

## 2.2. Vektorok skaláris szorzata

Emlékeztető az 1. leckéből:

Definíció: Tetszőleges  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor skaláris szorzatán az  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi$  mennyiséget értjük, ahol  $\varphi$  a két vektor által közbezárt szög.

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Definíció: ha két vektor merőleges egymásra, akkor ezeket ortogonális vektoroknak nevezzük.

### A skaláris szorzat számolása koordinátákkal

Tétel: Legyen  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  és  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ . Ekkor

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Megjegyzés: ortonormált bázisvektorok esetén  $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = 0$ .

Tétel: Legyen  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  és  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  nullvektortól különböző két vektor. Ekkor az általuk közbezárt szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Következmény: Ha

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$  akkor a két vektor hegyesszöget zár be egymással,
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0$  akkor a két vektor tompaszöget zár be egymással,
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$  akkor a két vektor merőleges egymásra.

Tétel: Legyen adott  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor, ahol  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor az  $\mathbf{a}$  vektor egyértelműen felbontható  $\mathbf{b}$  vektorral párhuzamos ( $\mathbf{a}_p$ ) és  $\mathbf{b}$  vektorra merőleges összetevőkre ( $\mathbf{a}_m$ ), ahol

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p.$$

**1. feladat:** Határozzuk meg a következő vektorpárok szögét:

- a)  $\mathbf{a} = (5, -1, 2)$   $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$
- b)  $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$   $\mathbf{b} = (3, 6, 0)$
- c)  $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$   $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$

### Megoldás

Jelöljük a két vektor által közbezárt szöget  $\varphi$ -el. Ekkor a

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

összefüggés alapján fogunk számolni.

a) Ha  $\mathbf{a} = (5, -1, 2)$  és  $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$ , akkor

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{10}{\sqrt{30} \sqrt{14}} \approx 0,4880 \rightarrow \varphi \approx 60,79^\circ.\end{aligned}$$

b) Ha  $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$  és  $\mathbf{b} = (3, 6, 0)$ , akkor

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{4 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 2 \cdot 0}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 6^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{0}{\sqrt{24} \sqrt{45}} = 0 \rightarrow \varphi = 90^\circ.\end{aligned}$$

c) Ha  $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$  és  $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$ , akkor

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{(-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{-3}{\sqrt{9} \sqrt{14}} \approx -0,2673 \rightarrow \varphi \approx 105,50^\circ.\end{aligned}$$

**2. feladat:** Adjuk meg  $z$  értékét úgy, hogy  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok merőlegesek legyenek egymásra, ha  $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$  és  $\mathbf{b} = (4, -1, z)$ .

### Megoldás

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát úgy kell  $z$  értékét megválasztani, hogy  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$  teljesüljön.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot z = 0 \rightarrow -7 + 2z = 0 \\ z &= 3,5.\end{aligned}$$

**3. feladat:** Határozzuk meg az  $ABC$  háromszög legnagyobb szögét, ha  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(-2, -1, 1)$  és  $C(2, 1, -1)$ !

### Megoldás

Mivel csak a legnagyobb szög a kérdés, jó lenne eldönteni, melyik csúcsonál található, különben mindegyik szöget ki kell számolnunk, s kiválasztani a legnagyobbat. Mivel a háromszögekben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, a legnagyobb szög a legnagyobb oldallal szemben lesz. Az oldalak hosszának meghatározásához írjuk fel az  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  és  $\overline{BC}$  vektorokat.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 1) \rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1) \rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (4, 2, -2) \rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24}.$$

Mivel  $BC$  a leghosszabb oldal, ezért az  $A$  csúcsnál lévő  $\alpha$  szög a háromszög legnagyobb szöge. Ez a szög lényegében az  $AB$  és  $AC$  vektorok által bezárt szög, így:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{14} \sqrt{2}} = \\ &= \frac{-4}{\sqrt{14} \sqrt{2}} \approx -0,7559 \rightarrow \varphi \approx 139,10^\circ. \end{aligned}$$

**4. feladat:** Bizonyítsuk be, hogy az  $\mathbf{a} = (2, -3, -6)$ ,  $\mathbf{b} = (6, -2, 3)$  és  $\mathbf{c} = (3, 6, -2)$  vektorok kockát feszítenek ki!

#### Megoldás

Ez úgy értendő, hogy ha a három vektort közös kezdőpontból mérjük fel, akkor egy kocka egy csúcsból induló három élvektorát kapjuk.

Ennek teljesüléséhez az szükséges, hogy a vektorok hossza azonos legyen, s egymásra páronként merőlegesek legyenek, azaz bármelyik merőleges legyen bármelyikre.

Számoljuk először a vektorok hosszát:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

A másik két vektor hossza is ugyanennyi, hiszen a koordináták csak fel vannak cserélve, valamint az előjelek változnak, de ez a négyzet miatt nem számít.

Már csak a páronkénti merőlegességet kell ellenőrizni. A merőlegességhez az kell, hogy bármely két vektor skaláris szorzata 0 legyen.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) + (-6) \cdot 3 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 6 + (-6) \cdot (-2) = 0$$

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 6 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0.$$

Mivel a merőlegességek is teljesülnek, ezért ezek a vektorok valóban kockát feszítenek ki.

**5. feladat:** Bontsuk fel az  $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$  vektort a  $\mathbf{b} = (-3, -1, 1)$  vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre!

### Megoldás

A feladathoz lényegében két képletet kell ismernünk:

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p.$$

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1}{\left(\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)^2} (-3, -1, 1) = \frac{-8}{11} (-3, -1, 1) = \left(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{8}{11}\right)$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p = (2, 1, -1) - \left(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{8}{11}\right) = \left(-\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{3}{11}\right).$$