

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
KÖZLEKEDÉSÉPÍTÉSI INTÉZET

Göde Ferenc
főisk. docens

Lublóy László
főisk. adjunktus

Németh György
főisk. adjunktus

MECHANIKA II.

(Szilárdságtan, Kinematika, Kinetika)

KÉZIRAT

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
www.ntk.hu
Vevőszolgálat: info@ntk.hu
Telefon: 06 80-200-788

A kiadásért felel: Jókai István vezérigazgató
Raktári szám: J 19476
Felelős főszerkesztő: Csuka Tünde
Műszaki szerkesztő: Görög Istvánné
Utánnomásra előkészítette: Laki Péter
Terjedelem: 30,39 (A/5) ív
A tizenötödik kiadás változatlan utánnomása, 2009.

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben
a nyomda alapításának 127. esztendejében
Felelős vezető Papp Lajos vezérigazgató
Tel.: 66/887-400
<http://www.gyomaiwner.hu>;
e-mail: knernyomda@gyomaiwner.hu

BEVEZETÉS

A merev testek statikája olyan testekkel foglalkozik, amelyek a rájuk ható erők hatására méret-, illetve alakváltozást nem szenvednek. Merev test valójában nem létezik, absztrakció eredménye, arra azonban alkalmas, hogy a testre ható erők egyensúlyát meghatározzuk.

A valóságban csak szilárd testek léteznek, melyeknek alakja és méretei a különböző erők hatására megváltoznak. A szilárdságtan tehát a merev test fogalma helyett az annál reálisabb szilárd test fogalmát használja, és a szilárd anyagu tartószerkezetek méreteit határozza meg. A teherhordó szerkezetek méretezése során - általában ellenőrző statikai számítás formájában - igazolni kell, hogy a megtervezett szerkezet építése és rendeltésszerű használata során a vele szemben támasztott műszaki követelményeknek eleget tesz.

A műszaki követelmények általánosságban magukba foglalják, hogy

- a tartó a terhek és a fizikai hatások következtében ne károsodjék, illetve ne menjen tönkre,
- a tartó viselkedése legyen összhangban az egész építmény üzemi feltételével.

A szilárdságtan feladata tehát elsősorban az, hogy a tartó belsejében keletkező igénybevételeket meghatározza, és a szerkezetet olyan méretűre terveze, hogy ezeket az igénybevételeket biztonsággal elbírja. Ezeknek a méretezési eljárásoknak ismertetésével foglalkozik jegyzetünk második fejezete.

A tartó tönkremenetelét jelenti az is, ha a tartó nem törik ugyan el, de számottevő alakváltozást szenved. A szilárdságtannak tehát arra a kérdésre is válaszolnia kell, hogy adott teher esetén milyen a tartószerkezet alakváltozása. A jegyzet harmadik fejezetében az alakváltozások meghatározására ismertünk meg módszereket.

Végül azt is várjuk a szilárdságtantól, hogy nemcsak a statikailag határozott, hanem a statikailag határozatlan tartók méretezésére is adjon módszert. A határozatlan tartókkal foglalkozik jegyzetünk negyedik fejezete.

A szilárdságtan a vizsgált test alakjától függően is több részre osztható.

- Az elemi szilárdságtan az egyenestengelyű, prizmatikus rudak vizsgálatával foglalkozik. A főiskolai mechanika tantárgy a szilárdságtannak főleg ezt a fejezetét ismerteti.

- A másik nagy rész a feltületszerkezetek szilárdságtana. Itt a feltületszerű, egyik irányban a másik két mérethez képest kicsiny kiterjedésű testeket vizsgáljuk. Ennek fajtái a tárcsa (síkjában terhelt sík tábla), a lemez (síkjára merőlegesen terhelt sík tábla) és a héjak (görbe felületű szerkezetek). A mechanikai tantárgy keretén belül ezekkel nem foglalkozunk.

- Az általános szilárdságtan nem tesz kikötéseket a test alakjára. Ezzel a fejezettel csak szemelvénytyszerűen foglalkozunk.

A jegyzet utolsó fejezete a dinamika, mely az erők hatására keletkezett mozgások vizsgálatával foglalkozik.

A szilárdságtan módszerében eltér a statikától. A statikában négy tapasztalati uton nyert axiómára építettük fel az anyagot, elméleti módszerekkel. A szilárdságtan lényegesen nagyobb mértékben használja a kísérleti tapasztalatokat és ezek eredményeit dolgozza fel elméleti uton.

A természetben vizsgált jelenségek bonyolultsága igen nehézkessé teszi az elméleti feldolgozást, ezért a szilárdságtan is alkalmazza a modelleket, és olyan mértékben egyszerűsít, hogy azok lényegesen ne változzanak.

A szilárd testek - tapasztalat szerint - az alakváltozás során hosszabb-rövidebb ideig rezgésszerűen mozognak, majd a deformált állapotban nyugalomban maradnak, ha eredetileg is nyugalomban voltak. Ha az erőket nem mindjárt végső értékükkel, lökésszerűen alkalmazzuk, hanem zérustól kezdődően fokozatosan növeljük őket, akkor a rezgések olyan kicsinyek, és oly rövid időtartamúak, hogy egészen figyelmen kívül hagyhatók. Így tehát feltételezzük, hogy a terheink statikusak, és a test a külső erőrendszer hatására azonnal a végső megváltozott alakját és méreteit veszi fel.

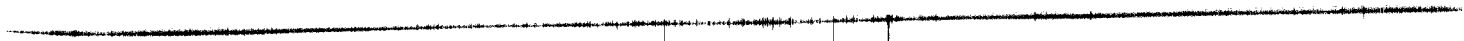
Feltételezéseket kell tennünk a szilárd test anyagának tulajdonságaira is.

A műszaki mechanikának az egyik alapvető feltételezése az, hogy a vizsgált szerkezet valamennyi részét az anyag folyamatosan, hézagmentesen tölti ki. A test szilárdsági tulajdonságai minden pontjában azonosak, a test homogén. Ha ez a feltételezés nem igaz, akkor az anyagot inhomogénnek nevezzük.

Legtöbbször azt is feltételezzük, hogy az anyag jellemző tulajdonságai az irányval nem változnak, például a teherbírás minden irányban azonos. Az ilyen anyagokat izotropnak nevezzük. Ha a tulajdonságok különböző irányokban eltérnek, akkor az anyag anizotrop. Ilyen jellegzetesen anizotrop anyag a fa.

Vannak anyagok, amelyek elméletileg nem tesznek ugyan eleget az előbbi értelmezéseknek, de megfelelő nagyságu véges méretek esetén a viselkedésük azoknak megfelelő. Pl. az acél apró kristályok tömegéből áll, de egymástól megfelelő nagyságu, ugyanakkora végestávolságban kijelölt két pont között mindig ugyanannyi a körülbelül egyező állású kristályok száma, bármilyen irányban helyezkedik is el a két pont. Az izotrop anyagokra érvényes megállapítások az ilyen anyagokra is alkalmazhatók, ezért az ilyen anyagokat kváziizotrop anyagoknak nevezzük.

A gyakorlatban dolgozunk olyan anyagokkal is, amelyek nem homogének (pl. a beton) vagy nem izotropok (pl. a fa). A homogén és izotrop anyagok szilárdságtanában megismert összefüggések azonban ezeknek az anyagoknak az esetében is jól felhasználhatók, a szükséges korrekcióval, vagy érvényességű határok kijelölésével.



A SZILÁRDSÁGTANNAL KAPCSOLATOS ALAPFOGALMAK

1.1 A feszültség fogalma

A nyugalomban levő egyensúlyi erőrendszerrel terhelt szilárd testet vágjuk két különálló részre az 1.1. ábra szerint. $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7) \doteq 0$.

Az elvágott felületen erőket kell működtetni a két különválasztott részt egyensúlyának fenntartása érdekében. Ezek a belső erők, fogalmukkal már a statikában találkoztunk. A belső erő az átvágott felületen jelentkező megoszló erőrendszerek eredője. A két test egyensúlya tehát az $(F_1, F_2, F_3, \Sigma \Delta Q) \doteq 0$ és $(F_4, F_5, F_6, F_7, \Sigma \Delta Q') \doteq 0$ egyenértékűségekkel felírható. A képletben a ΔQ a ΔF felületen ható belső erő. A teljes átvágott felületen keletkező terhelő erőrendszer eredője a $\Sigma \Delta Q$ erő. A ΔQ erőkből álló erőrendszer jellemzésére vezessük be az átlagos fajlagos belső erő fogalmát a statikában már tanult módon. Ez egy vektormennyiség; $\bar{q} = \frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta F}$.

Az így képzett \bar{q} vektor párhuzamos a $\Delta \bar{Q}$ irányával, dimenziója N/mm^2 (MPa).

A \bar{q} fenti értelmezéséből következik, hogy $\Delta Q = q \Delta F$, vagyis a felülelemlere ható belső erők eredője nem más, mint az átlagos belső erő és a síkidomnak tekinthető felülelelem területének szorzata.

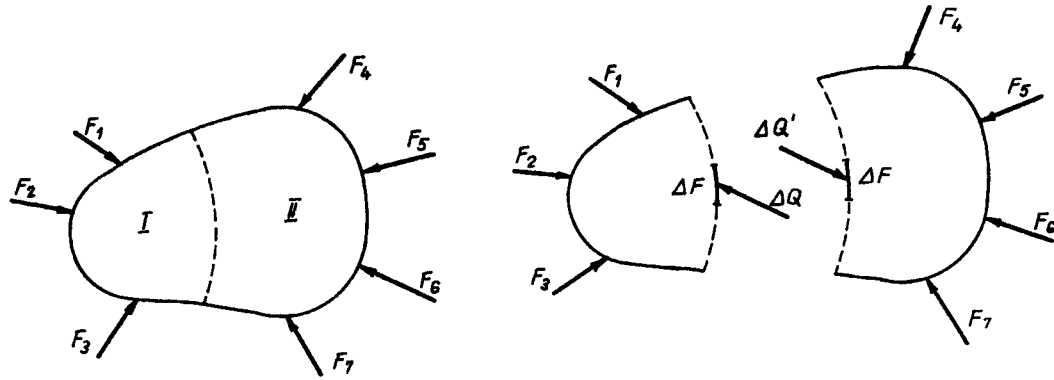
Ha az átmetszési felületen az elemek számát minden határon tul szaporítjuk úgy, hogy az elemek területe zérushoz tartson, akkor határátmenettel kapható

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \bar{q} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta F} = \frac{d\bar{Q}}{dF} = \bar{p}_n$$

Az újabb vektort az \bar{n} normálisú felülelelemhez tartozó fajlagos belső erőnek, másképpen feszültségnek nevezzük.

A szilárd test valamely pontján azonban nem csak egy metszésfelület vezethető át. Természetesen ugyanabban a pontban más állású, más elhelyezési felülettel történő átvágás esetén eltérő feszültségvektor keletkezik. A feszültségvektor tehát függvénye a felülelelem \bar{n} normálisának is.

Helytelen tehát, ha valaki a szilárd test egy pontjában keletkező feszültségről beszél. Ehelyett mindig a test egy pontjában és a pontban adott normálisú felülelelemhez tartozó feszültségről lehet szó.



1.1. ábra

Ismerkedjünk meg részletesen a feszültség dimenziójával is. A dimenzió egy erődimenzió és egy felületdimenzió hányadosa. (N/mm^2 KN/m^2 stb.) Természetesen az SI rendszerben minden új alapfogalom kap alapdimenziót. Így a feszültség dimenziója az 1 Pa (1 Pascal) 1 N osztva 1 négyzetméter területtel.

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$$

Ez az érték igen kicsi, ennek a többszörösét célszerű használni. $1 \text{ MPa} = 1 \text{ Pa} \cdot 10^6$. Ez az érték egyenlő 1 N osztva 1 mm^2 felülettel. Mi ezt az értéket használjuk leggyakrabban.

A technikai mértékrendszerben a feszültség alapegysége a kp/cm^2 érték volt. A meglévő szakirodalomban ez az alapérték szerepel, ennek átszámítására igen gyakran szükségünk van. $1 \text{ kp}/\text{cm}^2 = 0,1 \text{ N}/\text{mm}^2$.

1.2 A feszültség összetevői

Valamely n normális felülethez tartozó feszültségvektort az 1.2 ábra szerint komponensekre lehet felosztani.

A felületre merőleges feszültségvektort normális feszültségnek hívjuk, jelölése: $\bar{\sigma}_n$. A metszet síkjába eső összetevőt nyírófeszültségnek nevezzük, jel $\bar{\tau}_n$. A nyírófeszültséget még a metszet síkjában további két n és v irányú derékszögű összetevőre bonthatjuk fel, jelölésük $\bar{\tau}_{nu}$ és $\bar{\tau}_{nv}$.

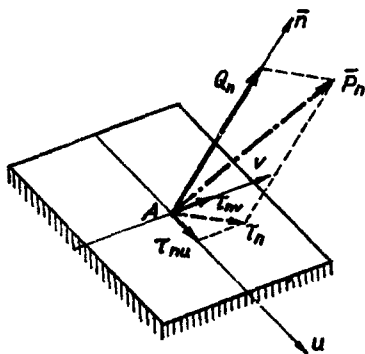
A nyírófeszültség két indexe közül az első a feszültségi sík normálisát, a második az összetevő irányát jelzi.

A feszültségvektor az összetevők vektorösszege

$$\bar{p}_n = \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_{nu} + \bar{\tau}_{nv}$$

Azt is mondhatjuk, hogy a feszültségvektor az összetevők eredője.

$$p_n = (\sigma_n, \tau_{nu}, \tau_{nv})$$



1.2 ábra

A feszültségvektor a derékszögű összetevőkből a trigonometriai összefüggéssel számítható ki

$$p_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_{nu}^2 + \tau_{nv}^2}$$

Az összetevők a p_n feszültségvektor vetületeiként számíthatók

$\sigma_n = p_n \cos \alpha$, $\tau_{nu} = p_n \cos \beta$, $\tau_{nv} = p_n \cos \gamma$, ahol α , β , γ a p_n feszültségvektornak az n , u , v tengelyekkel bezárt szögét jelenti.

1.3 A fajlagos megnyúlás fogalma. A Hooke törvény

Az olyan anyagot, amely a teher hatására alakváltozást szenved és tehermentesítés után visszanyeri eredeti alakját, rugalmasnak nevezzük. Abban az esetben, ha tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját a test, akkor anyaga képlékeny tulajdonságokkal rendelkezik.

Ezek a tulajdonságok függhetnek a terhelés mértékétől is. Az anyagok nagy része bizonyos teherintenzitás alatt rugalmasan, azt meghaladva viszont képlékenyen viselkedik.

Az anyag rugalmas és képlékeny tulajdonságai a legegyszerűbben húzó- és nyomókísérletek alapján elemezhetők. Az első ilyen kísérletet a terhelő erő és az alakváltozás közötti összefüggés felderítésére Robert Hooke angol tudós végezte el, huzóerővel terhelt vékony vashuzalon.

A kísérlet során mérte az eredetileg l hosszúságú huzal különböző N normálerőkhez tartozó Δl megnyúlását. Azt találta, hogy az erő arányos a megnyúlással $N = C \Delta l$, ahol a C arányossági tényező azonos test esetében állandó szám.

A fenti megállapítás az ún. Hooke törvény több tekintetben kiegészítésre szorul, de mégis alapvető jelentőségű. Ma is ez a törvény képezi a rugalmasságtan alapját.

Eredeti alakjában ez a törvény nem az anyagra, hanem az adott méretű testre jellemző. Függetlenítsük tehát a mérésünket a test méreteitől. A huzal hosszától függetlenül tehetjük az eredményt, ha nem a megnyúlást, hanem annak az eredeti hosszra vonatkozó fajlagos értékét; $\epsilon = \Delta l / l$ értéket határozzuk meg. Ezt az ϵ (epszilon) értéket fajlagos megnyúlásnak nevezzük. A fajlagos megnyúlás még függ az erőtől és a keresztmetszet területétől is, mert nagyobb keresztmetszetű vasrud ugyanakkora erő hatására kevesebbet nyúlik, mint egy kisebb keresztmetszetű. Tehát nem a terhelő erőt, hanem a feszültséget határozzuk meg $\sigma = \frac{N}{A}$, és ennek függvényében mérjük a fajlagos megnyúlást. A Hooke-törvény alakja így $\sigma = E \epsilon$. A feszültség egyenesen arányos a fajlagos megnyúlással. Ez

természetesen csak egy bizonyos feszültségértékig érvényes. A részletes tárgyalásra későbbiekben visszalérünk.

A Hooke törvényben szereplő E érték az anyagra jellemző, gal-
massági tényezőnek nevezzük.

A rugalmassági tényező, vagy más néven modulus dimenziója: képlet alapján azonos a feszültség dimenziójával $[N/mm^2]$ $[MP_a]$, mert $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ nevezetlen szám.

Itt közöljük még néhány anyag rugalmassági tényezőjét.

vas és acél	$2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
I. o. kemény fa rostok irányában	$1,5 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$
I. o. puhafa rostok irányában	$1,3 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$

Az olyan anyagoknál, melyek már kis húzóerő hatására eltörnek, a kísérletet zömök test nyomásával hajtják végre. Ezekből a nyomókísérletekből állapítják meg az alábbi rugalmassági tényezőket:

beton	$1,0-3,6 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$
tégla	kb. $2,0 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$
I. o. keményfa rostokra merőlegesen	$8,0 \cdot 10^2 \text{ N/mm}^2$
I. o. puhafa rostokra merőlegesen	$4,0 \cdot 10^2 \text{ N/mm}^2$

1.4 Az anyag szilárdsági viselkedését befolyásoló egyéb tényezők

A tapasztalat és a kísérletek azt bizonyítják, hogy az alakváltozás nagyságát és lefolyását nemcsak a terhelés nagysága, hanem a terhelés módja és körülményei is jelentősen befolyásolják. Ezért az anyag szilárdsági tulajdonságai bizonyos esetekben megváltoznak annak ellenére, hogy szilárd-ságtani számításokban állandónak feltételezzük őket.

1.4.1 A terhelési folyamat időbeni változása

Az anyag viselkedése a terhelés sebességének függvénye. A legtöbb anyagnál az alakváltozás és tönkremenetel körülményei másképp alakulnak, ha a terhelés folyamata lassu (statikus) vagy hirtelen zajlik le (dinamikus).

Mi általában, mint említettük, statikus terhekkel számolunk, de számításaink eredményét korrigálni kell, ha a valóságos terhelés dinamikus.

A terhelés időtartama sem közömbös a szilárdsági viselkedés szempontjából. Egyes anyagok hosszú ideig tartó változatlan nagyságu teher működése közben alakváltozást szenvednek. Ezt a jelenséget lassu alakváltozásnak nevezzük.

Más anyagoknál viszont az figyelhető meg, hogy az alakváltozás állandó értéke mellett hosszabb idő eltelte után a feszültség nagysága csökken. Ez a jelenség az ernyedés.

A fenti jelenségekkel majd szaktárgyi tanulmányaink során találkozunk.

1.4.2 A hőmérsékletek hatása a szilárdsági viselkedésre

A hőmérséklet változás, mint azt már fizikában tanultuk, alakváltozásokat eredményez. Ha ezek nem alakulhatnak ki szabadon, vagyis az alakváltozás gátolt, az anyagban feszültség keletkezik.

A hőmérséklet-változás befolyásolhatja az anyag szilárdsági tulajdonságait. Például az acél szilárdsága a hőmérséklet növelésével csökken. Nagyon alacsony hőmérsékleten az acél rideggé válik.

1.4.3 A fizikai-kémiai átalakulások hatása a szilárdságra

Egyes építőanyagokban bizonyos idő alatt fizikai, kémiai átalakulások mennek végbe. A bauxit beton például egy bizonyos idő eltelte után tönkremegy, alkalmatlan lesz a teherviselésre.

1.4.4 A teher ismétlődésének hatása az anyagra

A teher nagyszámu ismétlése következtében az anyag szerkezete átalakul és rideg törés következik be. Ezt a jelenséget nevezzük fáradásnak.

Ezeknek a jelenségeknek vázlatos bemutatása is jelzi, hogy az anyag szilárdsági viselkedése igen bonyolult. A fenti jelenségeket a szilárdságtani tanulmányainkban nem tárgyaljuk, de a szaktárgyakban még részletesen vizsgatérünk rájuk.

1. AZ ELEMI SZILÁRDSÁGTAN

E fejezetben homogén és izotróp anyagból készült egyenes tengelyű prizmatikus rudakkal foglalkozunk.

Valamely testről akkor mondjuk, hogy egyenes tengelyű prizmatikus rud, ha azt geometriailag egy tetszőleges síkidomnak a súlypontján átmenő, a síkidom síkjára merőleges egyenes mentén történő elmozdításával írjuk le, a síkidom elfordítása nélkül. A szóban levő egyenest a rud geometriai tengelyének, a síkidomot pedig a rud keresztmetszetének nevezzük.

A vizsgált rud mindig egy tartó, vagy a tartónak egy kiragadott, külön vizsgálható része, amelyben a külső terhek vagy hatások igénybevételeket (normálerőt, nyíróerőt és hajlítást) ébresztenek. Feladatunk a különböző igénybevételek hatására a keresztmetszetekben keletkező feszültségek meghatározása és a tartók alakváltozásának vizsgálata lesz.

Az igénybevételek számításával már a Mechanika I. c. jegyzetben megismerkedtünk. Az igénybevételek szempontjából a rud keresztmetszetének alakja és nagysága közömbös, csak a keresztmetszet súlypontjának helyét kell ismernünk. (A súlypont számításával a 2.1.1 pontban foglalkozunk.) A különböző igénybevételekből keletkező feszültségek számításához szükségünk lesz bizonyos keresztmetszeti jellemzők ismeretére. A következőkben ezek számítási módjával ismerkedünk meg.

2.1 A keresztmetszeti síkidomok geometriai jellemzői

Az adott geometriájú síkidomok egyik jellemzője a terület. A mechanikában a síkidomok területét A -val jelöljük, használatos mértékegységei: mm^2 (cm^2) és m^2 .

A síkidomok további jellemzői, a súlypont és a másodrendű nyomatékok szintén a geometriai adatokból számíthatók.

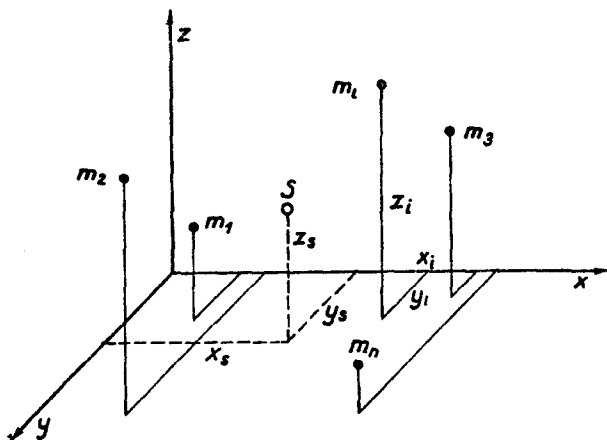
2.1.1 A súlypont

A súlypont a súlyerővel kapcsolatos fogalom. Régi megfigyelés szerint a testeknek van egy kísérletileg is meghatározható pontja, amelyben felfüggesztve vagy alátámasztva a test bármely helyzetben nyugalomban marad.

A súlypont a párhuzamos térbeli erőrendszerrel kapcsolatosan is definiálható. A súlyerő ugyanis térbeli párhuzamos megoszló erőrendszer, amely a test minden pontjában hat, a súlypont pedig ezen erőrendszer eredőjének támadáspontja. A súlypont, mint a súlyerők eredőjének támadáspontja, a térbeli párhuzamos erőrendszerrel tanult módszerek alkalmazásával határozható meg.

A súlypont fogalma általános értelmezést is kaphat; nemcsak testek, hanem síkidomok, görbe felületek, vonaldarabok, és nemcsak folytonos alakzatok, hanem pontrendszerek súlypontja is értelmezhető.

