a $[0, 2]$ intervallumon $g(x) > f(x)$, ezért ezen az intervallumon integráljuk az $g(x) - f(x)$ függvényt. A terület a két integrál összege lesz.

$$T = \int_{-2}^0 (x^3 + x) - 5x \, dx + \int_0^2 5x - (x^3 + x) \, dx = \int_{-2}^0 x^3 - 4x \, dx + \int_0^2 4x - x^3 \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényeket.

$$T = \int_{-2}^0 x^3 - 4x \, dx + \int_0^2 4x - x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a megszokott módon, és végezzük el a műveleteket.

$$T = \left(\left(\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2 \right) \right) + \left(\left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4} \right) \right) =$$

$$= (0 - (4 - 8)) + ((8 - 4) - 0) = 4 + 4 = 8$$

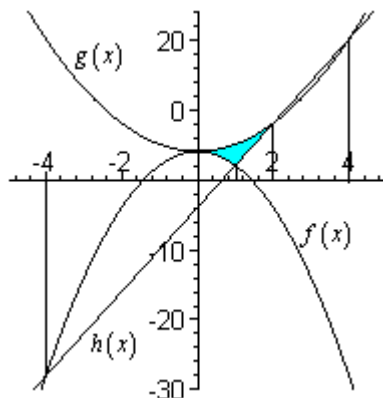
A közrezárt alakzat területe tehát 8 egység.

A feladatot egy integrál kiszámolásával is megoldhatjuk, ha kihasználjuk azt, hogy a közrezárt alakzat két része szimmetrikus az origóra. Ekkor elég az egyik integrált kiszámolnunk, és annak dupláját venni. Szimmetrikus alakzatok esetén így csökkenthetjük a számolás mennyiségét.

25. feladat: Mekkora területű véges síkrészt határolnak az alábbi függvények grafikonjai?

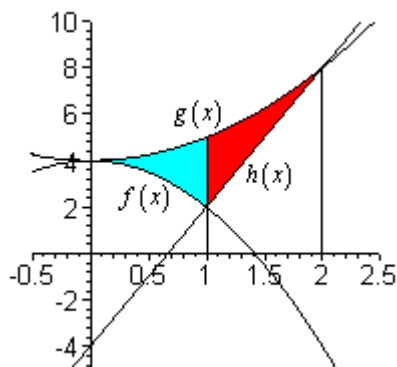
$$f(x) = 4 - 2x^2, \quad g(x) = x^2 + 4, \quad h(x) = 6x - 4$$

Megoldás: Most meg kellene keresnünk az összes olyan pontot, ahol két függvény grafikonja metszi egymást. Ehhez három egyenletet is meg kéne oldanunk, hiszen bármely két függvényt egyenlővé kellene tennünk egymással. Készítsünk inkább egy ábrát a három függvény grafikonjáról és olvassuk le az ábráról a metszéspontok helyét. Az ábrázolás során azt használjuk ki, hogy ismerjük a függvények jellegét. Az $f(x) = 4 - 2x^2$ egy konkáv parabola lesz 4 egységgel eltolva az y -tengely mentén. A $g(x) = x^2 + 4$ konvex parabola szintén 4 egységgel eltolva az y -tengely mentén. A $h(x) = 6x - 4$ pedig egyenes, ami -4 -ben metszi az y -tengelyt, s a meredeksége 6.



Az ábráról leolvasható, hogy öt közös pont van, s ezek az $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$ helyeken vannak.

Az is látható azonban hogy a három függvény grafikonja által határolt alakzat szempontjából csak az $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ helyeken lévő metszéspontok érdekesek, mert a $[-4, 0]$ és intervallumokon csak két függvény grafikonja által határolt alakzat alakul ki. Nagyítsuk fel ezután az ábra lényeges részét.



Az alakzatot az $x = 1$ helyen két részre kell bontanunk, mert más függvény grafikonja határolja alulról a $[0, 1]$ és más az $[1, 2]$ intervallumon. Ebből következik, hogy a területet két integrál összegeként kaphatjuk meg. A $[0, 1]$ intervallumon a $g(x) - f(x)$ függvényt kell integrálnunk, míg az $[1, 2]$ intervallumon $g(x) - h(x)$ függvényt.

$$T = \int_0^1 (x^2 + 4) - (4 - 2x^2) dx + \int_1^2 (x^2 + 4) - (6x - 4) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 x^2 - 6x + 8 dx$$

Határozzuk meg primitív függvényeket.

$$T = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 x^2 - 6x + 8 dx = \left[x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_1^2$$

Helyettesítsük az integrálási határokat, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_1^2 = (1^3 - 0^3) + \left(\left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 \right) \right) = \\ &= 1 + \left(\frac{8}{3} - 12 + 16 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 8 \right) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

A három függvény grafikonja által határolt alakzat területe tehát $\frac{7}{3}$ egység.

26. feladat: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$

intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt. Határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: Helyettesítsünk be a forgástestek térfogatának képletébe.

$$V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x dx$$

Az integrandus egy összetett függvény, s az összetett függvényekre nincs általános integrálási szabály. Mivel várhatóan nem lesz egyszerű primitív függvényt találni, ezért végezzük el

külön a határozatlan integrálást. Próbáljuk átalakítani úgy az integrandust, hogy integrálható függvényt, vagy azok összegét kapjuk. Induljunk el a legegyszerűbb szóba jöhető

összefüggésből, mely szerint $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, és írjuk ezt be az integrandusba. Mivel így egy

tört négyzetét kapjuk, ezután úgy alakíthatunk tovább, hogy külön emeljük négyzetre a számlálót és a nevezőt.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$$

Még nem látszik pontosan miért jó ez az átalakítás, de középiskolából több olyan összefüggés is ismert, melyben $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ szerepel, így ebben az irányban tovább alakítható a függvény. Ismét a legegyszerűbb összefüggésből menjünk tovább, ami a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság. Rendezzük ezt át $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ alakra, és helyettesítsünk be az integrandus számlálójába.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$$

Bontsuk fel ezután a törtet két tört összegére azáltal, hogy külön osztjuk el a számláló tagjait, majd egyszerűsítsünk, amelyik törtben erre lehetőség van.

$$\int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx$$

Ezzel sikerült elérnünk, hogy az integrandus két alapintegrál különbsége lett. A tagokat külön-külön integrálhatjuk, s az alapintegrálokat egyszerűen be kell helyettesítenünk.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} - 1 dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int 1 dx = -\operatorname{ctg} x - x + c$$

A primitív függvényt sikerült meghatározni, de talán az olvasóban felvetődik az a kérdés, miért nem a nevezőben álló $\sin^2 x$ helyére helyettesítettünk $1 - \cos^2 x$ -et, hiszen ezt is megtehettük volna. Természetesen ez az átalakítás sem lett volna hibás, de ekkor nem tudtuk volna tovább alakítani az integrandust. A törtek esetében többször hajthatunk végre olyan átalakítást, hogy külön osztjuk el a számláló tagjait. Ehhez arra van szükség, hogy a számlálóban álljon összeg vagy különbség, és ne a nevezőben. Az is fontos volt a további alakítás során, hogy a számláló egyik tagja megegyezett a nevezővel, s így tudtunk egyszerűsíteni. Az egyszerűsítés után kapott 1 pedig alapintegrál, hiszen $\int 1 dx = x + c$.

De térjünk vissza a forgástest térfogatához.

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x dx = \left[-\operatorname{ctg} x - x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.68 \end{aligned}$$

A keletkező forgástest térfogata tehát 0.68 egység.