

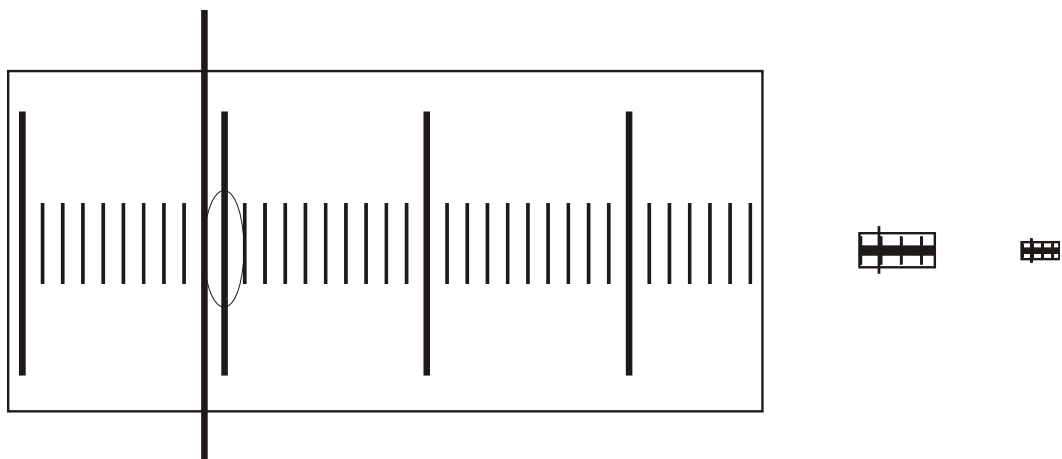
5. Mérési hibák

A **mérési hiba** a mért érték eltérése a tényleges mérethez képest, éppen ezért közvetlenül mérési eltérésnek is nevezhetjük. Méréstechnikai szempontból a hiányzó, ismeretlen, vagy nulla értékű hiba kezelhetetlen. Akkor lehet egy mérési eredményt elfogadni, arra valamilyen döntést alapozni, ha adottak és elfogadhatóak a mérés hibái (eltérései). Ha egy mérőgyűrűre, ami belső méret etalonja az van gravírozva, hogy 25,000 mm, akkor ez azt jelenti, hogy a gyűrű furatának átmérője 20°C hőmérsékleten 24,9995 és 25,0005 mm közé esik. Erre a gyűrű gyártója egyrészt a biztosíték, másrészt azok a tárolási és használati körülmények, amelyek közt eddig a gyűrű volt. Méréstechnikai szempontból értelmezzük a **hasznos tizedesjegyek** fogalmát, tehát méréstechnikai szempontból nem egyenértékűek a következő értékek: 12,34 mm és 12,340 mm. A 12,34 mm azt jelenti, hogy a feltételezhető méret 12,335 és 12,345 mm közé esik, tehát legfeljebb $\pm 0,005$ mm, azaz 0,01 mm bizonytalanságot feltételezünk. A 12,340 mm azt jelenti, hogy a méret 12,3395 és 12,3405 mm közé esik, tehát a bizonytalansága legfeljebb $\pm 0,0005$ mm, azaz 0,001 mm. Szabály: 1 tizedesjegynél többet nem adunk meg, mint amekkora a mérőeszközünk osztásértéke, amivel a mérést elvégeztük!

Az analóg kijelzésű mérőeszközöknél a tört osztásértéket megbecsüljük. A tört osztásértékek becslésére a következő szabályokat kell betartani:

1. az utolsó (legkisebb) osztásérték után **csak 1 tizedest becsülünk**, többet nem (lásd az előző fejezetben a hasznos tizedesekről írtakat)
2. ha az értékünk egy osztásközbe esik, akkor azt kell eldöntenünk, hogy az osztásköz elejére (1-2-3) közepére (4-5-6), vagy a végére (7-8-9), és ennek megfelelően kell értéket választani
3. ha az érték egy osztás közelébe esik, akkor (9-0-1) lehet
4. vegyük tudomásul, hogy a becsült érték bizonytalan, tehát akkor, ha tegyük fel, hogy a mérőeszközünk mindig pont egy osztásértékre esik, akkor az esetek egy nagy részében adhatjuk a tört osztásértéket 0-nak, de néhány 1 és 9-es értéket is adjunk!
5. A jól becsült értékek eltérése legfeljebb ± 1 törtosztásérték lehet!
6. **Digitális kijelzésű mérőeszközöknél nem kell (nem is szabad) tört osztásértéket becsülni**, ettől függetlenül a digitális kijelzőnek nem szükségszerűen jobb a felbontása, mint amit az analóg kijelzőn a tört osztás jó becslésével el lehet érni.

A mérőeszközök osztásértéke azért fontos mérőeszközjellemző, mert az osztásértékek leolvasása elvileg egyértelmű. Gyakorlatilag sajnos az osztásértékek leolvasása csak akkor egyértelmű, ha nem valamelyik osztásérték közelében vagyunk éppen. A méréstechnika alapvető problémája, hogy nem tudunk akármilyen kis eltéréseket érzékelni, csak egy bizonyos küszöbérték felett és minden mérésnél tudnunk kell, hogy az adott mérésnél mekkora az a legkisebb méretkülönbség, amit egyértelműen meg tudunk különböztetni, amit érzékelni tudunk. Ezt a legkisebb érzékelhető méretkülönbséget nevezzük a **mérés felbontásának**, vagy **érzékenységének**. Azért tudatosan nem a mérőeszköz, hanem a mérés felbontásának nevezem, mert a mérést meghatározó tényezők között a mérőeszköz mellett a mérést végző személy, a környezet, a mérési módszer és a mérés tárgya is befolyásolja. Kiindulhatunk abból, mivel a mérőeszközgyártók így készítik a mérőeszközök osztásait, hogy az osztás 1/3-a, 1/4-e, legfeljebb 1/5-e az, amekkora méretkülönbséget még meg tudunk különböztetni. Az 5.1 ábrán az látható, hogy a bal oldali képen egyértelműen megállapítható, hogy a hosszabb vonal a főosztás előtti 9. osztásértékre esik. Ha ezt a képet a 10 %-ára kicsinyítjük, akkor már csak azt tudjuk egyértelműen megállapítani, hogy a hosszabb vonal kicsivel a főosztás előtt van. Ha ezt a képet tovább kicsinyítjük a felére, akkor a hosszabb vonal egybeesőnek látszik a főosztással, tehát ha ezen a kis képen olvasnánk le, akkor éppúgy becsülhetnék a főosztással egybeesőnek, mint plusz, vagy mínusz 0,1 osztásúnak. Tehát ha megbecsüljük egy osztáson belül az osztásnak a tizedét, akkor eleve abból kell kiindulnunk, hogy bár az általunk becsült értéket fogjuk a legvalószínűbb értéknek tekinteni, de a közvetlen szomszédos két tizedosztás is lehetséges érték.