A súlypont ilyen általános értelmezését egy (m) pontrendszerre mutatjuk meg (2.1 ábra). Az m_i az i -edik pont ugynevezett jellemző mennyisége, amely lehet különféle fogalom: az eredeti értelmezésben tömeg, de lehet térfogat, terület, hosszúság, darabszám vagy bármilyen skalár-mennyiség.



2.1 ábra

Most gondoljunk arra, hogy az m_i az i -edik pont tömegét jelenti, így ebben a pontban egy $G_i = m_i \cdot g$ függőleges súlyerő-működik, és határozzuk meg az összes $(i = 1 \dots n)$ pontban működő erő eredőjét. Az eredő erő hatásvonalára átmeny a pontrendszer súlypontján. Azokat az egye-

neseket, amelyek a súlyponton átmennek, súlyvonalaknak nevezzük, tehát most a függőleges erők eredőjének hatásvonala is súlyvonal.

A súlypont x_S és y_S koordinátáit az y illetve az x tengelyre felírt nyomatéki egyenletek segítségével határozhatjuk meg. A súlypont z_S koordinátáját úgy számíthatjuk ki, hogy a G_i erőket vízszintesnek (pl. x irányúnak) képzeljük, és nyomatéki egyenletet írunk fel a képzelt irányra merőleges vízszintes (y) tengelyre.

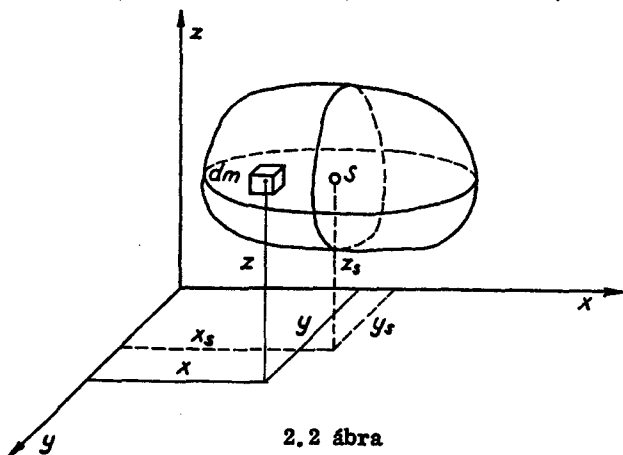
$$x_S = \frac{\sum G_i \cdot x_i}{\sum G_i} = \frac{\sum m_i \cdot g \cdot x_i}{\sum m_i \cdot g} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i};$$

$$y_S = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i}$$

$$z_S = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{\sum m_i}$$

Hasonlóképpen definiálható a súlypont akkor is, ha nem különálló pontokról, hanem folytonos alakzatról van szó (2.2 ábra). Ilyenkor természetesen szummázás helyett integrálást kell alkalmaznunk.

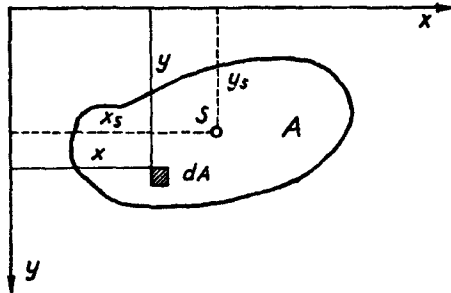
$$x_S = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm}, \quad y_S = \frac{\int y \cdot dm}{\int dm}, \quad z_S = \frac{\int z \cdot dm}{\int dm}$$



2.2 ábra

2.1.1.1 A síkidomok súlypontja

Az általános elveket a továbbiakban a síkidomok súlypontjának meghatározására alkalmazzuk. A síkidomok súlypontjának számításakor az x, y koordinátájú pont jellemző mennyisége a dA terület (2.3 ábra).



2.3 ábra

A súlypont koordinátáit az

$$x_S = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA}, \quad y_S = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}$$

képletekkel számíthatjuk ki.

A képletek számlálójában szereplő határozott, integrált a síkidom y , illetve x tengelyre vonatkozó statikai nyomatékoknak nevezzük.

$$S_y = \int x \cdot dA, \quad S_x = \int y \cdot dA$$

A súlypont koordinátái tehát

$$x_S = \frac{S_y}{A}, \quad y_S = \frac{S_x}{A}$$

Fejezzük ki e képletekből a statikai nyomatékokat:

$$S_x = y_S \cdot A, \quad S_y = x_S \cdot A.$$

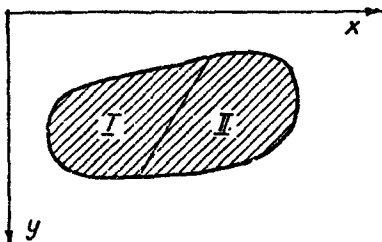
Látjuk tehát, hogy a súlypont ismeretében a statikai nyomatékot könnyen ki tudjuk számítani.

Összetett síkidomok esetén a statikai nyomaték számítását nagyon megkönnyíti két nevezetes tétel: a részekre osztás tétele és a kiegészítés tétele.

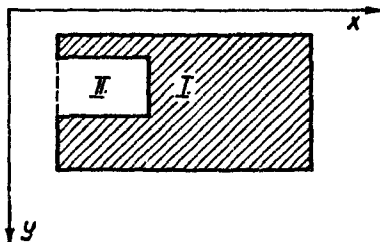
A részekre osztás tétele azt fejezi ki, hogy a síkidomot tetszőleges részekre oszthatjuk, és a részek statikus nyomatékának összege megadja az egész síkidom statikai nyomatékát (2.4 ábra).

$$S_x = S_{Ix} + S_{IIx}$$

Ez abból következik, hogy ugyanazt az integrált kell mindkét tartományra kiszámítani, és ezek összege az egész tartományra vonatkozó integrált adja.



2.4 ábra



2.5 ábra

Hasonló gondolatmenettel látható be a kiegészítés tételének helyessége is. A 2.5 ábrán látható idomot érdemes a II. jelű résszel az I. jelű téglalappá kiegészíteni, és akkor a statikai nyomaték az

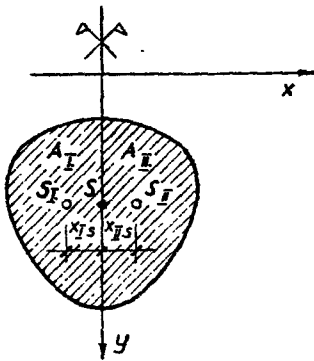
$$S_x = S_{Ix} - S_{IIx}$$

képlet szerint számítható. Tehát a kiegészített rész statikai nyomatékából le kell vonni a kiegészítő rész statikai nyomatékát.

A tételeket a súlypontszámításnál igen előnyösen hasznosíthatjuk.

Szimmetrikus síkidomok esetében a súlypontszámítás lényegesen egyszerűbbé válik. A 2.6 ábrán látható síkidom tengelyszimmetrikus, szimmetriatengelye az y tengely. A szimmetriatengely mentén vágjuk ketté a síkidomot, és a részekre osztás tételének alkalmazásával írjuk fel a statikai nyomatékot az y tengelyre. A szimmetria miatt

$$A_I = A_{II} \quad \text{és} \quad x_{IS} = -x_{IIS} \quad \text{tehát}$$

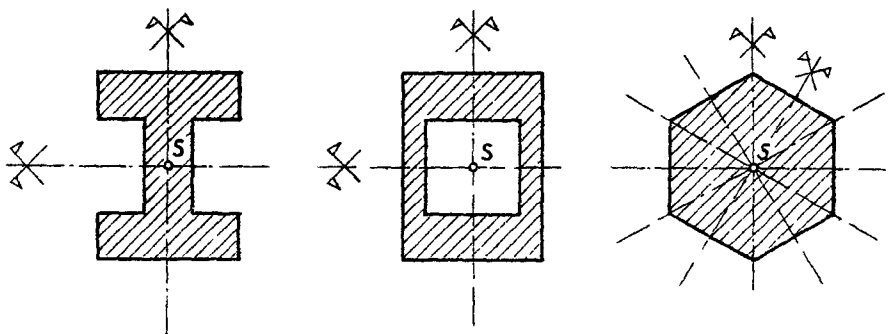


2.6 ábra

$$S_y = S_{Iy} + S_{IIy} = A_I \cdot x_{IS} - A_{II} \cdot x_{IS} = 0.$$

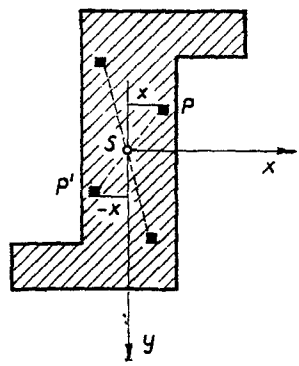
A szimmetriatengelyre tehát a statikai nyomaték zérus, ami egyben azt is jelenti, hogy a súlypont az y tengelyen van, azaz a szimmetriatengely súlyvonal.

Az előbbiekből következik, hogy ha a síkidomnak kettő vagy több szimmetriatengelye van, akkor a szimmetriatengelyek metszéspontja a súlypont. Ilyen esetekben a súlypontszámítást mellőzhetjük (2.7 ábra).



2.7 ábra

Pontszimmetrikus síkidomot látunk a 2.8 ábrán. A síkidom akkor pontszimmetrikus, ha minden pontjának van szimmetrikus párja, mégpedig úgy, hogy a pontpárok a szimmetriaponttól egyenlő távolságra vannak, és a pontpárokat összekötő egyenes átmegy az szimmetriaponton. Az előbbi megállapítások érvényesek a két merőleges szimmetriatengellyel rendelkező síkidomra is, ezeknél a szimmetriatengelyek metszéspontja a szimmetriapont. Azokat a síkidomokat, amelyeknek van szimmetriapontjuk, de nincs szimmetriatengelyük, antimétrikus síkidomoknak nevezzük.



2.8 ábra

A 2.8 ábrán látható síkidom tehát antimétrikus. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert a szimmetriapontban. Könnyen beláthatjuk, hogy a statikai nyomaték mindkét koordi-

nátengelyre zérus, mert a pontpárok koordinátái azonos nagyságúak, de ellentétes előjelűek. Tehát antimetrikus síkidomok esetén is a szimmetriapont a súlypont.

2.1.1.2 Példák a síkidomok súlypontjának meghatározására

Határozzuk meg az r sugaru félkör súlypontjának helyét (2.9 ábra). Az y tengely szimmetriatengely, a súlypontnak ezen rajta kell lennie, így csak az x_s koordinátát kell kiszámítani.

A sraffozással jelölt elemi körcikk területe:

$$dA = \frac{r \cdot ds}{2}$$

Az ívelem hossza $ds = r \cdot d\varphi$, ezt behelyettesítve:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

Az elemi síkidom súlypontja a sugár kétharmadában van (mivel d_s végtelen kicsi). Ezt ismerve az y tengelyre vonatkozó statikai nyomaték számításához az elemi síkidom területét szorozzuk súlypontjának az y tengelytől mért $k = 2/3 x$ távolságról:

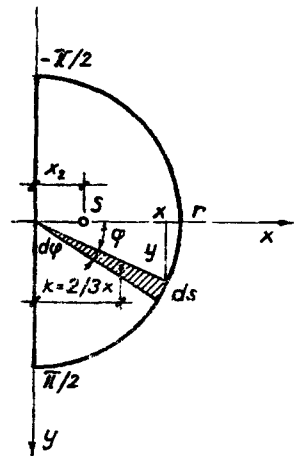
$$dS_y = dA \cdot \frac{2}{3} x$$

Mivel $x = r \cdot \cos \varphi$, behelyettesítve dA kifejezést és integrálva

$$S_y = \frac{1}{2} r^3 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{r^3}{3} \left[\sin \varphi \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2}{3} r^3$$

A félkör területe:

$$A = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dA = \frac{r^2}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\varphi = \frac{r^2}{2} \left[\varphi \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{r^2 \pi}{2}$$



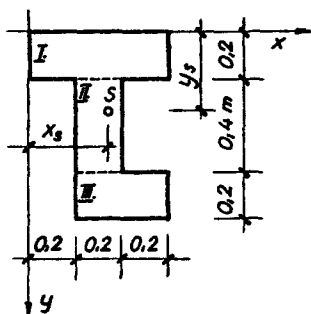
2.9 ábra

A súlypont koordinátája

$$x_S = \frac{S}{A} = \frac{4r}{3\pi}.$$

További példaként számítsuk ki a 2.10 ábrán látható síkidom súlypontjának koordinátáit. A síkidom területe:

$$A = 0,6 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,28 \text{ m}^2.$$



2.10 ábra

Az x és y tengelyre vonatkozó statikai nyomatékokat a részekre osztás tételének alkalmazásával írhatjuk fel:

$$S_x = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,7 = 0,100 \text{ m}^3$$

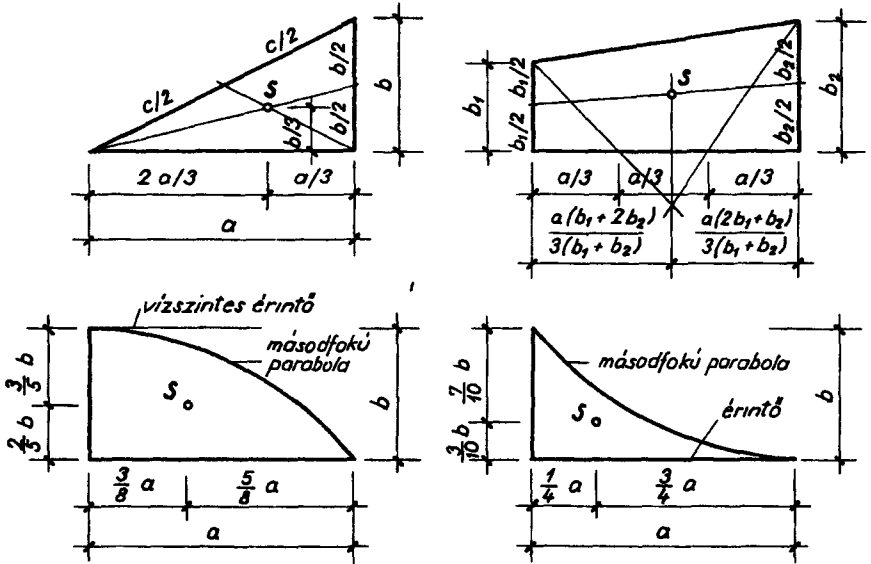
$$S_y = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,092 \text{ m}^3.$$

A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{S_x}{A} = \frac{0,092}{0,28} = 0,328 \text{ m},$$

$$y_S = \frac{S_y}{A} = \frac{0,100}{0,28} = 0,375 \text{ m}.$$

A 2.11 ábrán néhány jellegzetes síkidom súlypontját levezetés nélkül közöljük. Az itt megadott eredmények igen jól használhatók összetett síkidom súlypontjának számításánál. Az ábrán a háromszög és a trapéz súlypontjának egyik ismert szerkesztési módját is megmutatjuk. A háromszögnél az oldalfelőző pontokat a szemben levő csúcsokkal összekötő egyenesek súlyvonalak, a súlypont pedig a súlyvonalak metszéspontja. A trapéz esetében az egyik nem párhuzamos oldalt harmadoljuk, és e pontokat összekötjük a szemben levő sarokpontokkal. Az összekötő egyenesek metszéspontján átmenő és a párhuzamos oldalakkal párhuzamos egyenes súlyvonal. Egy másik súlyvonal a két párhuzamos oldal felezőpontját összekötő egyenes. A két súlyvonal metszéspontjában van a súlypont.



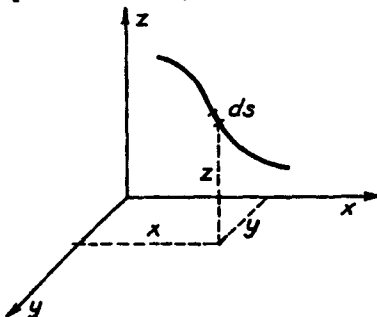
2.11 ábra

2.1.1.3 A vonaldarabok súlypontja

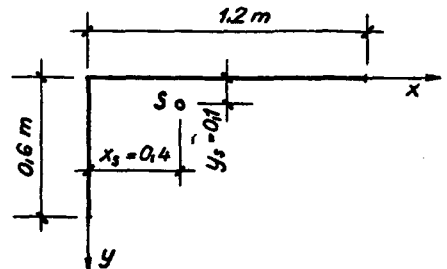
Az általános módszernek megfelelően történik a vonaldarabok súlypontjának meghatározása is. A jellemző mennyiség most az s ívhossz lesz, így egy térbeli vonaldarab (2.12 ábra) súlypontjának a koordinátái az

$$x_S = \frac{\int x \cdot ds}{s}; \quad y_S = \frac{\int y \cdot ds}{s}; \quad z_S = \frac{\int z \cdot ds}{s}$$

képletek szerint számíthatók.



2.12 ábra



2.13 ábra

Példaként egy síkbeli vonaldarab súlypontját keressük meg (2.13 ábra). A vonaldarab hossza:

$$s = 0,6 + 1,2 = 1,8 \text{ m.}$$

A statikai nyomatékok:

$$S_x = 0,6 \cdot 0,3 + 1,2 \cdot 0 = 0,18 \text{ m}^2$$

$$S_y = 0,6 \cdot 0 + 1,2 \cdot 0,6 = 0,72 \text{ m}^2$$

A súlypont koordinátái;

$$x_S = \frac{S_y}{s} = \frac{0,72}{1,8} = 0,40 \text{ m,}$$

$$y_S = \frac{S_x}{s} = \frac{0,18}{1,8} = 0,10 \text{ m.}$$

2.1.2 A síkidomok másodrendű nyomatékai

A síkidomok másodrendű nyomatékai a tehetetlenségi és a centrifugális nyomatékok. A későbbiekben tárgyalandó feszültségszámítás! és méretezési feladatok csak a másodrendű nyomatékok számítás módjának ismeretében oldhatók meg.

2.1.2.1 A tehetetlenségi nyomatékok

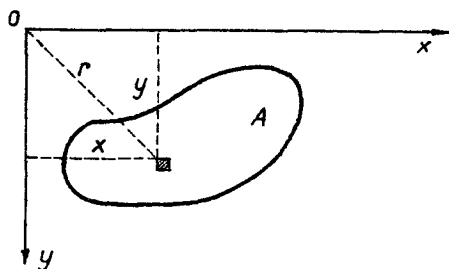
A síkidom x illetve y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékán az

$$J_x = \int_{(A)} y^2 dA \quad \text{és} \quad J_y = \int_{(A)} x^2 dA$$

határozott integrálokat értjük (2.14 ábra). A tehetetlenségi nyomatékot idegen szóval inercianyomatéknak is nevezik.

A síkidom 0 pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka - idegen kifejezéssel poláris inercianyomatéka - szintén határozott integrálként számítható:

$$J_o = \int_{(A)} r^2 dA.$$



2.14 ábra

Az inercianyomaték csak pozitív mennyiség lehet, mert a dA terület pozitív, és a koordináták négyzete is csak pozitív lehet. Az inercianyomaték mértékegységei a hosszúságegységek hatványai. E mértékegységek közötti összefüggések a következők:

$$1 \text{ m}^4 = 10^8 \text{ cm}^4 ; \quad 1 \text{ cm}^4 = 10^4 \text{ mm}^4 .$$

Az inercianyomatékok számítását tételek könnyítik meg.

Tétel: két egymásra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték összege egyenlő a tengelyek metszéspontjára vonatkozó poláris inercianyomatékkal.

A tétel bizonyítása a 2.14 ábra alapján történik. Pythagoras tétele szerint: $x^2 + y^2 = r^2$. Helyettesítsük r^2 kifejezését a poláris inercianyomaték képletébe:

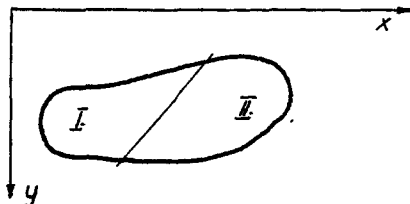
$$J_o = \int (A) r^2 dA = \int (A) (x^2 + y^2) dA = \int (A) x^2 dA + \int (A) y^2 dA .$$

A végső integrálok a tengelyekre vonatkozó inercianyomatékokat adják, így valóban:

$$J_o = J_x + J_y .$$

Ha a koordináta-rendszert az O pont körül elforgatnánk, r értéke nem változna meg. A poláris inercianyomaték tehát a tengelyek irányától független.

A részekre osztás tétele szerint valamely síkidom tehetetlenségi nyomatéka részekre osztással úgy nyerhető, hogy az egyes részek tehetetlenségi nyomatékát összeadjuk (2.15. ábra):

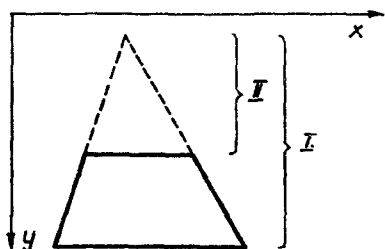


2.15 ábra

$$J_x = J_{xI} + J_{xII} .$$

A tétel helyességének belátásához elegendő arra hivatkozni, hogy az integrálást az I. és II. jelű tartományra külön-külön végrehajtjuk, akkor a két integrál összege a teljes tartományra vonatkozó integrált adja.

A kiegészítés tétele az előző tételből következik (2.16 ábra). Ha ugyanis valamely A területű síkidomot egy A_{II} területű síkidom hozzá-



2.16 ábra

tételével egy A_I területű síkidom-
má egészítettük ki, akkor az eredeti
síkidom tehetetlenségi nyomatéka:

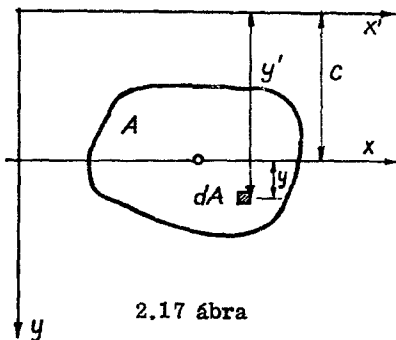
$$J_x = J_{xI} - J_{xII}.$$

Tehát az eredeti síkidom tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a kiegészített és a kiegészítő síkidom tehetetlenségi nyomatékának különbségével.

Tehát az eredeti síkidom tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a kiegészített és a kiegészítő síkidom tehetetlenségi nyomatékának különbségével.

Steiner tétele az egymással párhuzamos tengelyekre vonatkozó inercianyomatékok között teremt összefüggést. Tegyük fel, hogy a 2.17 ábrán feltüntetett síkidomnak már ismerjük a súlypontján átmenő x tengelyre vonatkozó inercianyomatékát. Határozzuk meg az x tengelytől adott c távolságban levő párhuzamos x' tengelyre vonatkozó $J_{x'}$ inercianyomatékot.

Az x' , y' koordináta-rendszerben a dA területű elemi rész ordinátája: $y' = y+c$. Így az x' tengelyre vonatkozó inercianyomaték a következő módon írható fel:



2.17 ábra

$$\begin{aligned} J_{x'} &= \int (A) y'^2 dA = \int (A) (y+c)^2 dA = \int (A) y^2 dA + 2c \int (A) y dA + c^2 \int (A) dA = \\ &= J_x + 2c S_x + c^2 A. \end{aligned}$$

Mivel abból indultunk ki, hogy az x tengely súlyponti tengely, $S_x = 0$, ezért a középső tag zérus. Tehát:

$$J_{x'} = J_x + c^2 A. \quad \dots (1)$$

A fenti képletben a $c^2 A$ tagot Steiner-tagnak szokás nevezni. A képletet elemezve megállapíthatjuk, hogy az egymással párhuzamos tengelyre felírt inercianyomatékok közül mindig a súlyponti tengelyre vonatkozó a legkisebb, mert súlyponti tengely esetében a Steiner-tag zérus.

A Steiner-tétel alkalmas arra is, hogy a síkidom nem súlypont x' tengelyére vonatkozó $J_{x'}$ inercianyomatékának ismeretében kiszámítsuk a súlyponti x tengelyre vonatkozó J_x inercianyomatékot. Fejezzük ki az (1) képletből J_x -et:

$$J_x = J_{x'} - c^2 A.$$

A súlyponti tengelyre való áttérésnél - mint láttuk - a Steiner-tag előjele negatív.

