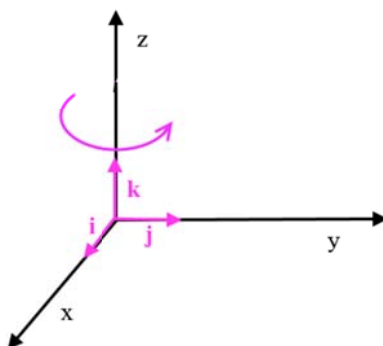


2.1. Descartes-féle koordináta rendszer, vektorok koordinátás alakja

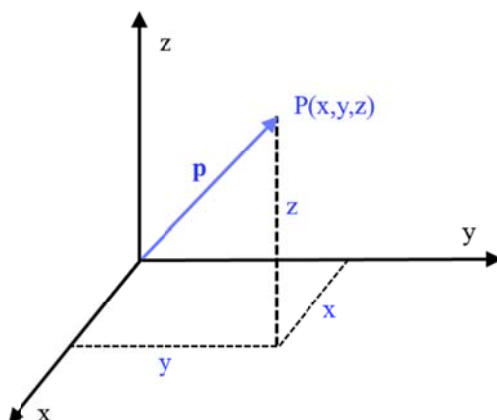
A Descartes-féle koordináta-rendszerben a három tengely egymásra merőleges, és egy pont helyzetét – koordinátáit – az x , y és z tengelyektől mért távolsága határozza meg. A tengelyek metszéspontja az origó. Az origóból kiinduló, és a tengelyek irányába mutató, egymásra kölcsönösen merőleges egységvektorokat nevezzük alapvektoroknak vagy bázisvektoroknak. Az origóból az $(1, 0, 0)$ pontba mutató (x irányú) egységvektor jele \mathbf{i} , a $(0, 1, 0)$ pontba mutató (y irányú) egységvektor jele \mathbf{j} , míg a $(0, 0, 1)$ pontba mutató (z irányú) egységvektor jele \mathbf{k} .

Az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} egységnyi hosszú, egymásra páronként merőleges vektorok ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. Ez azt jelenti, hogy ha a \mathbf{k} vektor irányával szemben nézve letekintünk az \mathbf{i} és a \mathbf{j} vektorok által kifeszített síkra, akkor ezen a síkon az \mathbf{i} vektort az óramutató járásával ellentétes irányú 90° szögű forgatás viszi a \mathbf{j} vektorba.



Az előző fejezetben tárgyalt, vektorok egyértelmű felbonthatóságára vonatkozó tétel alapján, egy $P(x, y, z)$ pontba mutató helyvektor egyértelműen felírható a tengelyeken vett egységvektorok (bázisvektorok) lineáris kombinációjaként $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban.

Ekkor az (x, y, z) rendezett számhármast a \mathbf{p} vektor Descartes koordinátáinak nevezzük, szokásos jelölés: $\mathbf{p} = (x, y, z)$



Műveletek koordinátákkal (összeadás, kivonás, skalárral való szorzás)

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Tétel: Legyen $A = (a_1, a_2, a_3)$ és $B = (b_1, b_2, b_3)$ két tetszőleges pont, továbbá \mathbf{a} és \mathbf{b} az adott pontokba mutató helyvektorok. Ekkor

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

1. **feladat:** Határozzuk meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$, \mathbf{a}_e vektorokat, ha $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{b} = (-3, 4, -2)$! (jelölje \mathbf{a}_e az \mathbf{a} irányú egységvektort)

Megoldás

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, 2, 3) + (-3, 4, -2) = (-2, 6, 1)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, 2, 3) - (-3, 4, -2) = (4, -2, 6)$$

$$3\mathbf{a} = 3(1, 2, 3) = (3, 6, 9)$$

$$2\mathbf{b} - 4\mathbf{a} = 2(-3, 4, -2) - 4(1, 2, 3) = (-10, 0, -16)$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Jelölje \mathbf{a}_e az \mathbf{a} irányú egységvektort. Ekkor

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

2. **feladat:** Döntsük el, hogy párhuzamosak-e az adott vektorpárok:

a) $\mathbf{a} = (-4, 12, 8)$ és $\mathbf{b} = (-2, 6, 4)$

b) $\mathbf{a} = (9, 3, 12)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, 5)$

Megoldás

Két vektor párhuzamos, ha az egyik vektor előáll a másik nullától különböző számszorosaként, azaz ha létezik olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, amelyre $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.

- a) Könnyen látható, hogy ebben a részben a $\lambda = 2$ értéket választva, $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, tehát ezek a vektorok párhuzamosak.