5.1 ábra: Ugyanannak a skálának a képe különböző nagyításokban
(10 %-ra illetve 5 %-ra kicsinyítve)

A mérési hibák lehetnek durvák, rendszeresek és véletlenek.

A **durva hibák** azok a méreteltérések, amelyek előjelre és nagyságrendre rendkívül szélsőségesek lehetnek és olyan okra vezethetők vissza, amelyek szakszerűen elvégzett mérésnél nem következnek be. Ilyen okok a hozzá nem értés, a félreértelmezés, a nem megfelelő eszköz használata, a rossz leolvasás, a leolvasott érték helytelen dokumentálása (rossz adatbevitel), nem megfelelő darab mérése, vagy ha munkadarab nem megfelelő helyén történik a mérés.

A durva hibákat teljesen sohasem lehet kizárni, de előfordulásuk valószínűségét szakértelemmel (hozzaértéssel), figyelemmel, gyakorlattal, megfelelő mérőeszközök és körülmények biztosításával (pl. legyen elegendő idő, hogy el lehessen kerülni a kapkodást) elfogadhatóan kis értéken lehet tartani. A durva hibák elkerülése csak nagyobb költség- és időráfordítással érhető el. Amikor egy mérést először végzünk el, akkor helyesen kell munkadarabot, mérőeszközt, mérési módszert megválasztani, biztosítani kell a megfelelő körülményeket a méréshez és a mérést jól végre kell hajtani. Akinek nagyobb gyakorlata, tapasztalata van, annak elvileg az új mérésnél nagyobb esélye van a durva hibák elkerülésére. Ha egy mérést megismétlünk – főleg akkor, ha korábban már ezt a mérést sokszor sikeresen elvégeztünk – akkor elvileg csak a korábbi sikeres mérési folyamatot kell megismételni. Ilyenkor arra kell ügyelni, hogy a megszokás ne vezessen figyelmetlenséghez, felületességhez.

A **rendszeres hibák** azok a méreteltérések, amelyek ugyanolyan körülmények között elvégzett méréseknél előjelre (irányra) és nagyságra nézve ugyanúgy jelentkeznek.

Megismételhetőségi feltételek közt megismételt mérés alatt azt értjük, ha ugyan az a mérő személy, ugyan azt a munkadarabot, ugyan azzal a mérőeszközzel, ugyan azzal a mérési módszerrel, ugyan olyan körülmények között annyszor megméri, amennyi mérés még ugyan olyan feltételűnek tekinthető (kellően sokszor, elegendően rövid idő alatt). Egyik mérésről a másikra megváltozhat a mérőszemély annyiban, hogy máshogyan mér, mint korábban, mert kitalál valami újat, rájön valamire, megjön, vagy elmegy a kedve, elfárad, vagy felélénkül, tapasztalatot/gyakorlatot szerez ... A mérőeszközeink tervezésénél és kivitelezésénél és a mérések elvégzésénél arra kell törekedni, hogy a mérőszemély, a munkadarab, a mérési módszer, a mérés körülményei, sőt maga a mérőeszköz a mérést minél kisebb mértékben befolyásolja, de tudomásul kell vennünk mérést befolyásoló tényezők (munkadarab, mérőszemély, mérőeszköz, módszer, környezet) tökéletlenségét is. A mérőeszközök is változhatnak: elkopnak, vagy éppen be kell először jártni őket. A munkadarabok tervezésénél és gyártásánál a mérésük szempontjait csak korlátozottan lehet érvényre juttatni, tehát esetleges, hogy ugyan azt a munkadarabot mennyire lehet kétszer egymás után ugyan úgy megmérni. A mérés körülményei (környezet) rövid idő alatt is változhatnak (hőmérséklet, megvilágítás, rezgések/zaj, szennyeződések). Látható tehát, hogy milyen sok befolyásoló tényező állandóságára ügyelni kell ahhoz, hogy megismételhetőségi feltételek közt megismételt mérésről beszélhessünk. Egy mérőeszköz

rendszeres hibáját úgy lehet méréssel megállapítani, hogy egy etalont megmérünk. Ez lehet mérőeszköz kalibrálása, mérőeszköz hibagörbe felvétele, vagy mérőeszköz képességvizsgálatának első eljárása. Mérés rendszeres hibáját úgy lehet méréssel meghatározni, hogy úgy ismétljük meg a mérést, hogy a sok befolyásoló tényező közül csak egyet változtatunk meg, az összes többinek pedig gondoskodunk a változatlanságáról. Ebben az esetben a mérési eredményben rendszeresen jelentkező eltérés a mérés rendszeres hibája lesz. Példa ilyen rendszeres hibára, ha egy olyan munkadarabot, aminek más a hőtágulása, mint a mérőeszköznek nem 20°C hőmérsékleten mérjük meg. A mérőerő is a munkadarab és a mérőeszköz alakváltozását és ezzel rendszeres hibát okoz. Maguknak a mérőeszközöknek is van saját rendszeres hibájuk, amit a hibagörbék, vagy a mérőhasáb hibatáblázata mutat.

