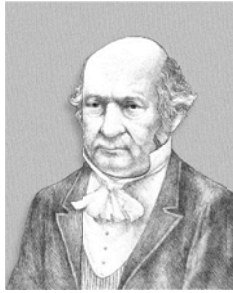


## 1.1. Térbeli vektorok definíciója, műveletek és ezek geometriai jelentései



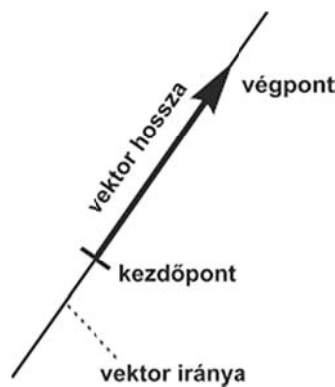
W. R. Hamilton (1805–1865) ír matematikus, csillagász és fizikus volt az, aki először használta a vektor kifejezést. A vektor elnevezés a csillagászatból került át a matematikába. Ott az ellipszis fókuszában álló Napból a bolygókhoz húzott irányított szakasz elnevezésére szolgált (vectus = húzni, vonni).

Vannak olyan mennyiségek, amelyeket a nagyságukkal egyszerűen meg tudunk határozni. Ilyenek például a tömeg, az idő, a hosszúság. Ezek megadásához elegendő egy szám és egy alkalmasan választott mértékegység. Ugyanakkor például az erő, az elmozdulás vagy a sebesség megadásához több információra is szükség van. Például ha egy test elmozdulását szeretnénk leírni, akkor meg kell mondanunk, hogy milyen irányban és mekkora távolságra mozdul el. Hasonlóan, egy test sebességének megadásához tudnunk kell, hogy milyen irányban és mekkora sebességgel halad.

**Definíció (vektor)** A térbeli irányított szakaszokat **vektoroknak** nevezzük. Egy vektort három adat határoz meg egyértelműen, a nagysága (hossza), az állása (melyik egyenessel párhuzamos), és az irányítása (az egyenesen merre mutat).

**Definíció:** Két vektor egyenlő, ha mindhárom jellemzőjük azonos, azaz ha van olyan párhuzamos eltolás, amellyel fedésbe hozhatók.

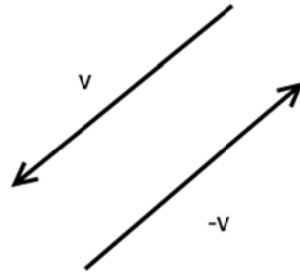
**Jelölések:** Ha egy  $\mathbf{v}$  vektor az  $A$  kezdőpontból a  $B$  végpontba mutat, akkor a következő jelöléseket használhatjuk:  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \underline{v}$ .



**Definíció:** A  $\mathbf{v}$  vektor hosszán a vektort szemléltető szakasz hosszát értjük. Jele:  $\|\mathbf{v}\|$ . Ha ez az érték 1, akkor a vektort **egységvektornak** nevezzük.

**Definíció:** Azt a vektort, amelynek hossza 0, **nullvektornak** nevezzük. A nullvektor iránya tetszőleges, azaz minden vektorral párhuzamos és minden vektorra merőleges. Jele:  $\mathbf{0}$ .

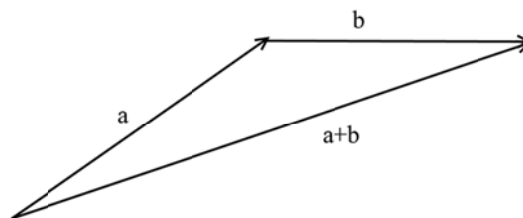
**Definíció:** A  $\mathbf{v}$  **ellentettjének** nevezzük és  $-\mathbf{v}$ -vel jelöljük a  $\mathbf{v}$ -vel egyenlő hosszúságú, azonos állású, de ellentétes irányítottságú vektort.



