

Rezgőmozgások

Dr. Horváth András
SZE, Fizika Tsz.

v 0.1

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[Contents](#)



Page **1** of **30**

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

1. Bevezetés

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér.

Először a **pontszerű testek egyenes menti rezgését** tárgyaljuk.

Ekkor a mozgás egy $x(t)$ függvénnyel jellemezhető.

Ha van olyan x_0 , melyre $x(t) = x_0$ -nak egynél több megoldása van t -re, akkor rezgőmozgásról beszélhetünk.

Ha $x(t)$ periódikus, akkor periódikus rezgőmozgásról beszélünk. (Vigyázat! Nem minden rezgőmozgás periódikus.)

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 1 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

1.1. Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van. Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta. A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy rezgés.

Matematikailag:

Egyensúlyi pont: $F(x_0) = 0$

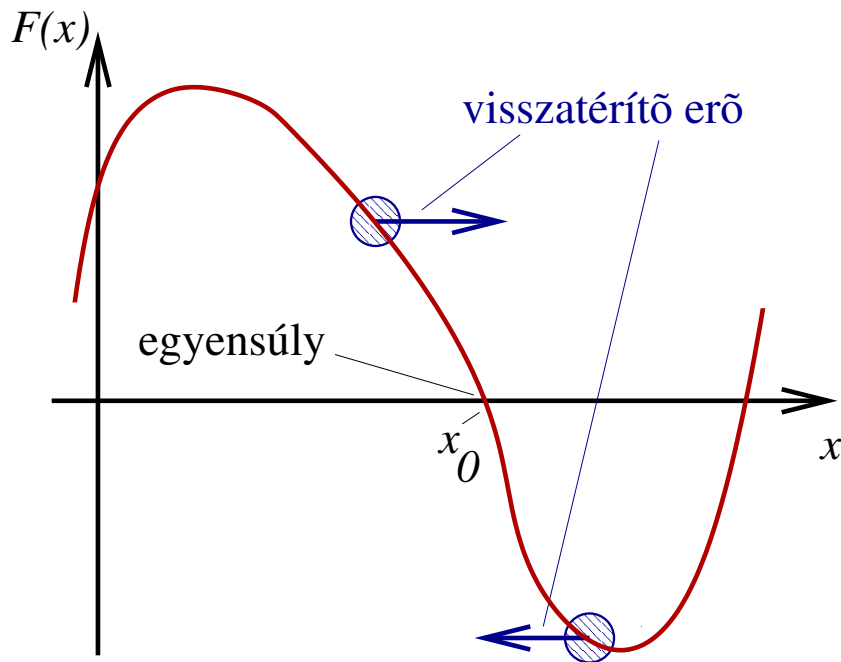
Visszatérítés jobbról: $F(x) < 0$, ha $x > x_0$ és $x - x_0 < \delta$

Visszatérítés balról: $F(x) > 0$, ha $x < x_0$ és $x_0 - x < \delta$

Ez így nehezen kezelhető. Szemléltessük!

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 2 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Egyensúlyi helyzet rezgéssel:



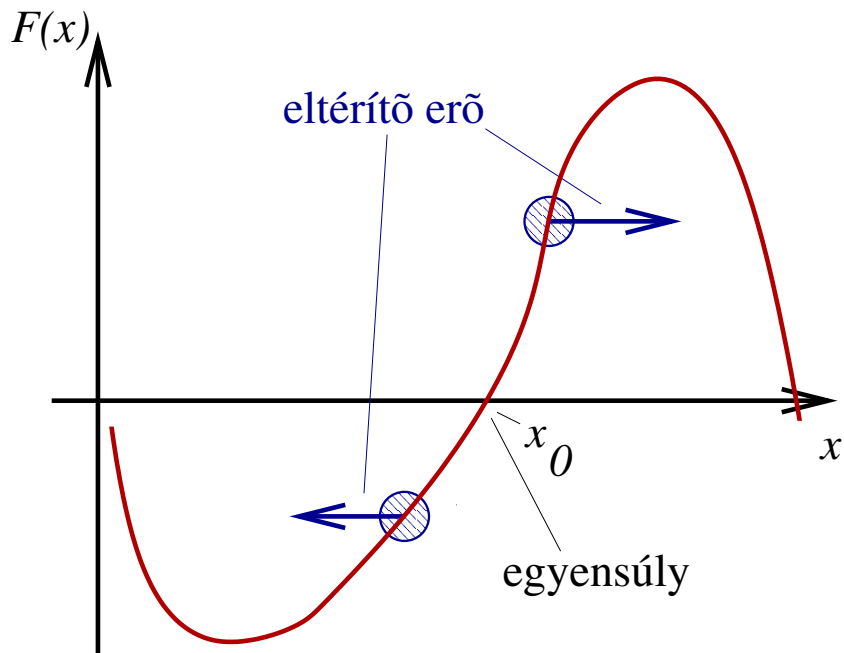
Elnevezés: **stabil egyensúlyi helyzet**