Észrevehető, hogy ha $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, akkor $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ összefüggés is teljesül, azaz a

vektorok azonos indexű koordinátáinak hányadosai egyenlők. Ezzel a módszerrel:

$$2 = \frac{-4}{-2} = \frac{12}{6} = \frac{8}{4}.$$

b) Kihasználva, hogy ha az azonos indexű koordináták hányadosai egyenlők, akkor az egyik vektor a másik számszorosa, azaz párhuzamosak. Ebben az esetben:

$$\frac{9}{3} = \frac{3}{1} \neq \frac{12}{5}.$$

Tehát ez a két vektor nem párhuzamos.

3. feladat: Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi pontok egy egyenesre esnek-e? $A(1, -2, 3)$, $B(-1, 1, -1)$ és $C(-3, -2, 3)$.

Megoldás

A három pont akkor illeszkedik egy egyenesre, ha \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} vektorok párhuzamosak egymással. (Természetesen itt másképpen is ki lehetne választani két-két vektort.)

Legyenek \mathbf{a} , \mathbf{b} , és \mathbf{c} az A , B és C pontokban mutató helyvektorok. Ekkor:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 3, -4) \text{ és } \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-4, 0, 0).$$

Mivel:

$$\frac{-4}{-2} \neq \frac{0}{3} = \frac{0}{-4},$$

ezért a három pont nem esik egy egyenesre.

4. feladat: Az előző feladatban megadott pontok nincsenek egy egyenesen, tehát egy háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszög területét!

Megoldás

A terület kiszámításához ismerni kell mindhárom oldal hosszát. Az oldalak hossza nem más, mint az adott pontok távolsága. Az A és B pontok távolsága az \overrightarrow{AB} vektor hosszával egyezik meg.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 3, -4) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}.$$

Hasonlóan számoljuk a másik két oldal hosszát is:

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (-2, -3, 4) \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

A háromszög területe:

$$K = \sqrt{29} + 4 + \sqrt{29} \approx 14,77.$$

5. feladat: Határozzuk meg az AB szakasz F felezőpontját és az A -hoz közelebb eső H_A harmadoló pontjának koordinátáit, ha $A(4,1,-2)$ és $B(3,-1,1)$!

Megoldás

Használjuk fel, hogy az F pontba mutató \mathbf{f} helyvektor felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ alakban. Mivel ez egy vektoriális egyenlet, ez az összefüggés a koordinátákra külön-külön is felírható, azaz

$$f_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad f_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}.$$

Tehát:

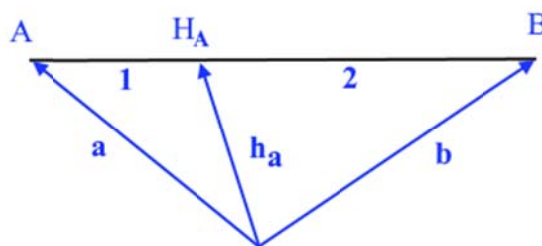
$$f_1 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} \quad f_2 = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \quad f_3 = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

A kapott eredmények alapján a felezőpont:

$$F\left(\frac{7}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

A H_A pontba mutató \mathbf{h}_a helyvektor szintén felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével:

$$\mathbf{h}_a = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}.$$



Elvégezve a számolást:

$$\mathbf{h}_a = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} = \frac{2}{3}(4,1,-2) + \frac{1}{3}(3,-1,1) = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

Tehát a keresett harmadoló pont koordinátái:

$$H_A\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

6. feladat: Adott az $\mathbf{a} = (-4, 3, 0)$ vektor. Állítsuk elő

- az \mathbf{a} -val azonos irányú \mathbf{a}_e egységnyi hosszúságú vektort
- az \mathbf{a} -val ellentétes irányú, 8 hosszúságú \mathbf{b} vektort!

Megoldás

a) Tudjuk, hogy

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a},$$

ezért ebbe az összefüggésbe behelyettesítve:

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2}} (-4, 3, 0) = \frac{1}{5} (-4, 3, 0) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

- b) Először adjuk meg az \mathbf{a} vektorral azonos irányú, irányítottaságú és egységnyi hosszúságú \mathbf{a}_e vektort. Ezt az előző részben számoltuk ki,

$$\mathbf{a}_e = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right).$$

Ezt az egységnyi hosszúságú vektort nyújtjuk meg 8 egységre:

$$8\mathbf{a}_e = 8 \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right) = \left(-\frac{32}{5}, \frac{24}{5}, 0\right)$$

Képezzük az ellentett vektorát, azaz szorozzuk meg (-1) -gyel:

$$\mathbf{b} = -1(8\mathbf{a}_e) = -1 \left(-\frac{32}{5}, \frac{24}{5}, 0\right) = \left(\frac{32}{5}, -\frac{24}{5}, 0\right).$$