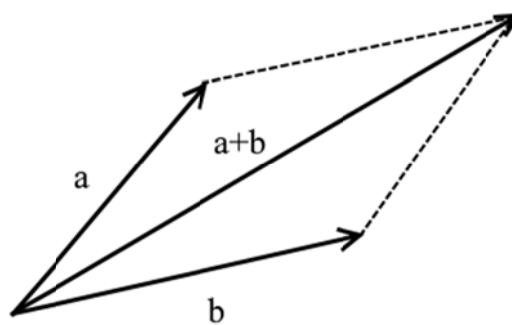
## Műveletek vektorokkal

### Összeadás

Definíció: Adott két vektor **a** és **b**. Az **a** és **b** vektorokat toljuk el önmagukkal párhuzamosan úgy, hogy a **b** vektor kezdőpontja az **a** vektor végpontjába kerüljön. Ekkor az **a** vektor kezdőpontjából a **b** vektor végpontjába mutató vektort az **a** és **b** vektorok összegének (eredőjének) nevezzük. Jele: **a+b**



háromszög módszer



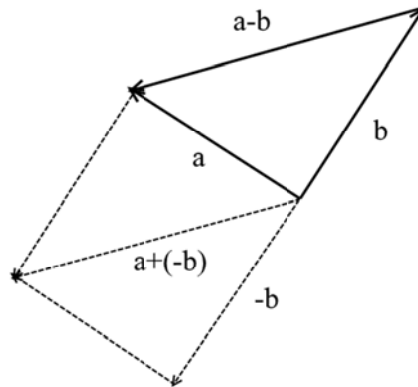
paralelogramma szabály

Tétel: A vektorok összeadása kommutatív  $\mathbf{a+b=b+a}$  és asszociatív:  $(\mathbf{a+b})+\mathbf{c=a+(b+c)}$  művelet.

Alkalmazás: A testek mozgásának vizsgálatakor (dinamikai és kinematikai feladatokban) a következő modellt használjuk: a testet a tömegközéppontjával helyettesítjük, és vizsgáljuk az erre ható erők eredőjét. A tömegpont nyugalomban van, ha a rá ható erők eredője zérus (Newton I. törvénye miatt; összegük nullvektor).

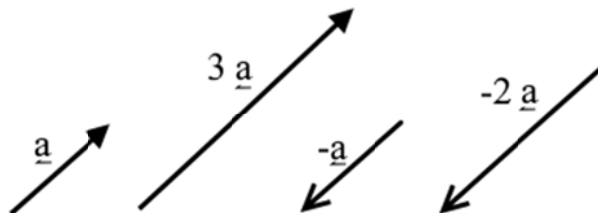
## Különbség

Definíció:  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok különbségén értjük és  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ -vel jelöljük azt vektort, amelyet  $\mathbf{b}$ -hez adva  $\mathbf{a}$ -t kapunk. (Toljuk az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorokat közös kezdőpontba. Ekkor a  $\mathbf{b}$  vektor végpontjából az  $\mathbf{a}$  vektor végpontjába mutató vektort az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok különbségének nevezzük és  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ -vel jelöljük.)



## Vektorok szorzása valós számmal (skalárral)

Definíció: Az  $\mathbf{a}$  nem nullvektor és a  $\lambda \neq 0$  valós szám szorzatán értjük és  $\lambda \mathbf{a}$ -val jelöljük azt az  $\mathbf{a}$  vektorral azonos állású vektort, amelynek hossza  $|\lambda| |\mathbf{a}|$ , irányítása  $\lambda > 0$  esetében azonos,  $\lambda < 0$  esetén pedig ellentétes az  $\mathbf{a}$  vektor irányításával.



A skalárral való szorzásra teljesülnek a következők:

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{asszociativitás})$$

$$\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b} \quad (\text{disztributivitás})$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a} \quad (\text{disztributivitás})$$

Definíció: Legyenek  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  tetszőleges vektorok,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  pedig tetszőleges valós számok. Ekkor a  $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$  vektort a  $\mathbf{v}_i$  vektorok  $\lambda_i$  együtthatókkal képzett lineáris kombinációjának nevezzük.

