

A mechanika alapfogalmai

Dr. Horváth András
SZE, Fizika Tsz.

v 0.3

Home Page

Title Page

Contents



Page 1 of 45

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1. Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés

A mechanika két fő ága:

Kinematika: A tárgyak mozgásának leírása.

(“*Hogyan* mozognak a tárgyak?”)

Dinamika: A mozgás okának vizsgálata.

(“*Miért* mozognak a tárgyak?”)

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)

Page 1 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

2. A kinematika alapfogalmai

Egy valós test mozgásának leírása általában igen bonyolult.

Példa: egy járkáló ember kinematikája.



Sok fontos pont leírása adja meg a mozgást.

Mindenképp egy pont mozgásának leírásával kell kezdeni.

A gyakorlatban sokszor a test részletei nem lényegesek, csak a test egy pontjának mozgása: ekkor az egész testet tekinthetjük pontszerűnek.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 2 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Pontszerű testnek nevezünk egy testet, ha méretei a mozgás pályájának méreteihez képest elhanyagolhatók és belső folyamatai nem befolyásolják középpontjának mozgását.

Természetesen tökéletesen pontszerű test (tömegpont) nincs, de sokszor jó közelítést jelent pontszerűvel közelíteni.

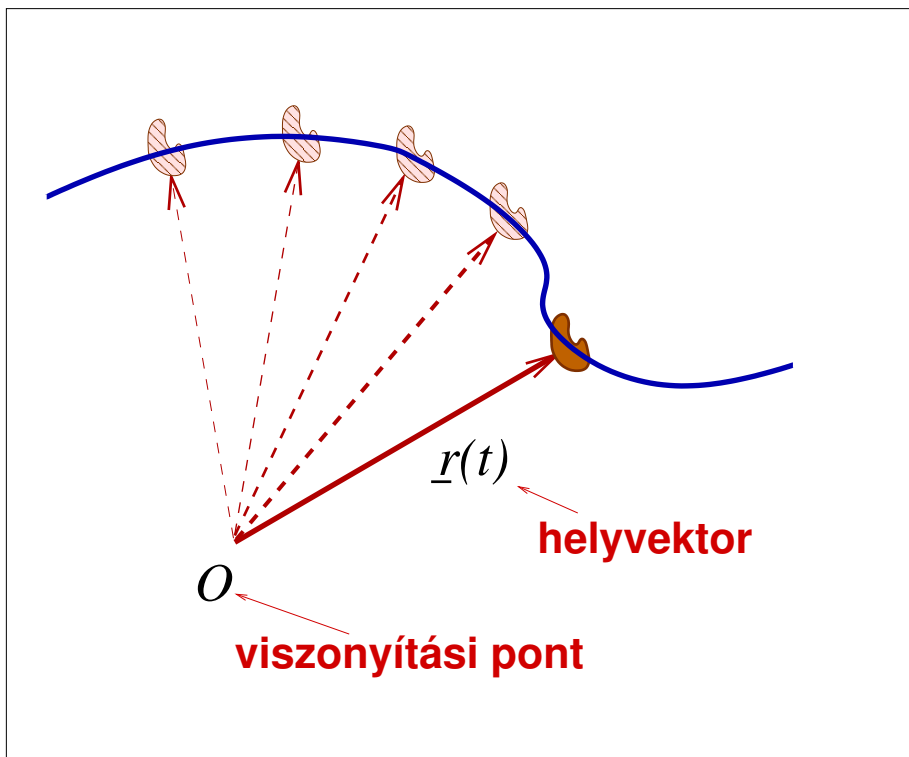
2.1. A pontszerű testek kinematikája

- Megadunk a térben egy pontot, amit **vonatkoztatási-** vagy **viszonyítási pont**nak nevezünk. (O pont)
- Megadjuk a vonatkoztatási pontból a tömegpontba mutató úgynevezett **helyvektort**. (\underline{r} vektor)

Ez egy időpontra vonatkozik.

Ha minden t időpontra megadjuk a test $\underline{r}(t)$ helyvektorát, akkor ezzel a tömegpont mozgását teljesen leírtuk.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 3 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



Pontszerű test mozgása

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[Contents](#)

[◀](#)

[▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

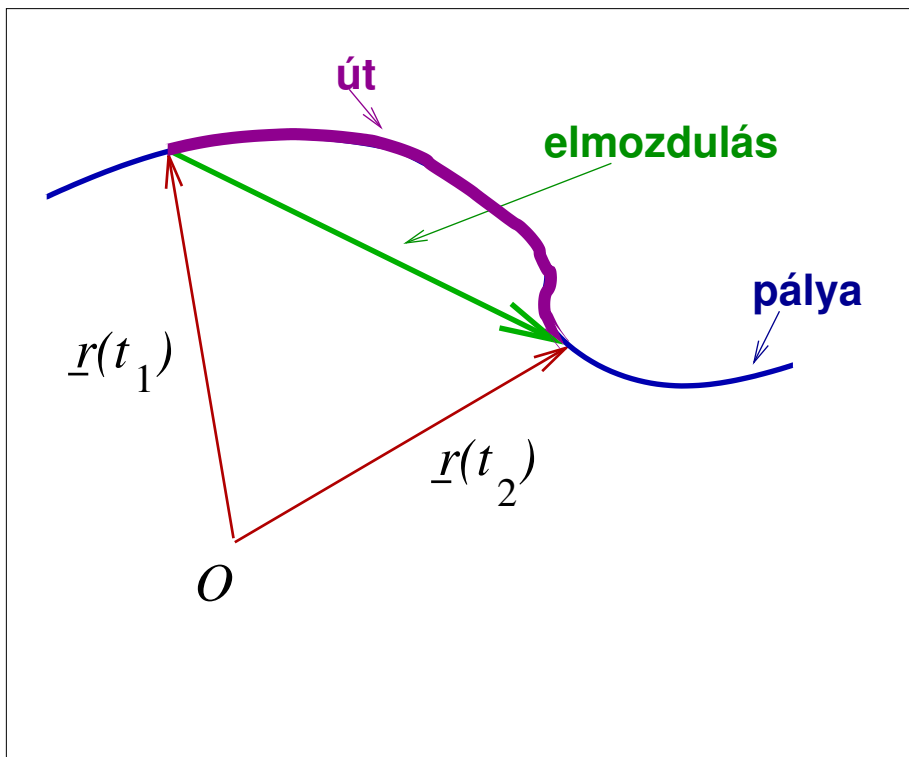
Page 4 of 45

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



Kinematikai alapfogalmak

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 5 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Elmozdulás: vektormennyiség

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)$$

Út: skalár mennyiség

A befutott pályadarab hossza. (Formula magasabb matematikát igényelne!)

Átlagsebesség: vektormennyiség

$$\underline{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

Átlagos sebességnagyság: skalár mennyiség

Az út és az idő hányadosa.

A fogalmak pontos használata kötelező!!!

Köznapi értelemben sokszor keverednek ezek, de ezt fizikában nem szabad.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 6 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Komponensenkénti számolás

Sokszor nehéz vektorokkal számolni. Ezért a gyakorlatban többnyire felveszünk egy koordináta-rendszert, melynek origója a viszonyítási pont és a vektorok komponenseivel, koordinátaival számolunk:

$$\underline{r}(t) \quad \text{helyett} \quad (x(t), y(t), z(t))$$

A koordináták ismeretében a vektor minden tulajdonsága ismert.

Pl. a vektor hossza (abszolút értéke):

$$|\underline{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Megjegyzés: Bizonyos esetekben nem derékszögű koordináta-rendszer használata a célszerű, de ilyennel mi nem fogunk találkozni.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 7 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

2.2. A pillanatnyi sebesség

Az átlagsebesség ($\Delta r / \Delta t$) jelentése: *átlagosan* mekkora az elmozdulás egységnyi idő alatt.

De hogy értelmezhető a *pillanatnyi* sebesség?

Nem írhatunk $\Delta t = 0$ -t az átlagsebesség formulájába, mert 0 lenne a nevezőben.

Azonban ha egyre kisebb és kisebb Δt értékre számoljuk ki az átlagsebesség értékét, az egy jól meghatározott értéket közelít meg egyre jobban.

Első, közelítő meghatározás:

Pillanatnyi sebesség alatt egy olyan rövid idő átlagsebességét értjük, mely alatt a mozgás nem változik meg lényegesen.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 6 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Egy egyszerű példa

Mozogjon egy test az x tengely mentén: $x(t) = 5 \cdot \sin(3 \cdot t)$
(SI-egységekben)

Mekkora a pillanatnyi sebessége $t = 0,2$ -kor?

Recept: számoljuk ki az átlagsebességet t és $t + \Delta t$ között,
majd nézzük meg, mi történik egyre kisebb Δt -re:

$$\bar{v}(t, t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{5 \sin(3(t + \Delta t)) - 5 \sin(t)}{\Delta t}$$

Esetünkben $t = 0,2$, így:

$$\bar{v}(0,2, 0,2 + \Delta t) = \frac{5}{\Delta t} (\sin(0,6 + 3\Delta t) - \sin 0,6)$$

Itt már csak Δt ismeretlen.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 9 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Számoljuk ki \bar{v} -t egyre csökkenő Δt mellett:

Figyelem! A \sin függvény argumentumában nem volt fokjel, ezért radiánban kell számolni!