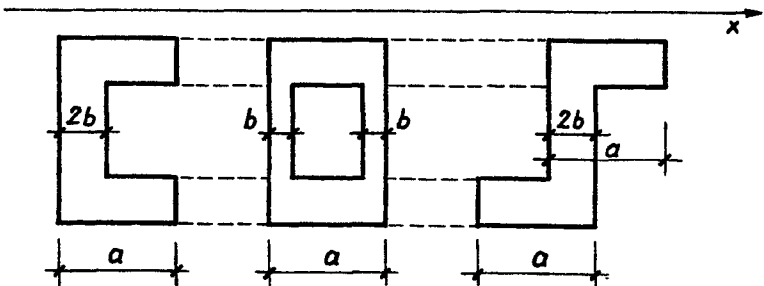
Az elmozdítási tétel szerint valamely síkidomnak egy kijelölt tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka nem változik, ha a síkidom egyes részeit a tengellyel párhuzamosan tetszőleges módra eltoljuk.

A tétel helyessége a tengelyre vonatkozó inercianyomaték definíciós képletéből következik. Az

$$J_x = \int_{(A)} y^2 dA$$

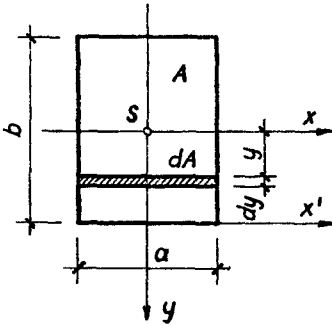
képletben az x változó nem szerepel, ami azt jelenti, hogy az x tengelyre vonatkozó inercianyomaték szempontjából a dA felületelem x koordinátája közömbös.

A fenti tételt szemléltetik a 2.18 ábrán bemutatott síkidomok. Mindhárom síkidomnak az x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka azonos.



2.18 ábra

2.1.2.1.1 A tehetetlenségi nyomaték meghatározása számítással



2.19 ábra

Az alábbiakban a leggyakoribb síkido-mok inercianyomatékainak kiszámítására alkalmas képleteket fogjuk levezetni.

Vegyük először a derékszögű négyszöget, és számítsuk ki az oldallal párhuzamos súlyponti x tengelyre a tehetetlenségi nyomatékot (2.19 ábra). Az elemi síkidomrészt célszerű az x tengellyel párhuzamos, $dA = a \cdot dy$ területű sávként felvenni. Az elemien keskeny sáv minden pontja y távolságban van az x tengelytől. Helyettesítsük dA kifejezést az J_x definíciós képletébe:

$$J_x = \int (A) y^2 dA = \int_{-b/2}^{+b/2} a y^2 dy = a \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dy$$

Ez y függvénye, ahol y $-b/2$ -től $+b/2$ -ig változik. Végezzük el az integrálást:

$$J_x = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{+b/2} = \frac{a}{3} \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{a b^3}{12}.$$

Ugyanílyen módszerrel vezethető le az y tengelyre vonatkozó inercianyomaték is.

$$J_y = \frac{a^3 b}{12}.$$

A súlyponti x tengelyre vonatkozó inercianyomaték ismeretében - a Steiner-tétel alkalmazásával - kiszámíthatjuk a téglalap egyik oldalán átmenő x' tengelyre vonatkozó inercianyomatékot:

$$J_{x'} = J_x + x^2 A = \frac{ab^3}{12} + \left(\frac{b}{2} \right)^2 ab = a \cdot b^3 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right),$$

$$J_{x'} = \frac{ab^3}{3}.$$

Vezessük most le a háromszögre vonatkozó inerciaképleteket. A 2.20 ábrán a háromszög csucsan vettük föl az a alappal párhuzamos x' koordinátatengelyt, először erre számítjuk ki az inercianyomatékokat. A dA elemi síkidomrészt itt is a tengellyel párhuzamos sávként vesszük fel. Az elemi sáv szélessége dy , hosszúsága pedig a háromszög csucsatól mért y távolsággal arányos:

$$k = \frac{a}{b} y.$$

Az elemi sáv területe:

$$dA = k \cdot dy = \frac{a}{b} y \cdot dy.$$

2.20 ábra

Ezt helyettesítsük be a definíciós képletbe, és számítsuk ki az integrált az $y = 0 \dots b$ határok között;

$$J_{x'} = \int_0^b y^2 dA = \int_0^b \frac{a}{b} y^3 dy = \frac{a}{b} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^b = \frac{ab^4}{4b},$$

$$J_{x'} = \frac{ab^3}{4}$$

A Steiner-tétel alkalmazásával kiszámíthatjuk a súlyponton átmenő alappal párhuzamos x tengelyre vonatkozó inercianyomatékokat.

$$J_x = J_{x'} - c_1^2 A = \frac{ab^3}{4} - \left(\frac{2}{3} b \right)^2 \cdot \frac{ab}{2} = \frac{ab^3}{4} - \frac{2ab^3}{9},$$

innen

$$J_x = \frac{ab^3}{36}.$$

Most számítsuk ki a háromszög alapján átmenő x'' tengelyre a tehetetlenségi nyomatékokat. Felhívjuk a figyelmet arra a körülményre, hogy az x' tengelyről nem térhetünk át az x'' tengelyre, mert a Steiner-tétel csak akkor érvényes, ha a két tengely közül az egyik súlyvonal. Tehát csak J_x képletéből indulhatunk ki.

$$J_{x''} = J_x + c_2^2 A = \frac{ab^3}{36} + \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{ab}{2} = \frac{ab^3}{36} + \frac{ab^3}{18},$$

ahonnan

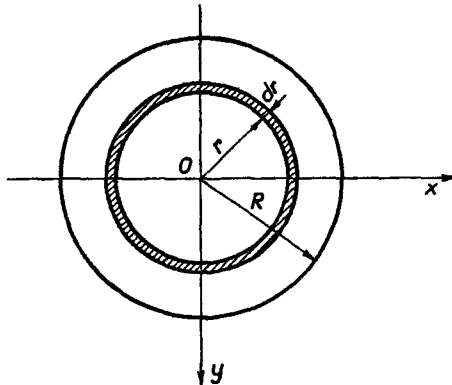
$$J_{x''} = \frac{ab^3}{12}.$$

Ezek után vezessük le a kör tehetetlenségi nyomatékainak képletét (2.21 ábra). Célszerű először a középpontra vonatkozó poláris inercianyomatékok kiszámítani, mert ehhez az elemi síkidomrészt dr vastagságú körgyűrűnek vehetjük, amelynek minden pontja a középponttól r távolságra van. Mivel dr végtelen kicsi, az elemi síkidom területe $dA = 2r\pi dr$ formában írható fel. Helyettesítsük be dr kifejezését a poláris inercianyomaték definíciós képletébe.

$$J_o = \int_{(A)} r^2 dA = \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R,$$

ahonnan

$$J_o = \frac{\pi R^4}{2}.$$



2.21 ábra

Az egymásra merőleges tengelyekre vonatkozó inercianyomaték az $J_o = J_x + J_y$ összefüggésből nyerhető. A körszimmetria miatt $J_x = J_y$,

ezért $J_x = J_0/2$. Behelyettesítés után kapjuk a körnek bármely átmérőjére érvényes J_0 inerciaképletet:

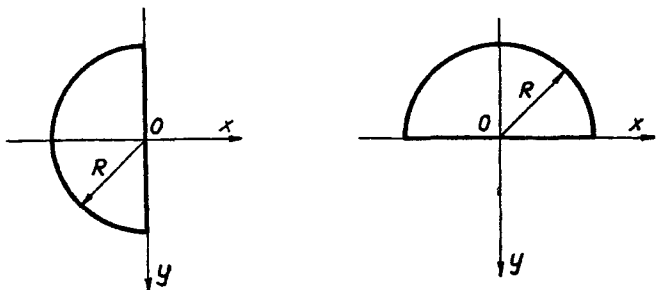
$$J_x = \frac{\pi R^4}{4}.$$

A részekre osztás tételére és a szimmetriára hivatkozva könnyen beláthatjuk, hogy a 2.22 ábra mindkét félkörére érvényes az

$$J_x = \frac{\pi R^4}{8}$$

képlet.

Példaként számítsuk ki a 2.23 ábrán látható síkdomb súlyponti x és y tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokot. Első lépésként határozzuk meg a síkdomb súlypontjának helyét az x' , y' koordináta-rendszerben.



2.22 ábra

A statikai nyomatékok:

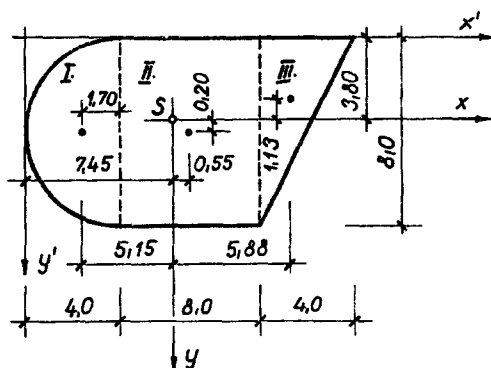
$$S_{x'} = 4 \cdot 25,13 + 4 \cdot 64 + \frac{3}{8} \cdot 16 = 399,20 \text{ cm}^3,$$

$$S_{y'} = \left(4 - \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot \pi}\right) \cdot 25,13 + 8 \cdot 64 + \left(12 + \frac{4}{3}\right) \cdot 16 = 783,19 \text{ cm}^3.$$

A súlypont koordinátái:

$$x'_S = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{783,19}{105,13} = 7,45 \text{ cm},$$

$$y'_S = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{399,20}{104,13} = 3,80 \text{ cm}$$



2.23 ábra

Ezek után a súlyponti tengelyekre vonatkozó inercianyomatékok úgy írhatjuk fel, hogy először kiszámítjuk a síkidomrész saját súlypontjára vonatkozó inercianyomatékokot, majd a Steiner-tag hozzáadásával áttérünk az x illetve az y tengelyre.

$$J_x = \frac{4^4 \cdot \pi}{8} + 0,20^2 \cdot 25,13 + \frac{8 \cdot 8^3}{12} + 0,20^2 \cdot 64 + \frac{4 \cdot 8^3}{36} + 1,13^2 \cdot 16 = 522,75 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = \frac{4^4 \cdot \pi}{8} + (-1,70^2 + 5,15^2) \cdot 25,13 + \frac{8 \cdot 8^3}{12} + 0,55^2 \cdot 64 + \frac{8 \cdot 4^3}{36} + 5,88^2 \cdot 16 = 1622,51 \text{ cm}^4.$$

Figyeljünk meg, hogy a félkör y tengelyre vonatkozó inercianyomatékának felírásával a Steiner-taggal először a félkör saját súlyponti tengelyére térünk át, majd egy további lépéssel jutottunk az y tengelyre.

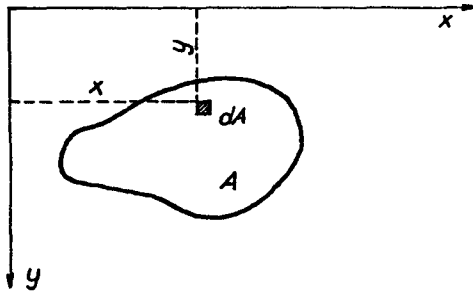
2.1.2.2 A centrifugális nyomaték

A síkidomok centrifugális nyomatékát mindig két egymásra merőleges tengelyre vonatkoztatjuk. Valamely síkidomnak az x és y tengelyekre vonatkozó centrifugális nyomatékán a

$$C_{xy} = \int xy \, dA \quad (A)$$

mennyiséget értjük (2.24 ábra). A centrifugális nyomaték dimenziója megegyezik a tehetetlenségi nyomatékkal (mm^4 , cm^4 , m^4), azonban jellegzetes különbség is mutatkozik: míg az J_x , J_y , J_o tehetetlenségi nyomatékok mindig pozitív mennyiségek, addig a centrifugális nyomaték lehet pozitív és negatív is:

$$C_{xy} \gtrless 0.$$



2.24 ábra

A tehetetlenségi nyomatéknál tanultakkal megegyezően a centrifugális nyomatékokra is érvényes a részekre osztás és a kiegészítés tétele. E tételeket az alábbiak szerint szimbollizáljuk:

$$C_{xy} = C_{xyI} + C_{xyII}$$

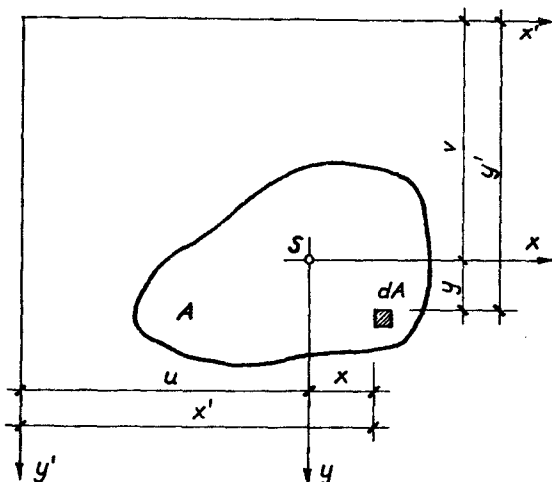
$$C_{xy} = C_{xyI} - C_{xyII}$$

E tételek helyességét a tehetetlenségi nyomatéknál megismert gondolatmenettel láthatjuk be. (Lásd: 2.15 és 2.16 ábrákat.)

A centrifugális nyomatékokra is levezethető a Steiner-tétel. A centrifugális nyomatékokra vonatkozó Steiner-tétel a síkdiom S súlypontján átmenő x, y koordináta-rendszerre és az előbbivel párhuzamos helyzetű x', y' koordináta-rendszerre vonatkozó centrifugális nyomaték között teremt kapcsolatot (2.25 ábra).

A tétel levezetéséhez szükségünk lesz a koordináta-transzformáció összefüggéseire:

$$x' = x + u, \quad y' = y + v.$$



2.25 ábra

Írjuk fel a definíciós képletet, és helyettesítsük be a transzformációs összefüggéseket:

$$C_{x'y'} = \int_{(A)} x'y' dA = \int_{(A)} (x+u)(y+v) dA.$$

Végezzük el a beszorzást és az állandók kiemelésével jelöljük ki tagonként az integrálást:

$$C_{x'y'} = \int_{(A)} xy dA + v \cdot \int_{(A)} xdA + u \cdot \int_{(A)} ydA + u \cdot v \cdot \int_{(A)} dA.$$

Ebben az egyenletben az

$$\int_{(A)} xdA = S_y \quad \text{és} \quad \int_{(A)} ydA = S_x$$

statikai nyomatékokat jelentenek, amelyek most zérussal egyenlők, mivel az x és y tengelyek átmennek a súlyponton. Az egyenletben másik két integrál az x, y tengelypárra vonatkozó centrifugális nyomatékokat, illetve a síkidom területét jelenti:

$$\int_{(A)} xy dA = C_{xy}; \quad \int_{(A)} dA = A.$$

Igy az x' és y' tengelyekre vonatkozó centrifugális nyomaték a következő alakban írható:

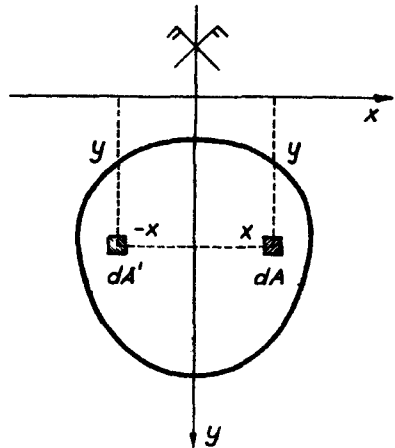
$$C_{x'y'} = C_{xy} + u \cdot v \cdot A.$$

A szimmetria-tétel szerint szimmetrikus síkidomok centrifugális nyomatéka olyan tengelykeresztre, amelynek egyik tengelye éppen a szimmetriatengely, zérussal egyenlő:

$$C_{xy} = 0.$$

A tétel helyessége a 2.26 ábra alapján látható be. Minden dA síkidomrésznek van egy dA' szimmetrikus párja, ezeknek egyik koordinátája megegyezik, a másik pedig csak előjelben eltérő, így a kételemi felület centrifugális nyomatékának összege zérus: $xydA - xydA' = 0$. Mivel az egész síkidom dA , dA' szimmetrikus felületelemekből áll, az egész síkidom centrifugális nyomatéka zérus.

A dikidomok centrifugális nyomatéka általában a definíciós képlet felhasználásával integrálással állapítható meg. Sok esetben azonban az előző tételek segítségével egyszerűbben oldhatunk meg feladatokat. Erre mutatunk példát az alábbiakban.

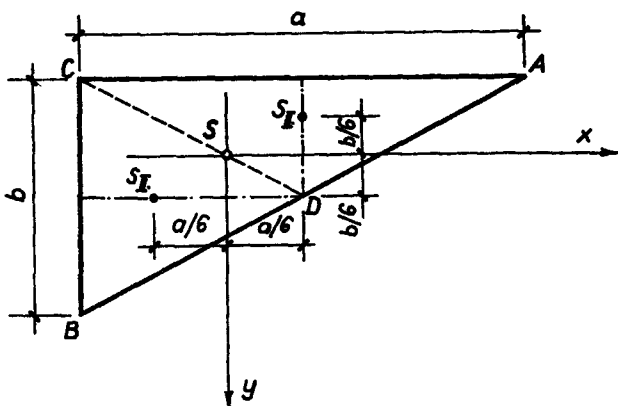


2.26 ábra

Határozzuk meg a 2.27 ábrán látható derékszögű háromszög centrifugális nyomatékát a súlypontján átmenő a és b oldalakkal párhuzamos x, y tengelyekre. A részekre osztás tételét alkalmazva bontsuk fel a háromszöget az átfogó felezőpontjába futó CD egyenessel két részre. Így két egyenlőszáru háromszöget nyerünk, amelyek szimmetrikus síkidomok. Ezek területe:

$$A_I = \frac{ab}{4} \quad , \quad A_{II} = \frac{ab}{4}.$$

A két egyenlőszáru háromszögnek a saját súlypontján átmenő a és b oldalakkal párhuzamos tengelyekre a centrifugális nyomatéka zérus, mivel a tengelyek egyike mindkét háromszög esetében szimmetriatengely. A részsúlypontok koordinátáinak ismeretében az x, y tengelyekre vonatkozó centrifugális nyomatékokat a Steiner-tétel alkalmazásával számíthatjuk.



2.27 ábra

$$C_{xy} = -\frac{a}{6} \cdot \frac{b}{6} \cdot \frac{ab}{4} - \frac{a}{6} \cdot \frac{b}{6} \cdot \frac{ab}{4} = -\frac{a^2 b^2}{72}$$

Ez a centrifugális nyomaték negatív, viszont könnyen belátható, hogy ha a háromszöget a súlypontja körül 90° -kal elfordítanánk, akkor az előbb kiszámított centrifugális nyomatéknak csak az előjele változna meg.

2.1.2.3 A közös metszéspontu egyenesekre vonatkozó másodrendű nyomatékok összefüggésel

Ebben a fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy hogyan változnak a másodrendű nyomatékok, ha a tengelyt valamely pontja körül elforgatjuk. Korábban a Steiner-tétellel kapcsolatban a tengelyt önmagával párhuzamosan toltuk el, most pedig olyan koordináta-transzformációt alkalmazunk, amelynek során az x, y koordináta-rendszert kezdőpontja körül szöggel elforgatjuk (2.28 ábra).

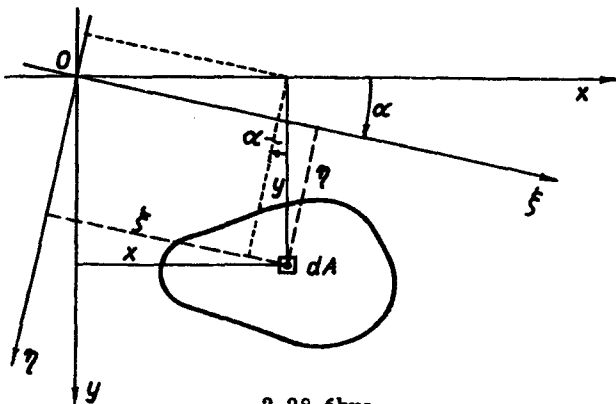
Fejezzük ki a dA felületelem ξ és η koordinátáit az eredeti x, y koordinátákkal:

$$\xi = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha,$$

$$\eta = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha.$$

A definíciós képlet alapján írjuk fel az inercianyomatékokat a ξ tengelyre, és helyettesítsük be az η koordináta transzformációs képletét:

$$J_{\xi} = \int_{(A)} \eta^2 dA = \int_{(A)} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 dA.$$



2.28 ábra

Végezzük el a négyzetreemelést és jelöljük ki tagonként az integrálást. A trigonometrikus tényezők adott α szögénél konstansok, ezért az integráljelek elé kiemelhetők.

$$J_{\xi} = \sin^2 \alpha \int x^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int x \cdot y \cdot dA + \cos^2 \alpha \int y^2 dA.$$

A visszamaradt integrálok rendre J_y , C_{xy} és J_x kifejezései, így az eredmény:

$$J_{\xi} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2 C_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ehhez hasonló módon vezethető le az

$$J_{\eta} = \int \xi^2 dA \quad \text{és} \quad C_{\xi\eta} = \int \xi \eta dA$$

definíciós képletek való behelyettesítéssel az alábbi két képlet is:

$$J_{\eta} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + 2 C_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$C_{\xi\eta} = (J_x - J_y) \sin \alpha \cos \alpha + C_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Ezzel megkaptuk a keresett összefüggéseket, amelyeken még trigonometriai átalakításokat végzünk. Felhasználjuk az alábbi összefüggéseket:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Ezek segítségével a fentiekben bevezetett képletek az alábbi alakra hozhatók:

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - C_{xy} \sin 2\alpha \dots (1),$$

$$J_{\eta} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + C_{xy} \sin 2\alpha \dots (2),$$

$$C_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + C_{xy} \cos 2\alpha \dots (3).$$

E képletek szerint $J_{\xi} + J_{\eta} = J_x + J_y$, ami természetes is, mert mind a két összeg a koordináta-rendszer kezdőpontjára vonatkozó J_o poláris tehetetlenségi nyomatékot adja meg.

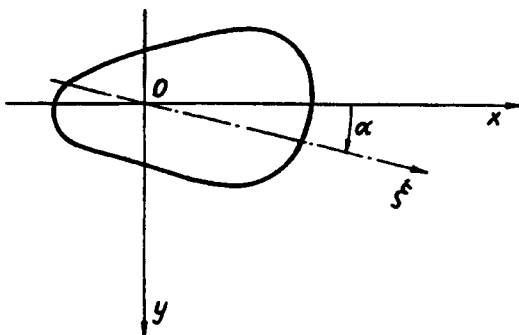
2.1.2.4 A tehetetlenségi főnyomatékok

Legyen adott egy síkidom, amelynek valamely 0 pontjában felvettünk egy derékszögű x, y koordináta-rendszert (2.29 ábra). Tekintsük adottnak az e tengelyekre vonatkozó J_x, J_y és C_{xy} másodrendű nyomatékokat. Vegyük fel az x tengelyhez α szöggel hajló ξ tengelyt. Az előzőekben levezetett képlet szerint az J_{ξ} inercianyomaték nemcsak a J_x, J_y és C_{xy} másodrendű nyomatéktól függ, hanem az α szögnek a függvénye is:

$$J_{\xi} = f(\alpha).$$

Az α szöget változtatva tehát az J_{ξ} is változik, és ez a változás periodikus, mivel a ξ tengely többször is körbeforgatható. Az J_{ξ} véges nagyságú, pozitív mennyiség, ezért a periodikus változás bizonyos alsó és felső határok között megy végbe. A függvénynek tehát szélső értékei kell, hogy legyenek.