Megjegyzés: a fenti együtthatók között szerepelhetnek negatív, pozitív vagy akár nulla értékűek is.

## Vektorok felbonthatósága

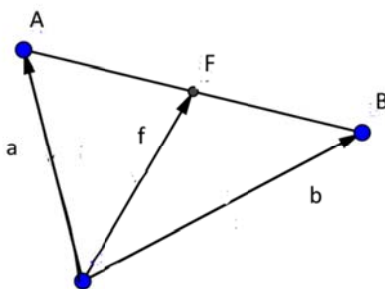
Tétel: (síkban) Ha az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nullvektoroktól különböző nem párhuzamos vektorok, akkor az általuk meghatározott sík bármely  $\mathbf{v}$  vektora egyértelműen előállítható az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok lineáris kombinációjaként, azaz  $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$  alakban, ahol  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  egyértelműen meghatározott valós számok. Ez azt jelenti, hogy a  $\mathbf{v}$  vektor egyértelműen felbontható  $\mathbf{a}$ -val és  $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevőkre. Ebben az esetben szokás az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorokat bázisvektoroknak nevezni.

Tétel: (térben) Legyen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  három nullvektortól különböző nem egysíkú vektor. Ekkor minden térbeli vektor egyértelműen előáll az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy minden  $\mathbf{v}$  vektorhoz egyértelműen van olyan  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  valós számhármass, melyre  $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$ . Ilyenkor az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorokat bázisnak és ezeket az együtthatókat a  $\mathbf{v}$  vektor  $\mathbf{a}$ ;  $\mathbf{b}$ ;  $\mathbf{c}$  bázishoz tartozó koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzés: Ez a tétel azt jelenti, hogy ha rögzítünk három nem egysíkú vektort a térben, tehát megadunk egy bázist, akkor minden vektort egyértelműen tudunk számhármassal jellemezni ebben a bázisban. A három, nem egysíkú, nullvektortól különböző vektor bármilyen lehet, tehát tetszőleges számú bázist megadhatunk. Természetesen más bázishoz, más koordináták tartoznak ugyanazon  $\mathbf{v}$  vektor esetén. A továbbiakban majd egy kitüntetett bázist fogunk használni, mégpedig az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  egységnyi hosszúságú, egymásra páronként merőleges vektorokat, amelyek ebben a sorrendben **jobbsodrású rendszert** alkotnak.

Definíció: Az origóból a tér egy tetszőleges pontjába mutató vektort a pont **helyvektorának** nevezzük.

Tétel: Legyen  $A$  és  $B$  két különböző térbeli pont, jelölje  $F$  az  $AB$  szakasz felezőpontját, a megfelelő pontokba mutató helyvektorok pedig legyenek rendre  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{f}$ . Ekkor a felezőpontba mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, azaz  $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ .



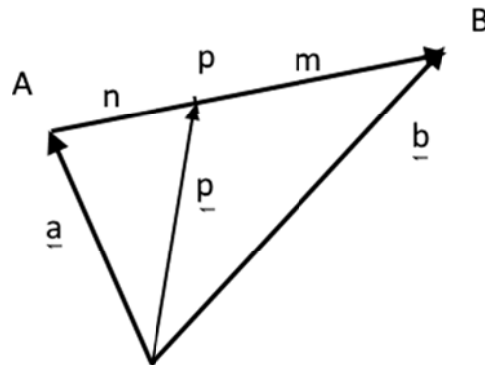
Bizonyítás: Ezt a bizonyítást azért érdemes levezetni, mivel a benne szereplő egyszerű ötletet más feladatok megoldásánál is használni fogjuk.

Az ábráról leolvasható a következő összefüggés:  $\mathbf{f} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AF}$  és  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ .

Elvégezve a behelyettesítést:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$

Tétel: Legyen  $A$  és  $B$  két különböző térbeli pont, és  $P$  az  $AB$  szakasz azon pontja, melyre  $AP:PB=n:m$ . Ha a megfelelő pontokba mutató helyvektorok  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ , és  $\underline{p}$ , akkor

$$\underline{p} = \frac{m \cdot \underline{a} + n \cdot \underline{b}}{m+n}$$


Tétel: Ha az  $ABC$  háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  és  $\underline{c}$ , akkor a háromszög súlypontjába mutató  $\underline{s}$  helyvektor:

$$\underline{s} = \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}).$$

**1. feladat:** Egy testre 100N nagyságú északi és egy 200N nagyságú nyugati irányba mutató erő hat. Mekkora és milyen irányú erővel lehet a testet nyugalomban tartani?

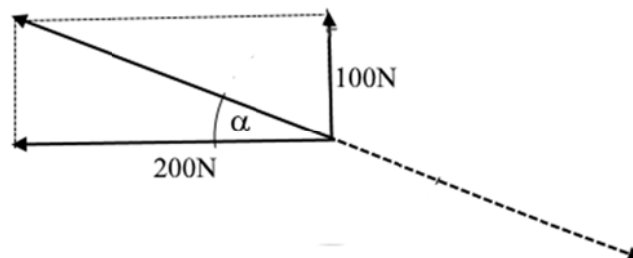
**Megoldás**

Mivel a két vektor merőleges egymásra, ezért az összegük (eredőjük) nagysága Pitagorasz tétellel számolható:

$$\|\underline{F}_e\| = \sqrt{100^2 + 200^2} \approx 223,6N$$

Meghatározzuk az eredő nyugati irányhoz képest észak felé vett hajlásszögét, melyet  $\alpha$ -val jelölünk:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{100}{200} \quad \alpha \approx 26,57^\circ$$

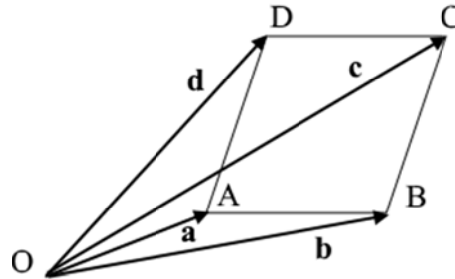


Ha a testet nyugalomban akarjuk tartani, akkor az eredővel ellentétes irányú, vele azonos nagyságú erőt kell alkalmaznunk. Tehát egy  $\approx 223,6N$  nagyságú, a keleti iránytól lefelé  $\approx 26,57^\circ$ -ban hajló erőre van szükség.

- 2. feladat:** Az  $ABCD$  paralelogramma csúcsainak helyvektorai rendre  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$ . Fejezzük ki a  $\mathbf{d}$  vektort az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok segítségével!

**Megoldás**

A helyvektorok a sík egy tetszőleges pontjából az adott pontba mutató vektorok.



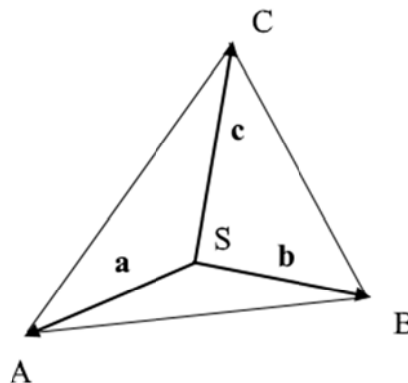
Az ábráról a következő olvasható le:

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

- 3. feladat:** Az  $ABC$  háromszög  $S$  súlypontjából a csúcsokba mutató helyvektorok legyenek rendre  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ . Határozzuk meg az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok összegét!

**Megoldás**

Készítsünk ábrát.



