

5. lecke Nevezetes eloszlások

5.1. Diszkrét eloszlások

5.1.1. Karakterisztikus eloszlás

Tekintsünk egy adott kísérlethez tartozó tetszőleges A -eseményt, $P(A)=p$. Az A -esemény karakterisztikus valószínűségi változójának nevezzük ξ -t, ha

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{ha az } A \text{ - esemény következik be} \\ 0 & \text{ha az } \bar{A} \text{ - esemény következik be} \end{cases}$$

A ξ diszkrét valószínűségi változót karakterisztikus eloszlásúnak nevezzük, ha a változónak csak két lehetséges értéke van, $\xi=1$ és $\xi=0$, és ezeket az értékeket:

$$P(\xi=1)=p \text{ és } P(\xi=0)=1-p=q$$

valószínűséggel veszi ($0 \leq p \leq 1$).

Várható érték, szórás:

$$M(\xi) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

$$D(\xi) = \sqrt{pq}$$

1. bemutató feladat:

Egy dobozban 20 golyó van, amelyek $\frac{1}{4}$ -e fehér, a többi piros. Legyen A -esemény az, hogy ha 1 golyót kiválasztunk találmra, az fehér lesz. Számítsuk ki a várható értéket és a szórást!

Megoldás:

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{ha az } A \text{ - esemény következik be} \\ 0 & \text{ha az } \bar{A} \text{ - esemény következik be} \end{cases}$$

Mivel $P(A)=5/20$ és $P(\bar{A})=15/20$

$P(\xi=1)=0,25$ és $P(\xi=0)=1-p=0,75$

$$M(\xi)=p=0,25$$

$$D^2(\xi)=p \cdot q=0,25 \cdot 0,75=0,1875$$

$$D(\xi)=0,433$$

5.1.2. Binomiális eloszlás

A valószínűség számítás gyakorlati alkalmazása szempontjából nagyon fontos az úgynevezett binomiális eloszlás vagy Bernoulli-féle eloszlás.

Legyen egy kísérlet valamely A -eseményének valószínűsége $P(A)=p$ és a $P(\bar{A})=1-p=q$. A kísérletet egymástól függetlenül n -szer elvégezzük. Ilyen kísérletsorozatban legyen a ξ valószínűségi változó értéke az A -esemény bekövetkezéseinek száma. Annak valószínűsége, hogy egy kísérletsorozatban a ξ valószínűségi változó az $x_k=k$ ($k=1, 1, 2, \dots, n$) értékeket veszi fel:

$$p_k = P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \dots (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

A ξ valószínűségi változót $(n; p)$ paraméterű (n = pozitív egész szám; $0 < p < 1$) binomiális eloszlásúnak nevezünk, ha a k lehetséges értékeket $P(\xi) = k$ valószínűséggel veszi fel. Ennek értelmében binomiális eloszlást követ a visszatevéssel történő mintavétel esetén a hibás darabok száma is.

A binomiális eloszlás várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = n \cdot p$$

$$D^2(\xi) = n \cdot p \cdot q$$

$$D(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

2. bemutató feladat:

Becslések szerint az egyetemen tanuló diákok 20%-ka egyszerre két szakon tanul (párhuzamos képzés). Véletlenszerűen kiválasztunk 20 hallgatót. Mi a valószínűsége annak, hogy ebben a 20 fős csoportban 6 olyan hallgató van, aki párhuzamos képzésben vesz részt? Legyen ξ a kiválasztott hallgatók száma! Számítsuk ki a várható értéket és a szórást!

Megoldás:

$$p=0,2 \quad n=20 \quad k=6$$

a.)

$$p_6 = P(\xi = 6) = \binom{20}{6} \cdot 0,2^6 \cdot 0,8^{14} = 0,1091$$

b.)

$$M(\xi) = 20 \cdot 0,2 = 4$$

$$D^2(\xi) = 20 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 3,2$$

$$D(\xi) = 1,7889$$

3. bemutató feladat:

Az egy meccsre adható tippek: 1, 2, X. Ezeket egyenlő, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel választjuk. Jelölje

a ξ valószínűségi változó a találatok számát. $P(\xi \geq 10) = ?$

Megoldás:

$$P(\xi \geq 10) = P(\xi = 10) + P(\xi = 11) + P(\xi = 12) + P(\xi = 13)$$

$$P(\xi = k) = (\text{ahányféleképpen kiválaszthatjuk a } k \text{ db -ot}) \cdot (\text{ezeket feltétlenül eltaláljuk}) \cdot (\text{a többi nem})$$

