

## 2. lecke A valószínűség meghatározásának gyakori lehetőségei

### 2.1. Klasszikus valószínűség

Ha egy kísérletnek csak véges sok kimenetele lehet, és az egyes kimeneteknek azonos a valószínűsége, akkor klasszikus valószínűségről beszélünk.

Legyen  $A$  a kísérlettel kapcsolatos esemény, elemi eseményeinek száma pedig  $n$ . Ha egy  $A$ -esemény pontosan  $k$  elemi esemény összegeként írható fel, akkor:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$n$ : az összes lehetséges elemi esemény.

$k$ : az  $A$ -esemény bekövetkezésének szempontjából kedvező elemi események száma

A klasszikus képlet széles körű alkalmazási lehetőségei tárulnak fel az úgynevezett mintavételes feladatoknál.

#### 2.1.1. Visszatevéses véletlen mintavétel

A véletlen mintavétel során egy halmazból véletlenszerűen választunk ki egy elemet, ezen elemek összességét véletlen mintának nevezzük. Ha a kiválasztott elemet a kivétel után megvizsgáljuk és visszatesszük a halmazba, akkor visszatevéses véletlen mintavételről beszélünk. Legyen egy  $N$ -elemű halmazban  $M$ -számú megjelölt és  $N-M$ -számú jelöletlen elem. Vegyünk mintát úgy, hogy a kiválasztott elemet miután megvizsgáltuk, hogy milyen, visszatesszük. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy egy ilyen  $n$ -húzásból álló sorozatban a megjelölt elemek száma  $k$  lesz (a jelöletleneké pedig  $n-k$ ).

Jelölje a szóban forgó eseményt  $A_k$ .

Az Összes lehetőségek száma :  $N$ -elemből alkotható  $n$ -ed osztályú ismétléses variációk száma :  $N^n$ . A kért eseményre nézve az a kedvező, ha  $k$ -számú kiválasztás a megjelölt elemekből történik, ilyen ismétléses variáció  $M^k$ -számú van, és ezek mindegyikéhez  $(N-M)^{n-k}$ -féleképpen választható jelöletlen elemekből  $(n-k)$  darab. A  $k$ -számú jelölt elem  $\binom{n}{k}$ -féle módon lehet kiválasztani, ezért a kedvező esetek száma:

$$\binom{n}{k} * M^k * (N-M)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Annak valószínűsége, hogy a kiválasztott  $n$ -elem között pontosan  $k$ -darab megjelölt elem van:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} * \frac{M^k * (N-M)^{n-k}}{N^n}$$

Legyen  $p$  a megjelölt, illetve  $q$  a jelöletlen elemek kiválasztásának valószínűsége. Így

$$p = \frac{M}{N} \text{ és } q = \frac{N-M}{N}.$$

Ekkor

$$P(A_k) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

Ezt az összefüggést Bernoulli képletnek nevezzük. A  $P(A_k)$  helyett sokszor csak a  $P_k$  szimbólumot használjuk.

### 1. bemutató feladat:

100 db termékből, melynek 10%-a hibás, visszatevéses módszerrel kiválasztunk 5 elemet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a mintában 2 hibás elem kerül?

Megoldás:

$$N=100 \quad M=10 \quad N-M=90 \quad n=5 \quad k=2 \quad n-k=3$$

$$p = \frac{M}{N} = \frac{10}{100} = 0,1 \quad q = \frac{N-M}{N} = \frac{90}{100} = 0,9$$

$$P(A_2) = \binom{5}{2} * 0,1^2 * 0,9^3 = 0,0729$$

Tehát annak valószínűsége, hogy a kiválasztott 5 elemből 2 hibás lesz, 0,0729.

### 2. bemutató feladat

Egy csomag magyar kártyából visszatevéses módszerrel 9 lapot választunk ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a 8 piros lap a kihúzott kártyák között lesz?

Megoldás:

$$N=32 \quad M=8 \quad N-M=24 \quad n=9 \quad k=8 \quad n-k=1$$

$$p = \frac{M}{n} = \frac{8}{32} = 0,25 \quad q = \frac{N-M}{n} = \frac{24}{32} = 0,75$$

$$P(A_2) = \binom{9}{8} * 0,25^8 * 0,75^1 = 0,0001$$

#### 2.1.2. Visszatevés nélküli véletlen mintavétel

Legyen egy  $N$ -elemű halmazban  $M$ -számú megjelölt és  $(N-M)$ -számú jelöletlen elem. Végezzük el a mintavételt úgy, hogy a kiválasztott elemet nem tesszük vissza. Ezt a mintavételt kétféleképpen lehet elvégezni. Kivehetjük az  $n$ -elemet egyszerre és egyesével is.

Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy egy ilyen  $n$ -húzásból álló sorozatban a megjelölt elemek száma  $k$  lesz (a jelöletleneké pedig  $n-k$ ).

Jelölje a szóban forgó eseményt:  $A_k$ .

Ha az  $n$ -elem kiválasztása egyszerre történik, akkor az elemi események száma  $\binom{N}{n}$ . A kedvező esetek száma pedig  $k$ , amelyet  $\binom{M}{k}$ - kaphatunk meg. A kedvezőtlen esetek száma  $(n-k)$ ,

ezeket pedig  $\binom{N-M}{n-k}$ -féleképpen lehet kiválasztani. Így az  $A_k$ -esemény összesen

$\binom{M}{k} * \binom{N-M}{n-k}$  módon valósulhat meg.

Annak valószínűsége, hogy a kiválasztott  $n$ -elem között pontosan  $k$ -darab megjelölt elem van:

$$P(A_k) = \frac{\binom{M}{k} * \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

Ha az  $n$ -elemet egyesével választjuk ki, akkor is ugyan ezt a valószínűséget kapjuk.