Az J_{ξ} függvényének szélső értéke ott lesz, ahol az α változó szerinti deriváltja zérus. A derivált:



2.29 ábra

$$\frac{dJ_{\xi}}{d\alpha} = -2 \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha - 2 C_{xy} \cos 2\alpha .$$

Felismerhetjük ebben a $C_{\xi\eta}$ centrifugális nyomaték kifejezését:

$$\frac{dJ_{\xi}}{d\alpha} = -2C_{\xi\eta} .$$

Igy tehát a szélső érték felvétele:

$$C_{\xi\eta} = 0,$$

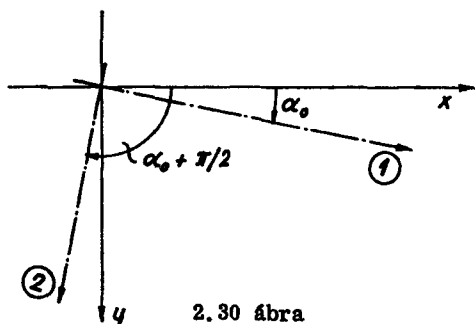
illetve

$$\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + C_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Ebből az egyenletből rendezés után a

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2C_{xy}}{J_x - J_y} \quad \dots (4)$$

képletre jutunk, amely megadja azt az α_0 szöget, amelyhez tartozó ξ tengelyre az inercianyomaték szélső értékét vesz fel. Ennek az egyenletnek a 360° -os tartományon belül két megoldása van, amelyek egymásra merőlegesen. Azt a két irányt, amelyben a tehetetlenségi nyomaték szélső értéket vesz fel, tehetetlenségi főiránynak nevezzük. Ezek az α_0 és az $\alpha_0 + \pi/2$ irányok. Ezt a két tengelyt pedig, amelyre a szélső értékek adódnak, tehetetlenségi főtengelynek nevezzük. A tehetetlenségi főtengelyek



2.30 ábra

jele 1. és 2., oly módon, hogy a maximumot adó tengely jele 1., a minimumot adó pedig 2. (2.30 ábra).

A tehetetlenségi főirányoknak, mint láttuk, két jellegzetességük van: egyrészt a tehetetlenségi nyomatéknak szélső értéke van, másrészt ezekhez az irányokhoz tartozó tengelyekre a centrifugális nyomaték zérus.

Ezután vezessük le azokat a képleteket, amelyekkel a tehetetlenségi nyomaték szélső értékel, az úgynevezett J_1 és J_2 tehetetlenségi főnyomatékok számíthatók ki. Tulajdonképpen csak az J_x képletébe (1) kell behelyettesíteni a tehetetlenségi főirányok képletéből (4) meghatározható α_0 szög megfelelő trigonometrikus függvényértékeit. Ehhez a következő trigonometrikus azonosságokat használjuk fel:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}, \quad \text{és} \quad \sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}.$$

A fenti összefüggésekbe helyettesítsük be $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ képletét:

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4C_{xy}^2}{(J_x - J_y)^2}}} = \frac{J_x - J_y}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2}}.$$

Ideiglenesen vezessük be az

$$R = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2}$$

jelölést, így

$$\cos 2 \alpha_0 = \frac{J_x - J_y}{2} \frac{1}{R}.$$

Hasonlóképpen eljárva:

$$\sin 2 \alpha_0 = \operatorname{tg} 2 \alpha_0 \cos 2 \alpha_0 = -C_{xy} \frac{1}{R}.$$

Most helyettesítsünk be az

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2 \alpha - C_{xy} \sin 2 \alpha$$

képletbe, akkor

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \frac{J_x - J_y}{2} \frac{1}{R} + C_{xy} C_{xy} \frac{1}{R} = \\ &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{R} R^2. \end{aligned}$$

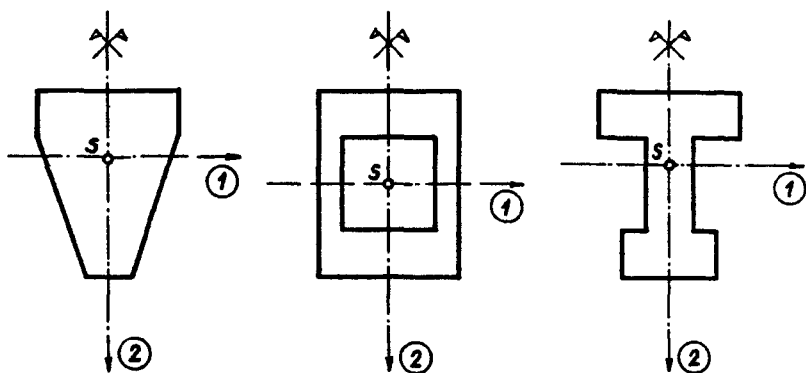
Ezután helyettesítsük vissza R képletét és vegyük figyelembe a gyök kétféle előjelét:

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2},$$

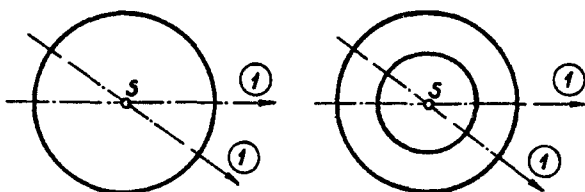
$$J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2}.$$

Az alábbiakban néhány speciális esetet fogunk megvizsgálni. Szimmetrikus síkidomok esetében (2.31 ábra), ha a szimmetriatengely az egyik koordinátatengely, akkor a centrifugális nyomaték zérus. Ha pedig a centrifugális nyomaték zérus, akkor a szóban forgó irányok főirányok. Ezek szerint kimondhatjuk, hogy a szimmetriatengely tehetetlenségi főtengele.

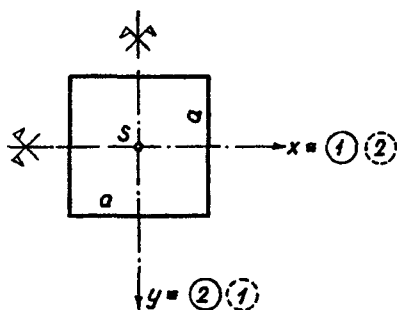
A 2.32 ábrán olyan síkidomokat látunk, amelyeknek a középpontba átmenő valamennyi tengelyükre ugyanakkora a tehetetlenségi nyomaték. A centrifugális nyomaték bármely két egymásra merőleges súlyponti tengelyre zérus, mivel minden ilyen tengely szimmetriatengely. A fentiekből azt állapíthatjuk meg, hogy körszimmetrikus síkidomoknál minden irány főirány, és csak egyféle tehetetlenségi főnyomaték van.



2.31 ábra



2.32 ábra



2.33 ábra

mert az x tengellyel tetszőleges
 cianyomatéknak az

Most vizsgáljuk meg a négyzet
 tehetetlenségi főirányait és főnyoma-
 tékait a súlypontra átmenő tengelye-
 ket illetően (2.33 ábra). A kijelölt
 két tengely szimmetriatengely, ezek
 tehát főtételek, de fennáll az

$$J_1 = J_2 = \frac{a^4}{12}$$

egyenlőség is. A főnyomatékok egyen-
 lősége (az inerciaváltozás alsó és
 felső határának egybeesése) arra en-
 ged következtetni, hogy minden súly-
 ponti tengelyre ugyanakkora az iner-
 cianyomaték. Ez valóban így is van,
 szöveget bezáró ζ tengelyre az iner-

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - C_{xy} \sin 2\alpha$$

képlete az

$$J_x = J_y = J_1 = J_2 \quad \text{és} \quad C_{xy} = C_{12} = 0$$

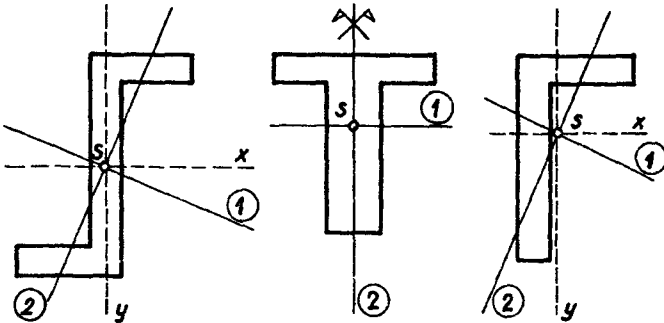
egyenlőségek miatt

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} = J_1$$

alakra egyszerűsödik.

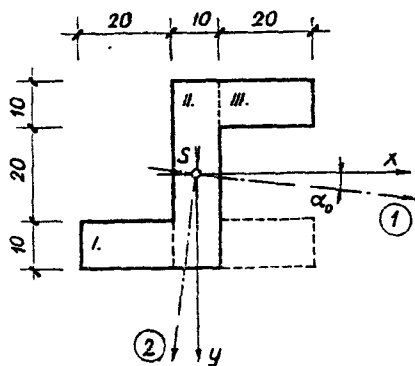
Ezek szerint olyan síkidomoknál, amelyeknél a két főnyomaték egyenlő minden súlyponti tengelyre ugyanakkora az inercianyomaték, és minden irány főirány.

A 2.34 ábrán néhány szokásos síkidomot (tartókeresztmetszetet) láthatunk, amelyeknél megrajzolhatjuk a súlyponthoz átmenő tehetetlenségi főtengelyeket is. A T idom tehetetlenségi főirányait kereshetjük meg a legkönnyebben, mivel a szimmetriatengely főtengely is, a másik főirány pedig erre merőleges. Sok esetben számítás nélkül is megállapíthatjuk, hogy e két tengely közül melyikre nagyobb az inercianyomaték; arra, amelyiktől viszonylag távol helyezkednek el a síkidom részei. Ebben az esetben is szemléletből megállapítható, hogy a T keresztmetszet szimmetriatengelye lesz a 2., a rá merőleges pedig az 1. tengely.



2.34 ábra

A Z és L alakú síkidomoknál a főtengelyek ferdén helyezkednek el, mint ahogyan berajzoltuk. A főtengelyek elhelyezkedése közelítőleg szemléletből is meghatározható, pontosan pedig a közölt képlettel állapítható meg.



2.35 ábra

Példaként számítsuk ki a 2.35 ábrán látható síkidom tehetetlenségi főnyomatékait és határozzuk meg a főirányokat.

A síkidom antimetrikus, tehát a súlypont helyét nem kell kiszámítanunk, mert tudjuk, hogy az a szimmetriapontban van. Az x és y tengelyre vonatkozó inercianyomatékokat a részekre osztás tételének és az elmozdítási tétel alkalmazásával könnyen számíthatjuk. Az J_x számításához az I. jelű részt toljuk el vízszintesen a III. jelű rész alá, az J_y meghatározásához pedig a III. jelű részt toljuk el függőlegesen az I. jelű rész mellé.

$$J_x = \frac{30 \cdot 40^3}{12} - \frac{20 \cdot 20^3}{12} = 1,467 \cdot 10^5 \text{ mm}^4,$$

$$J_y = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 1,067 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

Az x, y tengelyekre centrifugális nyomatéka csak az I. és III. jelű részeknek van:

$$C_{xy} = -15 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 10 - 15 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 10 = 0,900 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

Az x, y tengelyekre vonatkozó másodrendű nyomatékok ismeretében kiszámíthatjuk a tehetetlenségi főnyomatékokat:

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2} =$$

$$= \frac{(1,467 + 1,067) \cdot 10^5}{2} + 10^5 \cdot \sqrt{\left(\frac{1,467 - 1,067}{2}\right)^2 + 0,900^2} = 2,189 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

$$J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2} =$$

$$= \frac{(1,467+1,067) \cdot 10^5}{2} - 10^5 \cdot \sqrt{\left(\frac{1,467-1,067}{2}\right)^2 + 0,900^2} = 0,345 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

A tehetetlenségi főirányokat $\text{tg } 2 \alpha_0$ képletéből határozhatjuk meg:

$$\text{tg } 2 \alpha_0 = \frac{-2C_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{0,900 \cdot 10^5}{(1,467-1,067) \cdot 10^5} = 0,225;$$

$$2 \alpha_0 = 12,68^\circ, \quad \alpha_0 = 6,34^\circ.$$

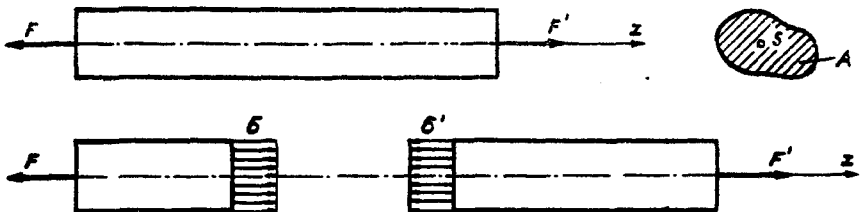
α_0 az 1. jelű főtengely irányát határozza meg, a 2. jelű főtengely természetesen erre merőleges.

2.2 A feszültségek meghatározása egyszerű igénybevételek esetén

2.2.1 A húzás és a nyomás

2.2.1.1 A normál feszültségek számítása húzás vagy nyomás esetén

Legyen az egyenes tengelyű prizmatikus rud (2.36 ábra) tengelyében (a keresztmetszetek súlypontját összekötő egyenesben) működő (F, F') = 0 egyensúlyban levő erőkkel terhelve. Ha a rudvégekre ható erők a rudat húzzák, akkor azt mondjuk, hogy a rud húzó igénybevételt kap. Amennyi-



2.36 ábra

ben az erők nyílla az ábrán láthatóhoz képest fordított, akkor nyomásról van szó.

Vágjuk el a rudat képzeletben egy rudtengelyre merőleges síkkal, és távolítsuk el egymástól a két ruddarabot. A megszüntetett anyagi összefüggést most feszültségekkel kell pótolni. A tapasztalat szerint - a rudvégtől bizonyos távolságban - csak a keresztmetszetre merőleges, normális feszültség ébred, és az egyenletes megoszlású. Határozzuk meg e feszültségek nagyságát.

Vizsgáljuk külön a bal oldali ruddarabot, erre az F erő és a (σ) egyenletesen megoszló erőrendszer működik, ezeknek egyensúlyban kell lenniük:

$$[F, (\sigma)] \doteq 0.$$

A z irányú vetületi egyenletből meghatározhatjuk a belső erők intenzitását, a σ feszültség nagyságát:

$$\sum F_{iz} = F - \sigma \cdot A = 0,$$

innen

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \dots (1).$$

Ha a σ feszültségek eredőjét keressük, akkor egy - a keresztmetszet súlypontjában működő - F nagyságú erőt kapnánk. Ez az erő nyilvánvalóan egyensúlyban van a ruddarab másik végén működő F nagyságú erővel, mert hatásvonaluk közös és nyílluk ellentétes.

A σ feszültség előjeles mennyiség. Amennyiben a rudat húzóerők támadják, akkor keresztmetszetében húzófeszültség keletkezik, amelyet pozitívnak tekintünk. Ha megfordítjuk a rudat terhelő erők nyíllát, akkor a feszültségek nyílla is megfordul, nyomófeszültség keletkezik, amely megállapodásunk szerint negatív. A húzó és nyomófeszültség közös elnevezése: normálfeszültség.

A fenti előjelszabály összefüggésben van az igénybevételi ábráknál megismert normálerő (N) és a rácsos tartóknál tanult ruderők (S) előjelszabályával. Ha ezek az erők pozitívak, akkor a belőlük számítható normálfeszültség is pozitív. Az (1) képletet gyakran az alábbi formákban használjuk:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{és} \quad \sigma = \frac{S}{A}.$$

Példaként számítsuk ki a 2.37 ábrán látható kéttámaszu tartó helyzetét biztosító rudban és pillérben keletkező feszültségeket. Először a reakcióerőket kell meghatároznunk.

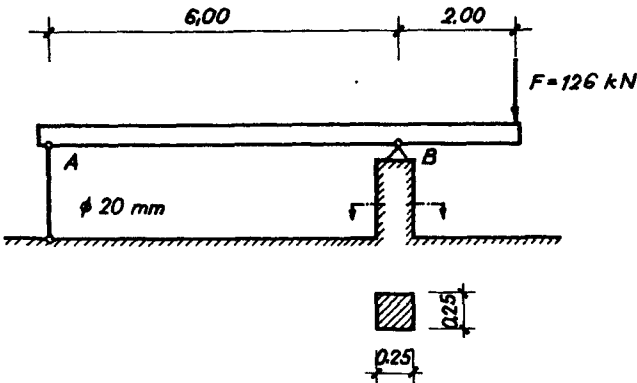
$$\sum M_i^{(B)} = -6A + 2.126 = 0,$$

$$A = 42 \text{ kN } (\uparrow).$$

$$\sum F_{iy} = 42 + B + 126 = 0,$$

$$B = -168 \text{ kN } (\downarrow).$$

Az A reakció a rudban huzást, a B pedig a pillérben nyomást okoz. A keresett normálfeszültségek előjelét ennek megfelelően állapítjuk meg.



2.37 ábra

A rudban keletkező feszültség:

$$\sigma = \frac{42 \cdot 10^3}{10^2 \cdot \pi} = 133,69 \text{ N/mm}^2 \text{ (MPa)}.$$

A pillérben keletkező feszültség:

$$\sigma = \frac{-168}{0,25 \cdot 0,25} = -2688 \text{ kN/m}^2 = 2,69 \text{ N/mm}^2 \text{ (MPa)}.$$

2.2.1.2 A huzott vagy nyomott rud alakváltozása

A kísérletek szerint a huzó- vagy nyomóerővel terhelt rud hosszúsága a terheletlen állapothoz viszonyítva megváltozik. Huzás esetén a rud eredeti l hosszúsága Δl értékkel megnövekszik, nyomás esetén pedig a

rud összenyomódik, ilyenkor a Δl megrövidülést jelent. A Δl alakváltozást akkor tekintjük pozitívnak, ha megnyúlásról van szó, az összenyomódást negatív nyulásként értelmezzük. A nyulás hosszúság dimenzióju mennyiség, mértékegységei: m, cm, mm.

A nyulásból képezhető az alakváltozás mértékére inkább jellemző mennyiség, az

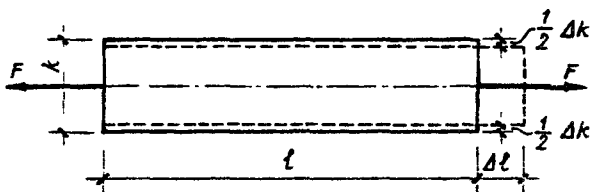
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ fajlagos nyulás.}$$

A fajlagos nyulás dimenzió nélküli mennyiség, előjele a Δl előjélével azonos, tehát a fajlagos megnyúlást pozitívnak, a fajlagos összenyomódást pedig negatívnak tekintjük. Szokás a fajlagos nyulást az eredeti rudhossz százalékában, illetve ezrelékében is kifejezni. Nyilván

$$\varepsilon \% = 100 \frac{\Delta l}{l} = 100 \varepsilon, \text{ illetve } \varepsilon \text{‰} = 1000 \frac{\Delta l}{l} = 1000 \varepsilon.$$

A huzott rud a hosszirányu megnyúláson kívül még más alakváltozást is szenved, nevezetesen a tengelyre merőleges méretei megrövidülnek. A keresztmetszet eredeti k szélessége Δk értékkel rövidül meg (2.38 ábra). Most tehát $\Delta k < 0$, így negatív előjelű lesz az ebből számított keresztirányu fajlagos megnyulás is:

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta k}{k}.$$



2.38 ábra

Nyomás esetén a jelenség fordítva játszódik le: a hosszirányu rövidüléshez keresztirányu megnyulás tartozik.

A kísérletek azt mutatják, hogy a hossz- és keresztirányu fajlagos megnyulás viszonya ugyanazon anyagnál állandó:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_k} = -m.$$

A negatív előjel ε és ε_k ellenkező előjelének következménye. Itt m az ugynevezett Poisson-féle szám. Ennek értéke az anyagtól függ: acélnál $m = 3,3$, betonnál $m = 4 \dots 6$ a beton minőségétől függően. Sokszor a Poisson-féle szám helyett annak reciprokával dolgozunk:

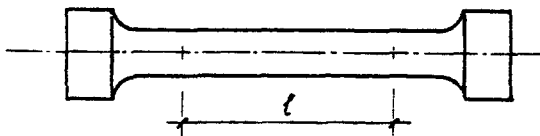
$$\frac{1}{m} = \mu.$$

A μ számot Poisson-féle tényezőnek vagy harántnyúlási (harántkont-rakciós) tényezőnek nevezzük. Ezt bevezetve:

$$\varepsilon_k = -\mu \cdot \varepsilon.$$

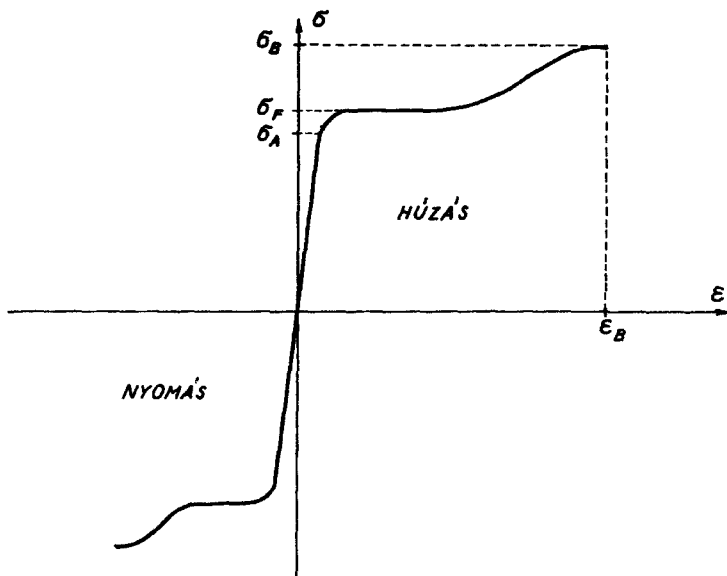
2.2.1.3 A feszültség és fajlagos nyulás összefüggése

A feszültség és az alakváltozás közötti összefüggés csak kísérleti uton állapítható meg, és ez az összefüggés anyagonként különböző. A vizsgálat céljára próbatesteket készítenek, amelyeket szakító illetve törőgépekbe helyeznek. Ezekkel a gépekkel - az erő és az elmozdulás folyamatos mérése mellett - a próbatestet elszakítják, illetve összetörik. Az acélszabványok vizsgálatánál használatos próbapálcát láthatunk a 2.39 ábrán. A megnyulásokat a húzókísérletnél a próbatest középrészén bejelölt l bázishosszon mérik. Nyomókísérleteket kocka, hasáb és henger alakú próbatesteket lehet végezni. Ezek zömök testek, amelyek nem tudnak a nyomóerő elől kihajlással kitérni.



2.39 ábra

A kísérletek mérési eredményeit a 2.40 ábra szerinti diagramba szokták felrajzolni. Az ábrán a folytacél egyesített húzó-nyomó diagramját láthatjuk. Megjegyezzük, hogy különböző minőségek esetén ugyanazon anyag-nál is eltérőek ezek a diagramok. A függőleges tengelyen az erőből számítható $\sigma = F/A$ feszültség szerepel. vízszintes tengelyen pedig a mért Δl megnyulásból számítható $\varepsilon = \Delta l / l$ fajlagos nyulás. A 2.40 ábrán bejelöltük a diagram jellegzetes pontjait.



2.40 ábra

Ezek elemzése a következő:

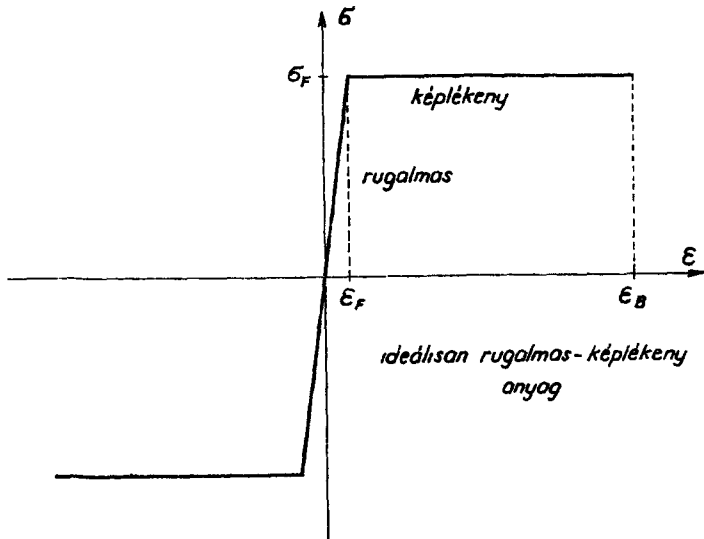
σ_A : arányossági határ,

σ_F : folyási határ,

σ_B : szakító szilárdság.