A mérés rendszeres hibája meghatározható számolással is.

Példa a rendszeres hiba számolással történő meghatározására

Egy acél anyagú villás idomszert, aminek 65 mm sík felületei közti laptávolsága hosszmérőgéppel mérjük. A hosszmérőgépnek üveg mérőeleme van. Az acél hőtágulási együtthatóját vegyük $11,8 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$ -nek, az üvegét pedig $9 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$ -nek. Határozzuk meg a villás idomszer hosszmérőgéppel történő mérésének rendszeres hibáját 25°C-n. A hőtágulás fizikai összefüggése:

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (5.1)$$

ahol

Δl a hőtágulás mértéke

l a kiindulási hossz

α hőtágulási együttható

ΔT hőmérsékletkülönbség

Méréseink referenciahőmérséklete 20°C, tehát a hőmérsékletkülönbség 5°C. A villás idomszer és a hosszmérőgép üvegmercéjének hőtágulásának különbsége:

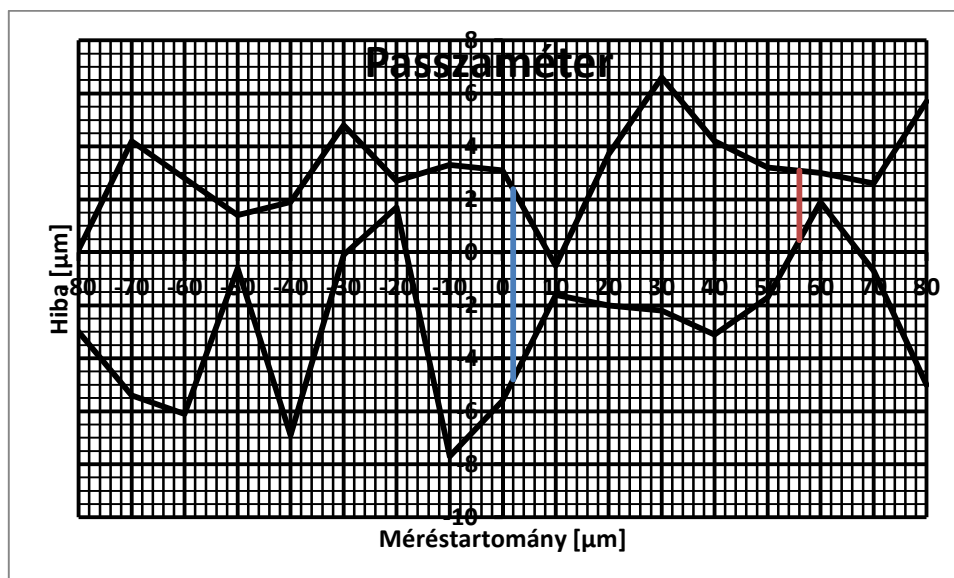
$$\Delta l_v - \Delta l_{\bar{u}} = l \cdot (\alpha_v - \alpha_{\bar{u}}) \cdot \Delta T = 65 \text{ mm} \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1} \cdot 5 \text{K} = 0,00091 \text{ mm}.$$

A rendszeres hibánál a nagyságán túl nagyon fontos, hogy hogyan, milyen irányban vesszük figyelembe. Mivel az üvegmerce ennyivel kevésbé tágul, mint a villás idomszer, tehát ennyivel nagyobbak mutatja az idomszert, pedig az valójában a mért értéknél ennyivel rövidebb. Tehát ha a villás idomszert 65 mm-nek mérjük, akkor a feltételezhető méret $65 - 0,00091 = 64,99909 \text{ mm}$.

Egy mérés rendszeres hibáival kapcsolatban annyi a teendő, hogy észre kell venni, meg kell méréssel, vagy számolással határozni a rendszeres hibákat, majd a mérési eredményhez a rendszeres hibák helyes előjellel figyelembe vett egyszerű számtani összegét hozzá kell adni, vagy ki kell vonni, de ezt jól végig kell gondolni, hogy biztosan jó irányba módosítsuk a mérési eredményt!

Számítási példa a rendszeres hibák eredőjének meghatározására

Egy dugós idomszert passzaméterrel mérünk. A passzamétert 20 mm-es mérőhasábon kalibráljuk, a mérőhasáb rendszeres hibája $-0,1 \text{ } \mu\text{m}$. Kalibráláskor a passzaméter $2 \text{ } \mu\text{m}$ -t mutatott, az idomszer mérésekor pedig $56 \text{ } \mu\text{m}$ -t. A passzaméter hibagörbét (a hibagörbe megbízhatósági tartományát) az 5.2 ábra mutatja.



5.2 ábra: Passzaméter hibagörbéje (minimum/maximum)

A hibagörbéből azt lehet megállapítani, hogy kalibráláskor a passzaméter rendszeres hibája $-4,8$ és $2,4$ μm közé esik, tehát a középértéket, $-1,2$ μm -nek tekintjük, méréskor pedig $0,5$ és $3,1$ μm -közé esik, ennek a középértéke $1,8$ μm . Ha kalibráláskor a passzaméter $1,2$ μm -rel kevesebbet mutat, mint kellene, akkor a rendszeres hibával módosított mérési érték kalibráláskor $2 - (-1,2) = 3,2$ μm . Ha méréskor a passzaméter $1,8$ μm -rel többet mutat, mint kellene, akkor a rendszeres hibával módosított érték a méréskor $56 - 1,8 = 54,2$ μm . A passzaméter kalibrálása, majd a mérés alapján a dugós idomszer mérete $54,2 - 3,2 = 51$ μm -rel nagyobb, mint a kalibráláshoz használt idomszeré, ami valójában $19,9999$ mm. Ennek alapján a dugós idomszer mérete $19,9999$ mm + $0,051$ mm = $20,0509$ mm.

