

## II. Modul: Valószínűség változó, valószínűségi eloszlások

### 4. lecke Valószínűségi változó

#### 4.1. A valószínűségi változó fogalma

A véletlen tömegjelenségeken megfigyelt változót, amely azzal jellemzi a véletlen tömegjelenséget, hogy konkrét értékeit különböző valószínűséggel veszi fel, valószínűségi változónak nevezzük.

Azaz: ha egy T-eseménytér elemi eseményeihez 1-1 számértéket rendelünk, így egy függvényt értelmezünk, amelyet valószínűségi változónak nevezünk, és  $\xi$ -vel (kszí) jelöljük.

A valószínűségi változó pontos értékét nem tudjuk előre meghatározni, viszont tudjuk, hogy milyen értékei lehetségesek, azaz ismerjük a valószínűségi változó értékkészletét.

Ha a valószínűségi változó csak egymástól különálló meghatározott értékeket vehet fel, akkor diszkrét eloszlású valószínűségi változóról beszélünk; röviden diszkrét valószínűségi változónak nevezzük.

Ha a valószínűségi változó egy megadott intervallum összes értékét felveheti, akkor folytonos eloszlású valószínűségi változóról beszélünk; röviden folytonos valószínűségi változónak nevezzük.

Legyen  $A_k$  a T-eseménytér azon elemi eseményeinek a részhalmaza, amelyekhez  $\xi$  az  $x_k$ -értéket rendeli, akkor a

$$p_k = P(\xi = x_k) = P(A_k)$$

valószínűségeket a  $\xi$ -változó eloszlásának nevezzük, és azt mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó az  $x_k$ -értéket  $p_k$  valószínűséggel veszi fel. Az  $A_k$ -események teljes eseményrendszert alkotnak, ezért:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{K=1}^{\infty} P(\xi = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = 1$$

#### 1. bemutató feladat:

Kétszer feldobunk egy érmét egymás után. A két dobás négy azonos valószínűséget eredményezhet:

ff      if      fi      ii

*Megoldás:*

A fej és az írások valószínűsége egyaránt  $1/2=0,5$ , így mind a négy esemény bekövetkezésének valószínűsége  $1/4=0,25$

A  $\xi$  valószínűségi változó egyenlő a „fej-dobások” számával. A fej értékeinek száma: 0, 1 2 lehet. Az egyes értékek a következő valószínűségeket vehetik fel:

$$\begin{aligned} p_2 &= P(\xi=2) = 0,25 \\ p_1 &= P(\xi=1) = 0,50 \\ p_0 &= P(\xi=0) = 0,25 \\ \Sigma p_k &= 0,25 + 0,5 + 0,25 = 1 \end{aligned}$$

#### 2. bemutató feladat:

Egy pakli magyar kártyából kétszer húzunk úgy, hogy a kihúzott lapot visszatesszük. Jelentse  $\xi$  a kihúzott piros lapok számát. Írjuk fel  $\xi$ -eloszlását!

**Megoldás:**

Mivel kétszer húzunk, ezért a kihúzott pirosak száma lehet 0, 1, 2. A pakliban 32 lap van, ebből 8 piros (24 nem piros). Tehát annak valószínűsége, hogy egy húzás alkalmával pirosat húzunk:  $8/32 = 1/4 = 0,25$ . Nyilván a nem piros valószínűsége  $3/4 = 0,75$ .

Annak valószínűsége, hogy nem húzunk pirosat:  $3/4 * 3/4 = 9/16$

Annak valószínűsége, hogy két pirosat húzunk:  $1/4 * 1/4 = 1/16$

Annak valószínűsége, hogy egy pirosat húzunk:  $2 * 1/4 * 3/4 = 6/16$  (most a pirosat húzhatjuk elsőre vagy másodikkra is)

$$p_2 = P(\xi=2) = 1/16$$

$$p_1 = P(\xi=1) = 6/16$$

$$p_0 = P(\xi=0) = 9/16$$

**4.2. Eloszlásfüggvény**

A  $P(\xi < x)$  értéke csak  $x$  értékétől függ, tehát  $x$ -nek függvénye, ezért  $F(x) = P(\xi < x)$  jelölést alkalmazzuk. Az  $F(x)$  függvényt a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.

