

Elméleti összefoglaló: Az alapintegrálok ismeretében, és az előző leckében megismert egyszerű tételek felhasználásával a függvények elég széles körében meghatározható a primitív függvény. Az alábbiakban olyan módszereket ismertetünk, melyekkel a primitív függvényt még szélesebb körben meghatározhatjuk.

Tétel: Ha tudjuk, hogy az f függvény primitív függvénye F , akkor

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c,$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$.

A tételeket sok esetben bizonyítás nélkül adjuk csak meg, de az egyszerűbb esetekben megmutatjuk a bizonyítást is.

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy az integrálás eredményének $\left(\frac{F(ax+b)}{a} + c \right)$ a

deriváltja az integrálandó függvénnyel $(f(ax+b))$ egyenlő. Ehhez használjuk fel az összetett függvények deriválási szabályát és azt, hogy ha F primitív függvénye f -nek, akkor $F' = f$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{F(ax+b)}{a} + c \right)' &= \left(\frac{F(ax+b)}{a} \right)' + c' = \frac{1}{a} (F(ax+b))' + 0 = \\ &= \frac{1}{a} F'(ax+b) \cdot (ax+b)' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b) \end{aligned}$$

A feladatokban való alkalmazáshoz a tételt másképp úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek belső függvénye lineáris, akkor integráljuk a külső függvényt, s összetételt alkotunk az eredeti belső függvénnyel, valamint osztunk a belső függvényből x együtthatójával.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: $\int \sin(3x + \pi) dx$

Megoldás: Az integrandusunk jól láthatóan olyan összetett függvény, amelynek belső függvénye elsőfokú polinom, vagy más szóval lineáris. Alkalmazhatjuk a fent megismert szabályt.

A külső függvény $\sin x$. Ennek integrálja: $\int \sin x dx = -\cos x + c$.

A belső függvény $3x + \pi$, ez felel meg $ax + b$ -nek, azaz $a = 3$ és $b = \pi$.

Ezután egyszerűen behelyettesítünk a szabályba.

$$\int \sin(3x + \pi) dx = \frac{-\cos(3x + \pi)}{3} + c$$

Az ilyen feladatokban általában nem szükséges sok átalakítást végrehajtani az integranduson, a hangsúly azon van, hogy felismerjük, ilyen típusú összetett függvényünk van. Ha ez sikerült, akkor már könnyű alkalmazni a szabályt.

2. feladat: $\int \frac{1}{5x-8} dx$

Megoldás: Az integranduson megint azt ismerhetjük fel, hogy olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú.

A külső függvény most nyilván az $\frac{1}{x}$. Ennek integrálja a következő: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$.

A belső függvény most $5x - 8$, tehát $a = 5$ és $b = 8$.

Alkalmazva az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{5x-8} dx = \frac{\ln |5x-8|}{5} + c.$$

3. feladat: $\int \frac{1}{\cos^2 5x} dx$

Megoldás: Ha most deriválnunk kellene, akkor azt mondanánk, jelen esetben egy

többszörösen összetett függvényünk van. Külső függvény az $\frac{1}{x^2}$, középső a $\cos x$, és belső az

$5x$. Nem muszáj azonban ennyire felbontanunk a függvényt, sőt integrálásnál nem is célszerű. Az előző felbontásban szereplő belső függvény, az $5x$, egy lineáris függvény. Csak annyit kell tennünk, hogy amit az előbb külső és középső függvénynek tekintettünk, azt nem

bontjuk fel, hanem egyben tekintjük külső függvénynek. Azaz most $\frac{1}{\cos^2 x}$ lesz a külső

függvény. Azért célszerű ez a felbontás, mert így a külső függvény egy alapintegrál. Tudjuk

ugyanis, hogy $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$.

Amint már említettük, a belső függvény $5x$, azaz $a = 5$ és $b = 0$.

Alkalmazva a korábban ismertetett szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{\cos^2 5x} dx = \frac{\operatorname{tg} 5x}{5} + c.$$

4. feladat: $\int \sqrt[3]{4x+7} dx$

Megoldás: Az integrandus ebben az esetben is olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú.

A külső függvény nyilván a $\sqrt[3]{x}$, melynek integrálja: $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c$.

A belső függvény $4x+7$, tehát $a = 4$, és $b = 7$.

Alkalmazva az előzőekben ismertetett szabályt, a következőt kapjuk:

$$\int \sqrt[3]{4x+7} dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{(4x+7)^4}}{4} + c = \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x+7)^4} + c.$$

5. feladat: $\int e^{4-x} dx$

Megoldás: Most is olyan függvényt kell integrálnunk, melynek belső függvénye lineáris.

A külső függvény most az e^x , melynek integrálja önmaga, azaz: $\int e^x dx = e^x + c$.

A belső függvény $4-x$, tehát $a = -1$, és $b = 4$.

Alkalmazva az előzőekben ismertetett szabályt, a következőt kapjuk:

$$\int e^{4-x} dx = \frac{e^{4-x}}{-1} + c = -e^{4-x} + c .$$

A feladatban arra kell figyelni, hogy a lineáris belső függvényben most fordított a sorrend, azaz a konstans áll elől, és az elsőfokú rész hátul. Valamint ne feledkezzünk el arról sem, hogy az együtthatóba az előjel is beletartozik. Mivel most $-x$ szerepel, ezért az elsőfokú részben az együttható $a = -1$.