

3.lecke Valószínűség-számítási tételek

A valószínűségelmélet minden kísérletnél adott körülmények között vizsgál, és az események véletlen jellegét e körülmények határozzák meg. Egy-egy esemény bekövetkezésének valószínűségét nagymértékben befolyásolja egy másik esemény, illetve annak bekövetkezési valószínűsége.

3.1. Feltételes Valószínűség

Legyen A és B egy kísérlettel kapcsolatos tetszőleges két esemény, ahol a *B-esemény* valószínűsége nem nulla, azaz $P(B) \neq 0$. Vizsgáljuk meg mennyi az *A-esemény* bekövetkezésének valószínűsége, ha a *B-esemény* bekövetkezett. A vizsgált eseményt $A \setminus B$ -vel, a valószínűséget pedig $P(A \setminus B)$ -val jelöljük. Az esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A $P(A \setminus B)$ valószínűséget az *A-esemény B-eseményre* vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük.

Egy más megfogalmazás: feltéve, hogy *B-esemény* bekövetkezik, mi a valószínűsége, hogy az *A-esemény* bekövetkezik. A fentiekből kifejezett $P(A \cap B) = P(A \setminus B) * P(B)$ egyenlőséget a valószínűségek szorzási szabályának nevezzük.

A feltételes valószínűség többnyire nemcsak abból áll, hogy meghatározzuk $P(A \cap B)$ és a $P(B)$ valószínűségeket.

Ha A és B egy H eseménytér két eseménye és $P(B) \neq 0$, akkor együttes bekövetkezésük valószínűsége megegyezik az *A-esemény B-eseményre* vonatkozó feltételes valószínűségének szorzatával, azaz

$$P(A \cap B) = P(A \setminus B) * P(B), P(B) \neq 0$$

vagy

$$P(A \cap B) = P(B \setminus A) * P(A), P(A) \neq 0$$

1. bemutató feladat:

Egy dobozban 10 fehér és 15 fekete golyó van. Találomra kiválasztunk egymás után 2 golyót visszatevés nélküli véletlen mintavétellel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a második alkalommal fehér golyót választunk ki, feltéve, hogy az első alkalommal is fehéret választottunk ki?

Megoldás:

Legyen az első kiválasztás az *A-esemény*, illetve a második kiválasztás a *B-esemény*. Keresünk a $P(B \setminus A)$ valószínűséget.

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(A \cap B) = \frac{10 * 9}{25 * 24} = \frac{9}{60}$$

$$P(A) = \frac{10 * 24}{25 * 24} = \frac{24}{60}$$

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{60}}{\frac{24}{60}} = \frac{9}{24} = 0,375$$

2. bemutató feladat:

Egy áru 96%-ka megfelel a minőségi előírásoknak, és ennek 60%-ka I. osztályú, a többi II. osztályú termék. Válasszunk ki egy terméket az összes áruból. Mi a valószínűsége annak, hogy:

- a.) I. osztályú árut választunk ki (A_1 -esemény)
- b.) II. osztályú árut választunk ki (A_2 -esemény)

Megoldás:

- a.) $P(A_1) = 0,96 \cdot 0,6 = 0,576$
- b.) $P(A_2) = 0,96 \cdot 0,4 = 0,384$

Másképp megoldva:

Legyen B -esemény az az esemény, hogy minőségileg megfelelő terméket választunk.

- a.) $P(B \cap A_1) = P(A_1 \setminus B) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,96 = 0,576$
- b.) $P(B \cap A_2) = P(A_2 \setminus B) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,96 = 0,384$

3. bemutató feladat:

Egy versenyen 4 magyar, 5 orosz és 3 amerikai állt rajthoz. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első helyezett magyar, a második orosz, a harmadik szintén magyar lett, ha a versenyzők azonos esélyekkel indultak?

Megoldás:

Tekintsük a következő eseményeket:

A_1 -esemény: az első helyezett magyar lett

A_2 -esemény: a második helyezett orosz lett

A_3 -esemény: a harmadik helyezett magyar

A három esemény együttes bekövetkezésének valószínűségét kell kiszámítani, azaz $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ -értékét. A valószínűségek szorzási szabályát felhasználva:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \setminus A_2 \cap A_3) \cdot P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \setminus A_2 \cap A_3) \cdot P(A_2 \setminus A_3) \cdot P(A_3)$$

Számítsuk ki a jobboldalon álló tényezőket!

Összesen 12 versenyző indult, ebből 4 magyar, vagyis $P(A_3) = 4/12 = 1/3$.

