

**Motivációs példa:** Egy ház  $h_0$  magasságban lévő ablakán kinyúlva elhajítunk egy testet függőlegesen felfelé  $v_0$  kezdeti sebességgel. Adjuk meg a test sebességét és talajtól való távolságát az idő függvényében. A légellenállást hanyagoljuk el, tekintsük úgy, hogy csak a gravitációs erő hat a testre.

A megoldás során Newton II. törvényéből indulhatunk ki, mely szerint  $F = ma$ . Mivel a testre most csak a gravitációs erő hat, így  $F = mg$ . Ezt felhasználva  $mg = ma$ , amiből kapjuk, hogy  $a = g$ , azaz a gyorsulás állandó, és értéke minden pillanatban a gravitációs gyorsulással egyenlő. Így lényegében egy függvényünk van, ami a gyorsulást írja le az idő függvényében. Fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy a gyorsulás-idő függvény a sebesség idő függvény deriváltja. Ha tehát a gyorsulás ismeretében szeretnénk leírni a sebességet, akkor olyan függvényt kell keresnünk, aminek az ismert gyorsulás-idő függvény a deriváltja. Ha sikerül ilyen függvényt találnunk, akkor továbbléphetünk, mert azt is tudjuk fizikából, hogy a sebesség-idő függvény az elmozdulás-idő függvénynek a deriváltja. A sebesség-idő függvény ismeretében tehát olyan függvényt kell keresnünk, aminek a sebesség idő függvény a deriváltja. Amint látható, kétszer is olyan problémával találjuk magunkat szembe, melyben ismerünk egy függvényt, és olyan függvényt kell keresnünk, aminek ez az ismert függvény a deriváltja. Az alábbiakban ezzel a problémával foglalkozunk majd.

### Elméleti összefoglaló:

**Definíció:** A  $F(x)$  függvényt a  $f(x)$  függvény primitív függvényének nevezzük, ha  $F'(x) = f(x)$ .

Egy  $f(x)$  függvénynek nem csak egy primitív függvénye van. Tekintsük például a  $f(x) = \cos x$  függvényt. Ennek nyilván primitív függvénye a  $F(x) = \sin x$  függvény, hiszen  $(\sin x)' = \cos x$ . De primitív függvény lesz a  $F_1(x) = \sin x + 1$  függvény is, mert  $(\sin x + 1)' = (\sin x)' + 1' = \cos x + 0 = \cos x$ .

Sőt, ha ezt így meggondoltuk, akkor azt mondhatjuk,  $f(x)$ -nek végtelenül sok primitív függvénye van, mert bármilyen konstans hozzáadhatunk  $\sin x$ -hez, mindenképpen olyan függvényt kapunk, aminek deriváltja  $\cos x$ , hiszen a konstans deriváltja 0 lesz. Ezek alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  függvénynek primitív függvénye a  $F(x)$  függvény, akkor bármely  $F(x) + c$  függvény is primitív függvénye, ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

Felvetődik azonban a kérdés, hogy ilyen módon megkaphatunk-e minden olyan függvényt, ami primitív függvénye  $f(x)$ -nek? A válasz erre igen, ezt is megfogalmazhatjuk egy tételben.

**Tétel:** Ha  $F_1(x)$  és  $F_2(x)$  is primitív függvénye  $f(x)$ -nek, akkor  $F_1(x) - F_2(x)$  konstans függvény.

Amint láthatjuk, egy  $f(x)$  függvény primitív függvényei egy halmazt alkotnak, s ezen halmaz bármely két eleme csak egy konstansban tér el egymástól. Elég tehát egy elemet ismernünk ebből a halmazból, mert akkor az összes elemet megkaphatjuk ezen elemből különböző konstansok hozzáadásával. Mivel a primitív függvények halmazát ilyen egyszerűen megkaphatjuk, ezért egy fogalmat definiálunk.

**Definíció:** Az  $f(x)$  függvény primitív függvényeinek halmazát az  $f(x)$  függvény határozatlan integráljának nevezzük, és  $\int f(x) dx$ -szel jelöljük.

Ha  $F(x)$  egy primitív függvénye  $f(x)$ -nek, akkor  $\int f(x) dx = F(x) + c$ , ahol  $c$  tetszőleges konstans.

