

8. lecke Statisztikai próbák

8.1. Alapfogalmak

Az eddigi becslési eljárások során a populációi paramétert ismeretlennek tekintettük, és a mintából származó adatok segítségével közelítőleg meghatároztuk az ismeretlen populáció értékét. A hipotézisvizsgálatnál a populációról állítunk valamit, majd a rendelkezésünkre álló minta alapján ellenőrizzük az állítás helyességét.

Az egy vagy több populációra vonatkozó állítást, feltevést hipotézisnek nevezzünk. A hipotézis vonatkozhat az egy vagy több populáció eloszlására, vagy az adott eloszlások egy vagy több paraméterére is. A különféle hipotézisek vizsgálatára szolgáló eljárásokat statisztikai próbáknak nevezzük. A próba egy olyan eljárás, amelynek során a mintából származó információk alapján döntünk a hipotézis elfogadásáról, vagy elutasításáról.

A hipotézisvizsgálat első lépése a vizsgálni kívánt hipotézis megfogalmazása. Pontosabban mindig két hipotézist fogalmazunk meg, egy úgynevezett nullhipotézist (H_0), és egy ezzel szemben álló alternatív hipotézist (H_1). A vizsgálat során a két hipotézist „versenyeztetjük”, és azt fogadjuk el igaznak, amelyik a mintavétel eredménye alapján hihetőbbnek tűnik a másikonál. A két hipotézist úgy kell megfogalmazni, hogy:

- akármelyiket is tekintjük majd a másikonál hihetőbbnek, megválaszolható legyen a bennünket érdeklő kérdés;
- a formális logikai szabályai szerint kizárják egymást, azaz egyszerre ne lehessenek igazak, de együtt minden lehetőséget kimerítsenek.

A hipotézis lehet egyszerű, ha fennállásának feltételezése a populáció eloszlását egyértelműen meghatározottá teszi. Ellenkező esetben összetett hipotézisről beszélünk, azaz az egyszerű hipotézisek halmazáról.

A hipotézisek megfogalmazása után a feladatunk a mintaelemek egy olyan függvényének a keresése, amelynek valószínűség-eloszlása a nullhipotézis helyességének feltételezése, a populációra tett bizonyos kikötések és a mintavétel adott módja mellett egyértelműen meghatározható. Az e követelményeknek eleget tevő függvényt próbafüggvénynek nevezzük. A próbafüggvény hasonló szerepet tölt be a hipotézisvizsgálat során, mint a becslőfüggvény a becsléskor. A próbafüggvény konstruálása matematikai feladat.

A hipotézis helyességének ellenőrzése a próbafüggvény lehetséges értékeinek teljes tartományát osztópontok segítségével (Ca; Cf) két egymást át nem fedő tartományra bontjuk. Az egyik az elfogadási tartomány (E), a másik egy elutasítási vagy kritikus tartomány (K). Az egyes tartományok határait úgy választjuk meg, hogy a próbafüggvény értéke a nullhipotézis elfogadása esetén előre megadott valószínűséggel ($p=1-\alpha$) az elfogadási tartományba essen, és a kritikus tartományba esés csak α -valószínűséggel következzen be. Az $(1-\alpha)$ a konfidencia szint, ennek komplementere a szignifikancia szint (α). A próbafüggvény kritikus tartományba esésének valószínűségét szignifikancia szintnek nevezzük, és α -val jelöljük. Pl.: $\alpha=0,05$ szignifikancia szint azt jelenti, hogy ha a mintavételt végtelen sokszor végrehajtjuk, akkor 100 esetből összesen 5-ször fordul elő az, hogy a próbafüggvényünk minta alapján kiszámított értéke a kritikus tartományba esik.

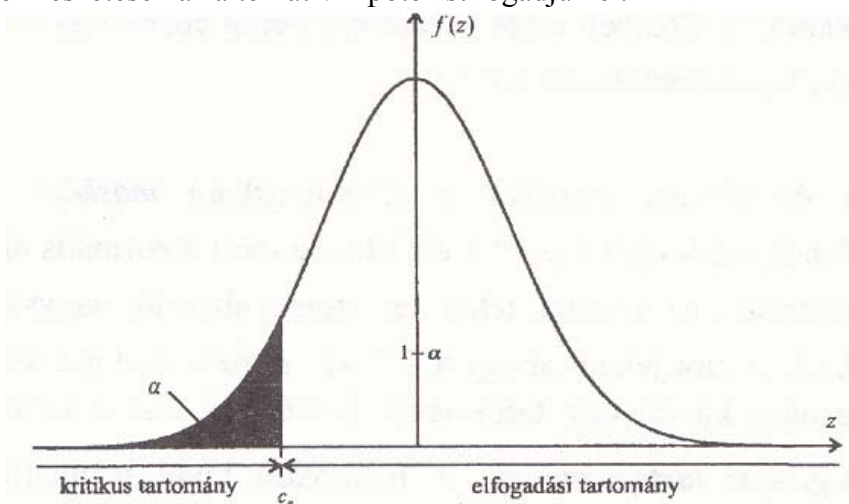
Ha ezek után a rendelkezésre álló minta adataiból kiszámítjuk a próbafüggvény úgynevezett aktuális értékeit, és ez beleesik az elfogadási tartományba, akkor a nullhipotézist elfogadjuk, ellenkező esetben a nullhipotézist elutasítjuk, és az alternatív hipotézist fogadjuk el.

Az elfogadási és a kritikus tartomány egymáshoz viszonyított elhelyezése háromféle lehet:

Egyoldali kritikus tartományhoz abban az esetben jutunk, ha az ellenhipotézisben a nullhipotézishez képest egy meghatározott irányú eltérést írunk fel.

Baloldali kritikus tartomány:

Ha a populáció várható értékre $H_1: \mu < \mu_0$ alternatív hipotézist fogalmazzuk meg, akkor baloldali, kritikus tartományról beszélünk. A nullhipotézist abban az esetben fogadjuk el, ha a próbafüggvény számított értéke nagyobb az elfogadási tartomány alsó határánál. Az elfogadási tartomány felső határa ebben az esetben pozitív végtelen. Ellenkező esetben a nullhipotézist vetjük el, és természetesen az alternatív hipotézist fogadjuk el.