Δt	\bar{v}
0,1	10,93
0,01	12,25
0,001	12,37
0,0001	12,38
0,00001	12,38

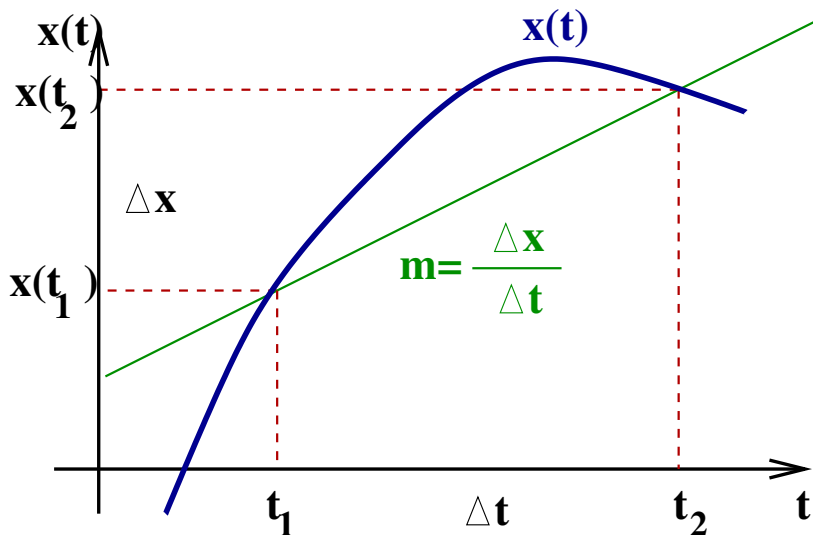
Megfigyelhető, hogy az értékek egy meghatározott számhoz közelítenek, nem 0-hoz vagy végtelenhez. Ez a szám a pillanatnyi sebesség értéke.

A test tehát 12,38 m/s sebességgel mozog a kérdéselt időpontban. (2 tizedesjegy pontossáig.)

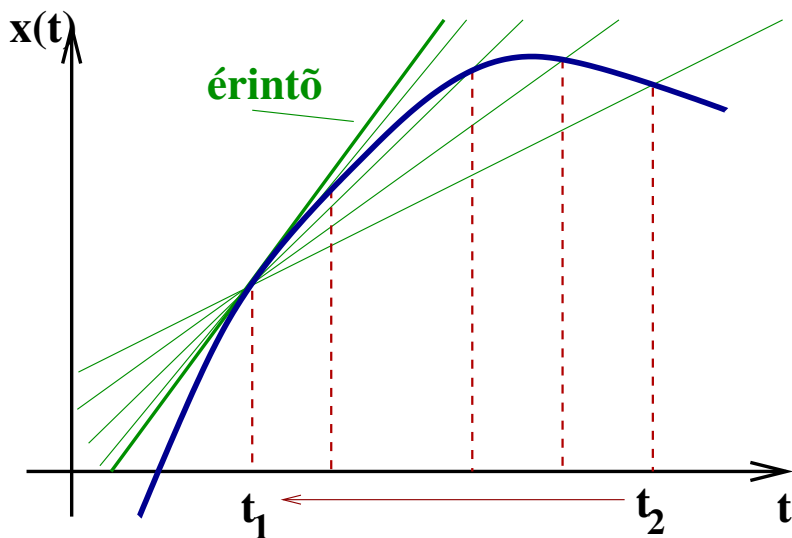
[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 10 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Szemléltetés grafikonon

Egyenes menti mozgás (vagy egy mozgás egy komponense) jól szemléltethető grafikonon, és az alapfogalmak is jól megfigyelhetők itt:

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 11 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Amennyiben t_2 egyre jobban megközelíti t_1 -et, azaz Δt a 0-t, a szelők egyre inkább a grafikon érintőjéhez simulnak:



A hely-idő grafikonhoz húzott szelő meredeksége tehát az átlagsebességet, az érintő meredeksége a pillanatnyi sebességet adja meg.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 12 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Tömör megfogalmazás

Pillanatnyilag azt mondhatjuk a pillanatnyi sebességről, hogy annak értéke: “ $v = \Delta x / \Delta t$ olyan kicsi Δt -re, mely alatt a mozgás nem változik meg lényegesen.”

Ez körülményes és nem precíz.

A matematika erre a határérték fogalmát használja: melyik az az érték, melyet az átlagsebesség egyre jobban megközelít, ha Δt egyre jobban megközelíti a 0-t. Szokásos jelöléssel:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Még rövidebb jelölés:

$$v = \frac{dx}{dt} = x'$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 13 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Elnevezés: A sebesség a hely idő szerinti deriváltja vagy differenciálhányadosa.

Természetesen mindez nemcsak a komponensekre, hanem az egész helyvektorra is igaz:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{r}'$$

Ahogy elvégeztük a deriválást, az nagyon nehézkes.

A matematika azonban megadja, hogy lehet ezt gyorsan elvégezni. Tetszőleges függvény deriválását Matematikából tanulni fogják. Rövidesen néhány egyszerű függvény deriválását nézzük meg.

Előtte azonban egy másik fogalom:

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 14 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

2.3. A gyorsulás

Átlagos gyorsulás:

$$\underline{\bar{a}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v}'$$

Mivel a sebesség a hely idő szerinti deriváltja, a gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltja, ezért a gyorsulás a helyből kétszeri deriválással kapható.

Ezért azt mondjuk, hogy a gyorsulás a hely idő szerinti második deriváltja, és a következő jelöléssel fejezzük ki:

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \underline{r}''$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 15 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3. Egyszerű függvények deriválása

A deriválás művelete tehát elengedhetetlen az alapvető fizikai fogalmak haladó szintű megértésében.

Isaac Newton egyrészt a mechanika megalapozója, másrészt a differenciál- és integrálszámításé is. Ez nem véletlen.