Az arányossági határig a fajlagos nyúlással arányos a feszültség, vagyis a diagram egyenes. A folyási határ olyan feszültséget jelent, amelynél az anyagban nagymértékű nyulás következik be anélkül, hogy a feszültség tovább növekedne. A folyási szakasz után a felkeményedés szakasza következik, amikor a feszültség tovább növekszik, közben jelentős alakváltozások következnek be, míg a próbapálca el nem szakad.

Mint látjuk, a valódi anyagok $\sigma - \epsilon$ diagramja - más néven munkadiagramja - egyszerű matematikai eszközökkel nem írható le. A később tárgyalandó szilárdságtani számításokban viszont elengedhetetlen a feszültség és a fajlagos nyulás közötti összefüggés leírása valamilyen könnyen kezelhető matematikai függvénnyel, így bizonyos engedményeket kell tennünk. Számításainkban mindig valamilyen szempontból ideális anyagot tételezzünk fel. Így például az acél anyagot ideálisan rugalmas-képlékeny anyagnak tekintjük, amely a folyási határig tökéletesen rugalmas, azt követően pedig teljesen képlékeny, szakadása a σ_F folyási feszültségnél az ϵ_B szakadónyulás elérésekor következik be (2.41 ábra). Ha a szerkezetben a fo-

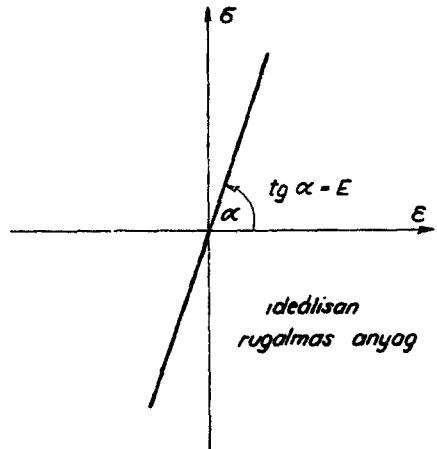


2.41 ábra

lyási feszültség kialakulását nem engedjük meg, akkor ideálisan rugalmas anyag feltételezésével végezhetjük számításainkat. Ideálisan rugalmas anyag esetén a feszültség és a fajlagos megnyúlás közötti összefüggést a Hooke-törvény fejezi ki:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon .$$

Itt E a rugalmassági modulus, anyagjellemző. A 2.42 ábrán az ideálisan rugalmas anyag $\sigma - \varepsilon$ diagramját rajzoltuk meg. A ferde egyenes iránytangense az E , egyenletét a Hooke-törvény írja le.



2.42 ábra

Összehasonlítva a 2.40 és a 2.42 ábrákat láthatjuk, hogy az acélananyag az arányossági határig követi a Hooke-törvényt, tehát olyan terhelésnél, amely következtében nem tud az arányossági határnál nagyobb feszültség kialakulni az ideálisan rugalmas anyag feltételezése nem jelent elhanyagolást. Az arányossági határig terhelte szerkezetek rugalmasan viselkednek, ami azt jelenti, hogy a terhet megszüntetve a szerkezet visszanyeri eredeti alakját. A szilárdságtannak az az ága, amely a feszültség és a fajlagos

megnyúlás közötti összefüggésként csak a Hooke-törvényt használja a lineáris rugalmasságtan.

Nagyobb igénybevételek esetén, amikor a feszültségek túllépik az arányossági határt, az anyag megfolyik, viszonylag nagyobb alakváltozások következnek be. Az anyag ilyenkor már nem viselkedik rugalmasan, a terhelés megszüntetése után nem nyeri vissza eredeti alakját, hanem maradós alakváltozások mutatkoznak. Ezekkel a jelenségekkel a szilárdságtan másik ága, a képlékenységtan foglalkozik.

A Hooke-törvény alkalmazásával kiszámíthatjuk a huzott rud rugalmas megnyúlását. Az $\varepsilon = \Delta \ell / \ell$ és $\sigma = E \cdot \varepsilon$ összefüggések felhasználásával

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E}.$$

σ helyébe helyettesítsük az F/A -t és fejezzük ki $\Delta \ell$ -et:

$$\Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot A}.$$

2.2.1.4 A huzott rudak méretezése

A mérnök egyik legfontosabb feladata a méretezés, vagyis a tartószerkezet méreteinek megállapítása. A szerkezet méreteit úgy kell megállapítani, hogy a tartó a reá ható, előre meghatározott terheket biztonságosan viselni tudja, de a méretek ne legyenek túlságosan nagyok, azaz a szerkezet biztonságos is legyen.

A méretezés során először azt kell eldönteni, hogy a szóban forgó szerkezetet milyen anyagból fogják készíteni. Ismernünk kell azt, hogy az illető anyagra milyen feszültség engedhető meg. A feszültségnek ezt a határértékét a szabványok, illetve a szabályzatok előírják. A különböző előírásokban ezt a feszültséget megengedett feszültségnek (σ_{eng}) vagy határ-feszültségnek (σ_H) nevezik. (A két fogalom nem egészen azonos, részletesebb tárgyalásukkal a szaktárgyak foglalkoznak). Ezeket a méretezési feszültségeket úgy állapították meg, hogy az anyag teherbírásán túlmenően bizonytalanságokat is (pl. szórás az anyagminőségben, pontatlanság a méretekben) figyelembe vettek. Acéltanyag esetén például úgy állapíthatunk meg egy méretezési feszültséget, hogy az anyag folyási feszültségét elosztjuk a bizonytalanságokat figyelembe vevő $n > 1$ biztonsági tényezővel:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_F}{n}.$$

A továbbiakban a megengedett feszültség és határfeszültség fogalmak helyett csak a σ_{eng} feszültséget fogjuk használni, és a méretezés célja az lesz, hogy a szerkezetben a terhekből származó feszültség intenzitása ne haladja meg σ_{eng} értékét:

$$\sigma \leq \sigma_{eng} . \quad \dots (2)$$

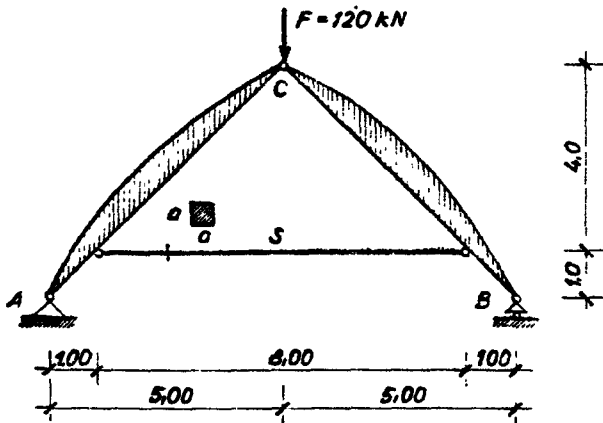
A méretezés feladata kétféleképpen merül fel: tervezéskor a szerkezet (általában keresztmetszeti) méreteit állapítjuk meg, ellenőrzéskor pedig az adott méretű szerkezet teherbírást vizsgáljuk.

A húzó- illetve a nyomóigénybevételből származó feszültségek kiszámítására megismert képlet (1) kis átalakítással tervezésre is alkalmas. Ha az (1.) képletben σ helyére σ_{eng} -et helyettesítünk, kifejezhetjük a szükséges keresztmetszeti területet:

$$A_{szük} = \frac{F}{\sigma_{eng}} .$$

A fenti képlet általában csak húzásra igénybe vett szerkezeti elemek méretezésére alkalmas. Nyomásra igénybe vett szerkezeti elemeket csak akkor méretezhetünk e képlet alapján, ha a nyomott elem nem tud a nyomóerő elől kihajlással kitérni. (A nyomott rudak leggyakoribb tönkremeneteli formája a kihajlás. A kihajlással és a nyomott rudak méretezésével e jegyzet 5. fejezetében foglalkozunk.)

Példaként méretezzük a 2.43 ábrán látható tartó vonórudját négy-szögkeresztmetszettel. Az alkalmazandó keresztmetszet kiválasztása után számítsuk ki a vonórud megnyulását is.



2.43 ábra

A tartó reakcióerői a szimmetria miatt könnyen számíthatók:

$$A = B = F/2 = 60 \text{ kN } (\uparrow).$$

A vonórudban keletkező erő a bal oldali (vagy jobb oldali) rész egyensúlyából a C csuklóra felírt nyomatéki egyenlettel határozható meg.

$$5 \cdot 60 - 4 \cdot S = 0,$$

$$S = 75 \text{ kN}.$$

A tervezéshez, illetve a megnyulás kiszámításához szükséges a méretezési feszültség és a rugalmassági modulus ismerete. Ezek értéke most:

$$\sigma_{\text{eng}} = 200 \text{ N/mm}^2, \quad E = 210\,000 \text{ N/mm}^2.$$

A szükséges keresztmetszeti terület:

$$A_{\text{szüks}} = \frac{S}{\sigma_{\text{eng}}} = \frac{75 \cdot 10^3}{200} = 375 \text{ mm}^2;$$

$$a_{\text{szüks}} = \sqrt{375} = 19.36 \text{ mm}.$$

Az alkalmazott négyzetszelvény mérete:

$$a_{\text{alk}} = 20 \text{ mm}.$$

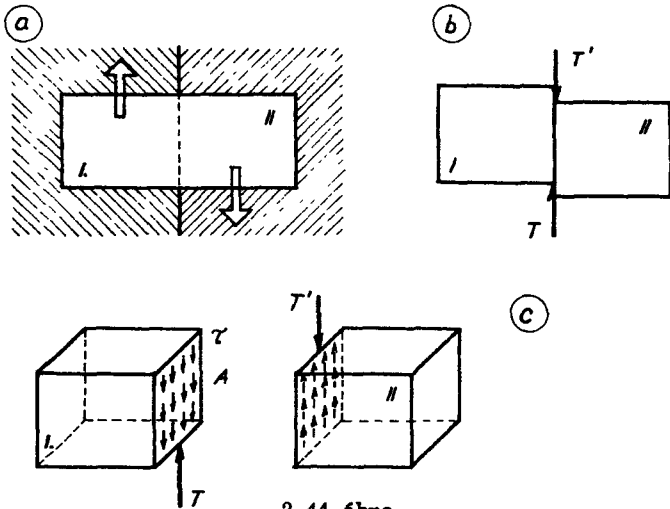
A vonórud megnyulása:

$$\Delta l = \frac{l \cdot S}{E \cdot A} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 75 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 20^2} = 7,14 \text{ mm}.$$

2.2.2 A tiszta nyírás

Ha a rudelem egy adott keresztmetszetében a keresztmetszet síkjában fekvő és súlypontján átmenő erők működnek, akkor azt mondjuk, hogy a rudelem tiszta nyírásra van igénybe véve.

A tiszta nyírás igénybevétele igen egyszerűen megvalósítható. Például a 2.44. ábrán látható rudat két merev testbe befogjuk, és a két merev testet ellentétes irányban egymáson elcsusztatjuk. Ilyenkor a rud a bejelölt



2.44 ábra

keresztmetszet mentén elnyíródik, az I. és II. jelű rúddarab egymáshoz képest eltolódik.

2.2.2.1 A nyírófeszültségek számítása tiszta nyírás esetén

Vizsgáljuk tovább a 2.44 ábrán látható rudat. Ahhoz, hogy a rudelem elnyíródjék a két merev testnek valamilyen nagyságu nyíróerőt kell kifejteni. Az egyik rudfélre a T , a másikra ennek ellentettje, a T' erő hat, mindkettő ugyanabban a síkban (a nyírásra igénybe vett keresztmetszetben) hat (2.44. b. ábra).

Képzeltben vágjuk ketté a rudat, a két merev test érintkezési síkjával. A megszüntetett anyagi folytonosságot a T nyíróerő síkjában működő nyírófeszültségekkel kell pótolnunk. Az I. jelű rúddarabra a bal oldali merev test által kifejttet erők eredője, a T erő a vizsgált keresztmetszet síkjában hat, ezért ebben a síkban kell működniük a nyírófeszültségeknek is. A nyírófeszültség nagysága a bal oldali rudelem egyensúlyából, függőleges vetületi egyenlet segítségével könnyen kiszámítható, ha a nyírt felületen egyenletes feszültségeloszlást tételezünk fel.

$$T - A \cdot \tau = 0,$$

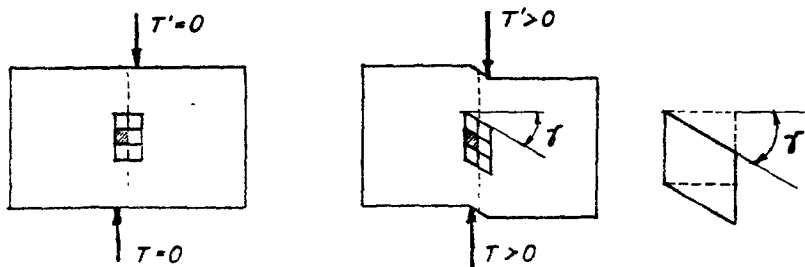
$$\tau = \frac{T}{A}.$$

A képletben τ a nyírófeszültséget, A pedig a nyírt keresztmetszet területét jelenti.

2.2.2.2 A nyírási alakváltozás

A kísérletek szerint a nyírófeszültségek hatására torzulás jön létre. Ez azt jelenti, hogyha a nyírt keresztmetszet közelében egy derékszögű hasábot kiragadunk, akkor annak lapszögei a nyírófeszültségek hatására megváltoznak, a hasáb eltorzul (2.45 ábra). A torzulás mértéke az eredetileg 90°-os lapszög megváltozásával, a γ szöggel fejezhető ki. Különböző kísérletek eredményeiből az a következtetés vonható le, hogy azoknál az anyagoknál, amelyekre a Hooke-törvény érvényes a γ szögváltozás arányos a nyírófeszültséggel:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$



2.45 ábra

A képletben G az anyagtól függő állandó, amelyet nyírási rugalmassági tényezőnek, vagy modulusnak nevezünk. Mértékegysége a feszültség mértékegységével azonos. A γ szögváltozás természetesen radiánban értendő.

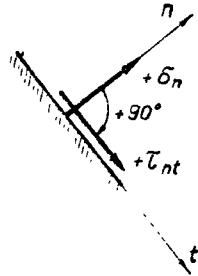
Bizonyítható, hogy a G nyírási rugalmassági modulus, az E rugalmassági modulus és a μ Poisson-tényező anyagjellemzők között az alábbi összefüggés érvényes:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

2.2.2.3 A nyírófeszültségek dualitásának tétele

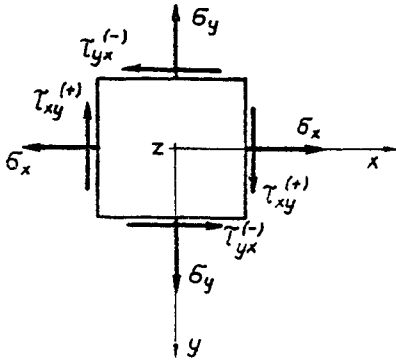
A tétel kimondása és bizonyítása előtt, először értelmezzük a nyírófeszültségek előjelét. Az n normálisú síkon működő és a síkban t irányban ható τ_{nt} nyírófeszültséget akkor tekintjük pozitívnak, ha értelme (nyíllá) megegyezik $a + \sigma_n$, n irányu pozitív (huzó) normálfeszültség 90°-kal pozitív irányba elforgatott értelmével (nyíllával). Az előjelszabályt

a 2.46. ábrán szemléltetjük. A nyirófeszültségnek tehát általánosan esetben két indexe van, amelyből az első azon sík normálisának iránya, amelyben a nyirófeszültség keletkezik, a második pedig az az irány, amelybe a nyirófeszültség mutat.



2.46 ábra

A nyirófeszültség dualitásának tétele azt mondja ki, hogy ha a szilárd test valamely metszetében van nyirófeszültség, akkor a rá merőleges metszetben is van, csak ellentett előjelű. A tétel bizonyítása céljából vizsgáljunk egy elemien kicsiny dx , dy , dz élhosszúságú derékszögű hasábot. Ez a hasáb látható a 2.47 ábrán egyik nézetében. (A dz élhossz a kirajzolt oldallapra merőleges.) Az ábrán



2.47 ábra

bejelöltük a $dx \cdot dz$ felületre ható σ_y és τ_{yx} , valamint a $dy \cdot dz$ felületre ható σ_x és τ_{xy} feszültségeket. A két-két párhuzamos lapon működő τ_{xy} és τ_{yx} nyirófeszültségek egy-egy erőpárt alkotnak. Irjuk fel a z tengelyre vonatkozó nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_{iz} = \tau_{xy} dx dy dz + \tau_{yx} dx dy dz = 0.$$

A σ feszültségekből származó eredő erőnek nincs nyomatékuk a z tengelyre, mert a hasáblapok közepén működnek, így metszik a z tengelyt. Ugyanilyen oknál fogva nincs nyomatékuk azoknak az erőnek sem, amelyek a z normálisú metszeten működnek, ezeket az ábrára föl sem rajzoltuk. Megemlítjük, hogy amennyiben a térfogati erőket is figyelembe vennénk (pl. az önsúlyt), akkor azoknak sem lenne nyomatékuk a z tengelyre, mert az elemi hasáb középpontjában működővén metszenék a tengelyt.

A nyomatéki egyenletből egyszerűsítés után

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}$$

adódik, ami a dualitás tételének képletben való kifejezése. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

A fentiek szerint a nyirófeszültségek mindig párosával lépnek fel, a tetszőleges helyről kiragadott hasáb egyensúlya csak így biztosítható. Az

előjel ellentettségéből kifolyóan a szomszédos lapokon működő nyirófeszültségek vagy a lapok közös éle felé, vagy éppen ellenkezőleg, a metszészvonnaltól elfelé mutatnak, mint ahogy a 2.46 ábrán is láthatjuk. Ezen a példán τ_{xy} pozitív, τ_{yx} pedig negatív.

A nyirófeszültségek dualitásának tétele nemcsak a tiszta nyírás esetében érvényes, hanem általános érvényű. Ugyanilyen elemi hasábot vághatunk ki bármely, tetszőleges alakú szilárd testből, és ha a testre egyensúlyban levő erők hatnak, akkor az elemi hasábra ugyanolyan jellegű feszültségek hatnak, mint amelyeket felvettünk. Ezek egyensúlya alapján ugyanolyan nyomatéki egyenletek írhatók fel, mint amit láttunk, még az sem okoz változást, ha a nagyobb általánosság kedvéért a sulyerőt is figyelembe vesszük.

Az előbb vizsgált kis hasábnál a nyomatékot a z tengelyre irtuk fel. Az x és y tengelyre felirt egyenletből a $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$ és $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$ eredményt kapjuk. Általánosságban i és k egymásra merőleges irányok esetén -:

$$\tau_{ik} = -\tau_{ki}.$$

Ez a nyirófeszültségek dualitásának vagy reciprocitásának tétele.

2.2.2.4 Méretezési feladatok

A tiszta nyírásra igénybe vett keresztmetszetek ellenőrzése és tervezése a húzás és a nyomás esetéhez teljesen hasonló. Most abból indulunk ki, hogy ismeretes az anyagra megengedett σ_{eng} feszültség.

Ellenőrzés esetén a számított nyirófeszültséget össze kell hasonlítani a megengedett nyirófeszültségekkel. Az adott igénybevételre (T) megfelelő a keresztmetszet (A), ha a számított nyirófeszültség a megengedettnél nem nagyobb:

$$\tau = \frac{|T|}{A} \leq \tau_{eng}.$$

Ugy is eljárhatunk, hogy kiszámítjuk az adott keresztmetszetre megengedhető nyiróerő értékét, és ezt hasonlítjuk össze az adott igénybevétel-lel. Ekkor:

$$T_{eng} = \tau_{eng} \cdot A \geq |T|$$

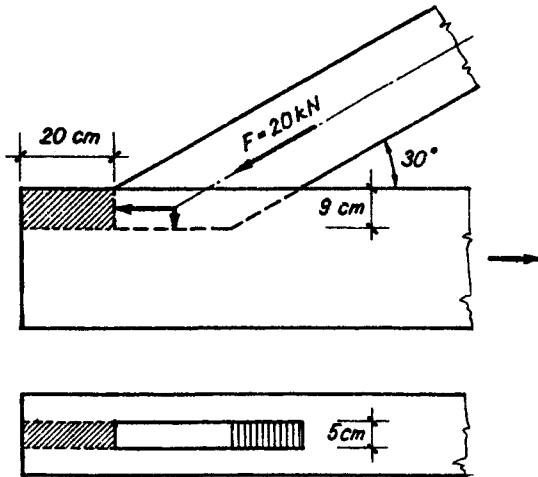
esetén felel meg a keresztmetszet.

Tervezésnél a szükséges keresztmetszeti területet az

$$A_{\text{szüks}} = \frac{|T|}{\tau_{\text{eng}}}$$

képlettel számíthatjuk.

Első példaként ellenőrizzük a 2.48. ábrán látható két fagerenda kapcsolatát. A 20 kN nyomóerővel terhelt ferde fagerendát csapolással erősítjük a mereven megtámasztott vízszintes gerendához. A vízszintes gerendát felülnézében is lerajzoltuk úgy, mintha a ferde gerendát a csaplyukból kiemeltük és eltávolítottuk volna. Ez a kapcsolat úgy mehet tönkre, hogy a vízszintes gerendából az ábrán besraffozott 20.9.5 cm méretű hasábot a ferde erő vízszintes komponense kitolja. A gerendában a fa rostjaival párhuzamos irányú megengedett nyírófeszültség most $\tau_{\text{eng}} = 0,5 \text{ N/mm}^2$.



2.48 ábra

A tiszta nyírást okozó erő:

$$T = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ kN.}$$

A nyírt felületet:

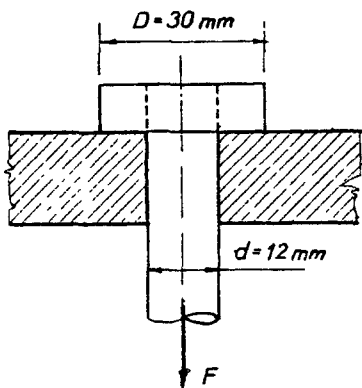
$$A = 2 \cdot 20 \cdot 9 + 5 \cdot 20 = 460 \text{ cm}^2 = 46 \cdot 10^3 \text{ mm}^2.$$

A nyírófeszültség:

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{17,32 \cdot 10^3}{46 \cdot 10^3} = 0,376 \text{ N/mm}^2 < \tau_{\text{eng}} = 0,5 \text{ N/mm}^2,$$

tehát a kapcsolat megfelel.

Másik feladatunk legyen a 2.49 ábra szerinti csap fejének megtervezése. Ugy kell a fejevastagságot megszabnunk, hogy a fej tönkremenetele csak a szár elszakadása után következessen be. A fej úgy mehet tönkre, hogy a szaggatott vonallal jelölt hengerpálcást mentén elnyíródik:



Adottak a megengedett feszültségek:

$$\text{huzásra } \sigma_{\text{eng}} = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{nyírásra } \tau_{\text{eng}} = 90 \text{ N/mm}^2.$$

A szárban működő legnagyobb húzóerőt, amely a megengedett húzófeszültség teljes kihasználásával lép fel, megengedett húzóerőnek nevezzük. Ennek értéke:

2.49 ábra

$$F_{\text{eng}} = A_h \cdot \sigma_{\text{eng}} = 113,10 \cdot 200 = 22,62 \cdot 10^3 \text{ N} = 22,62 \text{ kN}$$

Itt A_h a szár keresztmetszeti területe:

$$A_h = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{12^2 \cdot 3,14}{4} = 113,10 \text{ mm}^2.$$

A nyírt metszet területe:

$$A_{\text{ny}} = d \cdot \pi \cdot x = 12 \cdot \pi \cdot x.$$

A nyírófeszültség

$$\tau = \frac{T}{A} \leq \tau_{\text{eng}}$$

képletében T helyére a húzásra megengedett erőt (F_{eng}), A helyére pedig a nyírt metszet területét (A_{ny}) helyettesítve és az egyenlőséget véve

$$\frac{22,62 \cdot 10^3}{12 \pi \cdot x} = 90$$

adódik, ahonnan

$$x = \frac{22,62 \cdot 10^3}{12 \cdot \pi \cdot 90} = 6,67 \text{ mm,}$$

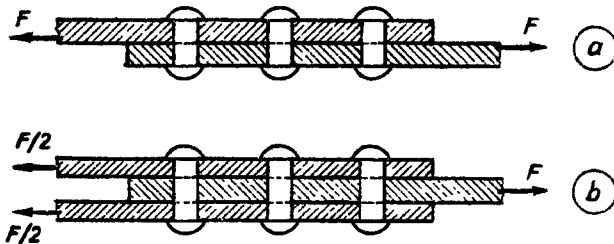
amit felfelé $x_{alk} = 7 \text{ mm}$ -re kerekítünk.