### 3. bemutató feladat:

100 db termékből, melynek 10%-a hibás, visszatevés nélküli véletlen mintavétellel kiválasztunk 5 elemet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a mintában 2 hibás elem kerül?

*Megoldás:*

$$N=100 \quad M=10 \quad N-M=90 \quad n=5 \quad k=2 \quad n-k=3$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{10}{2} * \binom{90}{3}}{\binom{100}{5}} = 0,0702$$

Tehát annak valószínűsége, hogy a kiválasztott 5 elemből 2 hibás lesz, 0,0702.

### 4. bemutató feladat

Egy dobozban 3 fehér és 7 fekete golyó van. Mekkora annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül négyet kihúzva pontosan 2 fehéret és 2 feketét választottunk ki?

*Megoldás:*

Legyen  $A$ -esemény: 2 fehéret és 2 feketét választottunk, és keressük.  $P(A)=?$  Tulajdonképpen 10 közül választunk 4-et úgy, hogy a sorrend nem számít, csak az, hogy egy golyót választunk-e vagy nem.

Összesen 10 golyó van, tehát az összes lehetőségek száma:  $n = \binom{10}{4}$

A kedvező esetek száma: a 3 fehér közül kiválasztunk kettőt, a 7 fekete közül szintén kettőt, ezt rendre  $\binom{3}{2}$  és  $\binom{7}{2}$ -féleképpen tehetjük meg, vagyis a kedvező esetek száma:

$$k = \binom{3}{2} * \binom{7}{2}$$

Így a keresett valószínűség:

$$P(A_2) = \frac{\binom{3}{2} * \binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{3!}{2!*1!} * \frac{7!}{2!*5!}}{\frac{10!}{4!*6!}} = 0,3$$

## 2.2 Geometriai valószínűség

Ha egy kísérlettel kapcsolatos események egy geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetők meg úgy, hogy az egyes események valószínűsége a megfelelő alakzat mértékével (hossz, terület, térfogat) arányos, akkor az események és valószínűségeik geometriai valószínűségi mezőt alkotnak.

Más megfogalmazásban: Ha feltehető, hogy egy geometriai alakzattal megadott  $H$  eseménytérben annak valószínűsége, hogy egy véletlen pont az  $A \subset H$  résztartományba esik, arányos az  $A$ -tartomány mértékével (amennyiben ez létezik), geometriai valószínűségről beszélünk

Legyen  $A$ -esemény egy kísérlettel kapcsolatos. A kísérlettel kapcsolatban szóba jövő teljes geometriai alakzat mértéke  $M$ , az  $A$ -eseménynek megfelelő részhalmazok mértéke pedig  $m$ , akkor az  $A$ -esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \frac{m}{M}$$

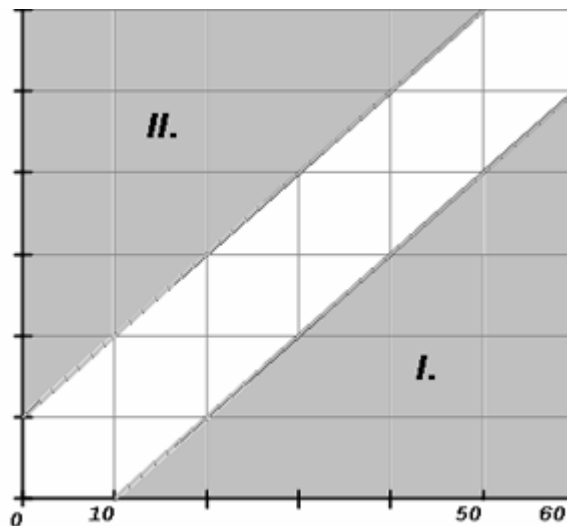
### 5. bemutató feladat

Két ember találkoztól beszél meg. 6 és 7 óra között véletlenszerűen érkeznek meg a megbeszélt helyre, és várnak társuk érkezéséig. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az előbb érkezőnek 10 percnél többet kell várnia?

*Megoldás:*

$A$ -esemény: 10 percnél többet kell várni valamelyiküknek.

Az érkezési időpontokat a 6 óra után eltelt percekkel adjuk meg. Érkezzen az egyik  $x$ , a másik  $y$  időpontban. Akkor kell 10 percnél többet várni valamelyiknek, ha  $|x - y| > 10$ . Ábrázoljuk ezt a ponthalmazt!



I.  $y < x - 10$  vagy II.  $y > 10 + x$

A kedvező eseménynek megfelelő rész területe:  $m = 50 \cdot 50 / 2 + 50 \cdot 50 / 2 = 2500$ .

A teljes négyzet területe:  $M = 60 \cdot 60 = 3600$ .

Vagyis a keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{m}{M} = \frac{2500}{3600} = 0,694$$

**6. bemutató feladat**

A Duna egyik szakaszán jégtorlasz keletkezett, amelyet robbantással lehet csak eltávolítani. A robbantás akkor hatásos, ha olyan pontra esik a robbanóanyag, ahol a jég 8 cm-nél vékonyabb. A jég teljes felülete  $3000 \text{ m}^2$ , és csak  $500 \text{ m}^2$  területen vékonyabb a jég 8 cm-nél. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a jégtorlaszra eső robbanóanyag hatásos?

*Megoldás:*

$$M=3000 \text{ m}^2 \quad m=500 \text{ m}^2$$

$$P(A) = \frac{m}{M} = \frac{500}{3000} = \frac{1}{6} = 0,1667$$