

## 12. lecke: Szezonális ingadozások elemzése

A szezonhatás vizsgálatánál arra keresünk választ, hogy a szezonális milyen mértékben vagy arányban téríti el az idősor értékét az alapirányzattól. Vizsgálatánál az idősor adataiból ki kell szűrni a trendhatást és a véletlen hatást. A szezonális komponens eltérő módon viselkedik additív és multiplikatív modell esetén. Additív összefüggéskor a szezonhatás a trendtől való abszolút eltérés, multiplikatív kapcsolat esetén pedig a relatív eltérés formájában jelentkezik. A szezonális additív modell esetén szezonális eltérésekkel, multiplikatív modell esetén pedig szezonindexekkel jellemezzük.

### 12.1. Szezonális eltérés

Additív összefüggés és lineáris trend esetén az idősor megfigyelt értékeit a komponensek összegeként írhatjuk fel.

$$y_{ij} = \hat{y}_{ij} + \hat{s}_j + v_{ij}$$

A trendhatást úgy szűrjük ki, hogy az idősor megfigyelt értékeiből rendre kivonjuk a trendértékeket:

$$y_{ij} - \hat{y}_{ij} = \hat{s}_j + v_{ij}$$

Az így nyert különbségeket egyedi szezonális eltéréseknek nevezzük. Minden periódusból vesszük a  $j$ -edik eltérést és ezek számtani átlagát képezzük, ezzel a véletlen hatást szűrjük ki, illetve tompítjuk:

$$\hat{s}_j = \frac{\sum (y_{ij} - \hat{y}_{ij})}{p}$$

ahol  $p$ : az adott periódusok száma az idősorban.

A szezonális eltérés megmutatja, hogy a megfigyelt idősor a  $j$ -edik szezonban átlagosan mennyivel tér el a trendértéktől a szabályosan ismétlődő szezonhatás következtében.

Lineáris trend esetében a kapott szezonális eltérések összege nullával egyenlő. Más trendfüggvények esetében:

$$\sum s_j \neq 0$$

Ilyen esetben a szezonális eltérések korrekciójára van szükség, ekkor a kiszámolt szezonális eltéréseket nyers szezonális eltéréseknek nevezzük. A korrekció azt jelenti, hogy a kiszámolt nyers szezonális eltéréseket átlagoljuk, és az így kapott ún. korrekciós tényezőt levonjuk a nyers szezonális indexekből, és megkapjuk a korrigált szezonális eltéréseket.

$$\hat{s}_j' = \hat{s}_j - \frac{\sum \hat{s}_j}{m}$$

Ahol  $m$ : a periódusok száma az idősorban (pl. 4, ha negyedéves bontásban vannak az adatok).

### Bemutató feladat

Egy építőipari vállalkozás tevékenységének árbevétele millió Ft-ban az alábbi volt.

Év	negyedév	árbevétel	$t_i$
2014.	I.	20	-5,5
	II.	30	-4,5
	III.	40	-3,5
	IV.	10	-2,5
2015.	I.	22	-1,5
	II.	33	-0,5
	III.	50	0,5
	IV.	13	1,5
2016.	I.	25	2,5
	II.	36	3,5
	III.	60	4,5
	IV.	15	5,5
Összesen		354	0

A kiszámított trendegyenlet:  $\hat{y} = 29,5 + 0,881 \cdot t$

Helyettesítsük be a trendegyenletbe a  $t_i$ -értékeket:

pl.

$$\hat{y} = 29,5 + 0,881 \cdot (-5,5) = 24,655$$

$$\hat{y} = 29,5 + 0,881 \cdot (-4,5) = 25,536$$

stb.

Az eredeti adatokból vonjuk ki a kiszámított trendértéket.

$$Pl.: 20 - 24,655 = -4,655$$

Év	negyedév	árbevétel	$y_{trend}$	$(y_i - y_{trend})$ Szezonális eltérés
2014.	I.	20	24,655	-4,655
	II.	30	25,536	4,465
	III.	40	26,417	13,584
	IV.	10	27,298	-17,298

Év	negyedév	árbevétel	y <sub>trend</sub>	(y <sub>i</sub> -y <sub>trend</sub> ) Szezonális eltérés
2015.	I.	22	28,179	-6,179
	II.	33	29,060	3,941
	III.	50	29,941	20,060
	IV.	13	30,822	-17,822
2016.	I.	25	31,703	-6,703
	II.	36	32,584	3,417
	III.	60	33,465	26,536
	IV.	15	34,346	-19,346
Összesen		354		

Írjuk át egy másik táblázatba az idősor adatainak és a trendértékeknek a különbségét, azaz az egyedi szezonális eltéréseket. Ezután az egyes negyedévekhez tartozó értékeket átlagolni kell.