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)

Page 3 of 30

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Egyensúlyi helyzet rezgés nélkül:



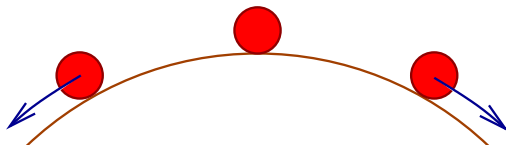
Elnevezés: **instabil egyensúlyi helyzet**

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 4 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

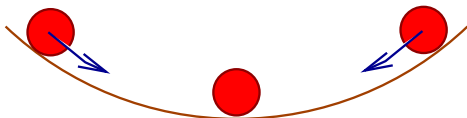
Tanulság:

Ha egy egyensúlyi helyzet körül $F(x)$ monoton fogyó, akkor ott stabil egyensúly van, azaz kialakul rezgés, különben nem.

Egyszerű példák stabil és instabil egyensúlyi helyzetre: labda dombon és gödörben.



instabil egyensúly



stabil egyensúly

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[Contents](#)

[◀](#)

[▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

Page 5 of 30

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

1.2. A harmonikus rezgőmozgás

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.

Tegyük az origót az egyensúlyi helyzetbe. Ekkor az erőfüggvény:

$$F(x) = -D \cdot x$$

ahol D szokásos neve: direkciós állandó vagy rugóállandó.

Ilyen erő hat pl. egy rugalmasan rögzített testre.

A mozgás egyenlete: ($F = ma$ átrendezve)

$$a = -\frac{D}{m} x$$

Beírva a gyorsulás jelentését:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'' = -\frac{D}{m} x$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 6 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Ez ez olyan egyenlet, melyben csak az $x(t)$ függvény az ismeretlen. Bár pillanatnyilag nem tudjuk megoldani, mert az ismeretlen deriváltja is szerepel, azért ki tudjuk találni a megoldást. (Később matematikából szerepelni fog a perecíz megoldás is.)

$x(t)$ tehát olyan függvény, melynek második deriváltja önmagának negatív konstansszorososa. Ilyenek pl. a \sin és \cos függvények. $((\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x)$. Kis próbálgatással:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ahol A és φ_0 tetszőleges állandók, $\omega = \sqrt{D/m}$.

Valóban megoldása ez a mozgásegyenletnek? Ellenőrizzük:

$$v(t) = x'(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$$

$$a(t) = v'(t) = -A \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega \cdot \omega$$

És így valóban:

$$a(t) = -x(t) \cdot \omega^2 = -x(t) \frac{D}{m}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 7 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Tényleg ez a mozgásegyenlet egy megoldása. Összefoglalva:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Ez a mozgás a középiskolából ismert **harmonikus rezgőmozgás**.

A szokásos elnevezések:

- ω : körfrekvencia.
- $T = 2\pi/\omega$: periódusidő.
- A : amplitúdó.
- φ_0 : kezdőfázis.