Ezért most **bizonyítások nélkül** megtanuljuk a **leggyyszerűbb függvények** deriváltját kiszámítani. Matematikából sokkal összetettebb függvények deriválása és a deriválási összefüggések bizonyítása is szerepelni fog az első féléves anyagban.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 16 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3.1. Alapderiváltak

Az alábbi táblázat a leggyakrabban előforduló függvények deriváltját tartalmazza:

$f(x)$	$f'(x) = \frac{df}{dx}$
a	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a \cdot a^x$

$f(x)$	$f'(x) = \frac{df}{dx}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x \cdot \ln a)$

Megjegyzések:

- a táblázatban a egy tetszőleges állandót jelöl.
- “ e ” a természetes alapú logaritmus (\ln) alapszáma: $e \approx 2,718$
- a táblázat tömör: több van benne, mint első ránézésre látszik. Pl. $\sqrt{x} = x^{1/2}$, így a 2. sor alkalmazható $n = 1/2$ beírásával: $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = (1/2)x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)

Page 17 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3.2. Barátkozás az alapderiváltakkal

Deriváljunk néhány egyszerű függvényt.

Konstans függvény deriváltja 0: $(a') = 0$, ha a állandó.
Érthető, hisz a konstans függvény grafikonja vízszintes, azaz meredeksége 0.

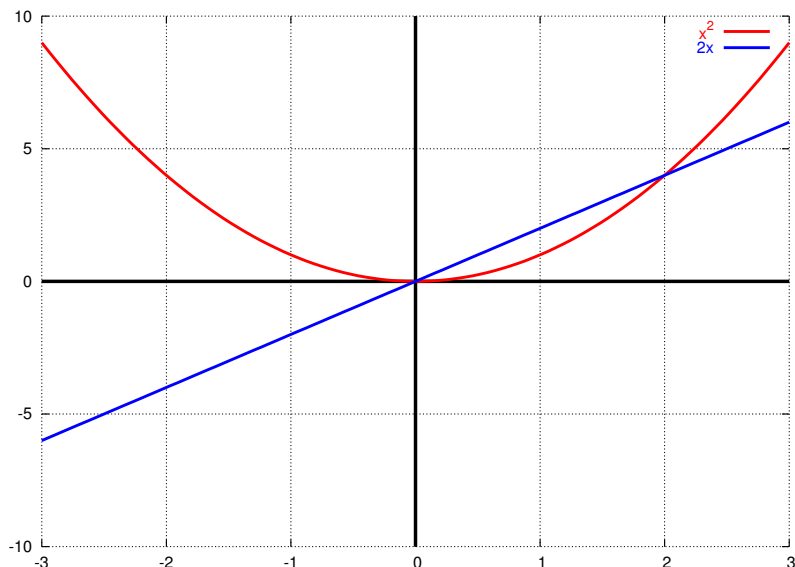
$(x)' = 1$. Hihető, hisz az $f(x) = x$ függvény meredeksége mindenütt 1.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Page 18 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$(x^2)' = 2x.$$



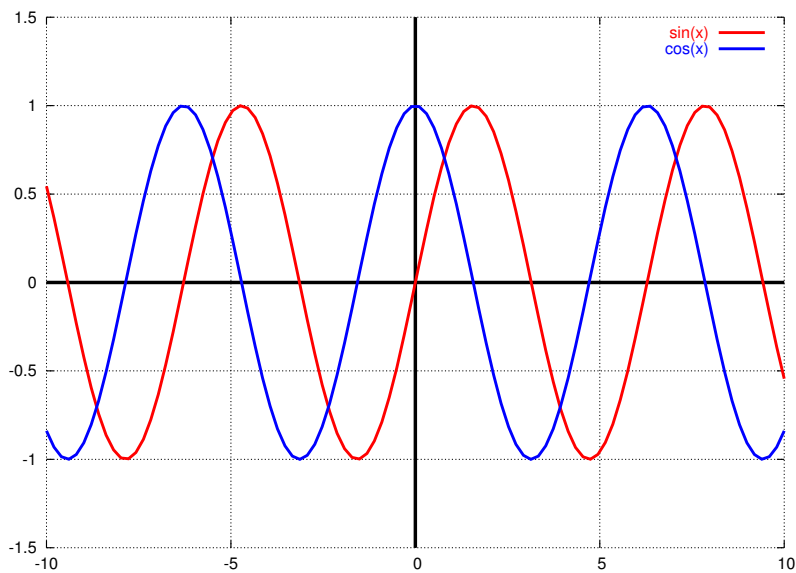
Valóban: pl. $x = 0$ -nál $f(x)$ grafikonja vízszintes, azaz meredeksége 0, és itt $2x = 0$. Továbbá $x > 0$ -ra $f(x)$ grafikonja egyre meredekebb, $x < 0$ -ra a meredekség negatív, és ezt tükrözi a derivált.