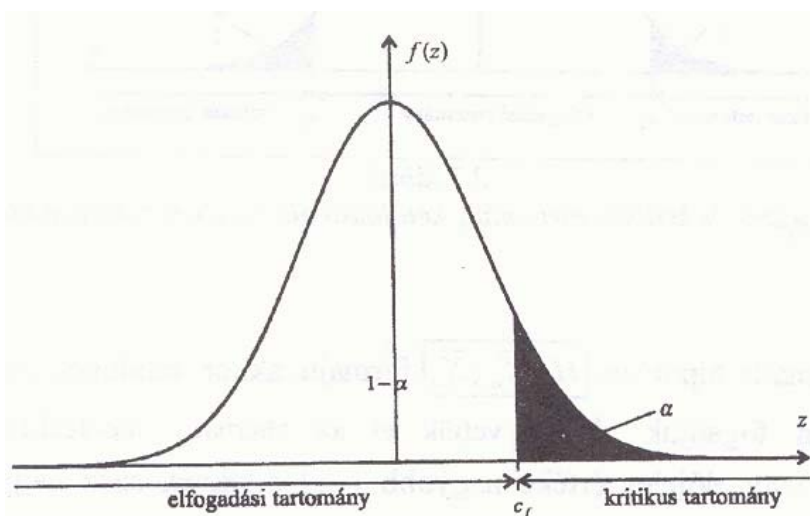


Elfogadási- és kritikus (baloldali) tartomány egyoldalú alternatív hipotézis esetén

Jobboldali kritikus tartomány:

Ha a populáció várható értékre $H_1: \mu > \mu_0$ alternatív hipotézist fogalmazzuk meg akkor jobboldali kritikus tartományról beszélünk.

A nullhipotézist abban az esetben fogadjuk el, ha a próbafüggvény számított értéke kisebb az elfogadási tartomány felső határánál. Az elfogadási tartomány alsó határa ebben az esetben negatív végtelen. Ellenkező esetben a nullhipotézist vetjük el, és természetesen az alternatív hipotézist fogadjuk el.

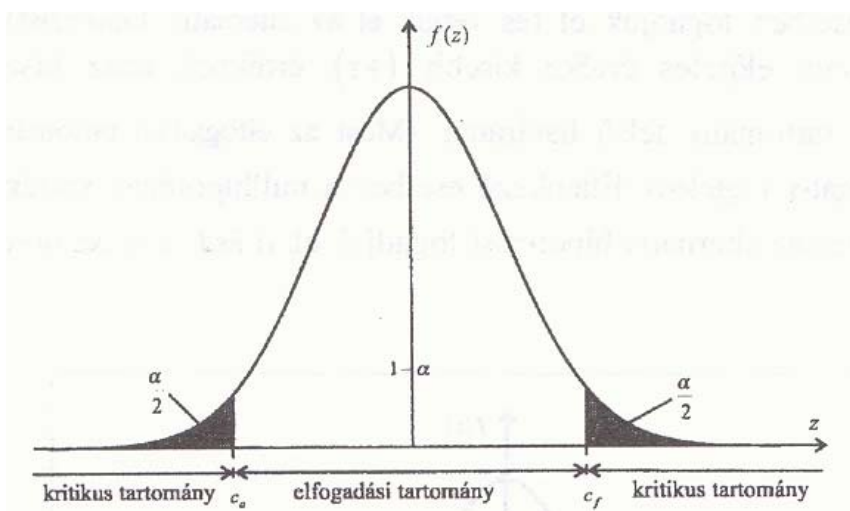


Elfogadási- és kritikus (jobboldali) tartomány egyoldalú alternatív hipotézis esetén

Kétoldali kritikus tartomány:

Kétoldali kritikus tartomány kijelölésére olyan esetben kerül sor, amikor a nullhipotézisben megfogalmazott állítástól való bármilyen irányú eltérés érdekel bennünket ($H_1: \mu \neq \mu_0$).

Ha a próbafüggvény számított értéke az elfogadási tartományba kerül, akkor a nullhipotézist fogadjuk el, ha a próbafüggvény értéke a kritikus tartományba kerül, akkor a nullhipotézist elvetjük.



Elfogadási- és kritikus tartomány kétoldalú alternatív hipotézis esetén

A hipotézisvizsgálat során elkövetett hibák

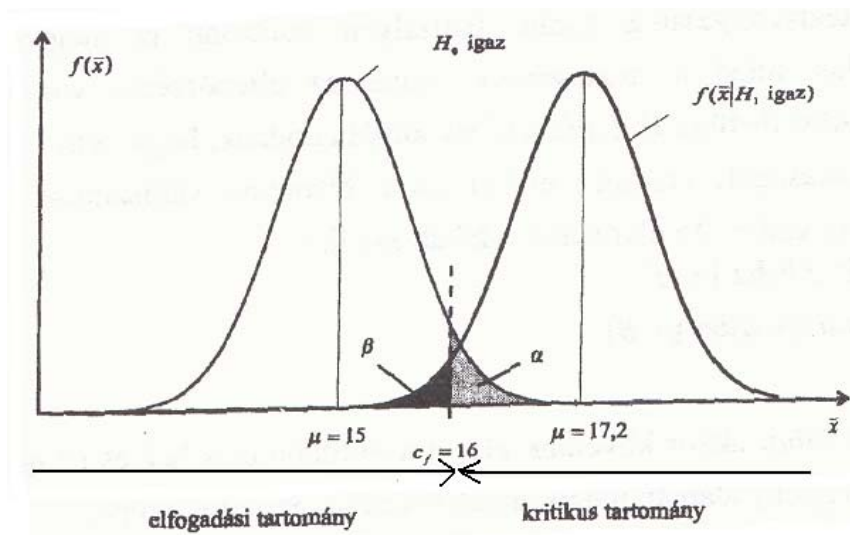
A mintából a populációra vonatkozóan csak valószínűségi következtetés lehetséges, így a hipotézisvizsgálat során hozott döntésünk bizonyos kockázattal jár.