A **mérések véletlen hibái** azok a méreteltérések, amelyek a mérést megismételhetőségi feltételek mellett megismételve nagyságra és előjelre nem egyformán, hanem különbözően jelentkeznek. A véletlen hibák a mérések bizonytalanságát okozzák, és a rendszeres hibáknál már ismertetett hibatényezők bizonytalanságaiból, ingadozásaiból adódnak. A véletlen hibákat a bizonytalansági tartományukkal (az a tartomány, amelybe értékük nagy valószínűséggel beleesik) adjuk meg. Ha a véletlen hibákat összeadjuk, akkor a mérésnek azt az eredő bizonytalanságát kapjuk meg, aminél a mérés tényleges bizonytalansága biztosan kisebb. Ennek az az oka, hogy a szélsőséges hibák előfordulási valószínűsége kicsi, az pedig, hogy több véletlen hiba egyszerre a szélsőséges értékével forduljon elő, annak még sokkal kisebb (elhanyagolható) a valószínűsége. Az eredő mérési bizonytalanság meghatározására azt a matematikai tételt használjuk fel, hogy egymástól független szórás tényezők eredője a szórásnégyzetek összegéből vont négyzetgyök. Bár a mérési hibák egymástól nem teljesen függetlenek, de egyszerűsítve ezt feltételezzük, és az eredő bizonytalanságot az eredő szóráson keresztül határozzuk meg. A véletlen hiba megbízhatósági tartományából a szórására úgy tudunk következtetni, ha ismerjük (vagy feltételezzük) a méretnek az eloszlását.

A hosszmeréstechnikában a Gauss-féle **normális eloszlásnak** központi szerepe van. A normális eloszlásnak két paramétere van, a várható értéke μ és a szórása σ , a sűrűségfüggvénye pedig az ú.n. haranggörbe, aminek összefüggése:

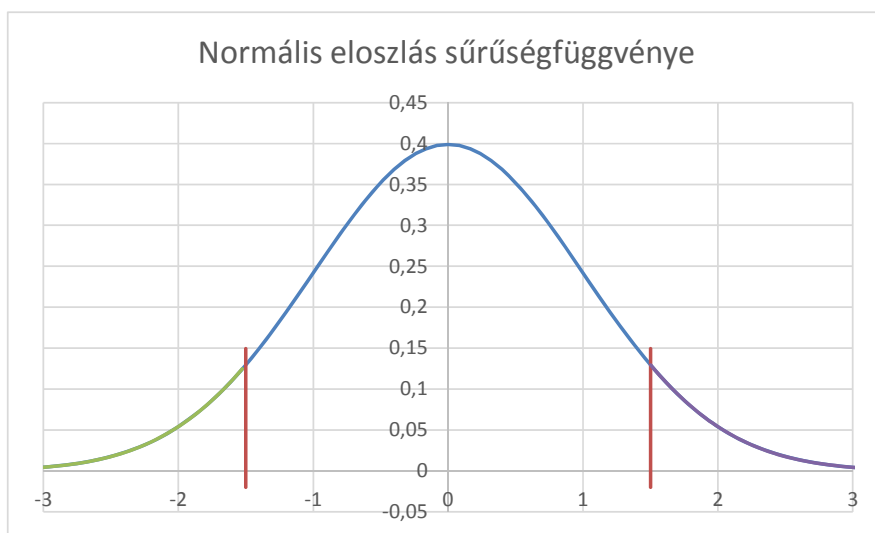
$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (5.2)$$

A sűrűségfüggvényből az eloszlásfüggvény (a sűrűségfüggvény integrálja) zárt alakban nem határozható meg. A normális eloszlásnak a mérés technikai szempontból kitüntetett helyzetét a centrális határeloszlástétel adja, ami azt mondja ki, hogy sok, egymástól független valószínűségi változó eredője akkor is normális eloszlású lesz, ha az összetevők nem is normális eloszlásúak.

Méréstechnikai szempontból akkor tekintünk egy mérést elfogadhatónak, ha csak sok olyan kis bizonytalanságunk van, ami között egy olyan nagy sincs, amivel érdemes lenne külön foglalkozni. Ha tehát a mérésünk normális eloszlású, akkor azt feltételezzük, hogy nincs okunk valamilyen mérési hibát keresni, mert nincs köztük a többi közül kiugró érték. A normális eloszlás számítógéppel kezelhető pl. az EXCEL szoftver is számolja, számítógép nélkül pedig a standard normális táblázattal számolható.

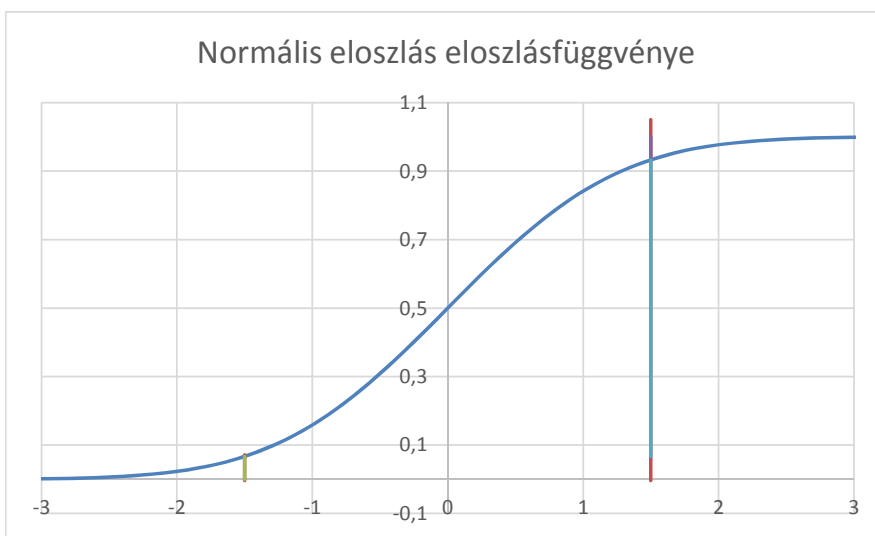
A **standard normális** eloszlás az a normális eloszlás, amelynek várható értéke 0, a szórása pedig 1. Ha egy normális eloszlás értékeiből, aminek várható értéke μ , a szórása pedig σ kivonjuk a várható értéket és a kapott értéket elosztjuk a szórással, akkor standard normális eloszlást kapunk. Képletben:

$$z(0; 1) = \frac{x(\mu; \sigma) - \mu}{\sigma} \quad (5.3)$$



5.3 ábra: Standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye, a megbízhatósági tartomány határai $\pm 1,5$ -nél