$P(\text{a második orosz, feltéve, hogy a harmadik magyar}) = P(A_2 \setminus A_3) = 5/11$, mivel a jó esetek száma 5 (hiszen ennyi orosz versenyző indult), az összes eset pedig 11 (mivel feltételeztük, hogy a harmadik helyezett magyar lett, így már csak 11 versenyző közül választhatunk).

$P(\text{az első magyar, feltéve, hogy a második orosz és a harmadik magyar}) = P(A_1 \setminus A_2 \cap A_3) = 3/10$, mert ekkor a jó esetek száma 3, az összes esetek száma pedig 10.

A fentiekből következik, hogy $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3/10 \cdot 5/11 \cdot 1/3 = 1/22 \approx 0,045$.

3.2. Teljes valószínűség

Ha a B_1, B_2, \dots, B_n események teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B_i) \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), akkor A -esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \setminus B_i) \cdot P(B_i)$$

Ez a teljes valószínűség tétele, mert egy A -esemény valószínűségét feltételes valószínűségekből határozza meg.

4. bemutató feladat:

Van három dobozunk, mindegyikben fehér és fekete golyók vannak az alábbiak szerint:

- I. 2 fehér és 3 fekete golyó;
- II. 4 fehér és 1 fekete golyó;
- III. 3 fehér és 7 fekete golyó.

A kísérlet során $1/2$, $1/3$, és $1/6$ valószínűséggel kerülnek kiválasztásra az egyes dobozok. A kiválasztott dobozból kiveszünk 1 db golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kivett golyó fehér?

Megoldás:

$$P(B_1)=1/2 \quad P(B_2)=1/3 \quad P(B_3)=1/6$$

$$P(A)=P(A|B_1)*P(B_1)+P(A|B_2)*P(B_2)+P(A|B_3)*P(B_3)$$

$$\text{Az I. dobozban: } P(A|B_1)=2/5$$

$$\text{A II. dobozban: } P(A|B_2)=4/5$$

$$\text{A III. dobozban: } P(A|B_3)=3/10$$

$$P(A)=2/5*1/2+4/5*1/3+3/10*1/6=0,5167$$

Azaz 0,5167 a valószínűsége annak, hogy a véletlenül kiválasztott dobozból fehér golyót veszünk ki

5. bemutató feladat:

Eltévedtünk a piacon. A közelünkben négy ruhaárus, egy újságos és két virágárus van. A ruhaárusok 0,6 valószínűséggel tudják megmondani a helyes irányt, a virágárus nénik 0,7 valószínűséggel, az újságos szinte biztosan, 0,95 valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy helyes útbaigazítást kapunk, ha a közülük véletlenszerűen kérdezzük meg valakit?

Megoldás:

Tekintsük a következő eseményeket:

A-esemény: helyes útbaigazítást kapunk

B₁-esemény: valamelyik ruhaárustól kérdezzük meg a helyes irányt

B₂-esemény: valamelyik virágárustól kérdezzük meg a helyes irányt

B₃-esemény: az újságárustól kérdezzük meg a helyes irányt

Összesen $4+2+1=7$ árus van a környéken.

Annak a valószínűsége:

- hogy ruhaárust választunk: $P(B_1)=4/7$;
- hogy virágárust választunk: $P(B_2)=2/7$;
- hogy az újságárust választjuk: $P(B_3)=1/7$ -t kapunk

feltéve,

- hogy ruhaárustól kérdezzük: $P(A|B_1)=0,6$
- a többi: $P(A|B_2)=0,7$ és $P(A|B_3)=0,95$.

Írjuk fel a teljes valószínűség tételét:

$$P(A)=P(A|B_1)*P(B_1)+P(A|B_2)*P(B_2)+P(A|B_3)*P(B_3)=0,6*4/7+0,7*2/7+0,95*1/7=0,6786$$

Azaz 0,6786 valószínűséggel kapunk helyes útmutatást.

3.3. Bayes- valószínűség tétele

Ha B_1, B_2, \dots, B_n -események teljes eseményrendszer alkotnak, és $P(B_i \neq 0)$ ($i=1, 2, \dots, n$), továbbá A tetszőleges esemény, amelyre $P(A) \neq 0$, akkor

$$P(B_i \setminus A) = \frac{P(A \setminus B_i) * P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A \setminus B_j) * P(B_j)}$$

Ez Bayes-tétele, melyet a klasszikus valószínűség-számításban az „okok valószínűsége tételének” neveznek.