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[Contents](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

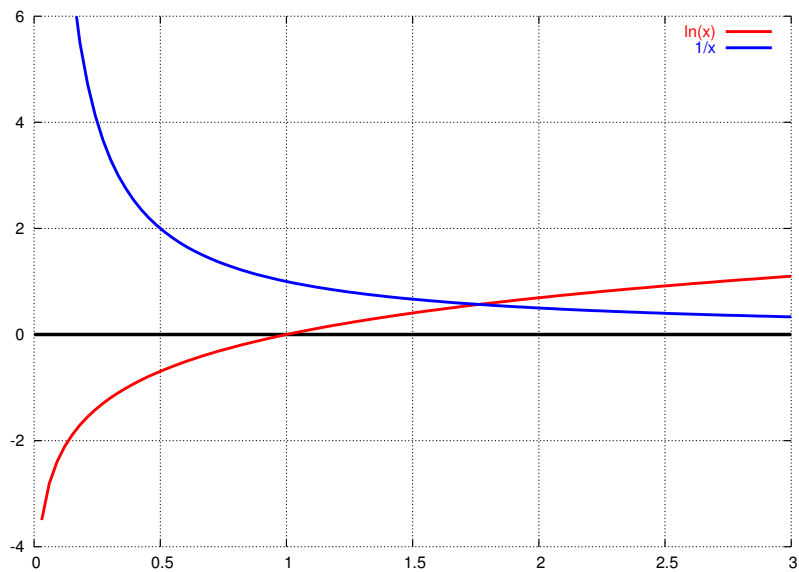
Page 19 of 45

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

$$(\sin x)' = \cos x.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 20 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$(\ln x)' = 1/x.$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 21 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3.3. Deriválási szabályok

Bonyolultabb függvények esetén nem elegendő az alapderiváltak ismerete, néhány szabályt is fel kell használni, melyeket bizonyítását matematikából fogják megtanulni a hallgatók. A számunkra fontos szabályok:

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ (összeg tagonként deriválható)
- $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$ (konstans szorzó kiemelhető)
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (összetett függvény deriválása)

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 22 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3.4. Néhány egyszerű deriválás

$$(x^2 + 3x - 6)' = (x^2)' + (3x)' - (6)' = 2x^1 + 3x^0 - 0 = 2x + 3$$

$$(e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$(\cos(2x))' = -\sin(2x) \cdot (2x)' = -\sin(2x) \cdot 2$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 23 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3.5. Alkalmazzuk mindezt a fizikára

Nem lesznek bonyolultabbak a dolgok, csak a jelölések mások, azaz nem feltétlen x lesz a változó jele.

(3.5)–1. példa: *Egy test hely-idő függvénye:*

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Adja meg a sebességét és a gyorsulását!

Megoldás: A sebesség a hely idő szerinti deriváltja:

$$v(t) = (x(t))' = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}2t + v_0 + 0 = at + v_0$$

A gyorsulás pedig a sebesség deriváltja:

$$a(t) = (v(t))' = a + 0 = a$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 24 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Ez tehát az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás.

(3.5)–2. példa: Egy test hely-idő függvénye: $x(t) = 5 \sin(3t)$. Adja meg a sebesség-idő függvényt! Mekkora lesz sebessége $t = 0,2$ s-kor?

Megoldás:

$$\begin{aligned} v(t) &= (x(t))' = 5(\sin(3t))' = 5 \cos(3t)(3t)' = 5 \cos(3t) \cdot 3 = \\ &= 15 \cos(3t) \end{aligned}$$

A kért időpontban:

$$v(0,2) = 15 \cos(0,6) = 12,380 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nahát! Ezt számoltuk ki **korábban**! Csak így sokkal gyorsabb és nemcsak egy időpontra kaptuk meg az eredményt.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)

Page 25 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(3.5)–3. példa: *Egy xy -síkban mozgó test koordinátái az idő függvényében:*

$$x(t) = 6t \quad y(t) = 5 - 3t - 5t^2$$

Adja meg sebességének nagyságát az idő függvényében!

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Page 26 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(3.5)–3. példa: Egy xy -síkbán mozgó test koordinátái az idő függvényében:

$$x(t) = 6t \quad y(t) = 5 - 3t - 5t^2$$

Adja meg sebességének nagyságát az idő függvényében!

Megoldás: Külön-külön ki kell számolni a sebesség komponenseit:

$$v_x(t) = (x(t))' = (6t)' = 6$$

$$v_y(t) = (y(t))' = (5 - 3t - 5t^2)' = 0 - 3 - 10t$$

A Pithagorasz-tétel szerint:

$$\begin{aligned} |\underline{v}(t)| &= \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{6^2 + (-3 - 10t)^2} = \\ &= \sqrt{100t^2 + 60t + 45} \end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 27 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

FIGYELEM! TÍPUSHIBÁK!

Hallgatók tipikus hibái: mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák. Pl. egy tipikus **rossz mondóka**: “A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$ ”

Egy csak és kizárólag az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgásra igaz! általános alkalmazása téves!

Ugyanez pepitában: “A gyorsulás a sebesség és az idő hányadosa: $a = v/t$ ”

Ne is vesztegezzük rá a szót: felejtsük el!

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 20 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3.6. A fordított irányú kapcsolat

Tudjuk már, hogy kell a hely-idő függvényből kiszámolni a sebesség-idő függvényt.

Vajon visszakapható-e a hely a sebesség-idő függvény ismeretében?

Nyilvánvalóan: **nem**.