Ezek alapján:

$$P(\xi = 10) = \binom{13}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 1,435 \cdot 10^{-3}$$

$$P(\xi = 11) = \binom{13}{11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 1,957 \cdot 10^{-4}$$

$$P(\xi = 12) = \binom{13}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \approx 1,631 \cdot 10^{-5}$$

$$P(\xi = 13) = \binom{13}{13} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \approx 6,272 \cdot 10^{-7}$$

Így $P(\xi \geq 10) \approx 1,435 \cdot 10^{-3} + 1,957 \cdot 10^{-4} + 1,631 \cdot 10^{-5} + 6,272 \cdot 10^{-7} \approx 1,648 \cdot 10^{-3}$

Tehát annak valószínűsége, hogy legalább 10 találatunk lesz: 0,001648.

5.1.3. Hipergeometrikus eloszlás

Legyen N elemünk, melyből M darabot megkülönböztetünk a többi $N-M$ darabtól. Ezután taláalomra kiválasztunk az N -elemből n darabot visszatevés nélkül, ahol $M < N$ és $n \leq N - M$. Legyen ξ valószínűségi változó értéke az n kiválasztott elem között levő megkülönböztetett elemek száma. A ξ az $x_k = k$ ($k=0, 1, \dots, n$) értékeket ekkor a következő valószínűségekkel veszi fel:

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} * \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \dots (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

A hipergeometrikus eloszlás a visszatevés nélküli mintavétel problémaköréhez tartozik.

A hipergeometrikus eloszlás várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = n * p, \text{ ahol } p = M/N$$

$$D^2(\xi) = n * p * q * \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

$$D(\xi) = \sqrt{n * p * q * \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)}$$

Ha M és N elég nagyok a k -hoz képest, akkor a hipergeometrikus eloszlás tagjait jól közelíthetjük az $(n; M/N)$ paraméterű binomiális eloszlás megfelelő tagjaival. Ez abból adódik, hogy ha N elég nagy, akkor mindegy, hogy visszatevéssel, vagy visszatevés nélküli a mintavétel.

4. bemutató feladat:

Egy dobozban 9 golyó van, amelyek közül 4 db fekete. Taláalomra kiveszünk 3 golyót. A ξ valószínűségi változó értéke a kivett golyók között lévő fekete golyók száma. Számítsuk ki a valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását!

Megoldás:

$$N=9$$

$$M=4$$

$$n=3$$

$$k=0, 1, 2, 3,$$

$$p_0 = P(\xi = 0) = \frac{\binom{4}{0} * \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{42}$$

$$p_1 = P(\xi = 1) = \frac{\binom{4}{1} * \binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{21}$$

$$p_2 = P(\xi = 2) = \frac{\binom{4}{2} * \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{14}$$

$$p_3 = P(\xi = 1) = \frac{\binom{4}{3} * \binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{21}$$

$$p = M/N = 4/9$$

$$M(\xi) = 3 * \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$$

$$D(\xi) = \sqrt{n * p * q * \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)} = \sqrt{3 * \frac{4}{9} * \frac{5}{9} * \left(1 - \frac{3}{8}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

5. bemutató feladat:

Egy osztályban 16 fiú és 10 lány van. Közülük találomra kiválasztunk egy 4 fős csoportot. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a csoportban lévő lányok száma. Adjuk meg a ξ eloszlását és várható értékét!

Megoldás:

A ξ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású, mert a 26 ember között van 10 kitüntetett, hiszen azt nézzük, hogy ebből a kitüntetett csoportból (vagyis a lányok közül) hányat választunk ki.

$$N=26$$

$$M=10$$

$$n=4$$

$$k=0, 1, 2, 3, 4$$

Így a megoldás:

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{16}{4} \cdot \binom{10}{0}}{\binom{26}{4}} \approx 0,122;$$

$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{16}{3} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{26}{4}} \approx 0,375;$$

$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{10}{2}}{\binom{26}{4}} \approx 0,361;$$

$$P(\xi = 3) = \frac{\binom{16}{1} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{26}{4}} \approx 0,128$$

$$P(\xi = 4) = \frac{\binom{16}{0} \cdot \binom{10}{4}}{\binom{26}{4}} \approx 0,014$$

$$M(\xi) = 4 \cdot \frac{10}{26} = \frac{20}{13} \approx 1,538$$

5.1.4. Poisson eloszlás

Egy diszkrét ξ valószínűségi változót $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlásúnak nevezünk, ha az $x_k = k$ ($k=0, 1, 2, \dots$) értékeket

$$P(\xi = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

valószínűségekkel veheti fel.

A ξ valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza nem véges, hanem megszámlálhatóan végtelen.