Egy  $\xi$  valószínűségi változó  $F(x)$  eloszlásfüggvénye azt adja meg, hogy milyen valószínűséggel vesz fel a  $\xi$  az  $x$ -nél kisebb értéket.

Az  $F(x)$  eloszlásfüggvény tulajdonságai:

a.)  $0 \leq F(x) \leq 1$

b.)  $F(x)$  monoton nő, azaz  $F(x_2) \geq F(x_1)$ , ha  $x_2 \geq x_1$

c.)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  (lehetetlen esemény)

d.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  (biztos esemény)

e.) Minden helyen balról folytonos, azaz  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$

f.)  $P(\xi = a) = \lim_{x \rightarrow a + 0} F(x) = F(a)$

g.)  $P(\xi \geq a) = 1 - P(\xi < a) = 1 - F(a)$

h.)  $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$ . Ez egy nem folytonos függvény, úgynevezett lépcsős függvény, mert  $\xi$  valószínűségi változódiszkrét.

i.) Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:  $F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i)$

**3. bemutató feladat:**

Kétszer feldobunk egy érmét egymás után. A két dobás négy azonos valószínűséget eredményezhet:

ff      if      fi      ii

A fej és az írások valószínűsége egyaránt  $1/2 = 0,5$ , így mind a négy esemény bekövetkezésének valószínűsége  $1/4 = 0,25$

A  $\xi$  valószínűségi változó egyenlő a „fej-dobások” számával. A fej értékeinek száma: 0, 1, 2 lehet. Az egyes értékek a következő valószínűségeket vehetik fel:

$$p_2 = P(\xi=2) = 0,25$$

$$p_1 = P(\xi=1) = 0,50$$

$$p_0 = P(\xi=0) = 0,25$$

**Megoldás:**

A diszkrét  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(1) = P(\xi < 1) = p_0 = 1/4$$

$$F(2) = P(\xi < 2) = p_0 + p_1 = 1/4 + 1/2 = 3/4$$

$$F(3) = P(\xi < 3) = p_0 + p_1 + p_2 = 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$$

Így a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \dots x \leq 0 \\ \frac{1}{4}, & \dots 0 < x \leq 1 \\ \frac{3}{4}, & \dots 1 < x \leq 2 \\ 1, & \dots 2 < x \end{cases} \quad \dots x \in R$$

#### 4. bemutató feladat:

Legyen a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2 \\ \frac{x-2}{3}, & \text{ha } 2 < x \leq 5 \\ 1, & \text{ha } x > 5 \end{cases}$$

Határozzuk meg a következő valószínűségeket:

- $P(\xi < 3)$
- $P(\xi = 4)$
- $P(\xi > 4)$
- $P(3 \leq \xi < 4,5)$
- $P(\xi < 1)$
- $P(\xi > 6)$
- $P(0 \leq \xi < 3)$

Megoldás:

$$a) \quad P(\xi < 3) = F(3) = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b) \quad P(\xi = 4) = \lim_{x \rightarrow 4+} F(x) - F(4) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0, \text{ mivel } F(x) \text{ folytonos függvény (azt is mondhattuk volna, hogy } \xi \text{ folytonos eloszlású, tehát az egyenlőség valószínűsége 0).}$$

$$c) \quad P(\xi > 4) = 1 - P(\xi \leq 4), \text{ hiszen } P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

$$\text{Továbbá } P(\xi \leq 4) = P(\xi < 4) + P(\xi = 4) = F(4) + 0 = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Így a keresett valószínűség: } P(\xi > 4) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$d) \quad P(3 \leq \xi < 4,5) = F(4,5) - F(3) = \frac{4,5-2}{3} - \frac{3-2}{3} = \frac{2,5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1,5}{3} = 0,5.$$