Előfordulhat, hogy a nullhipotézis helyes, és a próbafüggvény adott mintából számított értéke mégis a kritikus tartományba esik. Ilyenkor a nullhipotézist annak ellenére, hogy fennáll, elutasítjuk. Ezt a hibás döntést elsőfajú hibának nevezzük. Az ilyen hiba elkövetésének valószínűsége az elfogadási és a kritikus tartomány konstrukciója alapján α , amelyet szignifikanciaszintnek nevezünk.

Előfordul, hogy a nullhipotézis nem áll fenn (nem igaz), és a próbafüggvény mintából számított értéke mégis az elfogadási tartományba esik. Ez szintén hibás döntés, és ilyenkor másodfokú hibát követünk el. Ezen esemény bekövetkezésének valószínűségét β -val jelöljük.

A hipotézisvizsgálat során elkövetett hibák

Valóságos helyzet	H ₀ -ra vonatkozó döntés	
	Elfogadjuk	elutasítjuk
H ₀ igaz	Helyes döntés 1- α	Elsőfajú hiba α
H ₁ igaz	Másodfajú hiba β	Helyes döntés 1- β



A hipotézisellenőrzés során elkövethető hibák

Az $(1-\alpha)$ valószínűséget a próba megbízhatósági szintjének, az $(1-\beta)$ -t pedig a próba erejének nevezzük.

A minta elemszámának növelésével - adott szignifikancia szint és alternatív hipotézis esetén – csökkenthető a másodfajú hiba elkövetésének valószínűsége, illetve minél távolabb van μ paraméter valóságos értéke a nullhipotézisben szereplő feltételezett értéktől, annál kisebb lesz β -értéke.

A hipotézisvizsgálat menet:

1. Megfogalmazni a nullhipotézist és az alternatív hipotézist.
2. Próbafüggvény keresése a nullhipotézisben megfogalmazott állításnak megfelelően. A próbafüggvény a mintaelemeknek egy olyan függvénye, amelynek eloszlása a nullhipotézis igazságát feltételezve pontosan ismert, a mintavétel előtt azonban ennek értéke is valószínűségi változó. A próbafüggvénynek több szempont szerint kell megfelelőnek lennie, egyrészt a nullhipotézisben megfogalmazott állításnak, azaz nem minden nullhipotézis ellenőrizhető azonos próbafüggvénnyel; másrészt a minta eloszlás-típusának, valamint a mintavétel módjának is.
3. Kiválasztani a szignifikancia szintet: az az elsőfajú hiba elkövetésének valószínűségét választjuk meg.
4. Az elfogadási és kritikus tartomány megállapítása a szignifikancia szintnek és a szabadságfoknak (ahol van) megfelelően.
5. Mintavétel, és a próbafüggvény értékének kiszámítása.
6. Döntés a nullhipotézis helyességének elfogadásáról, vagy a nullhipotézis elutasítása.

8.2. Egymintás statisztikai próbák

Az egymintás statisztikai próbák a populáció valamely paraméterének tesztelésére szolgálnak.

8.2.1. Várható értékre irányuló próbák

Azt teszteljük, hogy egy populáció ismeretlen várható értéke (μ), megegyezik-e az általunk feltételezett várható értékkel (μ_0). A nullhipotézis a következő:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Konkrét minta esetén:

$$H_0 : \bar{x} = \bar{x}_0$$

Az alternatív hipotézisünk háromféle lehet:

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

Konkrét minta esetén:

$$H_0 : \bar{x} < \bar{x}_0$$

$$H_0 : \bar{x} \neq \bar{x}_0$$

$$H_0 : \bar{x} > \bar{x}_0$$

8.2.1.1. Egymintás z-próba

A populáció normális eloszlású és a populációi szórás (σ) ismert, akkor hasonlóan a becsléshez, a z-próbafüggvényt alkalmazzunk.

$$z_0 = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

illetve ismert minta esetén:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Ez a próbafüggvény standard normális eloszlású valószínűségi változó.

A z-próba elfogadási tartományának határai az alábbiak:

Alternatív hipotézis	elfogadási tartomány
$H_1: \mu < \mu_0$	$[z_\alpha; \infty[$
$H_1: \mu \neq \mu_0$	$[z_{\alpha/2}; z_{1-\alpha/2}]$
$H_1: \mu > \mu_0$	$] -\infty; z_{1-\alpha}]$

A táblázatban csak a $z_{1-\alpha}$ értékeit találjuk meg, azonban a z_α -értékeit az alábbi összefüggés alapján meghatározhatjuk:

$$z_\alpha = -z_{1-\alpha}$$

1. bemutató feladat:

Egy automata gépsor lisztet csomagol, a szabvány szerint 100 dkg-os tömeggel, és a megengedett szórás 3 dkg. Ellenőrzés céljából 30 db-os mintát veszünk. A lemért lisztes zacskók átlagos tömege 98 dkg. Ellenőrizzük 5%-os szignifikancia szinten, hogy a gép megfelelően csomagol-e.

$$H_0: \mu = 100 \text{ dkg.}$$

$$H_1: \mu \neq 100 \text{ dkg}$$

$$z_0 = \frac{98 - 100}{\frac{3}{\sqrt{30}}} = -3,65 \quad z_{0,975} = 1,96; z_{0,025} = -1,96$$

Az elfogadási tartomány: (-1,96; 1,96)

Az elfogadási tartomány nem tartalmazza a próbafüggvény aktuális értékét (-3,65), ezért a nullhipotézist elutasítjuk, azaz 5%-os szignifikancia szinten a töltési tömeg nem felel meg a szabványnak.

8.2.1.2. Egymintás t-próba

A normális eloszlású populáció vizsgálatánál végezzük, ha nem ismerjük az eloszlás szórását. Ebben az esetben a

$$t_0 = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

próbafüggvényt használjuk, illetve konkrét minta esetén:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - x_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

a nullhipotézis ellenőrzésére.