Amint a fentiekből látható, a határozatlan integrálás vagy másképp a primitív függvény keresés a deriválás megfordításának tekinthető. Ezért a továbbiakban úgy haladhatunk, hogy tekintjük az alapderiváltakat, és azokat megfordítva az úgynevezett alapintegrálokat kapjuk.

Például azt az alapderiváltat, hogy  $(\sin x)' = \cos x$  az  $\int \cos x dx = \sin x + c$  formában fordítjuk meg, és írjuk alapintegrálként. Néhány esetben a megfordításon egy kicsit alakítunk. Például ha a  $(\cos x)' = -\sin x$  alapderiváltból indulunk ki, akkor az egyszerű megfordítás

$\int -\sin x dx = \cos x + c$  lenne, de ezt inkább  $\int \sin x dx = -\cos x + c$  formában írjuk, hiszen

nyilván  $(-\cos x)' = \sin x$  is igaz. Hasonlóan a  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$  alapderiváltból az

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$  alapintegrált kapjuk.

Vannak olyan elemi alapfüggvényeink, melyeknek deriváltja csak előjelben különbözik. Ilyen például az  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  és az  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Ilyenkor nem szükséges

mindkettőt megfordítanunk, hanem elég csak az egyiket. Az  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

alapintegrál mellé nem szükséges még az  $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$  is. Ugyanígy elegendő

az  $(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$  és  $(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$  alapderiváltak megfordításából az

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c$  alapintegrált írni.

Az így kapott alapintegrálokat egy táblázatban foglaljuk össze. Ez lényegében az alapderiváltak táblázatának megfordítása, olyan apróbb változtatásokkal, amikről fentebb írtunk.

### Az alapintegrálok táblázata:

$\int k \, dx = kx + c, \, k \in \mathbb{R}$	$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int e^x \, dx = e^x + c$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x  + c$	
$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c$	$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c$
$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx = -\operatorname{cth} x + c$	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsh} x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arch} x + c, \, x > 1$
$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c, & \text{ha }  x  < 1 \\ \operatorname{arch} x + c, & \text{ha }  x  > 1 \end{cases}$	

Néhány alapintegrállal kapcsolatban szeretnénk megjegyzést tenni. Az egyik a hatványok

integrálásra vonatkozó  $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  alapintegrál. Itt arra hívjuk fel

nyomatékosan a figyelmet, hogy a  $-1$ -edik hatvány kivétel. Bár a hatványokat általában úgy integráljuk, hogy a kitevőt eggyel megnöveljük, és osztunk az új kitevővel, a  $-1$ -edik hatvány esetén nem ez történik. Mivel  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  a természetes alapú logaritmus, azaz  $\ln x$  deriváltja,

ezért az  $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$  alapintegrált kapjuk. Ez csak pozitív  $x$ -ekre igaz, hiszen a

logaritmus csak ekkor értelmezhető. Belátható azonban, hogy negatív  $x$ -ek esetén

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(-x) + c$  igaz, s ezt együttesen  $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$  formában foglalhatjuk össze. Ez

így már pozitív és negatív  $x$ -ekre is igaz.

Az utolsó alapintegrál  $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c, & \text{ha } |x| < 1 \\ \operatorname{arch} x + c, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$ , azért ilyen bonyolult, mert az

$\operatorname{arth} x$ -nek és  $\operatorname{arch} x$ -nek megegyezik a deriváltja, mindegyiknek  $\frac{1}{1-x^2}$ . A két függvény azonban máshol értelmezhető, ezért szerepel az integrálás eredményében  $x$  értékétől függően vagy az egyik, vagy a másik függvény. Szerencsére ez a bonyolult alapintegrál ki is kerülhető. A későbbiekben megismerünk majd egy olyan módszert, aminek segítségével másképp tudjuk integrálni ezt a függvényt.

Az alapintegrálok megismerése után jó lenne, ha ahhoz hasonló szabályokat is megfogalmazhatnánk, mint amilyenek a deriválásnál szerepeltek, mert akkor az alapintegrálokból műveletekkel képezett függvényeket is tudnánk integrálni. Nézzük milyen szabályok igazak a primitív függvényekre.

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a  $k \cdot f(x)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  függvénynek is létezik primitív függvénye, és  $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$ .