Poisson-eloszlással általában azt modellezhetjük, hogy sok, egymástól független, egyenként nagyon kis valószínűséggel bekövetkező esemény közül hány darab következik be (tehát nem az a fontos, hogy melyik, hanem az, hogy összesen mennyi). Ilyen lehet pl. egy augusztusi éjszakán látott hullócsillagok száma, időegység alatt kapott telefonhívások száma, sajtóhibák száma egy oldalon, stb.

Várható érték, szórás:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \lambda \\ D(\xi) &= \sqrt{\lambda} \end{aligned} \quad \text{ahol} \quad \lambda = n \cdot \frac{M}{N}$$

A Poisson eloszlás jól közelíti a binomiális eloszlást, ha az abban szereplő n elég nagy és a p elég kicsi, pontosabban érvényes a következő:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Ha n a végtelenbe tart, akkor p a nullához tart úgy, hogy közben $n \cdot p = \lambda > 0$ szorzat állandó érték marad.

6. bemutató feladat:

Egy készülék meghibásodásainak száma átlagosan 10000 működési óra alatt 10, a meghibásodások száma csak a vizsgált időszak hosszától függ. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a készülék 200 működési óra alatt elromlik!

Megoldás:

$$n=200 \quad p=10/10000$$

$$\lambda = 200 \cdot \frac{10}{10000} = 0,2$$

Annak valószínűsége, hogy 200 óra alatt nem romlik el:

$$p_0 = P(\xi = 0) = e^{-0,2}$$

Annak valószínűsége, hogy 200 óra alatt elromlik el:

$$p_1 = 1 - P(\xi = 0) = 1 - e^{-0,2} = 0,18$$

7. bemutató feladat:

Egy kéziratban 200 oldalon 400 sajtóhiba található. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy oldalon 0, 1 vagy 3-nál több hiba van?

Megoldás:

Egy oldalon minden egyes karakter igen kis valószínűséggel lesz hibás, ezek a hibák egymástól függetlenül következnek be, így az egy oldalon levő hibák száma Poisson-eloszlású valószínűségi változónak tekinthető (jelöljük ξ -vel). Tudjuk, hogy a Poisson-eloszlás paramétere

megegyezik az eloszlás várható értékével. Egy oldalon átlagosan $\frac{400}{200} = 2$ sajtóhiba található,

így az eloszlás paramétere: $\lambda = 2$.

Ez alapján:

$$P(\xi = 0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,135$$

$$P(\xi = 1) = \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0,271$$

$$P(\xi > 3) = 1 - P(\xi \leq 3) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3)) =$$

$$1 - \left(\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} + \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{1}{e^2} + \frac{2^3}{3!} \cdot \frac{1}{e^2} \right) = 1 - \frac{19}{3 \cdot e^2} \approx 0,143$$

5.1.5. Diszkrét egyenletes eloszlás

Egy ξ diszkrét valószínűségi változót diszkrét egyenletes eloszlásúnak nevezünk, ha a lehetséges értékeinek száma $n \in \mathbb{N}^+$, és ezeket az $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ értékeket egyenlő valószínűséggel veszi fel:

$$P(\xi = x_k) = \frac{1}{n} \dots (k = 1, 2, \dots, n)$$

A ξ lehetséges értékeinek a száma nem lehet végtelen, ugyanis mindegyik érték egyenlően valószínű.

Várható érték és szórás:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2$$

8. bemutató feladat:

Két pénzérmével dobunk. A kísérlethez tartozó eseménytér:

II IF FI FF (I=írás; F=fej)

A ξ valószínűségi változó jelentése a dobások száma:

$x_1=1$ $x_2=2$ $x_3=3$ $x_4=4$

Határozzuk meg a várható értéket és a szórást!

Megoldás:

$$P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = P(\xi = 3) = P(\xi = 4) = \frac{1}{4}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$D^2(\xi) = \frac{1}{4}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - (2,5)^2 = 1,25$$

$$D(\xi) = \sqrt{1,25} = 1,118$$

5.2. Folytonos eloszlások

Ha a ξ valószínűségi változó folytonos, akkor bármely konkrét értéket 0 valószínűséggel vesz fel, tehát a ξ valószínűségi változó jellemzésére a sűrűségfüggvényt vagy az eloszlás függvényt kell használni.