Ha a nullhipotézis igaz, és a populáció eloszlása valóban normális, akkor a t-próbafüggvény szf=n-1 szabadságfokú Student-féle t-eloszlást követ. A t-próba elfogadási tartományának határai az alábbiak:

Alternatív hipotézis	elfogadási tartomány
$H_1: \mu < \mu_0$	$\left[t_{\alpha}^{szf} ; \infty \right[$
$H_1: \mu \neq \mu_0$	$\left[t_{\alpha/2}^{szf} ; t_{1-\alpha/2}^{szf} \right]$
$H_1: \mu > \mu_0$	$\left] -\infty ; t_{1-\alpha}^{szf} \right]$
$t_{\alpha}^{szf} = -t_{1-\alpha}^{szf}$	

2. bemutató feladat:

Az előző populáció eloszlása normális, az átlag 98 dkg, a szórását a mintából (n=30) becsültük meg, ami 5,5 dkg. Ellenőrizzük 5%-os szignifikancia szinten, hogy a gép megfelelően csomagol-e.

$$H_0: \mu = 100 \text{ dkg.}$$

$$H_1: \mu \neq 100 \text{ dkg}$$

$$t_0 = \frac{98 - 100}{\frac{5,5}{\sqrt{30}}} = -1,99 \quad t_{0,975}^{29} = 2,05; \quad t_{0,025}^{29} = -2,05$$

Az elfogadási tartomány: (-2,05; 2,05)

Az elfogadási tartomány tartalmazza a próbafüggvény aktuális értékét (-1,99), ezért a nullhipotézist elfogadjuk, azaz 5%-os szignifikancia szinten a töltési tömeg megfelel a szabványnak.

8.2.2. Populációi szórásra vonatkozó próba

A populációi szórás becslésére a korrigált tapasztalati szórást használjuk. A konfidencia intervallum meghatározását a χ^2 -eloszlásra (khí) alapozzuk.

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1) * s^2}{\sigma_0^2}$$

próbafüggvényt használjuk, amely szf=n-1 szabadságfokú χ^2 -eloszlást követ.

A nullhipotézisünk:

$$H_0: \sigma = \sigma_0$$

A χ^2 -próba elfogadási tartományának határai az alábbiak:

Alternatív hipotézis elfogadási tartomány

$$H_1: \sigma < \sigma_0 \quad \left[\chi_{\alpha (szf)}^2 ; \infty \right]$$

$$H_1: \sigma \neq \sigma_0 \quad \left[\chi_{\alpha/2 (szf)}^2 ; \chi_{1-\alpha/2 (szf)}^2 \right]$$

$$H_1: \sigma > \sigma_0 \quad \left[0 ; \chi_{1-\alpha (szf)}^2 \right]$$

3. bemutató feladat:

Az előző példában feltételezzük, hogy a gép 3 dkg-os szórással tölt. A 30 elemű mintából számított szórás 5,5 dkg volt. Ellenőrizzük, hogy helyes volt-e a feltevés, hogy a gép maximum 3 dkg szórással tölt, 5%-os szignifikancia szinten.

$$H_0: \sigma = 3 \text{ dkg.}$$

$$H_1: \sigma > 3 \text{ dkg}$$

$$\chi_0^2 = \frac{(30-1) * 5,5^2}{3^2} = 97,5$$

A $\chi_{0,95(29)}^2 = 42,6$, tehát az elfogadási tartomány (0; 42,6), a próbafüggvény értéke nem esik bele ebbe a tartományba, ezért a nullhipotézist elutasítjuk, azaz a töltés során a szórás meghaladja az előírást.

8.2.3. Függetlenségvizsgálat

A függetlenségvizsgálat azon nullhipotézis ellenőrzésére szolgál, hogy két ismerv független egymástól. Az alternatív hipotézisben pedig azt fogalmazzuk meg, hogy nem függetlenek.

A két ismerv akkor független egymástól, ha a peremmegoszlási viszonzyszámok (relatív gyakoriságok) szorzata egyenlő s megfelelő együttes viszonzyszámokkal:

$$\frac{f_{1\bullet}}{N} * \frac{f_{\bullet 1}}{N} = \frac{f_{11}}{N}$$

Ha nem ismerjük a véges populációt, akkor a mintából származó adatokkal kell eldönteni a függetlenséget. Ilyenkor is egy kontingenciatáblából indulunk ki, de a táblázat ekkor a mintában észlelt gyakoriságokat tartalmazza.

$$H_0: P_{ij} = P_{i\bullet} * P_{\bullet j} \quad (i=1,2,\dots,s; j=1,2,\dots,t)$$

$$H_1: P_{ij} \neq P_{i\bullet} * P_{\bullet j}$$

P_{ij} : az első ismerv i -edik és a második ismerv j -edik változata együttes előfordulásának valószínűsége a populációban.

A valószínűségeket a mintából becsüljük:

$$p_{i\bullet} = n_{i\bullet} / n \quad p_{\bullet j} = n_{\bullet j} / n$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*} = n * \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet} * n_{\bullet j}} - 1 \right)$$

$$n_{ij}^* = n * p_{i\bullet} * p_{\bullet j} = \frac{n_{i\bullet} * n_{\bullet j}}{n}$$

Vagy a Csuprov-féle együttható szerint, ahol

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \frac{(f_{ij} - f_{ij}^*)^2}{f_{ij}^*}$$

$$f_{ij}^* = n * P_{i\bullet} * P_{\bullet j}$$

A szabadságfok: $szf = (s-1)*(t-1)$

Ez a próba jobb oldali módon hajtható végre. A minta akkor tekinthető elég nagynak, ha még a legkisebb n_{ij}^* is legalább 5, de még jobb, ha legalább 10.

4. bemutató feladat:

Egy szociológiai vizsgálat során azt kívánjuk ellenőrizni, hogy az egyetemet végzett férfiak és nők előrejutási lehetőségei azonosnak tekinthetők-e. Ehhez a 15 éve végzett hallgatók közül 200 főt kiválasztva véletlenszerűen, az alábbi mintát kaptuk.