Az elvégzett feladat egyuttal példa volt az egyenlő teherbírásra (egyenteherbíráásra) való méretezésre. Az az erő, amire a csapszeg fejét méreteztük nem a csapszegt ténylegesen terhelő erő volt, hanem az, amit a csapszeg megengedett húzófeszültség teljes kihasználásával még éppen elbírt. Tehát a fej (nyírási) teherbírása egyenlő a szár (húzási) teherbírásával.

2.2.2.5 Szögecsszámítás

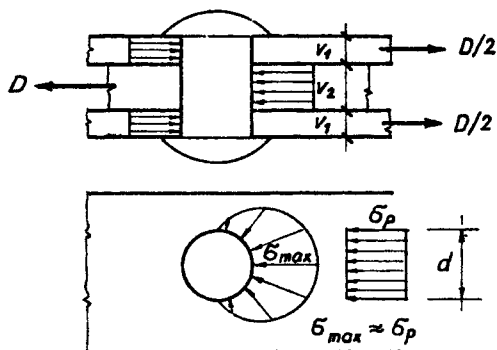
Jellegetes és gyakori nyírási feladat a szegecsek méretezése, ezért ezzel külön foglalkozunk.

Az acéltól, illetve az egyéb fémekből készült szerkezetek egyik lehetséges kapcsolási módja a szögecselés. Megkülönböztetünk egyszer és kétszer nyírt szögecskapcsolatokat (2.50.a. és b. ábra). Az elnevezés onnan ered, hogy a két különböző esetben a szögecsszárnak egy (2.50.a. ábra) vagy két metszetében (2.50.b. ábra) keletkezik a tiszta nyírási igénybevétel.



2.50 ábra

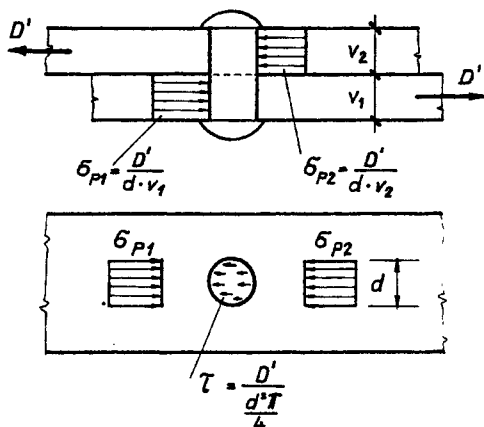
A szögecs - legyen az egyszer nyírt vagy kétszer nyírt - két módon mehet tönk. Az egyik lehetőség az, hogy a nyírásan igénybe vett metszet, vagy metszetek elnyíródnak, a másik pedig az, hogy a szögecsorsó és a furat érintkező felületen olyan nagy nyomófeszültség keletkezik, hogy vagy a szögecsorsó vagy a lemez nyomási teherbírása kimerül, a szögecs és a lemez egymásba nyomódik. A szögecsorsó és a furat érintkező felületein keletkező feszültséget palástnyomásnak nevezzük. A palástnyomás vizsgálatánál a nyomófeszültségek megoszlását leegyszerűsített formában vesszük figyelembe. A valóságban az egymásba nyomódó felületek alakja félkör alapú félhenger és a feszültségek a félkör mentén változóak (2.51. ábra). A számításainkban σ_p egyenletesen megoszló feszültséget tételezünk fel,



2.51 ábra

amely a $d \cdot v$ nagyságu felületen keletkezik. (Az egyszerűsítés jogossága kísérletileg igazolható.)

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy egy szegécsre mekkora erő engedhető meg. A fentiek szerint két tönkremeneteli lehetőséggel kell számolnunk. Egy adott anyagnál a nyírásra megengedett feszültség, τ_{eng} és a palástnyomásra megengedett feszültség σ_p eng értéke ismert.



2.52 ábra

Először az egyszer nyírt szegécsre vizsgáljuk (2.52 ábra). A szegécsre nyírás szempontjából a

$$D'_{eng} = \frac{d^2 \cdot \tau}{4} \cdot \tau_{eng}$$

erő engedhető meg. A palástnyomásra megengedhető erő

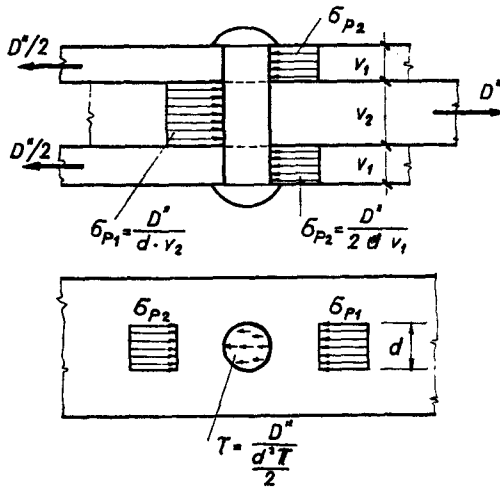
$$D'_{p \text{ eng}} = d \cdot v_{\min} \cdot \sigma_{p \text{ eng}}$$

ahol v_{\min} v_1 és v_2 kisebbike. Az egyszer nyírt szögecsre maximális igénybevételként a most kiszámított két erő közül a kisebbik engedhető meg. Tehát

$$D'_{\text{eng}} = \left\{ \begin{array}{l} D'_{\tau \text{ eng}} \\ D'_{p \text{ eng}} \end{array} \right\} \text{ kisebbike.}$$

A kétszer nyírt szögecs esetében is az előbbi gondolatmenettel járhatunk el (2.53 ábra). A nyírásra megengedett erő:

$$D''_{\tau \text{ eng}} = 2 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \tau_{\text{eng}} = 2 D'_{\tau \text{ eng}}$$



2.53 ábra

A palástnyomásra megengedett erő:

$$D'_{p \text{ eng}} = d \cdot v_{\min} \cdot \sigma_{p \text{ eng}}$$

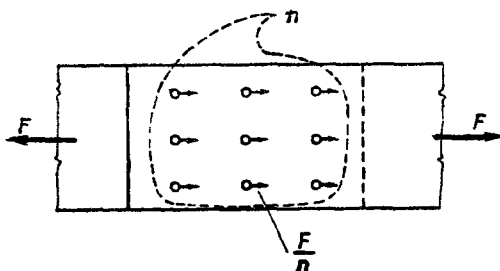
ahol v_{\min} a $2 v_1$ és v_2 , tehát az egyirányban elmozdulni kívánó lemezek együttes vastagságának kisebbike.

A kétszer nyírt szögecsre megengedett erő:

$$D''_{eng} = \left\{ \begin{array}{l} D''_{\tau eng} \\ D''_{p eng} \end{array} \right\} \text{ kisebbike.}$$

Most már ismerjük az egy szögecsre megengedhető erőket. Központos nyomásra illetve húzásra igénybe vett szerkezeti elemek szögecselt kapcsolataitál általában azzal a feltételezéssel élünk, hogy az n darab szögecsből álló kapcsolat egyes szögecsreire azonos nagyságu erők hatnak. Ha F a kapcsolatra központosan ható erő nagysága, akkor az egy szögecsre jutó erő (2.54 ábra):

$$D = \frac{F}{n}.$$



2.54 ábra

A szögecselt kapcsolat ellenőrzésénél az egy szögecsre jutó erőt kell összehasonlítani az egy szögecsre megengedett erővel. Megfelel a kapcsolat, ha

$$D \leq D_{eng}.$$

A szögecselt kapcsolatok tervezésénél általában azt kell megállapítani, hogy egy adott F erő esetén mennyi a szükséges szögecscsám. Ilyenkor egy adott vagy felvett szögecsátmérőhöz kiszámítjuk D'_{eng} vagy D''_{eng} értékét (attól függően, hogy egyszer vagy kétszer nyírt szögecsket alkalmazunk), majd a szükséges szögecscsámot a következő képlettel állapíthatjuk meg:

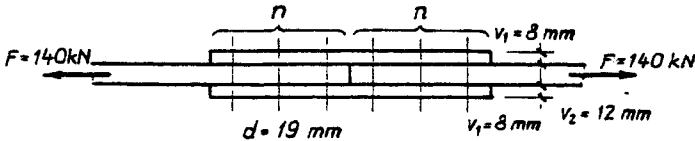
$$n_{szüks} = \frac{F}{D_{eng}}.$$

A kapott eredmény csak felfelé kerekíthető, és ez a kerekített érték lesz az alkalmazott szögecsszám.

Méretezzük a 2.55 ábrán látható központosan húzott rud szögecselt illesztését. A kapcsolatot kétszer nyírt szögecsekkel oldjuk meg. Az illesztésnél az F erő a v_2 vastagságú lemezből átadódik a két v_1 vastagságú hevederlemezbe n darab szögecs segítségével, majd ismét n szögecs szükséges ahhoz, hogy továbbadódjék a v_2 vastagságú lemezbe. A számításhoz szükséges méretek, illetve feszültségek:

$$F = 140 \text{ kN}, \quad v_1 = 8 \text{ mm}, \quad v_2 = 12 \text{ mm}, \quad d = 19 \text{ mm},$$

$$\tau_{\text{eng}} = 110 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_{\text{p eng}} = 270 \text{ N/mm}^2.$$



2.55 ábra

Először az egy szögecsre megengedett erőt számítsuk ki.

Nyírásra:

$$D''_{\text{eng}} = 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \tau_{\text{eng}} = 2 \cdot \frac{19^2 \cdot 3,14}{4} \cdot 110 = 62,37 \cdot 10^3 \text{ N} = 62,37 \text{ kN},$$

Palástnyomásra:

$$D''_{\text{p eng}} = d \cdot v \cdot \sigma_{\text{p eng}} = 19 \cdot 12 \cdot 270 = 61,56 \cdot 10^3 \text{ N} = 61,56 \text{ kN}.$$

Az egy szögecsre megengedett erő a most kiszámított két erő közül a kisebb:

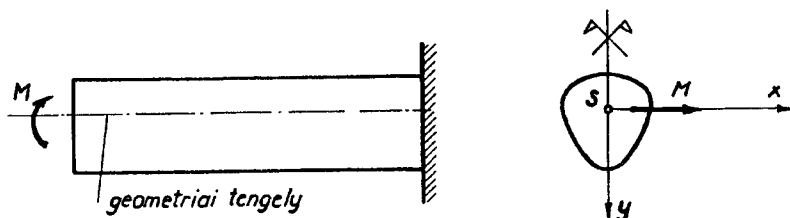
$$D''_{\text{eng}} = 61,56 \text{ kN}.$$

A szükséges szögecsszám:

$$n_{\text{szüks}} = \frac{F}{D''_{\text{eng}}} = \frac{140}{61,56} = 2,27 \rightarrow 3 \text{ db}.$$

2.2.3 A tiszta egyenes hajlítás

Tiszta egyenes hajlításról akkor beszélünk, ha csak hajlítónyomaték a rúdelem igénybevétele, és ez a hajlítónyomaték a rud geometriai tengelye és a keresztmetszet valamelyik tehetetlenségi főtengelye által meghatározott síkban működik. Ez utóbbi feltételt úgy is fogalmazhatnánk, hogy az M nyomatékvektor párhuzamos a keresztmetszet valamelyik tehetetlenségi főtengelyével. Így a 2.56 ábrán látható befogott rud (konzol) igénybevétele is tiszta egyenes hajlítás. Itt a nyomatékvektor a szimmetriasíkra merőleges. A keresztmetszet szimmetriatengelye főtengely, és főtengely az erre merőleges súlyponti tengely is.



2.56 ábra

2.2.3.1 A feszültségek és az alakváltozás meghatározása

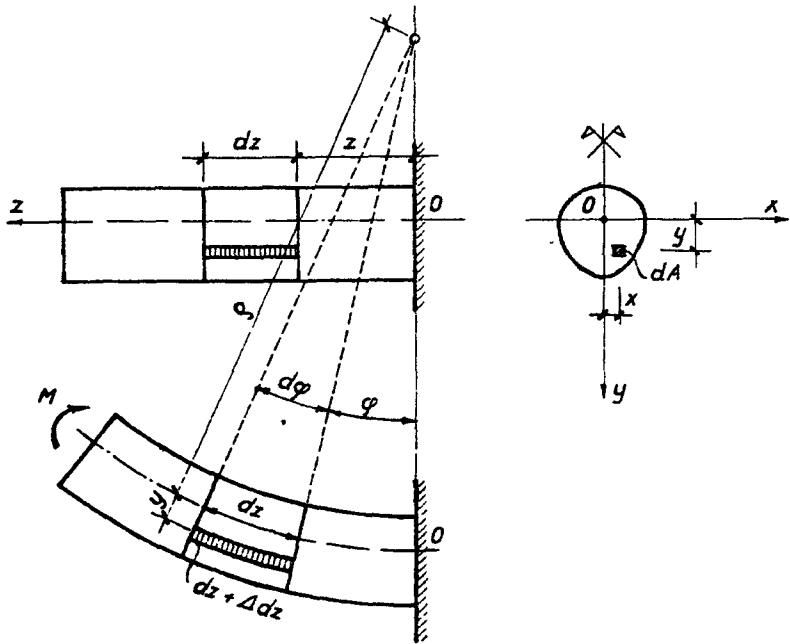
A tiszta egyenes hajlításra igénybe vett rud keresztmetszeteiben keletkező feszültségek és az alakváltozás meghatározása céljából a 2.57 ábrán látható, szimmetrikus keresztmetszetű konzolt fogjuk vizsgálni. A rud anyaga homogén, izotróp és rugalmas, a Hooke-törvényt követi.

A hajlítás hatására a rud deformálódik, a hajlítás előtti egyenes tengelye - egyelőre ismeretlen - görbe alakot vesz fel. A deformáció vizsgálatakor induljunk ki két egyszerűsítő, geometriai jellegű föltevésből. Ezeket Bernoulli-Navier féle föltevéseknek nevezik.

Bernoulli és Navier első föltevése szerint a rud geometriai tengelyre merőleges sík keresztmetszetek az alakváltozás után is síkok és önmagukkal egybevágóak maradnak. A kísérletek szerint ez a feltételezés, a mérnöki gyakorlatban előforduló esetekben elfogadható.

A második feltételezés szerint a rudnak a geometriai tengellyel párhuzamos bármely egyenese (szála) a meggörbülés után is merőleges marad a keresztmetszet síkjára. A tapasztalat ezt a föltevést is igazolja.

A rud deformációját a 2.57 ábrán szemléltetjük. Itt bejelöltük egy, a befogástól tetszőleges z távolságban levő keresztmetszetet, és egy másikat is, amely az előbbtől elemien kicsiny, dz távolságban helyezkedik el. Az alakváltozás során ezek a keresztmetszetek elfordulnak, mégpedig φ , illetve $\varphi + d\varphi$ szöggel.



2.57 ábra

Jelöljük ki a keresztmetszetben egy x, y koordinátájú, elemien kicsiny dA felületelemet, és ugyanilyen x, y koordinátákkal a két bejelölt keresztmetszet között egy dA keresztmetszetű és dz hosszúságú kis hasábot. Ennek a hasábnak a hosszúsága az alakváltozás során megváltozik, mégpedig a hasáb helyzetétől függően. A keresztmetszet alsó részén kijelölhető hasábk (elemi szálak) megnyulnak, felül viszont hosszcsökkenés lesz. Lesz azonban olyan szál is, ar elyiknek nem változik meg a hossza. Azt a szimmetriáskban levő szálát, amelynek a hossza a hajlítás során nem változik meg, a rud szilárdsági tengelyének nevezzük. A 2.57 ábrán ez az egyelőre meg nem határozott helyzetű O ponton átmenő z tengely. A szilárdsági tengely meggörbült alakját rugalmas vonalnak nevezzük.

Térjünk vissza a kis hasáb vizsgálatához. Az eredetileg dz hosszúságú hasáb megváltozott hossza $dz + \Delta dz$ lesz. A szilárdsági tengelyben levő szál hossza változatlanul dz az alakváltozás után is.

A kijelölt két keresztmetszet az alakváltozás után $d\varphi$ szöggel hajlik egymáshoz. A 2.57 ábrán látjuk azt a körölkket, amelynek középponti szöge $d\varphi$, ivhossza pedig dz . Ehhez a körölkkekhez tartozó sugarat φ -val jelöljük, és görbületi sugárnak nevezzük. A sugár tehát a rugalmas vonal görbületi sugara. Mivel $d\varphi$ igen kicsiny, a körölkkekre felrtható, hogy:

$$dz = d\varphi \cdot \rho.$$

Ugyanez a $d\varphi$ szög a $\rho + y$ sugaru körívekben is jelentkezik, itt az ívhossz $dz + \Delta dz$. Erre a körívekre is igaz, hogy:

$$dz + \Delta dz = d\varphi (\rho + y).$$

Mindkét egyenletből $d\varphi$ -t kifejezve a

$$\frac{dz}{\rho} = \frac{dz + \Delta dz}{\rho + y}$$

egyenletre jutunk. Átrendezve:

$$\frac{\rho + y}{\rho} = \frac{dz + \Delta dz}{dz}.$$

Osztás és egyszerűsítés után

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{\rho}.$$

Az egyenlet bal oldalán a hosszváltozás és az eredeti hossz viszonya, a fajlagos nyulás szerepel:

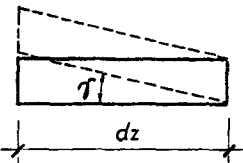
$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Igy az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad \dots (1).$$

A fajlagos nyulás tehát az y koordináta lineáris függvénye, ami összhangban van azzal a feltételezéssel, hogy a keresztmetszetek a rud meggörbülése után is síkok maradnak.

Mivel a hasáb hosszúsága, dz elemien kicsiny, a hasáb egyenes hasábnak tekinthető, legalábbis a torzulás megítélése szempontjából. A hasábnak olyan jellegű alakváltozása nem lesz, mint amilyent a 2.58 ábrán láthatunk, mert az ellentétben állna Bernoulli és Navier második feltételezésével, nem lennének a szálak a keresztmetszetre merőlegesek. Ezt egyenlet formájában is felírhatjuk:

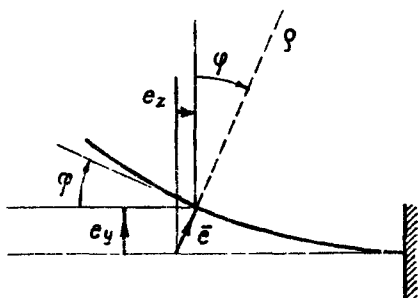


2.58 ábra

$$\gamma = 0 \quad \dots (2).$$

Az (1.) és (2.) jelű egyenletekben csak geometriai jellegű mennyiségek szerepelnek, ezek geometriai egyenletek.

Elemezzük tovább az alakváltozást a 2.59 ábrán, ahol a rudnak csak a tengelyét és annak meggyörbült alakját, a rugalmas vonalat rajzoltuk ki. Az alakváltozásra jellemző mennyiségek közül eddig a keresztmetszet φ elfordulásával és a ρ görbületi sugárral ismerkedtünk meg.



2.59 ábra

A keresztmetszet elfordulása a rugalmas vonal érintőjének elfordulásával azonos, az ábrán az utóbbi szöveget is bejelöltük. A teljesség kedvéért említettük meg, hogy a keresztmetszetek nemcsak elfordulnak, hanem el is tolódnak. A keresztmetszet 0 pontjának eltolódása egy e eltolódásvektorral adható meg, melynek két vetülete e_y és e_z . (A későbbiekben az alakváltozásokról még bővebben lesz szó.)

A hajlítás további elemzéséhez fel kell használnunk azokat az összefüggéseket, amelyek a feszültség és a fajlagos alakváltozás között fennállnak. Ezeket az összefüggéseket csak fizikai kísérletekkel lehet felderíteni, ezért ezeket az összefüggéseket leíró egyenleteket fizikai egyenleteknek nevezzük.

Az egyik fizikai egyenletünk a már ismert

$$\sigma = E \cdot \epsilon,$$

Hooke-törvény, amelyet a húzás és nyomás vizsgálatánál láttunk először. A másik fizikai egyenletünk a

$$\tau = G \cdot \gamma$$

összefüggés, amelyet a nyírás tárgyalásánál ismertünk meg. (Ezt az összefüggést is Hooke-törvénynek nevezzük.) Mindkét egyenlet lineáris kapcsolatot ír le a feszültség és a fajlagos alakváltozás között.

Ha e két fizikai egyenletet behelyettesítjük az (1) és (2) geometriai egyenletekbe, akkor a feszültségekre a

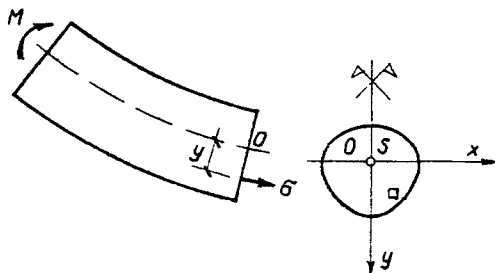
$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho} \quad \dots (3)$$

és

$$\tau = 0$$

képleteket kapjuk. Láthatjuk, hogy a tartó keresztmetszeteiben nyírófeszültség nincs, a normál feszültség pedig y lineáris függvénye. A (3) jelű képlet azonban a feszültség kiszámítására még nem alkalmas, mert a görbületi sugarat nem ismerjük.

A hajlításból keletkező normál feszültségek meghatározásához egyensúlyi egyenletek felírása is szükséges. Vágjuk el a vizsgált rudat valamelyik keresztmetszete mentén, és válasszuk külön a rud bal oldali részét (2.60 ábra). E ruddarab bal oldali véglapjára az M erőpár, a jobb oldali véglapjára pedig az anyagi összefüggést helyettesítő feszültségek működnek. Az eddigi vizsgálataink szerint itt csak normál feszültségek hatnak, amelyet az x, y koordinátájú pontban be is rajzoltunk (σ).



2.60 ábra

A ruddarabra működő dinámoknak egyensúlyban kell lenniök:

$$[M, (\sigma)] = 0.$$

Az egyensúlyi kijelentés alapján írjunk föl vetületi egyenletet a z tengelyre. A dA nagyságú felületre ható erő $\sigma \cdot dA$, az egész keresztmetszetre (A) ennek az integrálja hat.

$$\sum F_{iz} = 0 - \int_{(A)} \sigma \, dA = 0.$$

Itt figyelembe vettük azt, hogy az erőpár erővetülete bármelyik tengelyre zérus.

Helyettesítsük be a feszültség (3) jelű képletét, és emeljünk ki az állandókat:

$$\frac{E}{\rho} \int_{(A)} y \, dA = q.$$

A képletben a határozott integrál a keresztmetszet x tengelyre vonatkozó statikai nyomatékát jelenti, ennek kell zérusnak lenni, mivel E zérustól különböző, ρ pedig véges:

$$\int y \, dA = S_x = 0. \quad (A)$$

Az S_x statikai nyomaték akkor zérus, ha az x tengely átmege a keresztmetszet súlypontján. Ez az eredmény azt jelenti, hogy a szilárdsági tengely (amelyiknek nincs megnyulása) átmege a keresztmetszet súlypontján, tehát a szilárdsági tengely és a súlyponton átmenő geometriai tengely azonos.