**Bizonyítás:** Legyen  $F(x)$  egy primitív függvénye  $f(x)$ -nek, azaz  $F'(x) = f(x)$ , vagy másképp  $\int f(x) dx = F(x) + c$ . Ekkor nyilván  $k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$ , ami azt jelenti, hogy  $k \cdot F'(x)$  egy primitív függvénye  $k \cdot f(x)$ -nek, azaz  $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + c = k \cdot \int f(x) dx$ .

A tétel másképp úgy fogalmazható, hogy integrálás során konstans szorzó kiemelhető az integrálból.

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor az  $f(x) + g(x)$  függvénynek is létezik primitív függvénye, és  $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ .

**Bizonyítás:** Legyen  $F(x)$  az  $f(x)$  és  $G(x)$  a  $g(x)$  egy-egy primitív függvénye, tehát  $F'(x) = f(x)$  és  $G'(x) = g(x)$ , vagy  $\int f(x) dx = F(x) + c$  és  $\int g(x) dx = G(x) + c$ . Ekkor nyilván  $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ , azaz  $F(x) + G(x)$  primitív függvénye  $f(x) + g(x)$ -nek, tehát  $\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + c = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ .

Ezt a tételt fogalmazhatjuk meg úgy is, hogy függvények összegét tagonként integrálhatjuk. A fenti két tételből nyilván az is következik, hogy függvények különbsége esetén  $\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ .

A deriválásnál ezután az következett, hogy a függvények szorzatára, hányadosára és az összetett függvényekre is sikerült deriválási szabályt találnunk. Ezek a deriválási szabályok

bármilyen szorzat, tört vagy összetett függvény esetén alkalmazhatóak voltak. Sajnos az integrálásnál ilyen szabályok nincsenek. Nem lehet kimondani olyan összefüggést, amelynek segítségével bármilyen függvények szorzata, vagy hányadosa, vagy kompozíciója integrálható lenne. A későbbiekben megismerünk majd szabályokat, melyek segítségével függvények szorzatát integrálhatjuk, de ezek a szabályok nem alkalmazhatók bármilyen függvények szorzata esetében, csak bizonyos speciális esetekben. Megismerünk majd olyan szabályt is, amit függvények hányadosának integrálására használhatunk, de csak bizonyos speciális törtekre alkalmazható. Speciális összetett függvényekre is lesz majd integrálási szabály, de azt sem lehet általánosan alkalmazni minden összetett függvényre. Éppen ezért az integrálás több találékonyságot igényel majd, mint amire a deriválásnál szükség volt.

### Kidolgozott feladatok:

**1. feladat:** Határozzuk meg az  $f(x) = 3x^4 - 2\sin x + 8e^x$  függvény határozatlan integrálját, azaz  $\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x dx$ -et!

**Megoldás:** Mivel függvények összegét illetve különbségét kell integrálnunk, ezért tagonként végezhetjük el az integrálást. Így három integrált kapunk.

$$\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x dx = \int 3x^4 dx - \int 2\sin x dx + \int 8e^x dx$$

Az egyes integrálokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 3x^4 dx - \int 2\sin x dx + \int 8e^x dx = 3\int x^4 dx - 2\int \sin x dx + 8\int e^x dx$$

Már csak alapintegrálok szerepelnek, melyeket egyszerűen behelyettesítünk. Az első részben

$$\text{egy hatványfüggvényt kell integrálnunk, így itt az } \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

alapintegrálra hivatkozva eggyel megnöveljük a kitevőt, s osztunk az új kitevővel. A második részben az  $\int \sin x dx = -\cos x + c$ , a harmadikban pedig az  $\int e^x dx = e^x + c$  alapintegrálra hivatkozunk.

$$3\int x^4 dx - 2\int \sin x dx + 8\int e^x dx = 3\frac{x^5}{5} - 2(-\cos x) + 8e^x + c = \frac{3}{5}x^5 + 2\cos x + 8e^x + c$$

Nem írjuk ki mindegyik rész integrálásánál külön-külön a  $c$  integrációs konstans, mert  $c$  bármilyen valós értéket felvehet. Ha többször szerepelne, akkor a konstansok összege is egy konstans lenne, ami bármilyen valós értéket felvehetne. Ezért elég mindig csak egyetlen konstans írunk a primitív függvény után.