$$e) \quad \text{Jusson eszünkbe, hogy } F(x) \text{ 2-nél kisebb értékekre 0, így } P(\xi < 1) = F(1) = 0.$$

$$f) \quad P(\xi > 6) = 1 - P(\xi \leq 6) = 1 - [P(\xi = 6) + P(\xi < 6)] = 1 - [0 + F(6)] = 1 - (0 + 1) = 0, \text{ hiszen } F(x) \text{ 5-nél nagyobb } x\text{-ekre 1.}$$

Megjegyzés: az előző két pontra úgy is válaszolhattunk volna, hogy  $\xi$  értékei 2 és 5 közé esnek, ezért az 1-nél kisebb és a 6-nál nagyobb értéknek is 0 a valószínűsége.

$$g) \quad P(0 \leq \xi < 3) = F(3) - F(0) = \frac{3-2}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$h) \quad P(0 \leq \xi < 10) = F(10) - F(0) = 1 - 0 = 1.$$

### 4.3. Sűrűségfüggvény

Ha a  $\xi$  valószínűségi változóhoz tartozó  $F(x)$  függvény folytonos és differenciálható, akkor folytonosnak nevezzük a  $\xi$  valószínűségi változót és annak eloszlását is. Ebben az esetben fennáll, hogy

$$F'(x) = f(x)$$

Egy  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük az  $f(x)$  függvényt, ha ezzel a  $\xi$  valószínűségi változó  $F(x)$  eloszlásfüggvénye az alábbi módon adható meg:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

**Az  $f(x)$  sűrűségfüggvény tulajdonságai:**

a.) Mivel  $\xi$  értéke  $-\infty$  és  $+\infty$  közé esik, ezért:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

b.)  $f(x) > 0$

$$c.) \quad P(\xi < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

$$d.) \quad P(\xi \geq a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

e.) A számegegyenes minden  $(a, b)$  intervalluma esetén:

$$F(b) - F(a) = P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x) dx \text{ fennáll.}$$

### 5. bemutató feladat:

Egy  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 0 \\ 2x - x^2 & \dots 0 < x \leq 1 \\ 1 & \dots 1 < x \end{cases}$$

**Megoldás:**

A  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényét az  $F(x)$  eloszlásfüggvény szakaszonkénti deriválásával kapjuk, azaz

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 0 \\ 2 - 2x & \dots 0 < x \leq 1 \\ 0 & \dots 1 < x \end{cases}$$

**6. bemutató feladat:**

A  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 2 \\ \frac{a}{x^3} & \dots 2 < x \end{cases}, \text{ határozzuk meg az } a\text{-együttható értékét. Írjuk fel a } \xi \text{ valószínűségi}$$

változó eloszlásfüggvényét.

*Megoldás:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \text{ adott függvényünkre } \int_2^{\infty} \frac{a}{x^3} dx = 1, \text{ ebből fejezzük ki } a\text{-együtthatót:}$$

$$a = \frac{1}{\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}}.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \int_2^{\infty} x^{-3} dx = \left[ \frac{x^{-2}}{-2} \right]_2^{\infty} = \left[ \frac{-1}{2x^2} \right]_2^{\infty} = 0 - \left( \frac{-1}{2 \cdot 2^2} \right) = \frac{1}{8}$$

Helyettesítsünk vissza a-együttható képletébe:

$$a = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

Legyen  $x > 2$ , ekkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_2^x \frac{8}{t^3} dt = 8 \int_2^x t^{-3} dt = 8 \left[ \frac{t^{-2}}{-2} \right]_2^x = 8 \left[ \frac{-1}{2t^2} \right]_2^x = 8 \left( \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{8} \right) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

Tehát az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 2 \\ 1 - \frac{4}{x^2} & \dots x > 2 \end{cases}$$

**4.4. Várható érték**

Az eloszlásfüggvény teljes mértékben meghatározza a valószínűségi változó ingadozásait. Adott esetben azonban mégis előfordulhat, hogy szeretnénk a véletlen ingadozást egyetlen számértékkel jellemezni.