Megn.	Férfi	nő	$\Sigma n_{i\bullet}$
Beosztott	20	40	60
középvezető	60	40	100
Felső vezető	30	10	40
$\Sigma n_{\bullet j}$	110	90	200

A vizsgálatot 5%-os szignifikancia szinten végezzük el.

$$H_0: P_{ij} = P_{i\bullet} * P_{\bullet j} \quad H_1: P_{ij} \neq P_{i\bullet} * P_{\bullet j}$$

Megnevezés		n_{ij}	$n_{ij}^* = \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}$	$\frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}$
Férfi	Beosztott	20	$60 \cdot 110 / 200 = 33$	5,121
	középvezető	60	55	0,455
	Felső vezető	30	22	2,909
Nő	Beosztott	40	27	6,259
	középvezető	40	45	0,556
	Felső vezető	10	18	3,556
Σ		200	200	18,856

$$\chi^2_0 = 18,856$$

$$szf = (3-1) \cdot (2-1) = 2$$

$$\chi^2_{0,95(2)} = 5,99$$

Mivel a kritikus érték kisebb, mint a számított érték, a H_0 -t elutasítjuk, tehát az adatok alapján 5%-os szignifikancia szinten elmondható, hogy a nemhez való tartozás és a beosztás függenek egymástól, azaz elutasítjuk a függetlenséget.

8.2.4. Illeszkedésvizsgálat

Egy valószínűségi változó eloszlására vonatkozó állítás vagy feltételezés ellenőrzését illeszkedésvizsgálatnak nevezzük. Attól függően, hogy a hipotézisünket mennyire konkretizáljuk, kétféle illeszkedésvizsgálatot különböztetünk meg:

Ha a feltételezett eloszlás egyértelműen meghatározott - a típusát és a paramétereit előre rögzítjük -, akkor tiszta illeszkedésvizsgálatról beszélünk.

Ha a feltételezett eloszlásnak csak a típusát adjuk meg – a paramétereit pedig a mintából becsüljük -, akkor becsléses illeszkedésvizsgálatot végzünk.

A populációt egy ismerv (többnyire mennyiségi, néha minőségi) alapján k -számú részre bontjuk, azaz az adott ismerv alapján osztályozzuk a populáció egységeit. Ugyanezt azt osztályozást a mintán belül is elvégezzük.

Osztály	A kategória előfordulásának		
	valószínűsége	gyakorisága	relatív gyakorisága
		a mintában	
c_1	P_1	f_1	g_1
c_2	P_2	f_2	g_2
.	.	.	.
.	.	.	.
c_k	P_k	f_k	g_k
Összesen	1,00	n	1,00

Az általunk feltételezett populáció eloszlása minden ismervváltozathoz egy meghatározott P_i valószínűséget rendel. A nullhipotézis tehát:

$$H_0: P(c_i) = P_i \quad i=1,2,\dots,k, \text{ az alternatív hipotézisünk pedig:}$$

$$H_1: P(c_i) \neq P_i$$

A H_0 helyességét a χ^2 -próbafüggvénnyel vizsgálhatjuk meg:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(f_i - n \cdot P_i)^2}{n \cdot P_i} = \sum \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*} = n \cdot \left(\sum \frac{g_i^2}{P_i} - 1 \right)$$

$$f_i^* = n \cdot P_i$$

Ez a statisztikai vizsgálat a nullhipotézis helyessége esetén jó közelítéssel $\text{szf}=(k-b-1)$ szabadságfokú χ^2 -eloszlású, ahol a b a P_i valószínűségek meghatározásához szükséges olyan paraméterek száma, amelyeket a mintából becsülünk. Tiszta illeszkedésvizsgálat esetén a $b=0$.

Mivel χ^2 -próbafüggvény a nullhipotézistől való jelentős eltérést nagy pozitív értékkel jelzi, ezért az illeszkedésvizsgálatot a jobb oldali kritikus tartományra kell végrehajtani, azaz a felső kritikus értéket kell keresni, tehát az elfogadási tartomány pedig:

$$[0; \chi^2_{1-\alpha}(\text{szf})]$$

5. bemutató feladat:

Egy gyorsbüfé hálózatban a vevőket 45 másodperc alatt kell kiszolgálni. A kiszolgálási idő megengedett szórása 7 másodperc. 400 véletlenül kiválasztott vendég kiszolgálási idő szerinti megoszlása a következő:

kiszolgálási idő (másodperc)	vendégek száma (fő)	Ellenőrizzük azt a feltevést, hogy a minta az előírt paraméterű (átlag=45, szórás=7 másodperc) normális eloszlásból származott, $P=5\%$ -os szignifikancia szinten.
0-35	20	
35-40	80	
40-45	100	
45-50	100	
50-55	60	
55-	40	
Összesen	400	

kiszolgálási idő (másodperc)	vendégek száma (fő)	x_{if}	$z_{if}=(x_{if}-\mu)/\sigma$	$\Phi Z_{(if)}=P_i$	P_i	$f_i^*=n \cdot P_i$	$(f_i - f_i^*)^2 / f_i^*$
0-35	20	35	-1,43	0,0764	0,0764	30,56	3,65
35-40	80	40	-0,71	0,2389	0,1625	65	3,46
40-45	100	45	0	0,5	0,2611	104,44	0,19
45-50	100	50	0,71	0,7611	0,2611	104,44	0,19
50-55	60	55	1,43	0,9236	0,1625	65	0,38
55-	40	∞	∞	1	1,00	30,56	2,42
Összesen	400	-	-	-	-	400	10,79

A táblázatban vastagított számokat az alábbiak szerint kapjuk:

$$z_{if}=(x_{if}-\mu)/\sigma=35-45/7=-1,43$$

$$\Phi(-Z_{(if)})=1-P(z_{i1}) \text{ táblázatból}$$

$$P_i=P'_{ik}-P'_{ik-1}=0,2389-0,0764=0,1625$$

$$f_i^*=n \cdot P_i=400 \cdot 0,0764=30,56$$

$$(f_i - f_i^*)^2 / f_i^* = (20 - 30,56)^2 / 30,56 = 3,65$$

Ugyan így kell a többi értéket is kiszámítani

$$\chi^2_0=10,79$$

Szf=6-1=5, $\chi^2_{1-0,05(5)}=11,1$,
az elfogadási tartomány (0;11,1).

A számított érték az elfogadási tartományba esik, így elfogadjuk a nullhipotézist. A kiszolgálási időt 5%-os szignifikancia szinten 45 másodperc várható értékű és 7 másodperc szórású normális eloszlású valószínűségi változónak lehet tekinteni.