6. bemutató feladat:

Van három dobozunk, mindegyikben fehér és fekete golyók vannak az alábbiak szerint:

IV. 2 fehér és 3 fekete golyó;

V. 4 fehér és 1 fekete golyó;

VI. 3 fehér és 7 fekete golyó.

A kísérlet során $1/2$, $1/3$, és $1/6$ valószínűséggel kerülnek kiválasztásra az egyes dobozok. A kiválasztott dobozból kiveszünk 1 db golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a húzás az első dobozból történik és a kivett golyó fehér lesz?

Megoldás:

$P(B_1)=1/2$ $P(B_2)=1/3$ $P(B_3)=1/6$

Az I. dobozban: $P(A \setminus B_1)=2/5$

A II. dobozban: $P(A \setminus B_2)=4/5$

A III. dobozban: $P(A \setminus B_3)=3/10$

$$P(B_1 \setminus A) = \frac{P(A \setminus B_1) * P(B_1)}{\sum_{j=1}^3 P(A \setminus B_j) * P(B_j)} = \frac{\frac{2}{5} * \frac{1}{2}}{(\frac{2}{5} * \frac{1}{2}) + (\frac{4}{5} * \frac{1}{3}) + (\frac{3}{10} * \frac{1}{6})} = \frac{12}{31} = 0,3871$$

Azaz 0,3871 a valószínűsége annak, hogy az első dobozból fehér golyót veszünk ki

7. bemutató feladat:

Labdarúgó edzésen jártunk. Tudjuk, hogy a résztvevő 20 játékos közül a csatárok (5 fő) 0,9 valószínűséggel, a középpályások (7 fő) 0,8, a védők (6 fő) 0,75, a kapusok (2 fő) 0,7 valószínűséggel lövik be a büntetőt. Látunk egy játékost, aki kihagyja a büntetőjét. Mi a valószínűsége, hogy ő csatár?

Megoldás:

Tekintsük a következő eseményeket:

- A-esemény: a játékos kihagyja a büntetőt.
- B_1 -esemény: a véletlenszerűen választott játékos csatár: $P(B_1)= 5/20 =0,25$
- B_2 -esemény: a véletlenszerűen választott játékos középpályás: $P(B_2)= 7/20 =0,35$
- B_3 -esemény: a véletlenszerűen választott játékos védő: $P(B_3)= 6 /20=0,3$
- B_4 -esemény: a véletlenszerűen választott játékos kapus: $P(B_4)= 2 /20=0,1$

$$P(A \setminus B_1)=1-P(\text{belövi} \setminus B_1)=1-0,9=0,1$$

Hasonlóan:

$$P(A \setminus B_2)=1-0,8=0,2$$

$$P(A \setminus B_3)=1-0,75=0,25 ,$$

$$P(A \setminus B_4)=1-0,7=0,3 .$$

Alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A \cap B_1) * P(B_1)}{\sum_{j=1}^4 P(A \cap B_j) * P(B_j)} = \frac{0,1 * 0,25}{(0,1 * 0,25) + (0,2 * 0,35) + (0,25 * 0,3) + (0,3 * 0,1)} = 0,125$$

Tehát az ismeretlen játékos 0,125 valószínűséggel csatár.

3.4. Események függetlensége

Ha két esemény A és B egymástól függetlenek, az azt jelenti, hogy az egyik bekövetkezésének valószínűségét a másik esemény bekövetkezésének valószínűsége nem befolyásolja. Ebben az esetben teljesül a $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$, vagyis:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Az A-eseményt két egymást kizáró eseményként is felírhatjuk:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

és

$$(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$$

így

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

Mivel:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) * P(B) = P(A) * [1 - P(B)] = P(A) * P(\bar{B})$$

8. bemutató feladat:

Egy elektromos készülék 3 alkatrésze egymástól függetlenül 0,2; 0,6; és 0,4 valószínűséggel hibásodik meg egy bizonyos hőmérséklet elérésekor. Ha a három alkatrész közül bármelyik meghibásodik, akkor a készülék nem működik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a készülék az adott hőmérsékletet túllépve is még működik.

Megoldás:

$$P(A_1) = 0,2 \quad P(A_2) = 0,6 \quad P(A_3) = 0,4$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) * P(A_2) * P(A_3) = 0,2 * 0,6 * 0,4 = 0,048$$

0,048 annak valószínűsége, hogy az adott hőmérsékletet túllépve is még működik a készülék.