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének 0-nál van a maximuma (várható érték) és ± 1 -nél az inflexiós pontja (szórás 1). Az ábrán a zöld görbe alatti terület annak a tévedésnek a valószínűsége, hogy a mért érték a megbízhatósági tartomány alá esik, a kék görbe alatti terület fejezi ki, vagy mutatja meg azt a valószínűséget, hogy a mért érték a megbízhatósági tartományba esik, a lila görbe alatti terület pedig azt, hogy a mért érték a megbízhatósági tartomány fölé fog esni.



5.4 ábra: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, a megbízhatósági tartomány határai $\pm 1,5$ -nél

Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálfüggvénye, a sűrűségfüggvény adott értékig lefedett görbe alatti területét fejezi ki. A standard normális eloszlás értékei táblázatosan széles körben elérhetők. A következő táblázat a standard normális eloszlás értékeit 0-4,29 közötti tartományban tartalmazza.

Standard normális eloszlás táblázata										
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,5039894	0,5079783	0,5119665	0,5159534	0,5199388	0,5239222	0,5279032	0,5318814	0,5358564
0,1	0,5398278	0,5437953	0,5477584	0,5517168	0,55567	0,5596177	0,5635595	0,5674949	0,5714237	0,5753454
0,2	0,5792597	0,5831662	0,5870644	0,5909541	0,5948349	0,5987063	0,6025681	0,6064199	0,6102612	0,6140919
0,3	0,6179114	0,6217195	0,6255158	0,6293	0,6330717	0,6368307	0,6405764	0,6443088	0,6480273	0,6517317
0,4	0,6554217	0,659097	0,6627573	0,6664022	0,6700314	0,6736448	0,6772419	0,6808225	0,6843863	0,6879331
0,5	0,6914625	0,6949743	0,6984682	0,701944	0,7054015	0,7088403	0,7122603	0,7156612	0,7190427	0,7224047
0,6	0,7257469	0,7290691	0,7323711	0,7356527	0,7389137	0,7421539	0,7453731	0,7485711	0,7517478	0,7549029
0,7	0,7580363	0,7611479	0,7642375	0,7673049	0,77035	0,7733726	0,7763727	0,7793501	0,7823046	0,7852361
0,8	0,7881446	0,7910299	0,7938919	0,7967306	0,7995458	0,8023375	0,8051055	0,8078498	0,8105703	0,8132671
0,9	0,8159399	0,8185887	0,8212136	0,8238145	0,8263912	0,8289439	0,8314724	0,8339768	0,8364569	0,8389129
1	0,8413447	0,8437524	0,8461358	0,848495	0,85083	0,8531409	0,8554277	0,8576903	0,8599289	0,8621434
1,1	0,8643339	0,8665005	0,8686431	0,8707619	0,8728568	0,8749281	0,8769756	0,8789995	0,8809999	0,8829768
1,2	0,8849303	0,8868606	0,8887676	0,8906514	0,8925123	0,8943502	0,8961653	0,8979577	0,8997274	0,9014747
1,3	0,9031995	0,9049021	0,9065825	0,9082409	0,9098773	0,911492	0,913085	0,9146565	0,9162067	0,9177356
1,4	0,9192433	0,9207302	0,9221962	0,9236415	0,9250663	0,9264707	0,927855	0,9292191	0,9305634	0,9318879
1,5	0,9331928	0,9344783	0,9357445	0,9369916	0,9382198	0,9394292	0,9406201	0,9417924	0,9429466	0,9440826
1,6	0,9452007	0,9463011	0,9473839	0,9484493	0,9494974	0,9505285	0,9515428	0,9525403	0,9535213	0,954486
1,7	0,9554345	0,9563671	0,9572838	0,9581849	0,9590705	0,9599408	0,9607961	0,9616364	0,962462	0,963273
1,8	0,9640697	0,9648521	0,9656205	0,966375	0,9671159	0,9678432	0,9685572	0,9692581	0,969946	0,970621
1,9	0,9712834	0,9719334	0,9725711	0,9731966	0,9738102	0,9744119	0,9750021	0,9755808	0,9761482	0,9767045
2	0,9772499	0,9777844	0,9783083	0,9788217	0,9793248	0,9798178	0,9803007	0,9807738	0,9812372	0,9816911
2,1	0,9821356	0,9825708	0,982997	0,9834142	0,9838226	0,9842224	0,9846137	0,9849966	0,9853713	0,9857379
2,2	0,9860966	0,9864474	0,9867906	0,9871263	0,9874545	0,9877755	0,9880894	0,9883962	0,9886962	0,9889893
2,3	0,9892759	0,9895559	0,9898296	0,9900969	0,9903581	0,9906133	0,9908625	0,991106	0,9913437	0,9915758
2,4	0,9918025	0,9920237	0,9922397	0,9924506	0,9926564	0,9928572	0,9930531	0,9932443	0,9934309	0,9936128
2,5	0,9937903	0,9939634	0,9941323	0,9942969	0,9944574	0,9946139	0,9947664	0,9949151	0,99506	0,9952012
2,6	0,9953388	0,9954729	0,9956035	0,9957308	0,9958547	0,9959754	0,996093	0,9962074	0,9963189	0,9964274
2,7	0,996533	0,9966358	0,9967359	0,9968333	0,996928	0,9970202	0,9971099	0,9971972	0,9972821	0,9973646
2,8	0,9974449	0,9975229	0,9975988	0,9976726	0,9977443	0,997814	0,9978818	0,9979476	0,9980116	0,9980738
2,9	0,9981342	0,9981929	0,9982498	0,9983052	0,9983589	0,9984111	0,9984618	0,998511	0,9985588	0,9986051
3	0,9986501	0,9986938	0,9987361	0,9987772	0,9988171	0,9988558	0,9988933	0,9989297	0,998965	0,9989992
3,1	0,9990324	0,9990646	0,9990957	0,999126	0,9991553	0,9991836	0,9992112	0,9992378	0,9992636	0,9992886
3,2	0,9993129	0,9993363	0,999359	0,999381	0,9994024	0,999423	0,9994429	0,9994623	0,999481	0,9994991
3,3	0,9995166	0,9995335	0,9995499	0,9995658	0,9995811	0,9995959	0,9996103	0,9996242	0,9996376	0,9996505
3,4	0,9996631	0,9996752	0,9996869	0,9996982	0,9997091	0,9997197	0,9997299	0,9997398	0,9997493	0,9997585
3,5	0,9997674	0,9997759	0,9997842	0,9997922	0,9997999	0,9998074	0,9998146	0,9998215	0,9998282	0,9998347
3,6	0,9998409	0,9998469	0,9998527	0,9998583	0,9998637	0,9998689	0,9998739	0,9998787	0,9998834	0,9998879
3,7	0,9998922	0,9998964	0,9999004	0,9999043	0,999908	0,9999116	0,999915	0,9999184	0,9999216	0,9999247
3,8	0,9999277	0,9999305	0,9999333	0,9999359	0,9999385	0,9999409	0,9999433	0,9999456	0,9999478	0,9999499
3,9	0,9999519	0,9999539	0,9999557	0,9999575	0,9999593	0,9999609	0,9999625	0,9999641	0,9999655	0,999967
4	0,9999683	0,9999696	0,9999709	0,9999721	0,9999733	0,9999744	0,9999755	0,9999765	0,9999775	0,9999784
4,1	0,9999793	0,9999802	0,9999811	0,9999819	0,9999826	0,9999834	0,9999841	0,9999848	0,9999854	0,9999861
4,2	0,9999867	0,9999872	0,9999878	0,9999883	0,9999888	0,9999893	0,9999898	0,9999902	0,9999907	0,9999911