5.2.1. Egyenletes eloszlás

Egy folytonos ξ valószínűségi változót az $(a; b)$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b; \\ 0, & \text{ha } x > b \end{cases}$$

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b. \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases}$$

ξ várható értéke:

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2},$$

szórása:

$$D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

9. bemutató feladat:

Egy városi buszmegállóba 15 percenként érkeznek a buszok. Tegyük fel, hogy a buszmegállóba érkezve látjuk, hogy 1 percen belül jön a busz. Legyen ξ valószínűségi változó a várakozási idő. Írjuk fel a sűrűség és eloszlásfüggvényt, számítsuk ki a várható értéket és a szórást.

Megoldás:

$$a=1 \quad b=15$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{14}, & \text{ha } 1 < x \leq 15 \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{14}, & \text{ha } 1 < x \leq 15 \\ 1, & \text{ha } x > 15 \end{cases}$$

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+15}{2} = 8 \text{ perc}$$

$$D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{14}{\sqrt{12}} = 4,04 \text{ perc}$$

10. bemutató feladat:

Legyen ξ valamely pozitív intervallumon értelmezett egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Legyen továbbá $M(\xi) = 10$, $D(\xi) = \sqrt{3}$. Határozzuk meg ξ sűrűség- és eloszlásfüggvényét!

Megoldás:

Az $(a; b)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke: $\frac{a+b}{2}$,

szórása: $\frac{b-a}{\sqrt{12}}$. Ezekkel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{2} &= 10 \\ \frac{b-a}{\sqrt{12}} &= \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a+b=20 \\ b-a=\sqrt{36}=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 13 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

Ebből a sűrűségfüggvény: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 7 \\ \frac{1}{6}, & \text{ha } 7 < x \leq 13 \\ 0, & \text{ha } x > 13 \end{cases}$

az eloszlásfüggvény: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 7 \\ \frac{x-7}{6}, & \text{ha } 7 < x \leq 13 \\ 1, & \text{ha } x > 13 \end{cases}$

5.2.2. Exponenciális eloszlás

Egy folytonos ξ valószínűségi változót $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases};$$

Ahol λ tetszőleges pozitív szám lehet, amelyet az eloszlás paraméterének nevezünk.

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}.$$

ξ várható értéke:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda},$$

szórása:

$$D(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

Exponenciális eloszlással általában berendezések, alkatrészek élettartamát szokás modellezni.

11. bemutató feladat:

Egy izzólámpa átlagos élettartama a gyári mérések szerint 1000 óra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az égő 1000 óránál hamarabb megy tönkre, ill. mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiszemelt égő 3000 órán belül mégsem megy tönkre?

Megoldás:

$$M(\xi = 1000) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{a.) } \lambda = \frac{1}{1000}$$

$$P(\xi < 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\frac{1}{1000} \cdot 1000} = 1 - e^{-1} = 0,332$$

$$\text{b.) } P(\xi \geq 3000) = 1 - P(\xi < 3000) = 1 - F(3000) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{1000} \cdot 3000}) = e^{-3} = 0,05$$

12. bemutató feladat:

Egy bizonyos alkatrész első meghibásodásáig eltelt idő legyen exponenciális eloszlású valószínűségi változó, 2000 óra várható értékkel. Írjuk fel a valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Mekkora annak a valószínűsége, hogy az alkatrész legalább 4000 óráig hibátlanul működik?

Megoldás:

Jelöljük a szóban forgó valószínűségi változót ξ -vel!

$M(\xi) = 2000$, és mivel exponenciális eloszlású valószínűségi változóról van szó, ezért

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \text{ vagyis az eloszlás paramétere } \lambda = \frac{1}{2000} = 0,0005.$$

Így a sűrűségfüggvény: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 0,0005 \cdot e^{-0,0005 \cdot x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases};$

az eloszlásfüggvény: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-0,0005 \cdot x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}.$

A keresett valószínűség:

$$P(\xi \geq 4000) = 1 - P(\xi < 4000) = 1 - F(4000) = 1 - (1 - e^{-0,0005 \cdot 4000}) = e^{-2} \approx 0,135.$$

Vagyis az alkatrész 0,135 valószínűséggel működik hibátlanul legalább 4000 óráig.

5.2.3. Normális eloszlás

Egy folytonos ξ valószínűségi változót $(m; \sigma)$ paraméterű normális eloszlásúnak nevezünk, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}};$$

Ahol m valós szám, $\sigma > 0$, állandó.

Az $f(x)$ függvény görbét Gauss-görbének is és harang-görbének is nevezik. A függvény szimmetrikus az m -pontra és ez az egyetlen maximumhelye. Az $m \pm \sigma$ helyeken van az $f(x)$ függvény inflexióspontja.

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(\xi < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

ξ várható értéke:

$$M(\xi) = m,$$

szórása:

$$D(\xi) = \sigma.$$

Az $m = 0$, $\sigma = 1$ paraméterű normális eloszlást standard normális eloszlásnak nevezzük. Ennek sűrűség-, és eloszlásfüggvényét görög betűvel jelöljük.

Sűrűségfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}};$$

Eloszlásfüggvénye:

$$\Phi(x) = P(\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ha ξ standard normális eloszlású, akkor fennáll, hogy:

$$P(-x \leq \xi < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2 \cdot \Phi(x) - 1.$$

Ha ξ m , σ paraméterű normális eloszlású változó, akkor standardizáltja, az $\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$ való-

szerűségi változó standard normális eloszlású. A normális eloszlás a gyakorlatban legtöbbször használt eloszlás, szinte mindenhol előfordul.

13. bemutató feladat:

Egy üzemben 2 m hosszú munkadarabokat gyártanak 3 cm szórással. 1000 db elkészítésekor várhatóan hány darab selejt keletkezik, ha a 195 és 205 cm közötti termékeket még elfogadhatónak tekinthetjük? (A munkadarabok mérete normális eloszlásúnak tekinthető.)

Megoldás:

A feladat szerint egy munkadarab mérete $m = 200$ és $\sigma = 3$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, melyet jelöljünk ξ -vel. Annak valószínűsége, hogy egy elkészült munkadarab hossza 195 és 205 cm közé esik:

$$P(195 \leq \xi \leq 205) = P(-5 \leq \xi - 200 \leq 5) = P\left(-\frac{5}{3} \leq \frac{\xi - 200}{3} \leq \frac{5}{3}\right)$$

Mivel ξ normális eloszlású, ezért ha kivonjuk belőle a várható értékét és elosztjuk a szórásával, akkor standard normális eloszlású valószínűségi változót kapunk. Tehát a fenti valószínűségekre írhatjuk, hogy:

$$\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 \approx 2 \cdot \Phi(1,67) - 1 \approx 2 \cdot 0,9525 - 1 \approx 0,905.$$

A Φ függvény értékét „A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényeinek értékei” című táblázatból kell kikeresni. Pl: $\Phi(1,67)$: a táblázatban az oldallécen az 1,6-t a fejlécen a 7-es számot keressük meg, és a kettő találkozásánál van a 0,9525.

A kapott eredmény szerint 1000 darabból átlagosan 905 a megadott intervallumba esik, így átlagosan 95 selejtes munkadarab készül.

14. bemutató feladat:

Egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 10, szórása 3. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke

- a) kisebb, mint 10;
- b) 8 és 15 közé esik;
- c) Nagyobb, mint 0.

Megoldás:

Jelölje ξ a valószínűségi változónkat. Mivel most $m = 10$ és $\sigma = 3$, ezért nem standard normális eloszlású valószínűségi változóval állunk szemben, vagyis a megoldás során a valószínűségi változót standardizálni kell. Erre azért van szükség, mert a standard normális eloszlás értékei állnak rendelkezésünkre táblázat formájában.

A standardizált valószínűségi változó: $\xi^* = \frac{\xi - m}{\sigma}$.

- a) A esemény jelentse, hogy a valószínűségi változó értéke kisebb 10-nél.

$$P(A) = P(\xi < 10) = P\left(\frac{\xi - 10}{3} < \frac{10 - 10}{3}\right) = P\left(\frac{\xi - 10}{3} < 0\right) = P(\xi^* < 0) = \Phi(0) = 0,5$$

- b) B esemény jelentse, hogy a valószínűségi változó értéke 8 és 15 közé esik.

$$P(B) = P(8 < \xi < 15) = P\left(\frac{8 - 10}{3} < \frac{\xi - 10}{3} < \frac{15 - 10}{3}\right) =$$

$$P\left(-\frac{2}{3} < \xi^* < \frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{5}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 \approx 0,9515 + 0,7454 - 1 = 0,6969$$

c) C esemény jelentse, hogy a valószínűségi változó értéke nagyobb, mint 0.

$$P(C) = P(\xi > 0) = 1 - P(\xi \leq 0) = 1 - [P(\xi < 0) + P(\xi = 0)]$$

Mivel folytonos eloszlású valószínűségi változóról van szó, ezért annak valószínűsége, hogy egy konkrét értéket felvesz, minden pontban 0. Így $P(\xi = 0) = 0$.

Ezzel

$$P(C) = 1 - P(\xi < 0) = 1 - P\left(\frac{\xi - 10}{3} < \frac{0 - 10}{3}\right) =$$

$$1 - \Phi\left(-\frac{10}{3}\right) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{10}{3}\right)\right) = \Phi\left(\frac{10}{3}\right) \approx 0,9995$$