Hisz ha nem tudjuk, honnan indult a test, pusztán sebességének ismerete nem adja meg, hova érkezett. (Pl.: egy autó az M1-esen 20 percig egyenletesen 90 km/h-val megy. Hol van most? Ez nem megválaszolható, ha nem tudjuk, honnan indult.)

Matematikailag: a deriválást nem tudjuk fordítva csinálni, mivel végtelen sok hely-idő függvény deriváltja lehet ugyanaz a sebesség-idő függvény. Ennek oka: tetszőleges konstans függvény deriváltja 0.

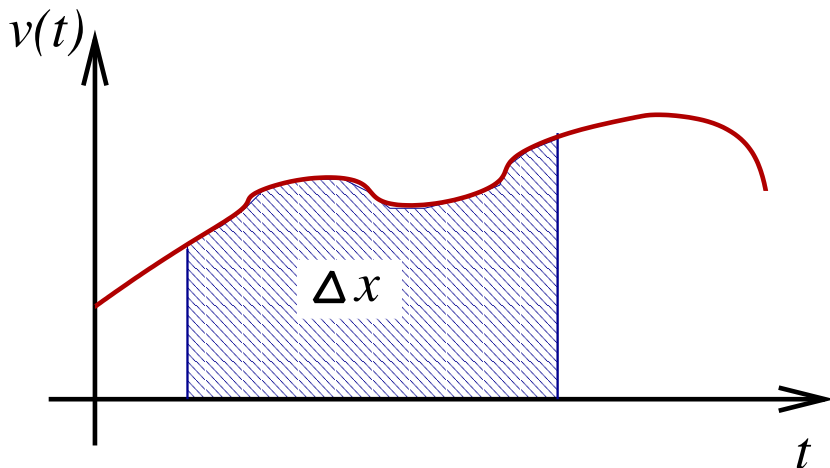
[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 29 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Pl.: $(5t + 3)' = (5t)' = (5t + \pi^2)' = \dots = 5$

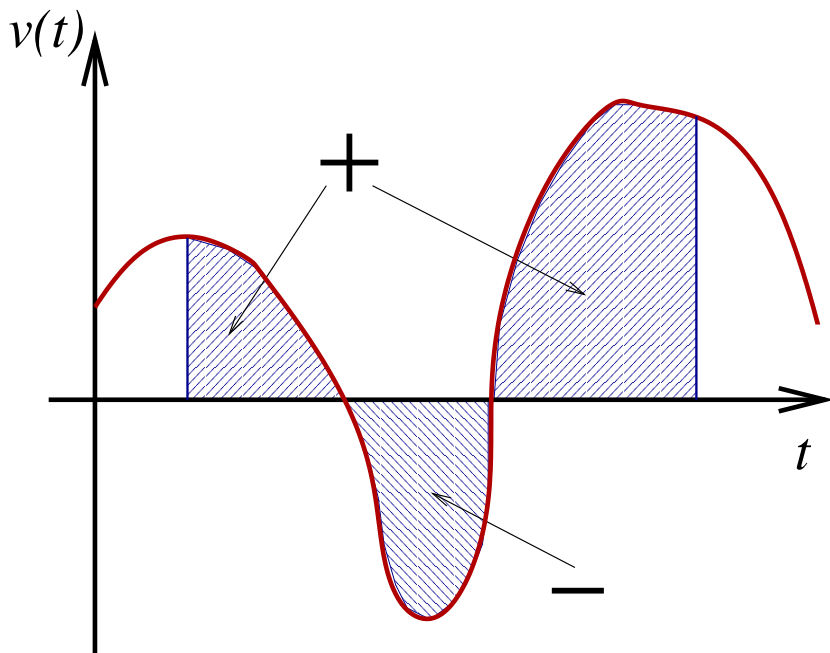
Ami megmondható, az a hely megváltozása, azaz az elmozdulás.

Ezt a műveletet, azaz a deriválás fordítottját **integrálásnak nevezzük. (Matematikából lesz róla szó.)**

Itt ennek elvégzését nem tanuljuk meg (bár egyszerűbb függvényekre nyilvánvaló), csak szemléltetjük.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 30 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Amennyiben v negatív értékeket is felvesz, az előjelekre is ügyelni kell:



A sebesség-idő függvény grafikonja alatti területek ábra szerinti előjeles összege az elmozdulást adja meg.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)

Page 31 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Ez természetesen egy komponensre vonatkozik.

Ha a kezdőhelyzet ismert, akkor a végső hely kiszámolhatóvá válik.

Hasonló a kapcsolat a gyorsulás-idő függvény és a sebességváltozás között is: **A gyorsulás-idő függvény grafikonja alatti területek előjeles összege a sebesség változását adja meg.**

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)

Page 32 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(3.6)–1. példa: Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő: $a(t) = 3 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$ -kor 5 m/s sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 3$ -kor?