5.1 táblázat: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékei

A normális eloszlás megbízhatósági tartománya és a szórása közötti összefüggést a megbízhatósági szint függvényében tudjuk meghatározni. Válasszunk – ha nem adott – egy megbízhatósági szintet! Ha például a megbízhatósági szint 95,6 %, az gyakorlatilag azt jelenti, hogy átlagosan minden 100 döntésre 4,4 rossz és 95,6 jó döntés esik, tehát átlagosan minden 22,7-ik döntés téves. A megbízhatósági szint a kockázattal arányosan nő, pl. egy személygépkocsi esetében a hajtó belsőégésű motornál magasabb megbízhatósági szint kell, mint pl. egy ablaktörlőnél. 95,6 % megbízhatósági szintnél a tévedés valószínűsége 4,4 %. Ezt megfelezzük 2,2-2,2 %-ra ezek lesznek azok a valószínűségek, hogy a méret nem a megbízhatósági tartományba, hanem alá, vagy fölé fog esni. A megbízhatósági tartomány és a szórás közti szorzótényezőt pedig a standard normális táblázatban 100-

féltévedésnél fogjuk megkapni, példánkban 97,8%-nál. A táblázatban 97,8 % nem szerepel, hanem 2,1-nél 0,9777844 2,2-nél pedig 0,9783083, ami azt jelenti, hogy a keresett értékünk 2,1 és 2,2 közé fog esni. Ezt az értéket megadhatjuk becsléssel, vagy lineáris interpolációval: 2,0141. Ez a keresett szorzótényező, tehát a szórást úgy kapjuk, hogy a megbízhatósági tartomány (bizonytalanság) felét elosztjuk 2,0141-gyel.

Mivel egy feladaton belül nincs értelme különböző megbízhatósági szinteket használni, ezért a többi bizonytalanságból is úgy számolunk szórást, hogy ezzel a tényezővel osztunk. Az eredő szórás az összetevő szórások négyzetösszegéből vont négyzetgyök:

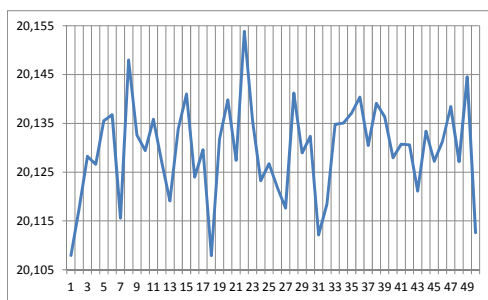
$$\sigma_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \quad (5.4)$$

Az eredő bizonytalanságot az eredő szórásból kapjuk, ha ugyanazzal a szórástényezővel szorzunk, mint amivel a bizonytalanságokból a szórást kaptuk.

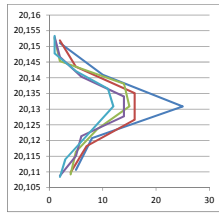
Méréstechnikai szempontból a normális eloszlással kapcsolatba hozható két másik eloszlástípus, ami gyakran előfordul. Az egyik az **egyenletes eloszlás**, aminek a sűrűségfüggvénye legfeljebb kis ingadozás mellett állandó értékű. Az egyenletes eloszlás méréstechnikai szempontból azért nem kedvező, mert nincs olyan egyértelmű legvalószínűbb értéke, mint a normális eloszlásnak. Az egyenletes eloszlás tekinthető egy nagy szórású, tehát lapos haranggörbéjű normális eloszlás középső részének. Egyenletes eloszlás kapunk, ha nagy a mérés szórása, vagy a mérés várható értéke egy irányban folyamatosan eltolódik. A másik tipikus eloszlás az ún. **vegyes, vagy kevert eloszlás**, ami úgy keletkezik, hogy két olyan normális eloszlás értékei kerülnek egy kiértékelésbe, amelyeknek különbözőek a várható értékei. A vegyes eloszlásnak nem 1, hanem 2, vagy 3 nagy valószínűségű értéke van. Az eloszlás jellegére nemcsak különböző eloszlásvizsgálatokkal lehet következtetni, de az értékek lefutásából, az értékek gyakoriságdigramjából és az értékek szórás/terjedelem arányából is.