**2. feladat:**  $\int 7\sqrt[4]{x} dx$

**Megoldás:** Első lépésként a konstans szorzót emeljük ki az integrálból.

$$\int 7\sqrt[4]{x} dx = 7\int \sqrt[4]{x} dx$$

Az alapintegrálok között a különböző gyökök a hatványokban szerepelnek. A deriválásnál is az történt, hogy a gyököket törtkitevős hatványként írtuk, és hatványként felírt alakot deriváltuk. Most ugyanígy járunk el az integrálás során is.

$$7\int \sqrt[4]{x} dx = 7\int x^{\frac{1}{4}} dx$$

Ezután már hivatkozhatunk az  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  alapintegrálra.

$$7 \int x^{\frac{1}{4}} dx = 7 \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + c = 7 \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5} x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5} \sqrt[4]{x^5} + c.$$

Az eredményt írhatjuk törtkitevős hatványként, vagy gyökös formában is.

**3. feladat:**  $\int \frac{6}{x^5} dx$

**Megoldás:** Kezdjük most is a konstans szorzó kiemelésével.

$$\int \frac{6}{x^5} dx = 6 \int \frac{1}{x^5} dx$$

Az integrálandó függvényben, amit integrandusnak is szoktak hívni, most egy hatvány reciprokát látjuk. Ezt felírhatjuk negatív kitevős hatvány formájában, s így ismét csak egy hatványt kell majd integrálnunk. Ugyanígy járhattunk el az ilyen függvények deriválásakor is.

$$6 \int \frac{1}{x^5} dx = 6 \int x^{-5} dx$$

A hatvány integrálásakor most is növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$6 \int x^{-5} dx = 6 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = 6 \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{6}{4} x^{-4} + c = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^4} + c$$

Az eredményt most írhatjuk negatív kitevős hatvány, vagy tört formájában is.

**4. feladat:**  $\int \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} dx$

**Megoldás:** Az integrálást ebből az alakból nyilván nem tudjuk végrehajtani, ezért először átalakítjuk az integrálandó függvényt. A gyököket írjuk át törtkitevős hatvánnyá, amint azt egy korábbi feladatban tettük.

$$\int \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} dx = \int \left( x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx$$

Végezzük el a zárójelen belül a szorzást. Azonos alapú hatványok szorzása esetén egyetlen hatványt kapunk, melyben a kitevők összeadódnak.

$$\int \left( x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int \left( x^{1+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int \left( x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx$$

Most egy hatványt tovább hatványozunk. Ha ezt egyetlen hatványként írjuk, akkor a kitevők szorzódnak.

$$\int \left( x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}} dx = \int x^{\frac{3}{10}} dx$$

Az integrandust sikerült egyetlen hatvánnyá alakítunk, így végre tudjuk hajtani az integrálást.

$$\int x^{\frac{3}{10}} dx = \frac{x^{\frac{3}{10}+1}}{\frac{3}{10}+1} + c = \frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} x^{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} \sqrt[10]{x^{13}} + c$$

Az eredmény most is több alakban írható. Hagyhatjuk törtkitevős hatványként, de írhatjuk gyökös formában is.

A feladatból látható, hogy az integrandus megadott alakjából nem lehet elvégezni az integrálást. De az átalakítások után már olyan formában kapjuk meg a függvényt, ami egyetlen alapintegrál. Az integrálási feladatokban nagyon sokszor nem az okozza a fejtörést, hogy magát az integrálási lépést hogyan hajtsuk végre, hanem hogyan készítsük elő az integrálást, azaz milyen módon alakítsuk át az integrandust az integrálás előtt. Az átalakítások során nagyon gyakran olyan azonosságokra hivatkozunk, amelyek a középiskolából ismertek. Különösen szeretnénk kiemelni a hatványozás azonosságait, mert a hatványok gyakran fordulnak elő, s átalakításukra több azonosságot is ismerünk.