6. bemutató feladat:

Egy széleskörű vizsgálat során, Magyarországon a 15 éves és idősebb népesség 15%-a sovány, 25 %-a normál súlyú, és 60 %-a túlsúlyos volt 1996-ban. 2015-ben 500 véletlenszerűen kiválasztott minta alapján 72 fő sovány, 176 fő normál súlyú és 252 fő pedig túlsúlyos volt. 1%-os szignifikancia szinten állíthatjuk-e, hogy a két eloszlás egyforma. A kérdés az illeszkedésvizsgálattal válaszolható meg.

Osztály	A kategória előfordulásának		
	Valószínűsége P_i	gyakorisága	relatív gyakorisága
		a mintában	
Sovány	0,15	72	72/500=0,1444
Normál	0,25	176	176/500=0,352
túlsúlyos	0,60	252	252/500=0,504
összesen	1,00	500	1,00

$$\chi^2 = n * (\sum \frac{g_i^2}{P_i} - 1) = 500 * (\frac{0,1444^2}{0,15} + \frac{0,352^2}{0,25} + \frac{0,504^2}{0,60} - 1) = 28,608$$

$$szf=3-1=2$$

$$\chi^2_{0,99(2)}=9,21$$

az elfogadási tartomány (0; 9,21).

A két eloszlás nem egyezik, mivel a próbafüggvény számított értéke az elfogadási tartományba esik

8.3. Két- és több mintás statisztikai próbák

Gyakran előfordul, hogy két populációt akarunk vizsgálni, és a hipotézis két paraméter értékének egymáshoz való viszonyára vonatkozik. Ilyenkor kétmintás próbát hajtunk végre, azaz a populációkból 1-1 független, véletlen mintát veszünk a hipotézis ellenőrzése céljából. Az egymással összehasonlításra kerülő populációk időben, térben vagy bármilyen más tekintetben különbözhetnek egymástól.

8.3.1. Várható értékek különbözőségére irányuló próbák

Két populációból külön-külön és egymástól függetlenül vett minta alapján ellenőrizni kívánjuk a $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vagy konkrét minta esetén a $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$ hipotézis helyességét.

8.3.1.1. Kétmintás z-próba

Ha a két populáció normális eloszlású, és ismert mindkét populáció szórása, akkor a z-próbafüggvényt alkalmazzuk:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

A próba elfogadási tartománya megegyezik az egymintás z-próba elfogadási tartományával:

Alternatív hipotézis	elfogadási tartomány
$H_1: \mu_1 < \mu_2 \ (x_1 < x_2)$	$[z_\alpha; \infty[$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \ (x_1 \neq x_2)$	$[z_{\alpha/2}; z_{1-\alpha/2}]$
$H_1: \mu_1 > \mu_2 \ (x_1 > x_2)$	$] -\infty; z_{1-\alpha}]$

7. bemutató feladat:

A levegőszennyeződés vizsgálatakor az ülepedő por ($\text{g/m}^2/\text{hó}$) mennyiségét mérték meg téli és nyári időszakban. A mérés eredménye:

Télen: $n_1=60$ $\bar{x}_1 = 5,1$ $\sigma_1=3$

Nyáron: $n_2=60$ $\bar{x}_2 = 5,9$ $\sigma_2=3,9$

Megoldás:

$$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$$

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{5,1 - 5,9}{\sqrt{\frac{3^2}{60} + \frac{3,9^2}{60}}} = -1,26$$

$$z_{0,975}=1,96$$

Az elfogadási tartomány: $(-1,96, 1,96)$

A számított érték az elfogadási tartományba esik, így a levegőszennyeződés a mért adatok alapján, azonos télen és nyáron.

8.3.1.2. Kétmintás t-próba

Ha a két normális eloszlású populáció szórását nem ismerjük, és feltételezzük, hogy szórásuk lényegesen nem különbözik, ilyenkor t-próbát alkalmazunk:

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_d \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \text{ (közös szórás)}$$

A szabadságfok szf= n_1+n_2-2

A próba elfogadási tartománya megegyezik az egymintás t-próba elfogadási tartományával.

8. bemutató feladat:

Egy üzemben a szerelési műveleteket két eltérő módon tanították be. A két csoportból mintát vettek, és feljegyezték a dolgozók teljesítményét. A kérdés, hogy 5%-os valószínűségi szinten van-e különbség a két szerelési mód között?

$$\begin{array}{ll} n_1=16, & \bar{x}_1=128 & s_1=18 \\ n_2=11, & \bar{x}_2=112 & s_2=19 \end{array}$$

Megoldás:

$$H_0: x_1 \geq x_2,$$

$$H_1: x_1 < x_2,$$

$$s_d = \sqrt{\frac{(16-1) * 18^2 + (11-1) * 19^2}{16+11-2}} = 18,41$$

$$t_0 = \frac{128-112}{18,41 \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{11}}} = 2,22$$

Szf=25 $t_{0,025}^{(25)} = -1,71$, az elfogadási tartomány:

$$\left[t_{\alpha}^{szf}; \infty \right], \text{ azaz } \left[-1,71; \infty \right]$$

Mivel a számított t-érték beleesik az elfogadási tartományba, ezért a nullhipotézist elfogadjuk, azaz az első betanítási módszer nem jobb, mint a második.

Ha a két minta szórása nagymértékben különbözik, akkor a kétmintás t-próba nem alkalmazható a két várható érték egyezésének eldöntésére. Ilyen esetekben az úgynevezett Welch-eljárást alkalmazzuk:

$$t_f = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

9. bemutató feladat:

Egy üzemben a szerelési műveleteket két eltérő módon tanították be. A két csoportból mintát vettek, és feljegyezték a dolgozók teljesítményét. A kérdés, hogy 5%-os valószínűségi szinten van-e különbség a két szerelési mód között?

$$\begin{array}{ll} n_1=16, & \bar{x}_1=128 & s_1=18 \\ n_2=11, & \bar{x}_2=112 & s_2=29 \end{array}$$

Megoldás:

$$H_0: x_1 \geq x_2,$$

$$H_1: x_1 < x_2,$$

$$t_f = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{|128 - 112|}{\sqrt{\frac{18^2}{60} + \frac{29^2}{60}}} = 1,63$$

Szf=25 $t_{0,025}^{(25)} = -1,71$, az elfogadási tartomány:

$$\left[t_{\alpha}^{szf}; \infty \right], \text{ azaz } \left[-1,71; \infty \right]$$

Mivel a számított t-érték beleesik az elfogadási tartományba, ezért a nullhipotézist elfogadjuk, azaz az első betanítási módszer nem jobb, mint a második.