Legyen  $F$  az  $AB$  oldal felezőpontja, ezért  $\overrightarrow{SF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ . A súlypont a súlyvonal csúctól távolabbi harmadoló pontja, ezért  $\mathbf{c} = -2 \cdot \overrightarrow{SF} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ . Innen átrendezéssel a következőt kapjuk:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

- 4. feladat:** Az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalának felezőpontja legyen  $D$ . Szerkesszük meg a  $D'$  pontot, amelyre  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$ . Állítsuk elő a  $\overrightarrow{D'A}$  és  $\overrightarrow{D'B}$  vektorokat az  $\overrightarrow{AB}$  és  $\overrightarrow{AC}$  vektorok segítségével.

### Megoldás

Mivel a feltétel szerint  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$  teljesül, ezért a  $D'$  pont a  $D$  pont  $A$ -ra vonatkozó középpontos tükröképe. Ekkor

$$\overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2}$$

$$\overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{2}.$$

**5. feladat:** Az  $ABC$  háromszögben  $AB : AC = 2 : 3$ . Az  $A$  csúcsból induló belső szögfelező a szemközti oldalt  $D$  pontban metszi. Adjuk meg az  $\overrightarrow{AD}$  vektort  $\overrightarrow{AB}$  és  $\overrightarrow{AC}$  segítségével.

### Megoldás

A feladat megoldásához ismernünk kell a szögfelezők osztásarányára vonatkozó tételt. Eszerint: Bármely háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

Ennek értelmében a  $D$  pont a  $BC$  oldalon egy ötödölő pont úgy, hogy

$$\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}.$$

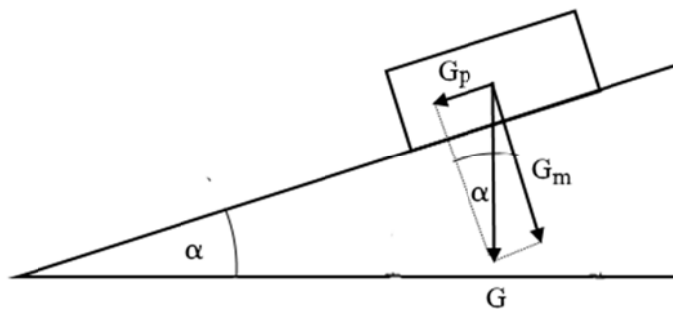
Ekkor:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{5}.$$

**6. feladat:** Bontsuk fel a  $20^\circ$ -os lejtőre helyezett  $500\text{N}$  súlyú testre ható súlyerőt a lejtővel párhuzamos és arra merőleges összetevőre.

### Megoldás

Rajzoljuk fel az ábrát.



A rajzon találunk merőleges szárú szögeket, ezért a keresett összetevők a következő módon számolhatók.

A lejtővel párhuzamos összetevő:

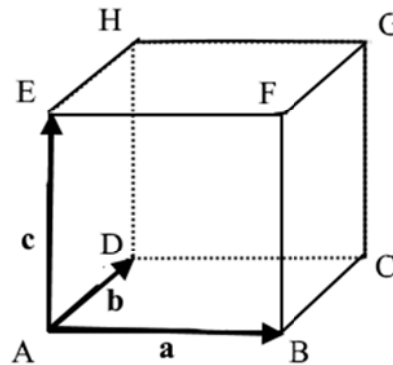
$$\sin \alpha = \frac{\|G_p\|}{G} \quad \sin 20^\circ = \frac{\|G_p\|}{500N} \quad \|G_p\| \approx 171N$$

$$\cos \alpha = \frac{\|G_m\|}{G} \quad \cos 20^\circ = \frac{\|G_m\|}{500N} \quad \|G_m\| \approx 470N.$$

**7. feladat:** Az  $ABCDEFGH$  kocka  $A$  csúcsából a szomszédos csúcsokba mutató vektorok legyenek:  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$ . Fejezzük ki az  $A$  csúcsból az összes többi csúcsba mutató vektort az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok segítségével. Számoljuk ki a keresett vektorok hosszát, ha a kocka élének hossza 5 egység.

### Megoldás

Készítsünk ábrát.



A vektorok hosszának kiszámításánál a Pitagorasz tételt kell alkalmazni.

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \quad \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$