Ha  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , amelyeket  $p_1, p_2, \dots, p_n$  valószínűséggel vesz fel, akkor a  $\xi$  valószínűségi változó lehetséges értékeiből ezek valószínűségeinek, mint súlyokkal képezett középértéket a  $\xi$  valószínűségi változó várható értékének nevezzük. Jelölése:

$$M(\xi) = \sum p_k \cdot x_k$$

Ha a  $\xi$  valószínűségi változó végtelen sok diszkrét értéket vehet fel, akkor a várható értéket csak akkor értelmezzük, ha a fenti képlet abszolút konvergens, vagyis

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| \cdot p_k) < \infty$$

Ha a  $\xi$  folytonos valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye  $f(x)$ , akkor a várható értéke:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx ,$$

feltéve, hogy  $\int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx$  konvergens. Ellenkező esetben a diszkrét, illetve folytonos valószínűségi változónak nincs várható értéke.

### 7. bemutató feladat:

Kockadobásnál a  $\xi$  valószínűségi változó a dobott szám értékével egyenlő. Számítsuk ki a várható értéket!

Megoldás:

$$x_k = k \quad (k=1, 2, \dots, 6) \quad p_k = 1/6$$

$$M(\xi) = \sum p_k * x_k = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} x_k = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$$

### 8. bemutató feladat:

Ha egy  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 0 \\ 2 - 2x & \dots 0 < x \leq 1 \\ 0 & \dots x > 1 \end{cases}$$

Számítsuk ki a várható értéket!

Megoldás:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx = \int_0^1 x(2 - 2x) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[ \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}$$

### 9. bemutató feladat:

Egy dobókockát háromszor elgurítunk. Jelentse  $\xi$  a dobott hatosok számát. Számítsuk ki  $\xi$  várható értékét!

Megoldás:

$\xi$  lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3. A hozzájuk tartozó valószínűségek:

$$P(0 \text{ db hatos}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(1 \text{ db hatos}) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P(2 \text{ db hatos}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$P(3 \text{ db hatos}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

Ugyanis minden dobásnál hatféle lehetőségünk van, ez a három dobásra így  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$  -féle lehetőség. Ha nem dobunk hatost, akkor minden dobásnál 5 lehetőségünk van, ez így  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  eset. Ha egy hatost dobunk, akkor ezt háromféleképpen tehetjük (elsőre, másodikra vagy harmadikra) a nem hatosokra pedig  $5 \cdot 5$  -féle lehetőség van, ez így  $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$  eset. A két hatos esete hasonlóan számítható, itt 15 esetet kapunk, három hatost pedig csak egyféleképpen dobhatunk.

Így  $\xi$  eloszlása

$$\xi: \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{125}{216} & \frac{75}{216} & \frac{15}{216} & \frac{1}{216} \end{cases}$$

$\xi$  várható értéke:

$$M(\xi) = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

#### 4.5. Szórás

Egy  $\xi$  valószínűségi változó várható értéke azt a számértéket jelenti, amely körül a változó véletlen ingadozásokat mutat, de az ingadozás mértékét nem lehet megállapítani. Ezt az ingadozást a szórás mutatja meg. Ennek négyzete a szórásnégyzet, amely  $\xi$  és  $M(\xi)$  eltérésnégyzetének várható értéke.