8.3.2. Két populációi szórás egyezőségére irányuló próba

Ha a két populáció normális eloszlású, a szórások egyezőségének vizsgálatára az F-próbafüggvény alkalmazható, ezért F-próbának nevezzük.

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2,$$

a szabadságfokok az alábbiak: szf₁=n₁-1; szf₂=n₂-1.

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ vagy } F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Az F-eloszlás nem szimmetrikus, elfogadási tartománya a következő:

Alternatív hipotézis

elfogadási tartomány

$$H_1: \sigma_1 < \sigma_2$$

$$\left[F_{szf_2(\alpha)}^{szf_1}; \infty \right]$$

$$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$\left[F_{szf_2(\alpha/2)}^{szf_1}; F_{szf_2(1-\alpha/2)}^{szf_1} \right]$$

$$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$$

$$\left[0; F_{szf_2(1-\alpha)}^{szf_1} \right]$$

$$F_{Szf_1(\alpha)}^{Szf_2} = \frac{1}{F_{Szf_1(1-\alpha)}^{Szf_2}}$$

10. bemutató feladat:

Az előző példa folytatása. Ellenőrizzük 10%-os szignifikancia szinten azt a feltevést, hogy a munkások teljesítményének szórása megegyezik.

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2, H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$F = \frac{18^2}{19^2} = 0,8976$$

$$szf_1=15; szf_2=10$$

$$\left[F_{10(0,05)}^{15} = 0,351; F_{10(0,95)}^{15} = 2,85 \right]$$

A számított érték belesik az elfogadási tartományba, így a nullhipotézist elfogadjuk, azaz a teljesítmények szórása között nincs szignifikáns különbség.

8.3.3. Két eloszlás egyezőségének a vizsgálata

Két eloszlás egyezőségének a vizsgálatát homogenitás vizsgálatnak is nevezzük.

Feltételezzük, hogy valamely változó két populáción belüli eloszlása azonos. Erre a χ^2 -eloszlású próbafüggvényt alkalmazzuk. A két minta elemszáma n_1 és n_2 , akkor χ^2 értéke:

$$\chi^2 = n_1 * n_2 * \sum \frac{1}{n_{1i} + n_{2i}} * \left(\frac{n_{1i}}{n_1} - \frac{n_{2i}}{n_2} \right)^2$$

$$\frac{n_{1i}}{n_1} = g_i \dots \dots \dots \text{relatívgyakoriság}$$

11. bemutató feladat:

A virágárákat vizsgálva a pesti és budai virágüzletekben arra keresték a választ, hogy a virágárok eloszlása azonos-e a két helyen 99%-os konfidenciaszinten.

Ár	Buda	Pest	számítások			
	árusok száma (db)		$n_{1i}+n_{2i}$	g_{1i}	g_{2i}	$\frac{1}{n_{1i} + n_{2i}} * \left(\frac{n_{1i}}{n_1} - \frac{n_{2i}}{n_2} \right)^2$
0-55	3	5	8	0,0400	0,0595	0,000048
56-65	22	6	28	0,2933	0,0714	0,001759
66-75	18	18	36	0,2400	0,2143	0,000018
76-85	18	21	39	0,2400	0,2500	0,000003
86-95	6	18	24	0,0800	0,2143	0,000752
96-105	6	10	16	0,0800	0,1190	0,000095
105-	2	6	8	0,0267	0,0714	0,000250
összesen.	75	84	159	1	1	0,002925

$$\chi^2 = n_1 * n_2 * \sum \frac{1}{n_{1i} + n_{2i}} * \left(\frac{n_{1i}}{n_1} - \frac{n_{2i}}{n_2} \right)^2 = 75 * 84 * 0,002925 = 18,4275$$

$$szf=7-1=6 \quad \alpha/2=0,005 \quad 1-\alpha/2=0,995$$

$$c_a=0,68 \quad c_f=18,5$$

Az elfogadási tartomány: (0,68; 18,5)

A számított érték beleesik az elfogadási tartományba, azaz a virágárok eloszlása azonos a két helyen.

8.3.4. Varianciaanalízis

Varianciaanalízissel (szórásnégyzet elemzés) kettőnél több populáció várható értékének egyezősége tesztelhető.

A varianciaanalízis annak a nullhipotézisnek az ellenőrzésére szolgál, hogy kettőnél több, azonos szórású normális eloszlású valószínűségi változónak azonos-e a várható értéke.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$$

A varianciaanalízis abból indul ki, hogy minden megfigyelés 3 komponens összege:

- a várható érték: μ ,
- egy a j-edik sokaságra jellemző β_j konstans,
- és egy véletlen összetevő (hibaváltozó): ε_{ij} .

A H_0 helyességét próbafüggvénnyel vizsgáljuk, és ez az F-próbafüggvény.

$$F = \frac{s_k^2}{s_b^2} = \frac{SSK / (M - 1)}{SSB / (n - M)} = \frac{MS_k}{MS_H} = \frac{MQ_k}{MQ_H}$$

SSK: a csoportok közötti eltérés négyzetösszege (külső szórás négyzete)

$$SSK = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

M: a csoportok száma

SSB: a csoportokon belüli eltérés négyzetösszege. (belső szórás négyzete)

$$SSB = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

Ezen kívül ki kell számolni az összes adat szórásnégyzetét is.

$$SST = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

Vagy:

$$SST = SSK + SSB \text{ (teljes szórás négyzete)}$$

A varianciatáblázat a következő lesz:

A szóródás oka	SS (SQ)	DF (FG)	MS (MQ)	F
Külső (kezelés)	SSK	M-1	s_k^2	s_k^2 / s_b^2
Belső (hiba)	SSB	n-M	s_b^2	
Teljes	SST	n-1		

Az F-próba jobboldali próba. Ha a tapasztalati F-érték (számított) nagyobb az elméleti F-értéknél (táblázatbeli), akkor a várható értékek egyezőségére vonatkozó nullhipotézist az adott szignifikanciaszint mellett elvetjük, és az alternatív hipotézist fogadjuk el.