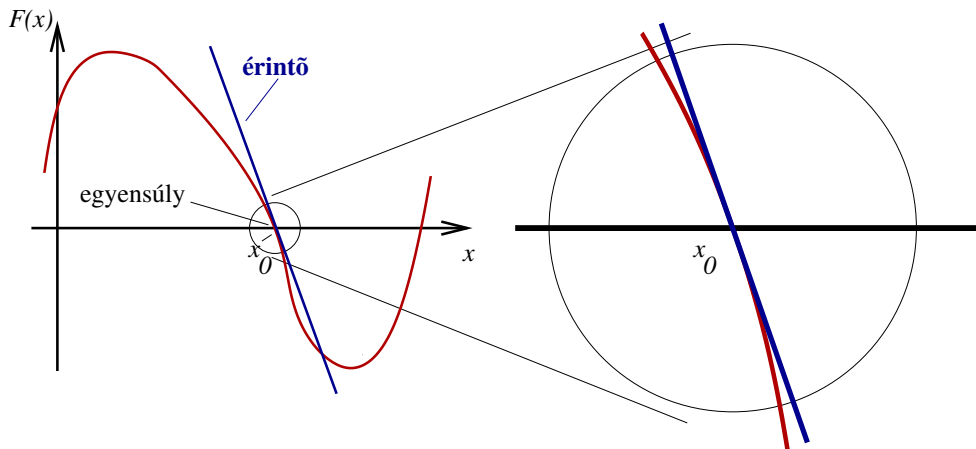
[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 6 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

1.3. Kis amplitudójú rezgések

Mi a helyzet azonban, ha a testre ható erő nem lineáris?

Általános esetben bonyolult megadni a rezgés paramétereit.

Egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések esetén közel harmonikus rezgést fogunk kapni, hisz sima $F(x)$ esetén kis szakaszon $F(x)$ grafikonja jól közelíthető érintőjével.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 9 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Ezért x_0 körül közel lineáris erőtvény érvényesül. Mivel az érintő meredeksége $F'(x)$, ezért a kis rezgések úgy történnek, mintha $D = -F'(x)$ rugóállandójú rugón lenne a test.

Tehát egyensúlyi helyzet körüli **kis amplitudójú rezgések frekvenciája:**

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x)}{m}} = \sqrt{-\frac{1}{m} \frac{dF}{dx}}$$

Nem tévedés! Stabil egyensúly esetén $F(x)$ monoton fogy x_0 körül, így itt $F(x_0) < 0$, ezért ω képletében a gyökjel alatt pozitív szám áll.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 10 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(1.3)–1. példa: Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 11 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(1.3)–1. példa: Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?

Megoldás: Az egyensúly feltétele: $F(x_0) = 0$, azaz most $5/x_0 - 9 = 0$. Ez egyszerűen megoldható:

$$x_0 = \frac{5}{9}$$

(Most csak egy megoldásunk van.)

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja. Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left(\frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 12 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

az egyensúlyi pontban:

$$F'(x_0) = -\frac{5}{(5/9)^2} = -\frac{81}{5} = -16,2$$

Ez valóban negatív, tehát kialakulhat rezgés. A frekvencia:

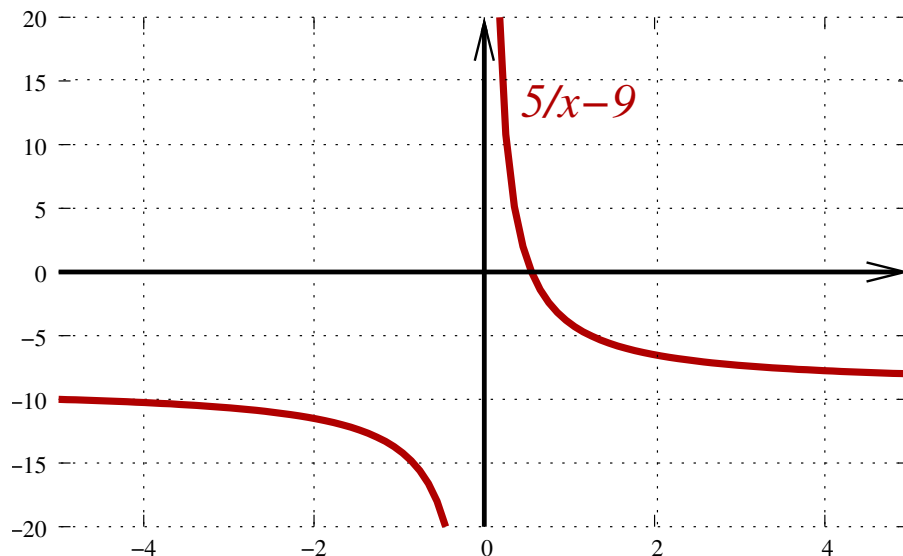
$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{16,2}{2}} \approx 2,85 \frac{1}{\text{s}}$$

A periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,21 \text{ s}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 13 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Egy kicsit segíthet, ha felrajzoljuk $F(x)$ grafikonját:



Látszik, hogy egy egyensúlyi helyzet van, mely stabil.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 14 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(1.3)–2. példa: Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x$$

Hol lehet a test egyensúlyban? Hol alakulhat ki rezgés? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 7 kg?

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)

Page 15 of 30

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(1.3)–2. példa: Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x$$

Hol lehet a test egyensúlyban? Hol alakulhat ki rezgés? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 7 kg?

Megoldás: Egyensúlyi helyzet feltétele:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x = 0$$

Nyilvánvaló megoldás az $x_1 = 0$. Az ezen kívüli megoldásokat keresve eloszthatjuk az egyenletet x -szel:

$$10x^2 + x - 0,2 = 0$$

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát. A stabilitást $F'(x)$ előjeléből állapíthatjuk meg:

$$F'(x) = 30x^2 + 2x - 0,2$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 16 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

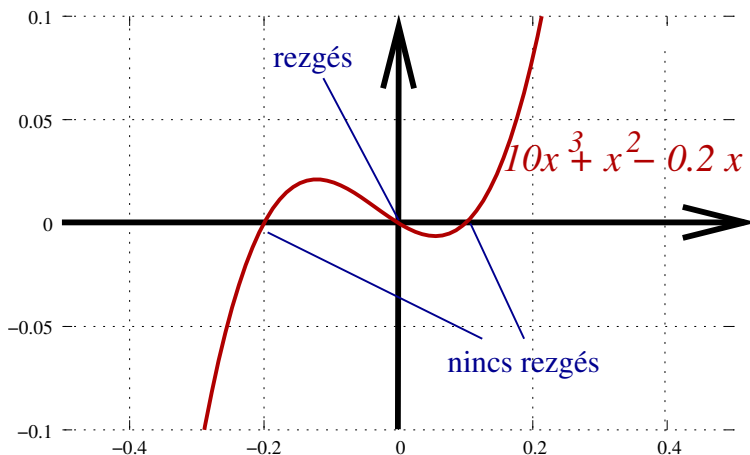
$$F'(x_1) = -0,2 \quad F'(x_2) = 0,3 \quad F'(x_3) = 0,6$$

Ezek közül csak az első negatív, tehát csak $x_1 = 0$ körül alakul ki rezgés.

A kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_1)}{m}} \approx 0,169 \frac{1}{s}$$

Periódusideje: $T = 2\pi/\omega = 37,2 s$



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[Contents](#)

[◀◀](#)

[▶▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

Page 17 of 30

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

2. A csillapított rezgőmozgás

A közegellenállást, súrlódást és egyéb fékező hatásokat eddig elhanyagoltuk, pedig fontosak: ha egy testet rezgésbe hozok, de magára hagyok, az egyre kisebb amplitudóval fog rezegni.

Most vegyük figyelembe a közeg hatását:

$$F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} = m \cdot a$$

Itt $F_{\text{rugó}} = -Dx$, a közeg hatását pedig írjuk fel a következő alakban:

$$F_{\text{közeg}} = -C \cdot v$$

Tehát sebességgel arányos fékezőerőt tételezünk fel. Ez pl. kis sebességű mozgásnál jó közelítéssel igaz a közegellenállásra.

Így:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 18 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m} - \frac{C}{m}v$$

D/m -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés
körfrekvenciájának négyzetét, azaz $D/m = \omega_0^2$.

C/m valamiképp a fékezés hatékonyságát méri. Jelöljük ezt
 2β -val. β szokásos neve: **csillapítási tényező**.