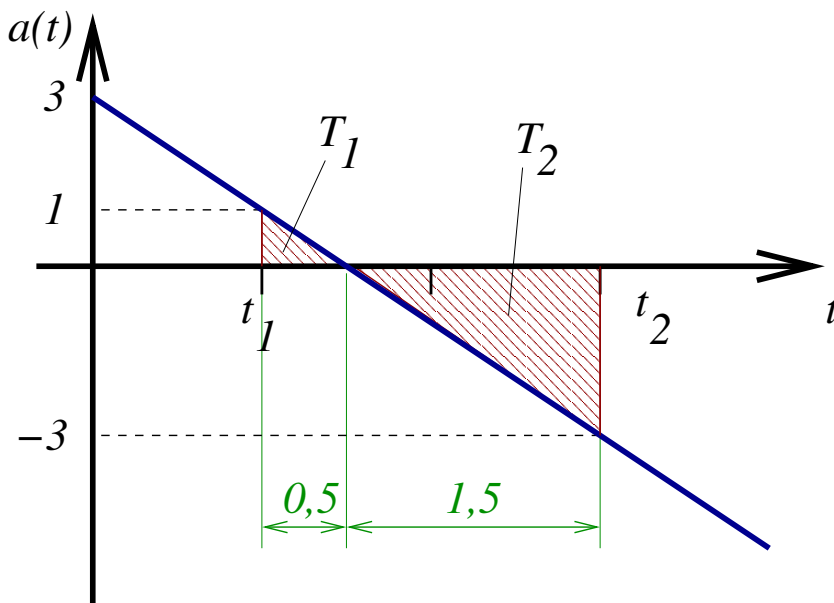
[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)

Page 33 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(3.6)–1. példa: Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő: $a(t) = 3 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$ -kor 5 m/s sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 3$ -kor?

Megoldás: Készítsünk grafikont!

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 34 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

A grafikon alatti terület két háromszögre bomlik:

- $t_1 = 1$ és $t_0 = 1,5$ között egy 1 magasságú háromszög a t tengely felett.
- $t_0 = 1,5$ és $t_3 = 3$ között egy 3 magasságú háromszög a t tengely alatt.

Ezek területei közül az elsőt pozitív, a másodikat negatív előjellel kell figyelembe venni. Így a sebességváltozás:

$$\Delta v = T_1 - T_2 = \frac{0,5 \cdot 1}{2} - \frac{1,5 \cdot 3}{2} = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5 \text{ m/s}$, ezért nyilván: $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3 \text{ m/s}$.

3.7. A pontszerű testek dinamikája

A dinamika megértéséhez szükségesek voltak mindazok, amit a kinematikából eddig megtanultunk.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 35 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

A dinamika alaptörvényeit **Isaac Newton** fedezte fel az 1600-as évek végén. Természetesen alapozott sokak munkájára, de nála állt össze egy rendszerré a mechanika.

A mechanika alaptörvényei azóta is a Newton-törvények, melyeket a következőkben tárgyalunk. (Newton nem pontosan ebben a formában mondta ki őket, de mindezek benn vannak műveiben.)

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Page **36** of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Newton I. törvénye

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog.

Megjegyzések:

- Az ilyen rendszert **inerciarendszer**nek nevezzük.
- Magára hagyott test alatt olyan testet értünk, mely nincs kölcsönhatásban más testekkel.
- Nem minden vonatkoztatási rendszer inerciarendszer!
- Sok rossz megfogalmazása létezik Newton I. törvényének! Általában elfelejtik megjegyezni, hogy ez csak bizonyos rendszerekben teljesül.
- Newton többi törvénye **csak inerciarendszerben teljesül!**

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 37 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Newton II. törvénye

Minden testhez található egy olyan állandó m mennyiség, amit a test tömegének nevezünk, és a többi test hatása a vizsgált testre jellemezhető egy \underline{F} úgynevezett erőfüggvénnyel, ami csak a test tömegétől, helyétől sebességétől és az időponttól függ, úgy, hogy

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

ahol \underline{a} a test gyorsulása.

Newton szerint tehát a testek tömege állandó, független a test mozgásától és attól, milyen kölcsönhatásban vesz részt a test.

Másik elrejtett feltételezés, hogy a kölcsönhatások előre meghatározott módon mennek végbe, azaz az erő mindig ugyanaz, ha azonos körülmények közt megismétlek egy kísérletet.

Legnagyobb ötlet viszont, hogy **a kölcsönhatás a test gyorsulásától függ**.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 39 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

sulását határozza meg. Korábban mindenki azt hitte, hogy a sebességet határozzák meg a körülmények. (Deriválás nélkül még a pillanatnyi sebesség is homályos fogalom volt, nem-hogy a gyorsulás...)

Newton II. törvényének jelentősége:

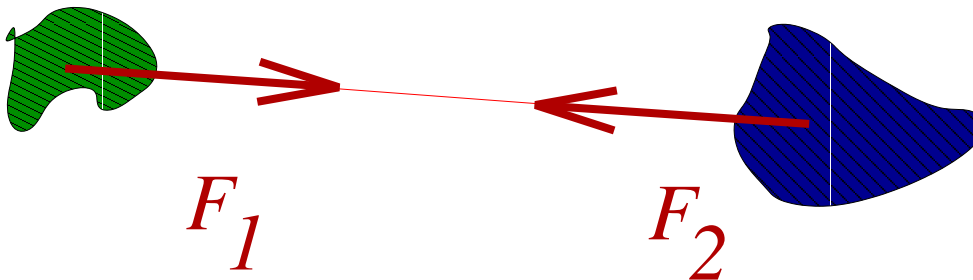
Ha egy kölcsönhatás erőitörvényét egyszer megállapítom, és egy test tömegét lemérem, akkor Newton II. törvénye alapján megkapom a gyorsulást. Ebből a kinematika módszereivel a teljes mozgás visszakapható.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 39 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Newton III. törvénye

Ha csak két test van egymással kölcsönhatásban, akkor ha az egyikre \underline{F}_1 erő hat, akkor a másikra ható erő $\underline{F}_2 = -\underline{F}_1$.