Például az I. negyedév esetében  $(-4,655-6,179-6,703)/3=-5,845$

Év	(y <sub>i</sub> -y <sub>trend</sub> )			
	I.	II.	III.	IV.
	negyedév			
2014	-4,655	4,465	13,584	-17,298
2015	-6,179	3,941	20,060	-17,822
2016	-6,703	3,417	26,536	-19,346
s <sub>j</sub>	-5,845	3,941	20,060	-18,155

Az első negyedévben átlagosan 5,845 millió Ft-tal kevesebb az árbevétel annál, mint ami a hosszú távú tendenciából az egyes évek első negyedéveiből következne.

Korrekciónak nincs szükség, ugyanis az egyes negyedévek szezonális eltéréseinek összege nulla.

## 12.2. Szezonindex

Multiplikatív összefüggés és exponenciális trend esetén az idősor megfigyelt értékeit a komponensek szorzataként írhatjuk fel:

$$\hat{y}_{ij} = \hat{y}_{ij}^* \cdot \hat{s}_j^* \cdot \hat{v}_{ij}^*$$

A trendhatást úgy szűrjük ki, hogy az idősor megfigyelt értékeit rendre elosztjuk a trendértékekkel:

$$\frac{\hat{y}_{ij}}{\hat{y}_{ij}^*} = \hat{s}_j^* \cdot \hat{v}_{ij}^*$$

Az így nyert hányadosokat egyedi szezonindexnek nevezzük. Ezt követően minden periódusból vesszük a j-edik szezonindexet és ezeket átlagoljuk vagy számtani vagy mértani átlagot számolunk:

$$\hat{s}_j^* = \frac{\sum \left( \frac{y_{ij}}{\hat{y}_{ij}} \right)}{p}$$

Ahol n: az adatok száma

P: az adott éven belül a periódusok száma

Mértani átlaggal:

$$\hat{s}_j^* = \sqrt[p]{\prod \frac{y_{ij}}{\hat{y}_{ij}}}$$

A becsült szezonindex azt fejezi ki, hogy a j-edik szezonban a megfigyelt idősor átlagosan hányszorosa, illetve hány százaléka a trendértéknek a szezonhatás következtében.

A szezonindexnél is célszerű korrekciót végezni, ha a trendet nem exponenciális függvényvel írtuk le. A korrekciós tényező az előzőekben kiszámolt nyers szezonindexek átlaga. A korrigált szezonindexet pedig úgy kapjuk, hogy a nyers szezonindexeket elosztjuk a korrekciós tényezővel.

Ha a nyers szezonindexet számtani átlaggal számítottuk ki, akkor a korrigált szezonindex az alábbi:

$$\hat{s}_j^{*'} = \frac{\hat{s}_j^*}{\frac{\sum \hat{s}_j^*}{m}}$$

Ahol m: a periódusok száma az idősorban (pl. 4, ha negyedéves bontásban vannak az adataim).

Ha a nyers szezonindexet mértani átlaggal számítottuk ki, akkor a korrigált szezonindex az alábbi:

$$\hat{s}_j^{*'} = \frac{\hat{s}_j^*}{\sqrt[m]{\prod \hat{s}_j^*}}$$

### Bemutató feladat

Az előző feladat alapján nézzük meg a szezonális eltéréseket.

A kiszámított trendegyenlet:  $\hat{y} = 25,915 * 1,020^t$

Helyettesítsük be a trendegyenletbe a  $t_i$ -értékeket:

$$\text{pl. } \hat{y} = 25,915 * 1,020^{-5,5} = 23,241$$

Év	negyedév	árbevétel	$y_{\text{trend}}$	$(y_i/y_{\text{trend}})$ Szezonindex
2014.	I.	20	23,241	0,861
	II.	30	23,706	1,266
	III.	40	24,180	1,654
	IV.	10	24,663	0,405
2015.	I.	22	25,157	0,875
	II.	33	25,660	1,286
	III.	50	26,173	1,910
	IV.	13	26,696	0,487
2016.	I.	25	27,230	0,918
	II.	36	27,775	1,296
	III.	60	28,330	2,118
	IV.	15	23,241	0,861
Összesen		354		0

Írjuk át az egyedi szezonindexeket egy másik táblázatba:

Év	$(y_i/y_{\text{trend}})$			
	I.	II.	III.	IV.
	negyedév			
2014	0,861	1,266	1,654	0,405
2015	0,875	1,286	1,91	0,487
2016	0,918	1,296	2,118	0,519
$s_j^*$ (számtani átlaggal)	0,885	1,283	1,894	0,470
$s_j^{**}$	0,781	1,132	1,672	0,415
$s_j^*$ (mértani átlaggal)	0,8843	1,2826	1,8844	0,4678
$s_j^{**}$	0,8843	1,2827	1,8845	0,4678

Számtani átlaggal számolva a nyers szezonindexeket ismét átlagolni kell, azaz ki kell számolni a korrekciós tényezőt:  $(0,885+1,283+1,894+0,470)/4=1,133$ . Ezzel a korrekciós tényezővel kell elosztani mindegyik nyers szezonindexet.

$$\text{Pl.: } 0,885/1,133=0,781$$

Mértani átlaggal számolva a korrekciós tényező:

$\sqrt[4]{0,8843 * 1,2826 * 1,8844 * 0,4678} = 0,99996$ , ezzel kell mindegyik nyers szezonindexet elosztani.