Így a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v$$

Másképp:

$$x'' = \omega_0^2 x - 2\beta x'$$

Ennek megoldására jelenleg nincsenek meg a matematikai
eszközeink. Ezért a megoldást bizonyítás nélkül közlöm:

A megoldás jellege alapvetően különbözik ha $\omega_0 > \beta$ (kis csil-
lapítás) illetve ha $\omega_0 \leq \beta$ (nagy csillapítás).

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 19 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Ezek közül a kis csillapítás fordul elő gyakran, így ezt tárgyaljuk részletesen.

Home Page

Title Page

Contents



Page 20 of 30

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2.1. Kis csillapítások esete

Amennyiben $\omega_0 > \beta$, a csillapított rezgőmozgás az alábbiak szerint zajlik:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

ahol

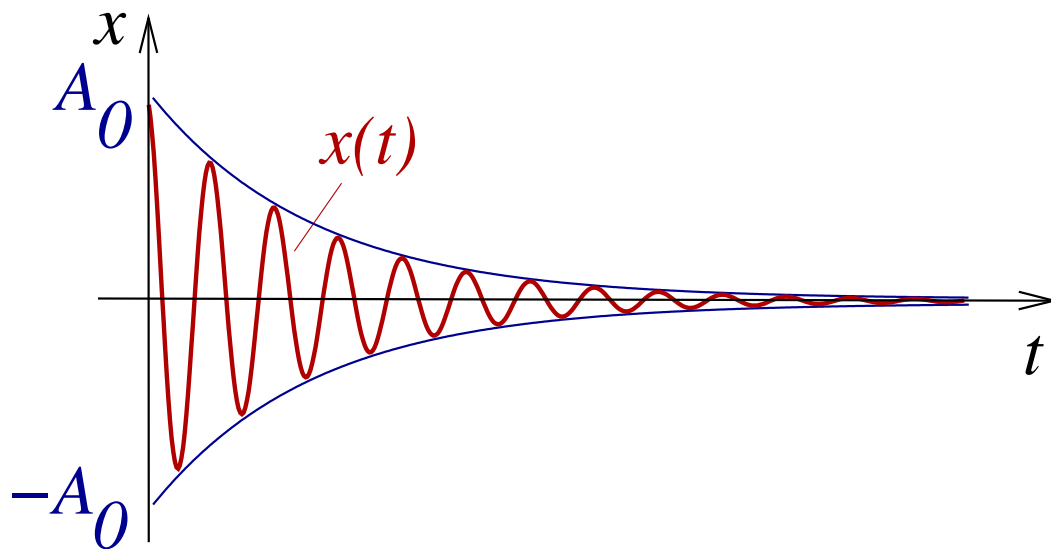
$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Tehát a csillapított rezgés frekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan ($\omega_{cs} < \omega_0$), amplitudója pedig A_0 -ról exponenciális függvény szerint csökken.

Maga az amplitudó időbeli változása:

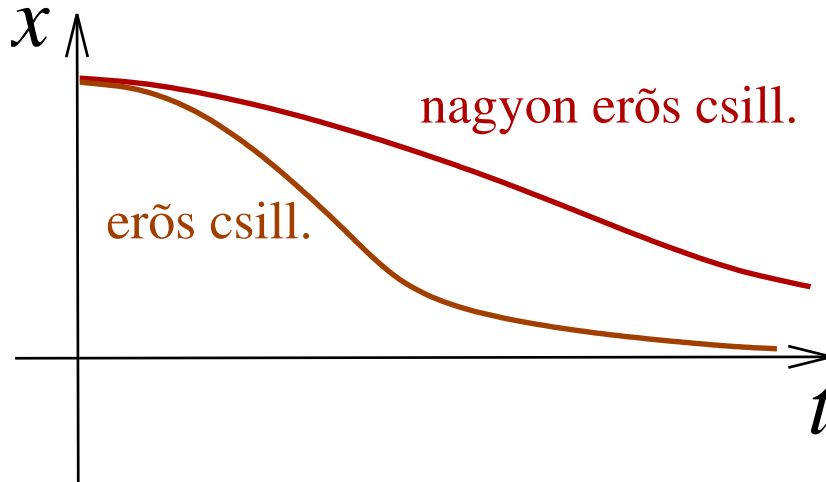
$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 21 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 22 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

2.2. Nagy csillapítások esete

Amennyiben $\omega_0 \leq \beta$, nem is alakul ki rezgőmozgás, hanem az $x(t)$ függvény monoton csökkenően 0-hoz tart.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 23 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(2.2)–1. példa: Egy csillapodó rezgőmozgás amplitudója 12 s-onként feleződik meg. Mekkora a csillapítási tényező értéke?