A ruddarab egyensulya alapján most írjunk fel nyomatékegyenletet az x tengelyre. Az oldalnézeti ábrában ez azt jelenti, hogy az O pontra kell nyomatéki egyenletet felírni. Az ábrán bejelölt $\sigma \, dA$ erő nyomatéka $-y \, \sigma \, dA$, ezt kell integrálni, az egész A tartományra. Az erőpár nyomatéka M . Ezek szerint

$$\sum M_{ix} = M - \int y \, \sigma \, dA = 0. \quad (A)$$

Helyettesítsük be a (3) jelű képletét és emeljük ki az állandókat:

$$M - \frac{E}{\rho} \int y^2 \, dA = 0. \quad (A)$$

Az integrál a keresztmetszet x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát jelenti:

$$\int y^2 \, dA = J_x, \quad (A)$$

így

$$M - \frac{E}{\rho} J_x = 0.$$

Ezzel nevezetes eredményt kapunk a görbületre:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x} \quad \dots (4).$$

Tehát a görbület (a görbületi sugár reciproka) arányos a nyomatékkal és fordítva arányos a rugalmassági modulussal és az inercianyomatékkal.

kal. Jelen esetben - mivel egyik mennyiség sem függ z -től - a görbületi sugár minden keresztmetszetben ugyanakkora, vagyis a rugalmas vonal kör. Az előzőekben a körökre felírt $dz = \varphi \cdot d\varphi$ összefüggésből

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{d}{dz}.$$

Az előző két egyenlet összevetéséből:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EJ_x} \quad \dots (5)$$

differenciálegyenletre jutunk, amelyet későbbi tanulmányainkban még használni fogunk.

Ha pedig a görbület kifejezését (4) behelyettesítjük a feszültség képletébe (3), akkor a

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y \quad \dots (5)$$

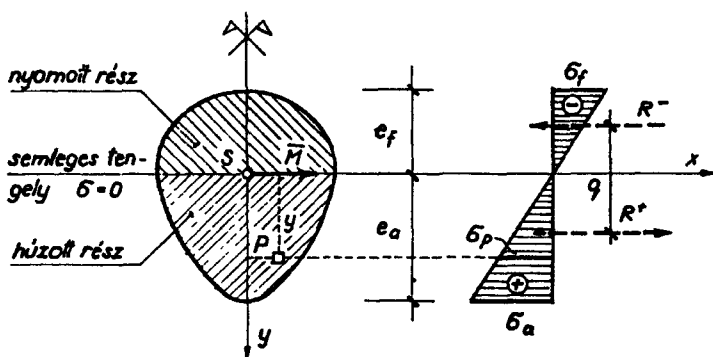
képletre jutunk, amely alkalmas a feszültségek számítására.

2.2.3.2 A feszültségi diagram és a feszültségi test

Az előzőekben levezetett (5) jelű képlet alapján elemezhetjük a hajlított rud keresztmetszetében ébredő feszültségeket.

A képletből látható, hogy az $y=0$ koordinátájú pontokban, vagyis a súlypontot átmenő x tengely mentén mindenütt zérus a feszültség (2.61 ábra). Azt a tengelyt, ahol a feszültség zérus, semleges tengelynek nevezzük. A semleges tengelyről y távolságu pontokban (az x tengellyel párhuzamosan bejelölt vonal mentén) mindenütt azonos nagyságu a feszültség. A feszültség az y koordináta függvényében lineárisan változik. Pozitív hajlítónyomaték hatására a semleges tengely alatt húzófeszültségek, felette pedig nyomófeszültségek keletkeznek. (Negatív nyomaték esetén természetesen a feszültségek előjele is megfordul.) A legnagyobb húzófeszültség a semleges tengely alatt a legtávolabbi pontban keletkezik, a legnagyobb nyomófeszültség pedig a semleges tengely feletti legtávolabbi pontban. Mivel a legnagyobb húzó- és nyomófeszültségek a hajlított rud szélső széláiban keletkeznek, szélsőszál-feszültségeknek nevezzük ezeket.

Az (5) jelű képlet előjelhelyesen adja meg a feszültséget, ha a nyomatékokat a fentieknek megfelelően, előjelhelyesen helyettesítjük be és az y koordináta előjelét a 2.61 ábrán látható koordináta-rendszer szerint a súlyponttól lefelé pozitívnak, felfelé negatívnak vesszük fel. Ha a képletbe y helyére az e_f és e_a szélsőszál távolságokat írjuk be, akkor kiszámít-



2.61 ábra

hatjuk a szélsőszál-feszültségeket, és megrajzolhatjuk a feszültségek ábráját, vagy más szóval a feszültségi diagramot. A feszültségi diagramról leolvashatjuk a tetszőleges y koordinátájú P pontban ébredő feszültséget.

A 2.61 ábrán a hajlítónyomaték vektorát is megrajzoltuk. Az erópár a rud szimmetriasiskjában működik, azaz az y, z síkban. Az erópár vektorát pedig a síkjára merőleges, jelen esetben az x irányu M vektorral ábrázolhatjuk. Ha a nyomaték pozitív, akkor az x tengely pozitív ága felé (jobbra) irányítjuk. (Az ábrán - az igénybevételi ábrák értelmezésének megfelelően - a jobb oldali tartórész határkeresztmetszetére ható nyomatékvektort rajzoltuk meg.)

A feszültségi diagram csak vetületi ábrázolása a feszültségeknek, ugyanis a feszültségek párhuzamos térbeli erőrendszert alkotnak. Azaz a feszültségek, síklappal határolt, úgynevezett feszültségi testet alkotnak, amelynek egyik vetülete a feszültségi diagram. A feszültségi test a húzott zóna fölött és a nyomott zóna fölött is egy-egy ék alakú test.

Bizonyos esetekben célszerű a húzófeszültségeknek és a nyomófeszültségeknek eredőjét is külön-külön meghatározni. Erre alkalmazható módszert a térbeli párhuzamos erőrendszereknel tanultunk. Jelöljük ezeket az eredőket R^+ -val illetve R^- -val. Az erópárral most ezeknek az erőknek kell egyensúlyt tartaniuk:

$$(M, R^+, R^-) = 0.$$

Ebből következik, hogy az R^+ és R^- erópárt képez, vagyis egyenlő nagyságú $R^+ = R^- = R$, párhuzamosak, de ellentett értelműek, továbbá nyomatékuk M -mel egyenlő:

$$R \cdot q = M,$$

ahol q a két (belső) erő karja, ahogy az ábrán is bejelöltük.

2.2.3.3 Méretezés hajlításra

A hajlításra való méretezés alapelve az, hogy a tartón a legnagyobb normálfeszültség abszolút értéke ne legyen nagyobb a hajlításra megengedett feszültségnél:

$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma_{\text{eng}}.$$

Az építőipari gyakorlatban előfordulnak olyan anyagok is, amelyek húzásra és nyomásra másképpen viselkednek, ezeknél eltérő értékű lehet a hajlításból származó húzásra megengedett σ_{eng}^+ és a hajlításból származó nyomásra megengedett σ_{eng}^- feszültség. Ilyen anyagok esetén ki kell számítani a tartóban fellépő legnagyobb húzó- és a legnagyobb nyomófeszültséget is, és egyiknek sem szabad nagyobbak lenni a megfelelő megengedett feszültségnél:

$$\sigma_{\max}^+ \leq \sigma_{\text{eng}}^+,$$

$$|\sigma_{\max}^-| \leq \sigma_{\text{eng}}^+.$$

Mint már tudjuk, a legnagyobb feszültségek a keresztmetszetnek a hajlítás síkjára merőleges súlyvonalától (tehetetlenségi főtengelyétől) e_a és e_f távolságban levő szélső szálaiban keletkeznek. A szélsőszálfeszültségek értéke:

$$\sigma_a = \frac{M}{J_x} e_a,$$

$$\sigma_f = \frac{M}{J_f} e_f.$$

Vezessük most be a

$$K_{xa} = \frac{J_x}{e_a} \quad \text{és}$$

$$K_{xf} = \frac{J_x}{|e_f|}$$

jelöléseket. A K_{xa} és K_{xf} - mm³ vagy cm³ dimenzióju - mennyiségeket hajlítási keresztmetszeti tényezőnek, vagy csak röviden keresztmetszeti tényezőnek nevezzük. A keresztmetszeti tényező alkalmazásával a szélsőszálfeszültségek a következő képletekkel számíthatók:

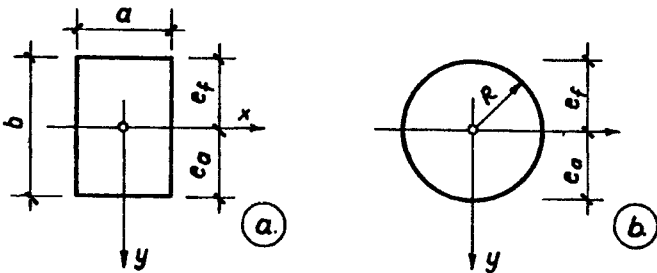
$$\sigma_a = \frac{M}{K_{xa}},$$

$$\sigma_f = \frac{-M}{K_{xf}}.$$

σ_f képletében a negatív előjel abból adódik, hogy pozitív nyomaték esetén a keresztmetszet felső részén nyomófeszültség keletkezik. (A keresztmetszeti tényezőt csak pozitív előjellel szokás számításba venni.)

Számítsuk ki két jellegzetes keresztmetszetet, a téglalap és a kör keresztmetszeti tényezőjét (2.62 ábra). A téglalagnál $e = b/2$, így az x tengelyre csak egy keresztmetszeti tényező számítható:

$$K_x = \frac{J_x}{b/2} = \frac{a b^3 / 12}{b/2} = \frac{a \cdot b^2}{6}.$$



2.62 ábra

A körnél is egyenlőek a szélsőszál-távolságok: $e_a = e_f = R$.

$$K_x = \frac{J_x}{R} = \frac{R^4 \pi / 4}{R} = \frac{R^3 \pi}{4}.$$

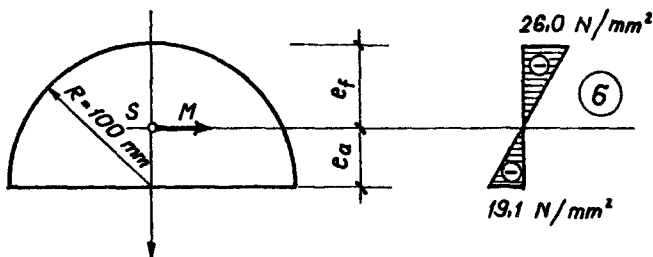
A hajlított tartó ellenőrzésénél a szélsőszál-feszültségeket kell összehasonlítani a hajlításra megengedett feszültségekkel. Megfelel a tartó, ha

$$|\sigma_a| = \left| \frac{M}{K_{xa}} \right| \leq \sigma_{eng} \quad \text{és}$$

$$|\sigma_f| = \left| \frac{M}{K_{xf}} \right| \leq \sigma_{eng}.$$

Példaként ellenőriztük a 2.63 ábrán látható félkör alakú tartókeresztmetszetet, amelyre $M=5,0$ kN m pozitív hajlítónyomaték hat. A hajlításból származó húzásra és nyomásra megengedett feszültség:

$$\sigma_{eng} = 28,0 \text{ N/mm}^2.$$



2.63 ábra

Ismerve a félkör súlypont-képletét, a szélsőszál-távolságok:

$$e_a = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 100}{3\pi} = 42,4 \text{ mm},$$

$$e_f = e_a - R = 42,4 - 100 = -57,6 \text{ mm}.$$

A súlyponti x tengelyre vonatkozó inercianyomaték:

$$J_x = J_{x_c} - A e_a^2 = \frac{100^4 \cdot \pi}{8} - \frac{100^2 \cdot \pi}{2} \cdot 42,4^2 = 1,103 \cdot 10^7 \text{ mm}^4.$$

A keresztmetszeti tényezők:

$$K_{xa} = \frac{J_x}{e_a} = \frac{1,103 \cdot 10^7}{42,4} = 2,600 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$K_{xf} = \frac{J_x}{|e_f|} = \frac{1,103 \cdot 10^7}{57,6} = 1,915 \cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$

A szélsőszál-feszültségek:

$$\sigma_a = \frac{M}{K_{xa}} = \frac{5,0 \cdot 10^6}{2,600 \cdot 10^5} = 19,3 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_f = \frac{-M}{K_{xf}} = \frac{-5,0 \cdot 10^6}{1,915 \cdot 10^5} = -26,1 \text{ N/mm}^2.$$

A tartó megfelel, mert

$$|\sigma_a| = 19,3 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{eng} = 28,0 \text{ N/mm}^2 \quad \text{és}$$

$$|\sigma_f| = 26,1 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{eng} = 28,0 \text{ N/mm}^2.$$

A 2.63 ábrán feltüntettük a normálfeszültségek eloszlását, az ugynevezett σ ábrát is.

A hajlított tartó tervezésekor olyan keresztmetszetet kell kialakítanunk, amelyben a keresztmetszetre ható nyomaték hatására keletkező feszültség értéke nem haladja meg a megengedett feszültséget. Ez a feltétel akkor teljesül, ha a választott keresztmetszet alsó és felső szélső szálára vonatkozó keresztmetszeti tényezői nem kisebbek a nyomatékból és a megengedett feszültségből meghatározható szükséges keresztmetszeti tényezőnél. A szükséges keresztmetszeti tényezőt úgy számíthatjuk ki, hogy a

$$|\sigma| = \frac{|M|}{K_x}$$

összeftégsbe σ helyére σ_{eng} -et helyettesítünk és K_x -et kifejezzük:

$$K_{szüks} = \frac{|M|}{\sigma_{eng}}.$$

Tehát a keresztmetszet megfelel, ha

$$K_x \geq K_{szüks} = \frac{|M|}{\sigma_{eng}}.$$

Méretezzük a 2.62.a ábrán feltüntetett téglalap keresztmetszetű fa-gerendát, ha $\sigma_{eng} = 7,0 \text{ N/mm}^2$. A keresztmetszet alakja a $b = 1,3$ a

összeftégséssel legyen adott. A mértékadó nyomaték: $M = 13,5 \text{ kNm}$.

A szükséges keresztmetszeti tényező:

$$K_{szüks} = \frac{|M|}{\sigma_{eng}} = \frac{13,5 \cdot 10^6}{7,0} = 1,928 \cdot 10^6 \text{ mm}^3.$$

A $b = 1,3$ a összefüggéssel alkalmazzuk a téglalap keresztmetszeti tényezőjének képletét:

$$K_x = \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{a \cdot (1,3a)^2}{6} = \frac{1,3^2}{6} a^3 \geq 1,928 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Innen $a = 190 \text{ mm}$, $b = 1,3a = 247 \text{ mm}$ adódik. Az így kiszámított és elméletileg szükséges legkisebb méretek sokszor gyakorlati szempontok miatt nem célszerűek vagy egyáltalán nem alkalmazhatók. Így ha példánk esetében páros cm méreteket kívánunk, akkor olyan gerendát alkalmazunk, amelynél $a = 20 \text{ cm}$ és $b = 26 \text{ cm}$.

A méretek megválasztása után ellenőriznünk is kell a keresztmetszet.

$$K_x = \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{20 \cdot 26^2}{6} = 2255 \text{ cm}^3 = 2,255 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M|}{K_x} = \frac{1,35 \cdot 10^7}{2,255 \cdot 10^6} = 5,99 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{\text{eng}} = 7,0 \text{ N/mm}^2,$$

tehát a tartó megfelel.

Itt említjük meg, hogy a különböző keresztmetszeti acélgerendák, idomacélok keresztmetszeti méreteit szabványok állapítják meg. Ezek a szabványok a szóban levő keresztmetszet méretein kívül közlik azok egyéb geometriai adatait, így többek között a keresztmetszeti területet, J_x és K_x értékét. Ha például a fentebb méretezett fagerenda helyett egy I-szelvényű acélgerendát (MSZ 325) akarunk alkalmazni $\sigma_{\text{eng}} = 140 \text{ N/mm}^2$ megengedett feszültséggel, akkor a szükséges keresztmetszeti tényező:

$$K_{\text{szüks}} = \frac{|M|}{\sigma_{\text{eng}}} = \frac{13,5 \cdot 10^6}{140} = 9,64 \cdot 10^4 \text{ mm}^3 = 96,4 \text{ cm}^3.$$

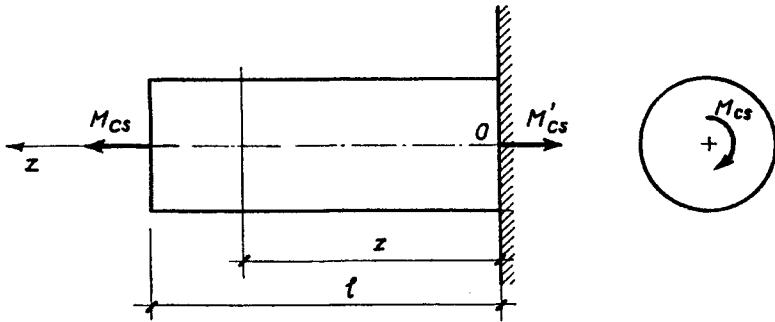
Az I-gerendákra vonatkozó táblázatban éppen ekkora keresztmetszeti tényezőjű gerendát nem találunk, de választhatjuk a 160 mm magas I-szelvényt, amelynél $K_x = 117 \text{ cm}^3$. Ezt a keresztmetszetet még ellenőriznünk kell:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M|}{K_x} = \frac{13,5 \cdot 10^6}{117 \cdot 10^3} = 115,5 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{\text{eng}} = 140 \text{ N/mm}^2,$$

tehát a szelvény megfelel.

2.2.4 A tiszta csavarás

Tiszta csavarásról akkor beszélünk, ha a vizsgált rud egyetlen igénybevétele az M_{cs} csavarónyomaték, és a csavarónyomaték vektora párhuzamos a rud geometriai tengelyével. (A keresztmetszetre és a megtámasztási viszonyokra is van kikötés, ezekre a későbbiekben utalunk.) Így a 2.64 ábrán szemléltetett körkeresztmetszetű rud is tiszta csavarást szenved. A csavarás tárgyalásánál - később ismertetendő okok miatt - különbséget kell tennünk a rudak keresztmetszetének alakja szerint. Részletesen csak a kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarásával fogunk foglalkozni.

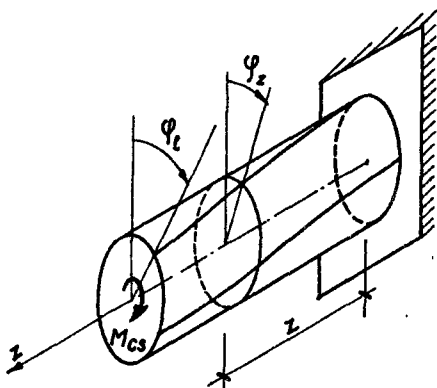


2.64 ábra

2.2.4.1 A keresztmetszetekben keletkező feszültségek és az alakváltozás meghatározása körszimmetrikus keresztmetszetű rudak csavarásánál

Legyen adott egy homogén, izotrop, rugalmas és a Hooke-törvényt követő anyagú, egyenes tengelyű, kör keresztmetszetű rud, amelynek egyik végét befogással rögzítettük, a másik végére pedig az M_{cs} csavarónyomaték hat (2.65 ábra). Az alakváltozás után a rud nyugalomban marad. Ebből nyilván az következik, hogy a befogásnál az M_{cs} -val azonos nagyságú, de ellentétes előjellű reakció erőpár keletkezik.

A csavarónyomaték hatására a rudnak a befogástól z távolságban levő keresztmetszete valamilyen φ_z szöggel elfordul. A keresztmetszetek alakváltozásaira a tapasztalattal jól megegyező feltételezést teszünk, mint ahogy a tiszta egyenes hajlítás vizsgálatánál is tettük. Feltételezzük, hogy a rud tengelyére merőleges sík keresztmetszetek alakváltozás után is síkok és önmagukkal egybevágók maradnak. Ezek szerint ugyanannak

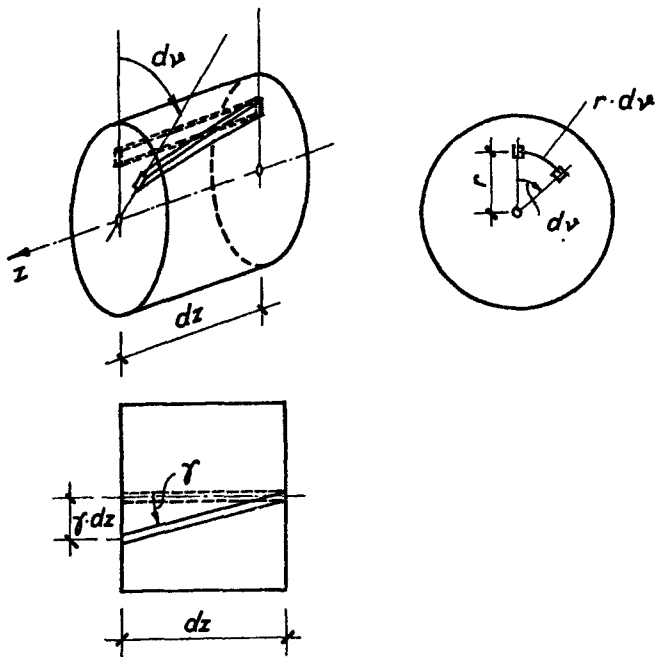


2.65 ábra

elferdülésével, a γ szöggel jellemezhető.

a keresztmetszetnek bármely két pontja között a távolság az alakváltozás során nem változik.

A deformáció közelebbi vizsgálatához vágjunk ki a rudból egy dz , elemien kicsi hosszúságú darabot (2.66 ábra). A kis hengeren belül jelöljünk ki a rud tengelyével párhuzamosan egy dA alapterületű hasábot. Az alakváltozás során ez el fog csavarodni. A kör-szimmetria miatt az elcsavarodás csak a rud geometriai tengelye (z) körül jöhet létre. A kiragadott hasáb deformációja az alkotók



2.66 ábra

A továbbiakban φ jelentse valamely keresztmetszetnek a rudtengely körül bekövetkező (abszolút) elfordulását, ψ pedig egy másik keresztmetszethez viszonyított (relatív) elfordulását. A 2.66 ábrán bejelöltük a dz távolságban levő keresztmetszetek $d\psi$ relatív elfordulását. A kis hasáb alapja egy köríven modzul el, melynek hossza: $ds = r \cdot d\psi$. Ugyanez a körív egy r sugaru henger palástján a γ szögtorzulásból is számítható: $ds = \gamma \cdot dz$. (A γ szög igen kicsiny, ezért $\tan \gamma = \gamma$). A két kifejezést egyenlővé téve:

$$\gamma dz = r \cdot d\psi,$$

amiből a

$$\gamma = r \frac{d\psi}{dz} \quad \dots (1)$$

geometriai egyenletre jutunk.

A fizikai egyenleteink a rud anyagára vonatkozó kikötéseinkből következnek:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad \dots (2),$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \dots (3).$$

Ezután megvizsgálhatjuk a csavart rudban ébredő feszültségeket.