	normális	egyenletes	vegyes/kevert
min	20,10791	20,11072	20,11259
max	20,15384	20,14993	20,14654
R	0,045926	0,03921	0,033954
átlag	20,12972	20,13139	20,129
szórás	0,009769	0,012052	0,012754
s/R [%]	21,27169	30,73699	37,56128

5.2 táblázat: Olyan 50 értékű generált normális, egyenletes és vegyes eloszlás fő statisztikai jellemzői, amelyeknek a statisztikai jellemzői (min/max/átlag) közel egyenlők

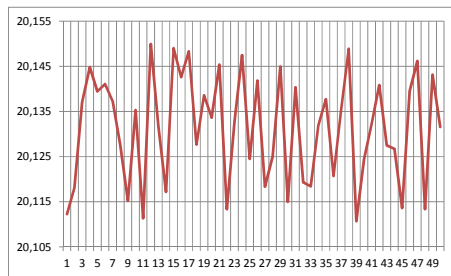


5.5 ábra: 50 normális eloszlású érték lefutása

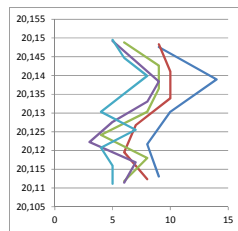


5.6 ábra: A normális eloszlás gyakoriságdiagramjai (hisztogramjai) 5-6-7-8-9 osztályra

A normális eloszlás lefutásának és gyakoriságdiagramjának az a magától értetődő sajátossága, hogy nagyjából középen fordulnak elő leggyakrabban az értékek és ettől két oldalra kifelé az értékek gyakorisága nagyjából szimmetrikusan és egyenletesen egyre kisebb.

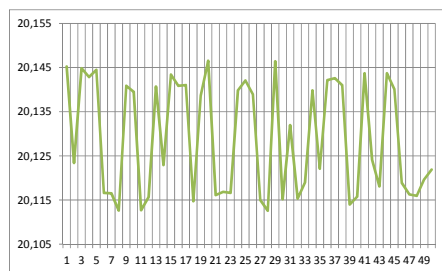


5.7 ábra: 50 egyenletes eloszlású érték lefutása

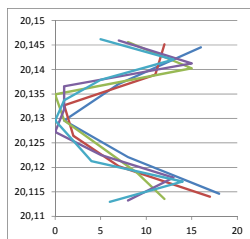


5.8 ábra: Az egyenletes eloszlás gyakoriságdiagramjai (hisztogramjai) 5-6-7-8-9 osztályra

Az egyenletes eloszlás a teljes sáv szélességére vonatkozóan az értékek – viszonylag – egyenletes gyakorisággal fordulnak elő.

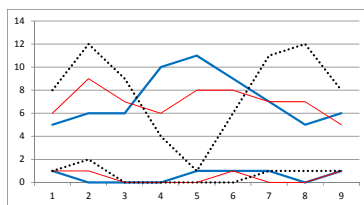


5.9 ábra: A vegyes/kevert eloszlás gyakoriságdiagramjai (hisztogramjai) 5-6-7-8-9 osztályra

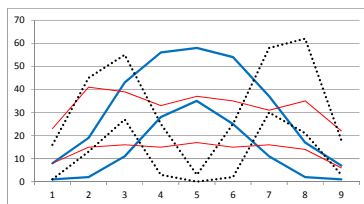


5.10 ábra: A vegyes eloszlás gyakoriságdiagramjai (hisztogramjai) 5-6-7-8-9 osztályra

A vegyes/kevert eloszlásnál – itt konkrétan – két olyan normális eloszlás értékei fordulnak együtt/keverve elő, amelyek azonos szórásúak, csak a várható értékeik el vannak egymáshoz képest tolódva. Az egyik normális eloszlás várható értéke 20,117-nél, a másik várható értéke 20,142-nél, tehát egymástól 0,025 eltolódva helyezkedik el. A statisztika fontos jellemzője az értékek száma. Kényszerből kevés 5-10-20 érték alapján is kell következtetést levonni, de a megbízhatóság összefügg az értékek számával: több érték alapján az információnak nagyobb a megbízhatósága.



5.11 ábra: 30 normális (vastag vonal), egyenletes (vékony vonal) és kevert (pontvonal) eloszlású érték gyakoriságdiagramjainak bizonytalansága



5.12 ábra: 200 normális (vastag vonal), egyenletes (vékony vonal) és kevert (pontvonal) eloszlású érték gyakoriságdiagramjának a bizonytalansága

Az 5.11 és az 5.12 ábra 30 illetve 200 normális, egyenletes és kevert eloszlású érték 9 osztályra meghatározott 50 gyakoriságdiagramjainak az a sávja, amibe az 50 gyakoriságdiagram beleesett.

Az 5.11 ábrán az látszik, hogy 30 értéknél a kevert eloszlás akkor állapítható meg egyértelműen, ha a két normális eloszlás várható értékének elég nagy az eltolódása ahhoz, hogy közöttük feltűnően kevés érték legyen. 30 értéknél az egyenletes és a normális eloszlásnak a túlnyomó része fedésben van egymással, tehát nehezen különböztethető meg egymástól. Ennek alapján azt kell mondanunk, hogy 30 érték alapján már meg lehet kísérelni helyes döntést hozni arról, milyen eloszlással állunk szemben, tehát 30 érték a statisztikai döntések gyakorlati alsó határa.