A  $\xi$  valószínűségi változó szórásnégyzetén a

$$D^2(\xi) = M\{\xi - M(\xi)\}^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi)$$

kifejezést értjük

A szórás  $D(\xi)$ -vel jelöljük:

$$D(\xi) = \sqrt{M\{\xi - M(\xi)\}^2} = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)}$$

Ha  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó, amely az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  értékeket  $p_1, p_2, \dots, p_n$  valószínűséggel veszi fel, akkor a  $\xi$  valószínűségi változó szórásnégyzete:

$$D^2(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k - \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k \right)^2$$

Ha a  $\xi$  folytonos valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye  $f(x)$ , akkor a szórásnégyzet értéke –amennyiben létezik–:

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right]^2$$

#### 10. bemutató feladat:

Kockadobásnál a  $\xi$  valószínűségi változó a dobott szám értékével egyenlő. Számítsuk ki a szórás!

Megoldás:

$$x_k = k \quad (k=1, 2, \dots, 6) \quad p_k = 1/6$$

$$M(\xi) = \sum p_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} x_k = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$$

$$D^2(\xi) = M\{\xi - M(\xi)\}^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi)$$

$$M(\xi^2) = \sum_{k=1}^6 p_k \cdot x_k^2 = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 (1 + 4 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}$$

$$[M(\xi)]^2 = \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$D^2(\xi) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(\xi) = \sqrt{\frac{49}{12}} = 1,71$$

**11. bemutató feladat:**

Ha egy  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 0 \\ 2 - 2x & \dots 0 < x \leq 1 \\ 0 & \dots x > 1 \end{cases}$$

Számítsuk ki a szórást!

*Megoldás:*

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x(2 - 2x) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[ \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}$$

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right]^2 = \int_0^1 x^2 \cdot (2 - 2x) dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left[ \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} \right]_0^1 - \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$D(\xi) = \sqrt{\frac{1}{18}} = 0,236$$

**4.6. A valószínűségi változó néhány jellemzője****4.6.1. Medián**

Valamely  $\xi$  valószínűségi változó mediánja,  $med(\xi)$  az a szám, amelyre:

$$P(\xi < med(\xi)) \leq \frac{1}{2} \text{ és } P(\xi \leq med(\xi)) \geq \frac{1}{2}, \text{ ha } \xi \text{ valószínűségi változó diszkrét, és}$$

$$P(\xi < med(\xi)) = F(med(\xi)) = \frac{1}{2}, \text{ ha } \xi \text{ valószínűségi változó folytonos.}$$

Azaz a medián általában az a szám, amelytől kisebb, illetve nagyobb értékeket egyenlő valószínűséggel vesz fel a valószínűségi változó.

**11. bemutató feladat:**

Ha egy kockával dobunk és  $\xi$  valószínűségi változó a dobott szám értéke, akkor a medián definíciójának bármely a  $]3;4[$  intervallumba eső szám eleget tesz, hiszen

$$P(\xi < 3,4) = P(\xi \leq 3,4) = 1/2$$

**12. bemutató feladat:**

Valamely  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{16}(x-2)^2 & 2 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Határozzuk meg a mediánt!

*Megoldás:*

$$\frac{1}{16}(x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

ebből

$$x_1 = 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{med}(\xi) = 2 + \sqrt{2}$$

**4.6.2. Módusz**

Ha a  $\xi$  valószínűségi változó lehetséges értékei között van olyan, amelyet nagyobb valószínűséggel vesz fel, mint a többit, akkor ezt az értéket a  $\xi$  valószínűségi változó móduszának nevezzük.

Folytonos sűrűségi függvény esetén a  $\xi$  valószínűségi változó módusza a sűrűségfüggvény maximumhelye. A módusz jele:  $\text{mod}(\xi)$ .

**13. bemutató feladat:**

Valamely  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{16}(x-2)^2 & 2 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Határozzuk meg a móduszt!

*Megoldás:*

A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{8}(x-2) & 2 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

$$f'_x = \frac{1}{8}$$

A sűrűségfüggvény, illetve a valószínűségi változó lényeges tulajdonsága nem változik, ha a szakadási pontban tetszős szerint választott  $f$ -értéket, például a példánkban legyen ez az érték  $x=6$ . Ekkor  $f(6)=4/8=1/2$ , azaz létezik módusz,  $\text{mod}(\xi)=6$ .