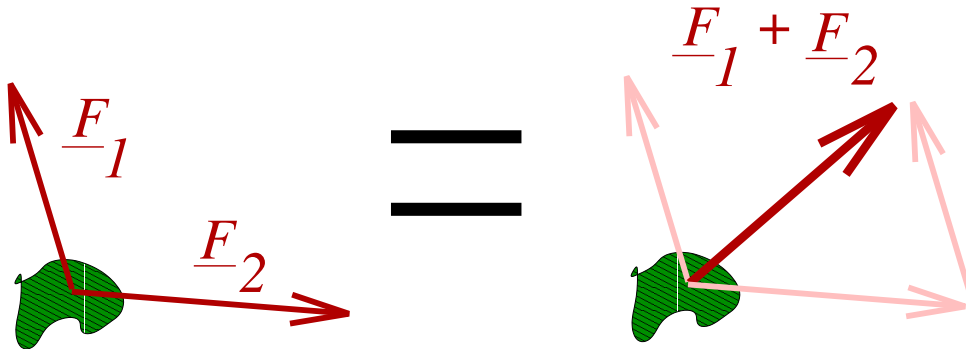
Szokás ezt “hatás-ellenhatás törvényének” is nevezni.



Newton IV. törvénye

Ha egy testre több másik is hat egyszerre, akkor a test úgy mozog, mintha olyan kölcsönhatásban szerepelne, melynek ereje a külön-külön kölcsönhatások erőinek vektori összege.

Az erők tehát egymástól függetlenül hatnak, hatásuk egyszerű matematikai művelettel összegezhető.



Több kölcsönhatás esetére Newton II. törvényét szokás az alábbi alakok valamelyikében felírni:

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \cdots + \underline{F}_n = m \cdot \underline{a}$$

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \underline{F}_{\text{eredő}} = m \underline{a}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)

Page 42 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3.8. A lendület, a lendületmegmaradás törvénye

Vizsgáljunk két testet, amik erőit fejtenek ki egymásra, de más test nem hat erre a kettőre, azaz a **két test zárt rendszert alkot**.

Newton III. törvénye szerint a rájuk ható erők:

$$\underline{F}_1 = -\underline{F}_2$$

Egy igen kicsi Δt -re:

$$\underline{F}_1 = m_1 \cdot \frac{\Delta \underline{v}_1}{\Delta t}$$

Hasonló összefüggés igaz a második testre is. Ezért:

$$m_1 \cdot \frac{\Delta \underline{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \cdot \frac{\Delta \underline{v}_2}{\Delta t}$$

Innét:

$$m_1 \Delta \underline{v}_1 + m_2 \Delta \underline{v}_2 = 0$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 43 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Mivel a tömegek állandóak, ezért nyilvánvalóan

$$\Delta(m_1\underline{v}_1) + \Delta(m_2\underline{v}_2) = 0$$

$$\Delta(m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2) = 0$$

azaz

$$m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 = \text{állandó}$$

Az $m\underline{v}$ mennyiségek összege tehát állandó, ezért ez fontos mennyiség lehet, hisz minden körülmények közt megmarad. Célszerű tehát elnevezni valaminek a tömeg és a sebesség szorzatát:

Egy m tömegű, \underline{v} sebességű test lendületének (vagy impulzusának) nevezzük a $\underline{p} = m\underline{v}$ mennyiséget.

Nemcsak 2, hanem n testre is bizonyítható, hogyha zárt rendszert alkotnak, összlendületük állandó:

$$\sum_{i=1}^n m_i\underline{v}_i = \sum_{i=1}^n \underline{p}_i = \text{áll.}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 44 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Könnyen bebizonyítható, hogy a lendület idő szerinti deriváltja az erő:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)

Page 45 of 45

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

4. A newtoni mechanika korlátai

A newtoni mechanika nagy sikereket ért el. (Mérnöki gyakorlat, bolygópályák számítása, új bolygók felfedezése, stb.)

Kb. 100 éve ismerünk olyan jelenségeket, melyek esetén mérhető hibát ad a Newton-féle mechanika alkalmazása. A fő csoportok:

- A fény sebességével összemérhető sebességek világa. (Ezzel a speciális relativitáselmélet foglalkozik.)
- Rendkívül nagy tömegű testekhez közeli tartományok. (Általános relativitáselmélet.)
- Az anyag elemi részeinek méretén lezajló folyamatok. (Kvantummechanika.)

Ezekkel később röviden találkozni fogunk.

A mindennapokban a newtoni mechanika pontatlansága kimérhetetlenül kicsi, ezért többnyire bátran alkalmazhatjuk.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 46 of 45](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)