Pl.:  $0,8843 / 0,99996 = 0,8843$

### 12.3. Véletlenhatás

Az alapadatok és a trendadatok közötti eltérést a szezonhatás és a véletlenhatás okozza. Az azonos szezonokra vonatkozó eltérések átlagolásával kiszámítottuk a periodikus ingadozás abszolút (szezonális eltérés) vagy relatív (szezonindex) nagyságát. Az idősor komponenseiből már csak a véletlen tagot kell meghatározni.

Additív összefüggés esetén:

$$\hat{v}_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} - \hat{s}_j$$

A véletlenhatás számításakor nem az egyes időpontok és a trendadatok közti különbségeket, hanem az egyes szezonokra jellemző korrigált szezonhatásokkal számolunk. A véletlenhatások várható értéke általában nulla, és nem jelezhetők előre.

### Bemutató feladat

Egy építőipari vállalkozás tevékenységének árbevétele millió Ft-ban az alábbi volt.

Év	negyedév	árbevétel	$y_{trend}$	$(y_i - y_{trend})$ Szezonális eltérés	$\hat{v}_{ij}$ (additív esetben)
2014.	I.	20	24,655	-4,655	1,1905
	II.	30	25,536	4,465	0,5235
	III.	40	26,417	13,584	-6,4765
	IV.	10	27,298	-17,298	0,8575
2015.	I.	22	28,179	-6,179	-0,3335
	II.	33	29,060	3,941	-0,0005
	III.	50	29,941	20,060	-0,0005
	IV.	13	30,822	-17,822	0,3335
2016.	I.	25	31,703	-6,703	-0,8575
	II.	36	32,584	3,417	-0,5245
	III.	60	33,465	26,536	6,4755
	IV.	15	34,346	-19,346	-1,1905
Összesen		354			

Multiplikatív összefüggéskor pedig:  $\hat{v}_{ij}^* = \frac{y_{ij}}{\hat{y}_{ij}^* \cdot \hat{s}_j^*}$

Év	negyedév	árbevétel	$y_{trend}$	$(y_i/y_{trend})$ Szezonindex	$\hat{v}_{ij}$ (multiplikatív esetben)
2014.	I.	20	23,241	0,861	0,7611
	II.	30	23,706	1,266	1,6232
	III.	40	24,180	1,654	3,1174
	IV.	10	24,663	0,405	0,1897
2015.	I.	22	25,157	0,875	0,7734
	II.	33	25,660	1,286	1,6496
	III.	50	26,173	1,910	3,6000
	IV.	13	26,696	0,487	0,2278
2016.	I.	25	27,230	0,918	0,8119
	II.	36	27,775	1,296	1,6625
	III.	60	28,330	2,118	3,9910
	IV.	15	23,241	0,861	0,2428

A véletlenhatások szorzatának várható értéke általában egy, és nem jelezhetők előre.

#### 12.4. Extrapoláció

A trendegyenlet meghatározásával előrejelzést (extrapoláció) végezhetünk. A meghatározott trendegyenletbe behelyettesítjük a becsülni kívánt évhez tartozó „ $t_i$ ”-értéket, és kiszámoljuk a trendértékét. Ezután ha van szezonhatás, akkor azzal korrigálunk. Additív összefüggés esetén a kiszámított trendértéket hozzáadjuk a szezonális eltérést, multiplikatív összefüggéskor a trendértéket megszorozzuk a szezonindexszel.

#### Bemutató feladat

Becsüljük meg 2007. III. negyedévére a várható árbevételt!  
 $t_i=8,5$

#### Additív esetben:

A trendegyenlet:  $\hat{y} = 29,5 + 0,881 \cdot 8,5 = 36,9885$

A III. negyedév szezonális eltérése: 20,06

A várható árbevétel  $36,9885 + 20,060 = 57,0485$  millió Ft.

#### Multiplikatív esetben:

$\hat{y} = 25,915 \cdot 1,020^t = 25,915 \cdot 1,020^{8,5} = 30,666$

A III. negyedév szezonindexe: 1,8844

A várható árbevétel  $30,666 \cdot 1,8844 = 57,787$  millió Ft.