Megoldás: A szöveg szerint:

$$\frac{A_0}{2} = A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

ahol $t = 12$ s.

Innen egyszerű átrendezéssel:

$$\beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,0578 \frac{1}{\text{s}}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 24 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(2.2)–2. példa: Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája $1,3 \text{ Hz}$, amplitudója kezdetben 15 cm , 10 s múlva már csak 3 cm .

Mikor lesz amplitudója kisebb, mint 1 mm ? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

Page 25 of 30

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(2.2)–2. példa: Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája 1,3 Hz, amplitudója kezdetben 15 cm, 10 s múlva már csak 3 cm.

Mikor lesz amplitudója kisebb, mint 1 mm? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?

Megoldás: A feladat szerint:

$$A_0 = 0,15 \text{ m} \quad A_1 = 0,03 \text{ m} \quad t_1 = 10 \text{ s} \quad \omega_{cs} = 1,3 \text{ Hz}$$

Tudjuk, hogy

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}$$

innét:

$$\beta = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{A_1}{A_0} = 0,16 \frac{1}{\text{s}}$$

Keressük azt a t_2 időpontot, melyre $A(t_2) = A_2 = 0,001 \text{ m}$:

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}$$

innét:

$$t_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{A_2}{A_0} = 31,1 \text{ s}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 26 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

(Figyelem! Az amplitudó nem lineráisan csökkent!)

A csillapítatlan ω_0 frekvencia a fenti

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

összefüggésből kapható meg:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{cs}^2 + \beta^2} = 1,31 \text{ Hz}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 27 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

3. A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Mi történik akkor, ha a kezdeti rezgésbe hozáson kívül a testet egy külső erő állandóan “rezgeti”, azaz gerjeszti a rezgést. (Pl. hinta külső állandó lökődéssel.)

Legegyszerűbb eset: amikor a gerjesztő erő szinuszosan változik:

$$ma = F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} + F_g$$

ahol

$$F_g = F_0 \sin(\omega_g t)$$

A fentiekhez hasonlóan:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v + a_0 \sin(\omega_g t)$$

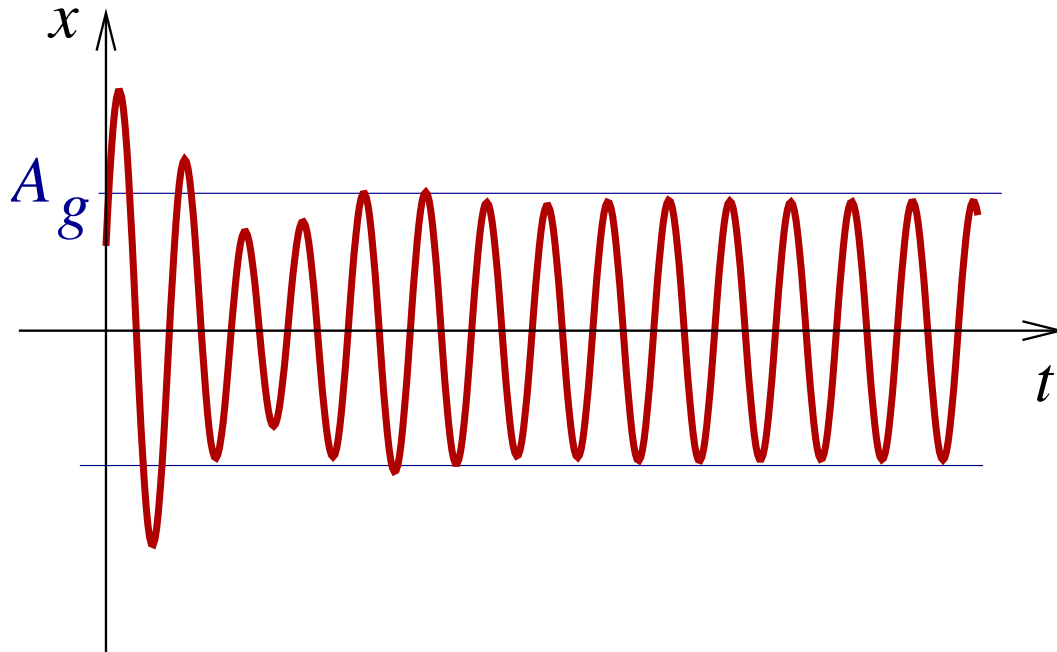
ahol $a_0 = F_0/m$.