200 értékből meghatározott gyakoriságdiagramok sávjainak nagyobb része különbözik, mint amennyi fedésben van, tehát 200 érték alapján nagy valószínűséggel helyesen lehet megállapítani az eloszlások jellegét. Hozzá kell mindehhez tenni, hogy ezek a diagramok számítógéppel generált stabil értékek kiértékelésével készültek, gyakorlatban nehezen lehet 200 stabil értéket mérni.

Összefoglalóan a mérési hibákkal kapcsolatban a következők a teendők:

- a durva hibák elkerülésére megfelelő mérési módszerek, mérőeszközök, mérést végző személy, környezeti feltételek stb. biztosításával minden tőlünk telhetőt meg kell tenni

- a rendszeres hibákat meg kell határozni (méréssel, számítással, becsléssel) és méretükkel előjelhelyesen módosítani kell a mérés eredményét
- meg kell határozni a véletlen hibákat és ezek eredőjét. A mérés alapján akkor tudunk kellő megbízhatósággal (99,97 %) dönteni, ha a mérés bizonytalansága a követelmény (tűrés) 1/10-nél nem nagyobb.
- A nem ismert mérési bizonytalanságú mérési eredmény alapján nem lehet döntést hozni (lásd a megfelelőségről hozott döntésről szóló 6. fejezetet)!
- A mérési eredmény akkor tekinthető teljesnek, ha véletlen változóként ismerjük az eloszlásának a jellegét (pl. normális eloszlás) és az eloszlás meghatározó paramétereit (normális eloszlásnál a várható értéket és a szórást).
- Ha mérési eredményeknek nincsen bizonytalansága, az nem a mérés „pontosságának” a jele, hanem, hogy a mérés nem képes a bizonytalanságot kimutatni, és ez eleve valamilyen hibára utal. Ha például egy mérőhasáb névleges méretét, pl. egy 10 mm-es mérőhasáb hosszát többször megmérjük 1 mm-es osztásértékű mérőszalaggal, akkor elvileg minden mérési eredmény lehet egyforma: 10 mm. Ha ugyan ezt a mérőhasábot mikrométerrel, vagy passzaméterrel mérjük meg többször, akkor nagyobb valószínűséggel kapunk különböző értékeket és bár ez első közelítésben ellentmondásnak tűnhet, de a mérőszalagos csupa egyforma méret a mérőszalag „pontatlanságának” és a mikrométernél jelentkező különböző értékek éppen a nagyobb „pontosság” (helyesen nagyobb felbontás, érzékenység) jele.
- Mérestechnikailag az a jó, ha a mérésünk bizonytalansága akkora, mint amit az adott méréstől el lehet várni. Ehhez természetesen egyrészt tudni kell (kell hozzá ismeret, tapasztalat), hogy mekkora az elvárható bizonytalanság, másrészt ahhoz, hogy bizonytalanságot kapjunk, legalább 2 mérésre van szükség. Erre is utal a mondás: „Egy mérés, nem mérés.”
- A méréseknek van egy legkedvezőbb (optimális) száma, mivel a mérési bizonytalanságnak vannak olyan tényezői, amelyek a bizonytalanság csökkenésének irányában hatnak. Ezek az ismeret/gyakorlat megszerzése, környezeti tényezők stabilizálódása, mérőeszköz „bejáródása”, szennyeződések befolyásának csökkenése, stb.. Vannak viszont olyan tényezők, amelyek a mérések növekvő számával növelik a mérés bizonytalanságát: a mérést végző személy elfáradása, motiváltságának csökkenése, mérőeszköz elhasználódása, hosszabb mérési idő alatt több/nagyobb környezeti bizonytalanság következhet be stb.. Nem érdemes tehát azután tovább ismételni egy mérést, ha a legkisebb mérési bizonytalanságot elértünk, ezt akkor vesszük észre, ha már kezd növekedni a bizonytalanság.

Hibaterjedés közvetett méréseknél [D. Hofman: Az ipari mérés technika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1982]

Vannak olyan tulajdonságok, amelyeket nem közvetlenül mérünk, hanem mért jellemzőkből számítással határozzuk meg. Ilyen lehet pl. sebesség meghatározása a megtett út és az eltelt idő mérésével, egy test sűrűségének meghatározása a test tömegének és térfogatának mérésével, és a pontok koordinátaiból távolságok, geometriai elemek és ezek egymáshoz képesti helyzetének meghatározása is közvetett mérés. Közvetett méréseknél az eredő rendszeres hibát a lineáris hibaterjedés, a véletlen hibák eredőjét pedig a négyzetes hibaterjedési törvény szerint határozzuk meg.

$$\text{A lineáris hibaterjedési törvény: } \Delta y = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (5.5)$$

ahol Δy az eredő rendszeres hiba, n a hibatényezők száma, $y=f(x_1 \dots x_n)$ az összefüggés a mért

összetevők és a belőlük meghatározott érték között, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ az összefüggés i -edik tényezője szerinti parciális deriváltja és Δx_i az i -edik tényező rendszeres hibája.

Ha az eredő függvényével adott (nem fejezhető ki, akkor az eredő rendszeres hiba a következő összefüggéssel számolható:

$$\Delta y = \frac{1}{F'(y)} \sum_{j=1}^k \frac{\partial y}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (5.6)$$

Példa: A szinuszvonalzón beállított szögérték (α) a következőképpen számítható: $\sin \alpha = \frac{M}{L}$, ahol M a szinuszvonalzó egyes hengerei alá tett mérőhasábkombinációk méreteinek a különbsége és L a szinuszvonalzó hengereinek a távolsága. A szög rendszeres hibája:

$$\Delta \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{\Delta M}{L} - \frac{M}{L^2} \Delta L \right) = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\Delta M}{M} - \frac{\Delta L}{L} \right) \quad (5.7)$$

A négyzetes hibaterjedési törvény:

$$U = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} U_i \right)^2} \quad (5.8)$$

ahol U az eredő bizonytalanság, U_i az i-edik összetevő bizonytalansága.