

Készült az:

Intézményi fejlesztések a felsőfokú oktatás minőségének és hozzáférhetőségének együttes javítása érdekében a Széchenyi István Egyetemen - EFOP-3.4.3-16-2016-00016, a B.3. Agrár képzési terület fejlesztéséhez hozzájáruló további tevékenységek alprojekt keretében

I. Modul: Valószínűség-számítás

1. lecke: A valószínűség fogalma

A valószínűségelmélet, a valószínűség számítás egy olyan tudomány, amely véletlen jelenségekkel foglalkozik. Feladata e véletlen jelenségek összefüggéseinek, törvényszerűségeinek a feltárása, a közöttük fellelhető kapcsolatok elemzése.

A véletlen jelenségekkel foglalkozó kísérleteket, megfigyeléseket véletlen kísérleteknek, eredményeiket pedig véletlen eseményeknek nevezzük. A kísérletek nemcsak mesterségesen állíthatók elő, hanem kísérleteknek nevezzük az olyan jelenségek megfigyelését is, amely előidézésében nem vettünk részt.

A valószínűségelmélet tárgya a véletlen tömegjelenségek törvényszerűségeinek vizsgálata. A valószínűség fogalmának meghatározásához a relatív gyakoriság fogalmát kell először meghatározni.

Valamely kísérlettel kapcsolatos esemény bekövetkezéseinek számát a kísérlet n -szeri megismétlése során megszámálhatjuk. Jelöljük a vizsgált eseményt A -val, és tegyük fel, hogy a kísérletsorozatban az A -esemény k_A -szor következik be. A k_A -számot az A -esemény gyakoriságának nevezzük. Képezzük a k_A/n -hányadost, amelyet az **A -esemény relatív gyakoriságának** nevezzük.

Jelölése:

$$g(A) = \frac{k_A}{n}$$

A relatív gyakoriságot százalékban is ki szoktuk fejezni. Egy esemény relatív gyakorisága megadja, hogy az összes megfigyelés során hány százalékban következett be egy adott esemény.

1. bemutató feladat:

Dobjunk fel egy pénzérmét 20-szor egymás után. Legyen az A -esemény az, hogy írást dobunk. Jegyezzük el az A -esemény bekövetkezésének gyakoriságát, majd számítsuk ki a relatív gyakoriságot.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_A	1	1	2	2	3	3	3	4	5
$g(A)$	1	0,50	0,67	0,50	0,60	0,50	0,43	0,50	0,56

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k_A	6	7	7	8	9	9	9	10	10	10	11
$g(A)$	0,60	0,64	0,58	0,62	0,64	0,60	0,56	0,59	0,56	0,53	0,55

n : a dobások száma, k_A : az A -esemény bekövetkezésének gyakorisága $g(A)$: az A -esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága (k_A/n).

Megfigyelhető, hogy a relatív gyakoriság statikusan ingadozik egy számérték körül.

Végezzünk el egy másik kísérletet. A dobások száma most 80; 160; 240; 320; 400; 480 és 560 legyen.

n	80	160	240	320	400	480	560
k_A	40	86	122	163	200	241	287
$g(A)$	0,500	0,538	0,508	0,509	0,500	0,502	0,513

Ha ugyanezt a kísérletet elvégezzük 80; 160; 240; 320; 400; 480 és 560 dobással, látható, hogy a dobások számának növekedésével a gyakoriság is nő. A relatív gyakoriság pedig mindig 0,5 körül ingadozik. Az is megfigyelhető, hogy minél nagyobb a kísérletek száma (n), a relatív gyakoriság ingadozása annál kisebb.

A kísérlet során mindannyiszor más és más egymásutánját kapjuk a „fej” és „írás” eredményeknek, mégis az a törvényszerűség fog bekövetkezni, hogy a relatív gyakoriság a kísérletek számának növelésekor a 0,5 közelében fog ingadozni.

Azt a számértéket, amely körül a véletlen esemény relatív gyakorisága statisztikai ingadozást mutat, az adott esemény **valószínűségének** nevezzük.