Kis csillapítások esetén a megoldás:

$$x(t) = A_g \cdot \sin(\omega_g t + \delta) + A \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 28 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

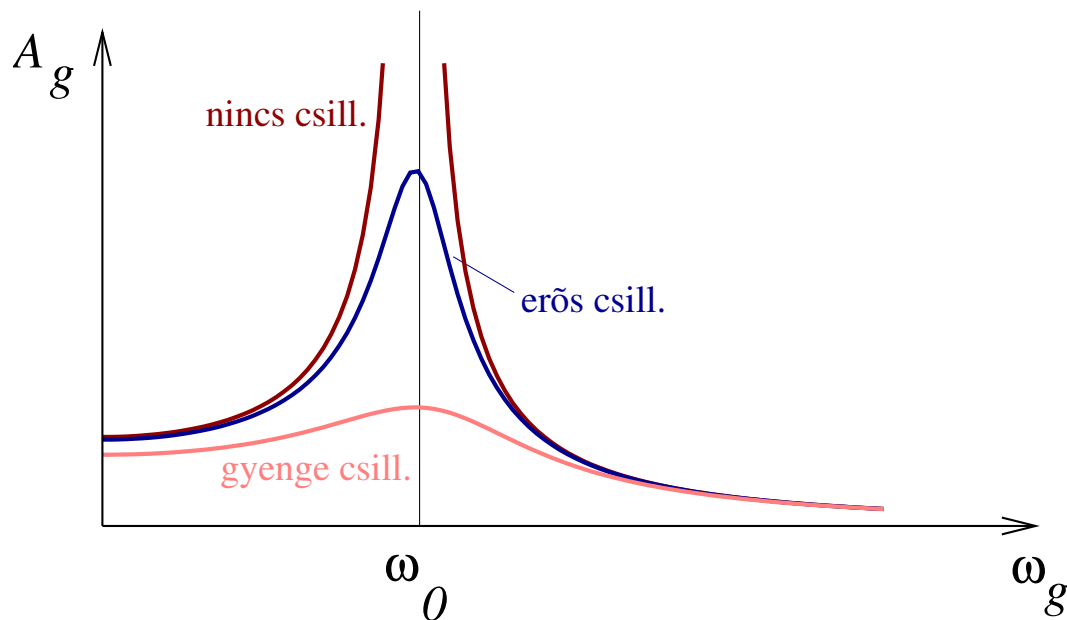
Ez tehát egy A_g amplitudójú harmonikus rezgés és egy csillapodó rezgés összege. Amíg mindkettő jelen van, az eltérő frekvenciák miatt kissé össze-vissza rezgést kapunk, de a csillapodó tag elhalásával ez egyre inkább egy állandó amplitudóra áll be.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 29 of 30](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Hosszú távon tehát A_g számít. Ennek kifejezése:

$$A_g = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}$$

Grafikonja:



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[Contents](#)

[◀◀](#)

[▶▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

Page 30 of 30

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

A sajátfrekvencia környékén tehát a gerjesztett rezgés amplitúdója igen megnőhet, ha a csillapítás kicsi. Ez a **rezonancia** jelensége.

Ez sokszor fellép a gyakorlatban, néha káros, néha hasznos.

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)

Page 31 of 30

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)