12. bemutató feladat:

Egy kis élelmiszerbolt tulajdonosa feltételezte, hogy a hétfői és szombati napokon nem ugyanannyi a sajt forgalma, mint a hét többi napján. Azért, hogy a sajtrendelést jobban le tudja adni, feljegyezte a forgalmat az adott napokon:

Napok	Megfigyelt napok száma	Eladott mennyiség (kg)	Átlag	Variancia (szórásnégyzet)
Hétfő	6	30,40,54,34,44,50	42	84,8
egyéb	10	49,43,30,59,35,46,42,35,36,43	41,8	70,4
szombat	6	52,58,57,70,54,54	57,50	42,3
Össz.	22		46,136	111,17

Ellenőrizzük 5%-os szignifikancia szinten, hogy a sajt forgalom azonos a megfigyelt napokon.

$$\begin{aligned} SST &= 21 \cdot 111,17 = 2334,57 \\ SSB &= 5 \cdot 84,8 + 9 \cdot 70,4 + 5 \cdot 42,3 = 1269,1 \\ SSK &= 2334,57 - 1269,1 = 1065,47 \\ s_k^2 &= SSK / (M-1) = 1065,47 / 2 = 532,735 \\ s_b^2 &= SSB / (n-M) = 1269,1 / 19 = 66,795 \\ F &= 532,735 / 66,795 = 7,976 \end{aligned}$$

A sajt forgalom varianciánálízis táblázata

A szóródások	SS (SQ)	DF(FG)	MS(MQ)	F
Milyen nap	1065,47	2	532,735	7,976
Hiba	1269,1	19	66,795	
Teljes	2334,57	21		

Mivel $F_{0,95}(2;19) = 3,52$, azaz a táblázatbeli érték kisebb, mint a számított F-érték, így a várható értékek egyezését állító nullhipotézis elvethető. A hét vizsgált napjain 5%-os szignifikancia szinten nem egyforma a sajt forgalom átlagos nagysága.

8.3.5. Specifikus kezelés-átlagok összehasonlításai

Ha a variancia-analízis eredménye nem szignifikáns, akkor az analízisnek vége, és azt mondjuk, hogy a várható értékek között nincs különbség.

Ha a variancia-analízis eredménye szignifikáns, akkor csak annyit mondhatunk, hogy a populációk átlagai között van legalább egy, a többitől eltérő. Azt, hogy melyik az, ahhoz páronként össze kell hasonlítani az átlagokat. Speciális próbákat dolgoztak ki, melyek többé-kevésbé mind az egész kísérletre vonatkozóan "garantálják", hogy az első fajú hiba valószínűsége „a”, tehát adott szignifikancia szinten tartják az első fajú hiba valószínűségét.

a) *t-próba (SzD, LSD-legkisebb szignifikáns differencia)*

A t-próba képletét alkalmazza, csak most az összevont szórás helyébe a variancia-analízisből kapott s_b -t teszi, így az i-edik és j-edik csoport közötti különbséget a következő képlettel adott, N-h szabadságfokú t-próbával teszteli:

$$t = \frac{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|}{s_b \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}}$$

Az átlagok páronkénti összehasonlítása ha az ismétlésszámok azonosak (mondjuk mindegyik r), akkor a sok páronkénti összehasonlítás egyszerűsíthető a Szignifikáns Differencia (SzD) felhasználásával (angol szakirodalomban LSD, Least Significant Difference).

$$SzD_{5\%} = t_{krit} \cdot \sqrt{\frac{2s^2}{2r}}$$

ahol $s^2 = MS_{\text{hiba vagy belső}}$
 r az ismétlésszám

t_{krit} pedig az n-k szabadságfokhoz tartozó 5%-os hibaszintű kétoldali t érték (kiolvasható táblázatból)

Alkalmazása: bármely két sokasági átlagot 5%-os hibaszinten szignifikánsan eltérőnek tekintünk, ha a mintaátlagaik eltérése meghaladja az SzD5% értéket

b) Bonferroni módszer

a t-próba képletét alkalmazzuk, de nem "a", hanem "a" /c szinthez tartozó t-értékehez hasonlítjuk (kétoldali táblázat esetén), ahol c az összehasonlítások száma. Akétmintás t-hez tartozó p-értéket le kell osztani az összehasonlítások számával. Nyilvánvaló, hogy ez a módszer csak kisszámú összehasonlítás esetén alkalmazható inkább.

- c) *Sidak teszt*: a fenti t-értéket számolja, de "a" helyett $1-(1-\alpha)^{1/(k(k-1)/2)}$ szintet használ, a Bonferroni módszernél szűkebb határokat ad.
- d) *Tukey-próba*: minden lehetséges, nagyszámú páronkénti hasonlítás esetén a Tukey próba rövidebb intervallumokat ad, mint a Scheffé vagy a Bonferroni (azaz hamarabb mutat szignifikáns eltérést). Képlete egyenlő elemszám esetére

$$T = \frac{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|}{\frac{s_b}{\sqrt{n}}}$$

menyiséget speciális táblázatból, az ún. studentizált terjedelmek táblázatából kell ki-keresni (h, N-h) esetén.

- e) *Scheffé próba*: minden lehetséges kontrasztra vagy más lineáris hipotézisre, beleértve a páronkénti összehasonlításokat: két csoport akkor tekinthető szignifikánsan különbözőnek, ha

$$\frac{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|}{s_b \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \geq \sqrt{(h-1)F_{\alpha, h-1, N-h}}$$

- f) *Dunnett próba*: minden csoportot egyetlen csoporthoz (kontroll) hasonlít.

Mikor melyiket alkalmazzuk?

1. Minden lehetséges páronkénti hasonlítás esetén a Tukey próba rövidebb intervallumokat ad, mint a Scheffé vagy a Bonferroni (azaz hamarabb mutat szignifikáns eltérést)
2. Ha minden kontraszt is érdekel, a Scheffé a legjobb. Ha csak néhány, Bonferroni.
3. Tukey és Scheffé használhatók arra, hogy azt vizsgáljuk, amit az adatok szuggerálnak, a Bonferroni erre nem használható.
4. Számítsuk ki mindet, és a végén a számunkra legmegfelelőbbet használjuk.