Az A -esemény valószínűségét $P(A)$ -val jelöljük. Mivel a relatív gyakoriság számértéke 0 és +1 között ingadozhat, hiszen k értékére fennáll $0 \leq k \leq n$, így a valószínűségre is igaz, hogy

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Másként megfogalmazva:

$$\lim g(A) = P(A)$$

A valószínűség és a relatív gyakoriság rokon fogalmak, sok esetben (tapasztalati úton) a relatív gyakoriságokon keresztül becsüljük meg adott esemény bekövetkezésének valószínűségét. A valószínűséget azonban formailag élesen meg kell különböztetni a relatív gyakoriságtól. Míg a valószínűség egy adott sztochasztikus modellben állandó, azaz rögzített szám, addig a relatív gyakoriság a véletlentől függően esetről esetre változik.

Ha egy esemény bekövetkezése lehetetlen, akkor k_A -értéke minden n -re zérus, vagy a relatív gyakoriság és a valószínűség is zérus.

$$P(\emptyset) = 0$$

Ha egy esemény mindig bekövetkezik, akkor $k_A = n$, a relatív gyakoriság és a valószínűség pedig 1-gyel egyenlő. Ez a biztos esemény.

$$P(H) = 1$$

Megjegyzés:

- Csak statisztikus szabályosságot (véletlen) mutató eseményeknél beszélünk valószínűségről.
- A valószínűség nem utal arra, hogy melyik esemény fog bekövetkezni legközelebb.
- Ha a kísérleti körülmények megváltoznak, akkor az esemény bekövetkezésének valószínűsége is megváltozik.

A valószínűség axiómái:

I. $0 \leq P(A) \leq 1$

II. $P(\emptyset) = 0$ és $P(H) = 1$

III. Ha A és B egymást kizáró esemény ($A \cap B = \emptyset$), akkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

IV.

Ha A_1, A_2, \dots, A_n egymást kizáró események, vagyis $A_i \cap A_k = \emptyset$ és $i \neq k$, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

a.) Ha az A -esemény maga után vonja B -eseményt, azaz $A \subset B$ fennáll, akkor

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

b.) Legyen A és B egy kísérlet két eseménye akkor annak valószínűsége, hogy közülük legalább az egyik teljesül:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

c.) Ha A, B, C egy kísérlet három eseménye, akkor:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

d.) Ha A_1, A_2, \dots, A_n eseményrendszert alkotnak, akkor

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

e.) Ha valamely kísérlet eredménye A -esemény és ennek ellentettje \bar{A} -esemény, akkor

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Illetve

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. bemutató feladat:

Legyen A és B két esemény, és legyen $P(A) = 1/2$ és $P(B) = 1/4$, valamint $P(A \cap B) = 1/12$. Határozzuk meg:

- $P(\bar{A})$;
- $P(\bar{B})$;
- $P(A \cup B)$;
- $P(\overline{A \cup B})$;
- $P(\bar{A} \cup \bar{B})$;
- $P(\overline{A \cap B})$;
- $P(A \setminus B)$;
- $P(B \setminus A)$ események valószínűségét!

Megoldás:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5$;
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,25 = 0,75$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/2 + 1/4 - 1/12 = 2/3$;
- $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$;
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$;
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$;
- $P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$;
- $P(B \setminus A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$.

3. bemutató feladat:

Egy évfolyam diákjai angol, német és francia nyelvből tettek nyelvvizsgát. Legyen az A -esemény az angol, B -esemény a német és C -esemény a francia nyelvvizsgával rendelkező hallgatók. Az egyes események valószínűsége pedig az alábbi:

$$\begin{array}{llll} P(A) = 0,35 & & P(A \cap B) = 0,15 & \\ P(B) = 0,40 & \text{és} & P(A \cap C) = 0,20 & \text{illetve} & P(A \cap B \cap C) = 0,10 \\ P(C) = 0,30 & & P(B \cap C) = 0,20 & & \end{array}$$

Mi a valószínűsége annak, hogy ha kiválasztunk az évfolyamból egy hallgatót, az legalább az egyik nyelvből rendelkezik nyelvvizsgával?

Megoldás:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0,35 + 0,40 + 0,30 - 0,15 - 0,20 - 0,20 + 0,10 = 0,60$$

A kiválasztott hallgató 0,60 valószínűséggel rendelkezik legalább az egyik nyelvből nyelvvizsgával.