**5. feladat:**  $\int \sqrt{x} (8x - 5\sqrt[3]{x}) dx$

**Megoldás:** Az integrandusunk most egy szorzat. Amint az korábban szerepelt, ilyen esetben nincs általánosan alkalmazható integrálási szabály. Át kellene ezért alakítanunk úgy a függvényt, hogy már ne szerepeljen szorzás. Amint a korábbiakban, írjuk át most is a gyököket törtkitevős hatvánnyá, majd végezzük el a szorzást, azaz bontsuk fel a zárójelet.

$$\int \sqrt{x} (8x - 5\sqrt[3]{x}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left( 8x - 5x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \int 8x^{\frac{1}{2}} x - 5x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx$$

Az integrandus mindkét tagjában azonos alapú hatványok szorzata áll, melyeket egyetlen hatványként is írhatunk. A kitevők ekkor összeadódnak.

$$\int 8x^{\frac{1}{2}} x - 5x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx = \int 8x^{\frac{1}{2}+1} - 5x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} dx = \int 8x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{5}{6}} dx$$

Sikerült elérnünk, hogy már nincs függvények szorzása, hanem csak különbsége. Ekkor tagonként integrálhatunk. Az egyes tagokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 8x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{5}{6}} dx = \int 8x^{\frac{3}{2}} dx - \int 5x^{\frac{5}{6}} dx = 8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{5}{6}} dx$$

A két hatványt immár külön-külön integráljuk.

$$8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{5}{6}} dx = 8 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 5 \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + c = \frac{16}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{30}{11} x^{\frac{11}{6}} + c = \frac{16}{5} \sqrt{x^5} - \frac{30}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + c$$

Mivel törtkitevős hatványokat integráltunk, az eredmény most is írható hatványként és gyökös alakban is.

**6. feladat:**  $\int \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{x^2} dx$

**Megoldás:** Az integrálandó függvény most egy tört. Sajnos a törtekre sincsen minden esetben használható integrálási szabály. A függvényt ezért ismét átalakítjuk az integrálás előtt. Első lépésben a gyököt írjuk hatványként.

$$\int \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{x^2} dx = \int \frac{4x - 9x^{\frac{1}{2}} + 6}{x^2} dx$$

Mivel a tört számlálójában összeg illetve különbség áll, a törtet több törtre bonthatjuk úgy, hogy az egyes tagokat külön-külön osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{4x - 9x^{\frac{1}{2}} + 6}{x^2} dx = \int \frac{4x}{x^2} dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + \int \frac{6}{x^2} dx$$

A konstans szorzókat ezután kiemelhetjük az egyes integrálokból.

$$\int \frac{4x}{x^2} dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + \int \frac{6}{x^2} dx = 4 \int \frac{x}{x^2} dx - 9 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + 6 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Az első két tagban azonos alapú hatványok hányadosa áll, amiket egyetlen hatvánnyá alakíthatunk. Ekkor a kitevők különbségét kell vennünk. A harmadik tagban egy hatvány reciproka szerepel, amit negatív kitevős hatványként írhatunk.

$$4 \int \frac{x}{x^2} dx - 9 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + 6 \int \frac{1}{x^2} dx = 4 \int x^{1-2} dx - 9 \int x^{\frac{1}{2}-2} dx + 6 \int x^{-2} dx =$$

$$= 4 \int x^{-1} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx$$

Már csak egy-egy hatványt kell integrálnunk. Vigyázzunk azonban, mert az első tagban éppen  $x^{-1}$  áll, aminek integrálása különbözik a többi hatvány integrálásától. Éppen ezért, ez ne is írjuk hatványként, hanem inkább  $\frac{1}{x}$  alakban.

$$4 \int \frac{1}{x} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx$$

Most hajtsuk végre az integrálásokat.

$$4 \int \frac{1}{x} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx = 4 \ln|x| - 9 \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 6 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

$$= 4 \ln|x| - 9 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 6 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 4 \ln|x| + 18x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-1} + c = 4 \ln|x| + \frac{18}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x} + c$$

Mint általában az ilyen feladatoknál, az eredmény most is több alakban adható meg.

Most pedig térjünk vissza ahhoz a motivációs példához, amivel a lecke indult, és adjunk választ az abban feltett kérdésekre.

**7. feladat:** Egy ház  $h_0$  magasságban lévő ablakán kinyúlva elhajítunk egy testet függőlegesen felfelé  $v_0$  kezdeti sebességgel. Adjuk meg a test sebességét és talajtól való távolságát az idő függvényében. A légellenállást hanyagoljuk el, tekintsük úgy, hogy csak a gravitációs erő hat a testre.

**Megoldás:** Amint azt a korábbiakban megállapítottuk, a test gyorsulását az idő függvényében az  $a(t) = g$  konstans függvény írja le. A fizikai példában a megszokott jelölésekhez képest annyi az eltérés, hogy a függvényt nem  $f$  jelöli hanem  $a$ , a változót pedig nem  $x$  jelöli hanem  $t$ . (Természetesen ha valakit ez zavar, akkor használja az  $f(x) = g$  jelölést.) Mivel a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, így ezt integrálnunk kell a sebesség-idő függvény meghatározásához. Az integrálás során  $t$  lesz a változó, így most nem  $dx$  szerepel majd az integrálban hanem  $dt$ .

$$v(t) = \int a(t) dt = \int g dt$$



Mivel  $g$  konstans, hivatkozunk az  $\int k \, dx = kx + c$ ,  $k \in \mathbb{R}$  alapintegrálra, s így az alábbi kapjuk:

$$\int g \, dt = gt + c$$

Megkaptuk tehát a sebességet időben leíró függvényt, mely  $v(t) = gt + c$  lett.

Ez azonban nem egyetlen függvényt jelent, hanem végtelen sokat, hiszen a  $c$  integrációs konstans bármilyen valós értéket felvehet. Ez így nyilván nincs rendben, hiszen mi egy konkrét függvényt keresünk most, ami ennek a konkrét mozgásnak a sebességét írja le. Itt ne feledkezzünk el arról, hogy a test sebessége adott a mozgás kezdetén, azaz tudjuk, hogy a  $t = 0$  időpillanatban  $v_0$  a sebesség felfelé. Ezt úgy is írhatjuk, hogy  $v(0) = -v_0$ . A negatív előjel azért van, mert amikor azt mondtuk a gyorsulás  $g$ , akkor hallgatólagosan kijelöltük a mozgás leírásában a pozitív irányt. Mivel a gyorsulást vettük pozitívnak, ami lefelé mutat, így a felfelé irány negatív lesz. Ezért a felfelé irányuló  $v_0$  nagyságú kezdeti sebességet  $-v_0$ -ként kell írunk.

Helyettesítsünk a sebességet leíró függvénybe  $t$  helyére  $0$ -t.

$$v(0) = g \cdot 0 + c = c$$

Tegyük egyenlővé a kétféle módon kapott  $v(0)$ -t, s kapjuk  $c = -v_0$ .

Ezután felírhatjuk azt a konkrét függvényt, ami az adott mozgás sebességét leírja.

$$v(t) = gt - v_0$$

Egy középiskolából ismert összefüggést kaptunk, melyet ott a függőleges hajítások kinematikája során ismertünk meg.

Ha most továbbmegyünk, és le szeretnénk írni a test talajtól való távolságát is az idő függvényében, akkor ezt a függvényt is integrálnunk kell, hiszen a sebesség az elmozdulás idő szerinti deriváltja.

$$s(t) = \int v(t) \, dt = \int gt - v_0 \, dt$$

Az integrálást természetesen tagonként hajtjuk végre, s az első tagból a konstans  $g$  szorzó kiemelhető.

$$\int gt - v_0 \, dt = g \int t \, dt - \int v_0 \, dt = g \frac{t^2}{2} - v_0 t + c^*$$

Megkaptuk tehát az elmozdulást az időben leíró függvényt, ami  $s(t) = g \frac{t^2}{2} - v_0 t + c^*$  lett.

Ebben is szerepel azonban egy integrációs konstans, amit most  $c^*$ -gal jelöltünk, hogy megkülönböztessük az előző konstanstól. Nyilván most ennek a konstansnak is konkrét értéke kell legyen. Tudjuk, hogy kezdetben  $h_0$  magasságban van test, azaz ennek a függvénynek  $t = 0$  esetén  $h_0$  az értéke. Jelölésben  $s(0) = h_0$ . De  $s(0)$ -t úgy is megkaphatjuk, hogy az  $s(t)$  függvényben  $t$  helyére  $0$ -t helyettesítünk.

$$s(0) = g \frac{0^2}{2} - v_0 \cdot 0 + c^* = c^*$$

Tegyük egyenlővé a kettőt, s azt kapjuk:  $c^* = h_0$ .

Ezek után felírhatjuk azt a konkrét függvényt, amely az adott mozgás során a test helyét írja le az idő függvényében.

$$s(t) = g \frac{t^2}{2} - v_0 t + h_0$$

Ismét olyan összefüggést kaptunk, ami már a középiskolából ismert.