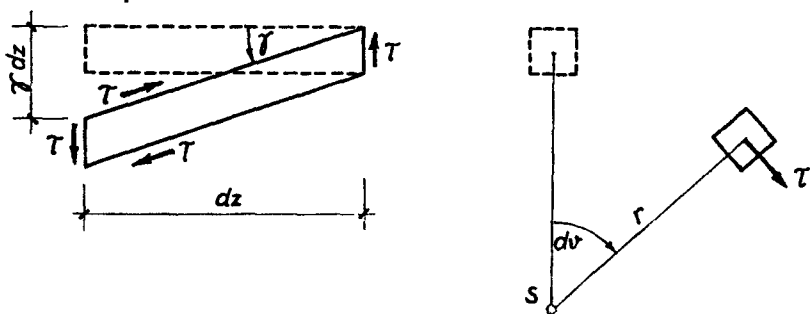
A (2) jelű egyenlet (a Hooke-törvény) szerint a keresztmetszetben normál-feszültség csak akkor keletkezhet, ha a rud szálainak zérustól különböző (fajlagos) megnyulása van. A tapasztalat szerint azonban a tiszta csavarásra igénybe vett rud nem nyulik meg, tehát normál-feszültség sem keletkezik ($\sigma = 0$). E különben kísérletek nélkül is belátható, ha a rudat egy tetszőleges helyen kettévágjuk, és a levágott bal oldali részre felírjuk a z irányú vetületi egyenletet. A $\sum F_{iz} = 0$ vetületi egyenlet csak akkor teljesülhet, ha:

$$\sigma = 0.$$

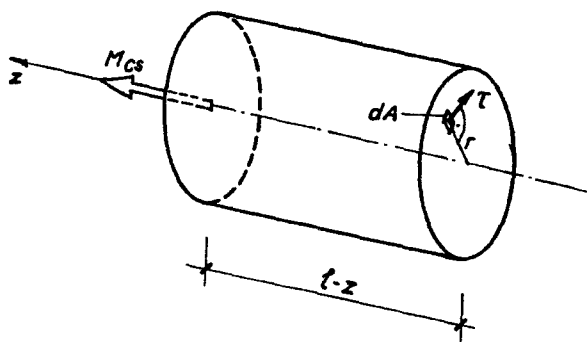
Helyettesítsük be a (3) jelű fizikai egyenletbe az (1) jelű geometriai egyenletet, akkor a

$$\tau = G \cdot r \frac{d\psi}{dz} \quad \dots (4)$$

kifejezésre jutunk. Ez még nem alkalmas a nyírőfeszültség kiszámítására, de azt már megmutatja, hogy az az r sugárral arányos. A nyírőfeszültség irányának megállapítása céljából vizsgáljuk külön a 2.66 ábrán bejelölt hasábot. A hasábot két nézetben újra lerajzoltuk a 2.67 ábrán. A hasáb deformációjára jellemző γ szög akkor látszik valódi nagyságában, ha a hasábot a dA felülethez tartozó sugár irányából szemléljük. A kis hasábra ható nyírőfeszültségek az ábrán berajzolt módon működnek, azaz a dA felületen éppen érintőirányú nyírőfeszültség keletkezik.



2.67 ábra



2.68 ábra

A további vizsgálathoz vegyük a körkeresztmetszetű rudnak valamely keresztmetszettől balra levő részét (2.68 ábra). A rúddarab bal oldali vég-lapjára az M_{cs} csavarónyomaték hat, az elvágott metszeten az anyagi folytonosságot a belső feszültségekkel pótoljuk. A feszültségekről tudjuk, hogy csak nyírófeszültségek keletkeznek, ezek az r sugárral arányos nagyságúak, és arra merőlegesek. Az ábrán berajzoltuk a dA , elemien kicsiny felületre ható τ nyírófeszültségét.

E rúddarabra ható dinámoknak egyensúlyban kell lenniük. Az $[M_{cs}, (\tau)] = 0$ egyensúlyi kijelentés alapján írjuk fel a z tengelyre vonatkozó nyomatéki egyensúlyi egyenletet:

$$\sum M_{Iz} = M_{cs} - \int r \cdot \tau \cdot dA = 0. \quad (A)$$

Az integráljel mögött a dA elemi felületre ható erő nyomatéka szerepel. Helyettesítsük helyére a (4) jelti kifejezést, és emeljük ki az állandókat az integráljel elé:

$$M_{cs} - G \frac{d\psi}{dz} \int r^2 dA = 0. \quad (A)$$

Az egyenletben a határozott integrál a keresztmetszet súlypontjára vonatkozó poláris inercianyomatékot jelenti:

$$J_o = \int r^2 dA. \quad (A)$$

Ezt helyettesítve az előző statikai egyenletbe, a

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{M_{cs}}{GJ_o} \quad \dots (5)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ez alkalmas az elcsavarodás számítására, most azonban helyettesítsük be a (4) jelű kifejezésbe. G-vel való egyszerűsítés után megkapjuk a feszültségszámításra alkalmas képletet:

$$\tau = \frac{M_{cs}}{J_o} r.$$

A legnagyobb feszültség a kerületi pontokban keletkezik:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{J_o} R. \quad \dots (6)$$

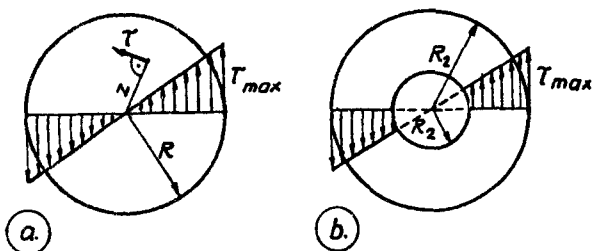
A nyírófeszültségek megoszlása lineárisan változó és körszimmetrikus, ahogyan a 2.69.a ábrán látható.

A fentiekben levezetett képletek a körgyűrű keresztmetszetű rudak (csövek) csavarására is alkalmazhatók, tudniillik a kiindulási feltevések is érvényesek. Az J_o most a körgyűrű poláris inercianyomatéka:

$$J_o = \frac{R_1^4 \cdot \pi}{2} - \frac{R_2^4 \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{2} (R_1^4 - R_2^4),$$

a feszültségmegoszlás pedig a 2.69.b ábra szerinti.

Térjünk vissza az alakváltozás számítására. Az (5) jelű differenciálegyenletből:



2.69 ábra

$$\psi = \int \frac{M_{cs}}{J_0} dz .$$

Számítsuk ki a rud véglapja közötti relatív elfordulást. Mivel a rud hossza mentén a csavarónyomaték nem változik:

$$\psi = \frac{M_{cs}}{G J_0} \int_0^{\ell} dz = \frac{M_{cs} \cdot \ell}{G \cdot J_0} .$$

Megjegyezzük, hogy a befogási keresztmetszet nem fordul el, ezért a befogási keresztmetszethez viszonyított ψ relatív elcsavarodási szög egyben φ abszolút elcsavarodási szögnek is tekinthető.

2.2.4.2 Körszimmetrikus keresztmetszetű rudak méretezése csavarásra

Legyenek adottak a csavarásra igénybe vett rud keresztmetszetének méretei, az M_{cs} csavarónyomaték és az anyagtól függő, nyírásra megengedett feszültség, τ_{eng} . Ellenőrizzük a rudat.

A (6) jelű képlet alapján ki tudjuk számítani τ_{max} -ot, és ezt közvetlenül összehasonlítjuk τ_{eng} -tel.

Az adott igénybevételre megfelel a rud, ha

$$\tau_{max} \leq \tau_{eng} .$$

A (6) jelű képletet egyszerűbb alakban is felírhatjuk, ha levezetjük a csavarási keresztmetszeti tényező (K_{cs}) fogalmát.

$$K_{cs} = \frac{J}{R}.$$

Ez lényegesen pozitív és cm^3 vagy mm^3 dimenzióju mennyiség. Kör keresztmetszet esetén:

$$K_{cs} = \frac{R^3 \pi}{2}.$$

Igy a rud megfelelő, ha

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{K_{cs}} \leq \tau_{\text{eng}}. \quad \dots(7).$$

Ellenőrzés végezhető a megengedett igénybevétel kiszámításával is. Megengedett csavarónyomatékon azt az M_{cs} csavarónyomatékot értjük, amelynek hatására keletkező legnagyobb nyírófeszültség éppen a megengedett nyírófeszültség.

$$M_{cs \text{ eng}} = K_{cs} \cdot \tau_{\text{eng}}.$$

A rud megfelelő, ha:

$$M_{cs \text{ eng}} \geq M_{cs}.$$

Csavart rud tervezése esetén a (7) jelű képletből a szükséges keresztmetszeti tényező kiszámítható.

$$K_{cs \text{ szüks}} = \frac{|M_{cs}|}{\tau_{\text{eng}}}.$$

Példaképpen tervezzünk körkeresztmetszettel egy 3 m hosszú, egyik végén befogott rudat, amelyre 15,0 kNm csavarónyomaték hat. Ellenőrizzük a választott keresztmetszetet, és számítsuk ki a rud véglapjának elfordulását is. $\tau_{\text{eng}} = 95,0 \text{ N/mm}^2$ $G = 79500 \text{ N/mm}^2$.

A szükséges keresztmetszeti tényező:

$$K_{cs \text{ szüks}} = \frac{M_{cs}}{\tau_{\text{eng}}} = \frac{15 \cdot 10^6}{95} = 1,58 \cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$

Körkeresztmetszetnél

$$K_{cs} = \frac{R^2 \pi}{2},$$

Innen

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot K_{cs} \text{ szükséges}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1,58 \cdot 10^5}{\pi}} = 46,5 \text{ mm}$$

Kerekítéssel felvesztünk egy $D = 100$ mm átmérőjű rudat. Ellenőrzés céljából kiszámítjuk az $R = 50$ mm sugarú körre a K_{cs} értékét:

$$K_{cs} = \frac{50^3 \cdot \pi}{2} = 1,96 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$M_{cs \text{ eng}} = K_{cs} \cdot \tau_{eng} = 1,96 \cdot 10^5 \cdot 95,0 = 1,86 \cdot 10^7 \text{ Nmm} = 18,6 \text{ kNm}$$

$$M_{cs} = 15,0 \text{ kNm.}$$

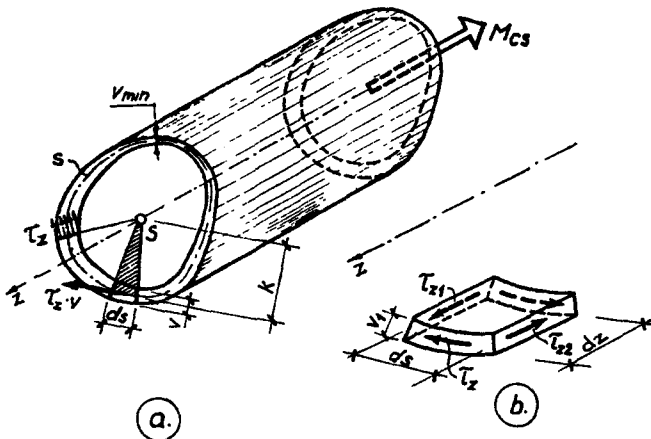
A rud véglapjának elcsavarodása:

$$= \frac{M_{cs} \cdot l}{G \cdot J_o} = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3}{7,95 \cdot 10^4 \cdot 50^4 \cdot \pi / 2} = 5,76 \cdot 10^{-2} \text{ rad} (= 3,30^\circ).$$

2.2.4.3 Vékony falú cső alakú rudak csavarása

A következőkben olyan homogén, izotróp és a Hooke-törvényt követő anyagú, egyenes tengelyű, prizmatikus cső alakú rud csavarásával fogunk foglalkozni, amelynek keresztmetszetét kívülről tetszőleges alakú zárt vonal határolja, falvastagsága lehet helyről-helyre változó, de a keresztmetszet egyéb méreteihez képest mindenütt kicsi (2.70.a ábra). Célunk a csavarás hatására keletkező feszültségek meghatározása.

A kör- és körgyűrű-keresztmetszetek esetéhez hasonlóan abból indulunk ki, hogy a keresztmetszetben normálfeszültségek nem ébrednek, a nyírófeszültségekről viszont feltételezzük, hogy mindenütt párhuzamosak a v vastagságot felelő középvonallal, nagyságuk pedig a vastagság mentén állandó. A további vizsgálat céljából vágjunk ki a csőfalból egy ds és dz alaplárméretű és v_1 -től v_2 -ig változó vastagságú elemi részt (2.70.b ábra). Ennek a z tengellyel párhuzamos oldallapjaira τ_{z1} , illetve τ_{z2} nagy-



2.70 ábra

ságu nyirófeszültségek működnek, így a z tengely irányu vetületi egyenlet az alábbi lesz;

$$\tau_{z1} \cdot v_1 \cdot dz - \tau_{z2} \cdot v_2 \cdot dz = 0.$$

Innen:

$$\tau_{z1} \cdot v_1 = \tau_{z2} \cdot v_2 = \tau_z \cdot v = \text{konst.},$$

azaz a nyirófeszültségek és a hozzájuk tartozó vastagságok szorzata a keresztmetszet kerülete mentén állandó. A $\tau_z \cdot v$ szorzatot nyirófolyamnak szokás nevezni. A fentiek szerint a nyirófolyam a keresztmetszetben állandó.

A csavarónyomatékkal a keresztmetszetben a nyirófeszültségek tartanak egyensúlyt. Irjuk fel a z tengelyre vonatkozó nyomatéki egyenletet. A nyirófeszültségek nyomatéka az s középvonal mentén vett integrál formájában írható fel:

$$\sum M_{1z} = \int_{(s)} k \cdot \tau_z \cdot v \cdot ds - M_{cs} = 0.$$

Figyelembe véve, hogy $\tau_z \cdot v = \text{konst.}$ és $k \cdot ds = 2dA_k$ (lásd a 2.70_a ábrát), a fenti egyenlet:

$$M_{cs} = 2 \cdot \tau_z \cdot v \cdot \int_{(s)} dA_k = 2 \cdot \tau_z \cdot v \cdot A_k$$

alakban is felírható, ahol A_k az s középvonallal határolt területet jelenti. Ebből a nyirófeszültséget a

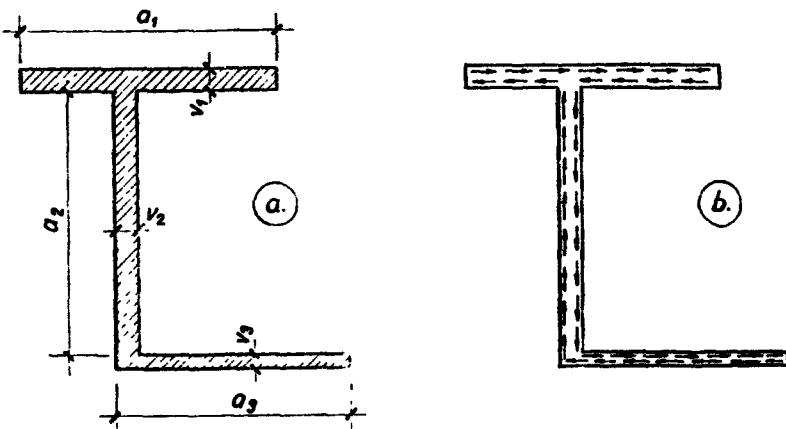
$$\tau_z = \frac{M_{cs}}{2 A_k v}$$

összefüggés adja meg. Ez az ún. Bredt-képlet. A képletből kiténik, hogy a legnagyobb nyirófeszültség ott keletkezik, ahol a falvastagság a legkisebb, azaz

$$\tau_{z \max} = \frac{M_{cs}}{2 A_k v_{\min}}$$

2.2.4.4 Vékony falu nyitott keresztmetszetű rudak csavarása

A mérnöki gyakorlatban gyakoriak az olyan prizmatikus rudak, amelyeknek keresztmetszete nyitott, és a keresztmetszetet alkotó egyes idomrészek egyik mérete (vastagsága) a másik mérethez képest kicsiny. Egy ilyen keresztmetszetet láthatunk a 2.71. ábrán, ahol a feltevésünknek megfelelően $v_1 \ll b_1$. Az ilyen keresztmetszetekben az M_{cs} csavarónyomaték hatására nyirófeszültségek ébrednek. Ezek legnagyobb értéke - a levezetést mellőzve - közelítően a



2.71 ábra

$$\tau_{z \max} = \frac{M_{cs}}{J_{cs}} v_{\max}$$

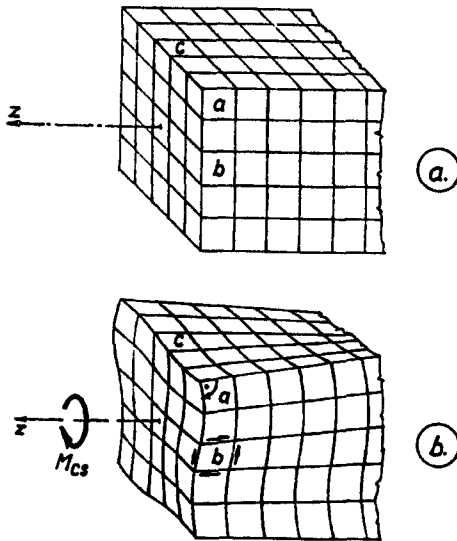
képletből számítható. E képletben J_{cs} az egyes derékszögű négyszögek hosszabbik oldalára vett tehetetlenségi nyomatékainak összegét jelöli, tehát:

$$J_{cs} = \sum J_{csi} = \frac{1}{3} \sum b_i v_i^3.$$

Megjegyezzük, hogy ilyen keresztmetszeteknél a csavarásból keletkező nyírófeszültségek a hosszabbik oldalakkal ($b_i - k$ el) párhuzamosak és a v_i vastagság mentén lineárisan változó nagyságúak, a vastagság felénél előjellet váltanak (2.72.b ábra).

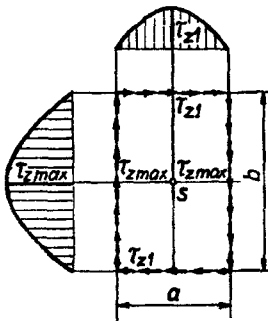
2.2.4.5 Derékszögű négyszögkeresztmetszet csavarása

Behatóbb elméleti és kísérleti vizsgálat alapján megállapítható, hogy a derékszögű négyszögkeresztmetszet csavarásakor normálfeszültségek nem keletkeznek, a sík keresztmetszetekre vonatkozó feltevés azonban már nem tartható. Ezt érzékelteti a 2.72.b ábra, amely a csavarás hatására defor-



2.72 ábra

málódott derékszögű négyzög keresztmetszetű rud egy részét mutatja. A keresztmetszet ilyen deformációját, amikor egyes pontjai kilépnek a keresztmetszet síkjából, öblösödésnek nevezzük. A rud oldalára rajzolt derékszögű négyzethálózat deformációjából még az is megállapítható, hogy a rud sarkánál levő (a jelű) elemi hasábok nem torzulnak el, míg az oldalak közepén levő (b és c jelű) hasábok torzulnak el a legnagyobb mértékben. Ez arra utal, hogy a nyírófeszültségek a keresztmetszet sarokpontjaiban zérussal egyenlőek, szélső értékeiket pedig a keresztmetszetet határolt vonalak felezőpontjaiban érik el. A nyírófeszültségek dualitásának tétele alapján az is könnyen belátható, hogy az oldalvonalak mentén ébredő feszültségek az oldalvaonallal feszültségek az oldalvonalal mindenütt párhuzamosak (2.73 ábra). A legnagyobb nyírófeszültség a hosszabbik oldal felezőpontjában keletkezik és nagyságát a



$$\tau_{z \max} = \frac{M}{a \cdot b} \cdot \frac{cS}{2} \left(3 + 1,8 \frac{a}{b} \right)$$

közeliítő képletből határozhatjuk meg. A rövidebb oldal közepén keletkező τ_{z1} feszültség viszont a

$$\tau_{z1} = \beta \cdot \tau_{z \max}$$

2.73 ábra

összefüggésből számítható ki, ahol az oldalhosszak b/a eredményétől függő tényező:

b/a	1	1,5	2	3
β	1	0,85	0,80	0,75

2.2.5 A gátolt csavarás

Csavarás esetén a sík keresztmetszetek feltétele szigorúan véve csak a kör- és körgyűrű-keresztmetszetű rudakkal teljesül. Ez a feltételezés már a röviden vázolt vékonyfalú keresztmetszetek és a körtől eltérő alaku tömör keresztmetszetek esetében nem alkalmazható. Ilyenkor a sík keresztmetszet eltorzul, öblösödik és a feszültségek meghatározása meglehetősen bonyolult számítást igényel.

További számítási nehézséget jelent, ha a keresztmetszet öblösödése nem jöhet szabadon létre. Például ha egy tömör négyzögkeresztmetszeti rudat mindkét végén mereven befogunk, és az egyik befogást a rud tengelye körül kis mértékben elforgatjuk (a rudat csavarjuk), akkor a 2.72.b

ábrán szemléltetett öblösödés nem jöhet létre. Az ilyen igénybevételt gátolt csavarásnak nevezzük. Gátolt csavarás esetén a keresztmetszetben a rud tengelyével párhuzamos irányu normálfeszültség is keletkezik. Ezt könnyen beláthatjuk, ha arra gondolunk, hogy a tiszta csavaráskor létrejövő öblösödést csak a rud tengelyével párhuzamos normálfeszültség szüntetheti meg. E normálfeszültségek tengelyirányú vetülete is zérus kell, hogy legyen, hiszen a rudat normálerő nem terheli. A normálfeszültségek eredője egy hajlítónyomaték, amely viszont létrejöhet a rudvégi befogásoknál.

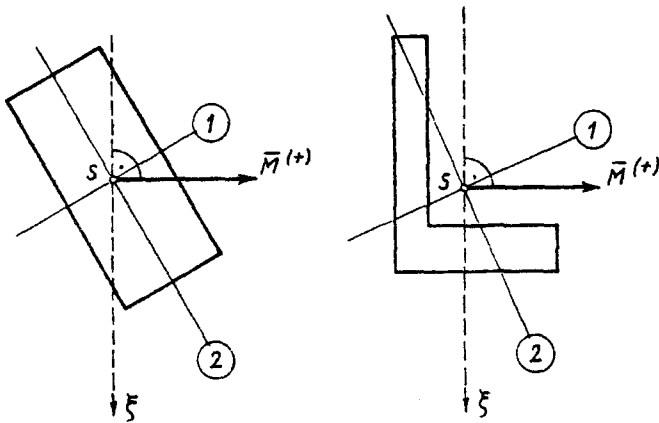
2.3 A feszültségek meghatározása összetett igénybevételek esetén

Ha egy rудelemre egyidejűleg többféle igénybevétel is működik, akkor összetett igénybevételről beszélünk. Az összetett igénybevételekből keletkező feszültségek meghatározásánál általában felhasználhatók az egyszerű igénybevételeknél bemutatott feszültségszámítási eljárások, bizonyos igénybevétel-kombinációk azonban ezektől eltérő, külön megfontolásokat igényelnek. Az alábbiakban a gyakorlatban előforduló legfontosabb igénybevétel-kombinációkból származó feszültségek meghatározását ismertetjük.

2.3.1 A ferde hajlítás

A tiszta egyenes hajlítás tárgyalásánál kikötöttük, hogy a keresztmetszetre ható hajlítónyomaték vektora legyen párhuzamos a keresztmetszetnek valamelyik tehetetlenségi főirányával. A gyakorlatban azonban ez a feltétel nem mindig teljesül. Ha a hajlítás síkja (a terhek síkja) nem esik a keresztmetszeti síkidom egyik tehetetlenségi főirányába sem, akkor ferde hajlításról beszélünk. A ferde hajlításra látunk példát a 2.74 ábrán. A terhek mindkét esetben függőleges síkban működnek. Az ábrán a ζ tengely a teher síkjának és a keresztmetszet síkjának metszévonalára. A hajlító erőpár vektorát erre a tengelyre merőlegesen mérhetjük fel. Ha pozitív a hajlítónyomaték, akkor az M vektort jobbra mérjük föl. Az ábra tehát mindkét esetben ferde hajlítást mutat, mert a nyomatékvektor egyik keresztmetszetenél sem esik főirányba.

A ferde hajlításból keletkező normálfeszültségeket az egymásra hajlítás módszerével fogjuk kiszámítani. Legyen adott egy tetszőleges rudkeresztmetszet, amelynek ismerjük a súlypontját, a tehetetlenségi főtengelyeit és az ezekre vonatkozó inercianyomatékokat (2.75 ábra). A terhelés síkja a rudtengely és a ζ tengely által meghatározott sík, az M nyomatékvektort a ζ tengelyre merőlegesen mérhetjük fel. Az 1-es főirány és a M nyomatékvektor által bezárt szöveget az ábrán α -val jelöltük. Ha a nyomatékvektort a tehetetlenségi főirányokba eső komponensek-



2. 74 ábra

re bontjuk, akkor a feladatot két egyenes hajlítás összegére vezethetjük vissza. A két nyomaték-komponens:

$$M_1 = M \cos \alpha,$$

$$M_2 = M \sin \alpha.$$

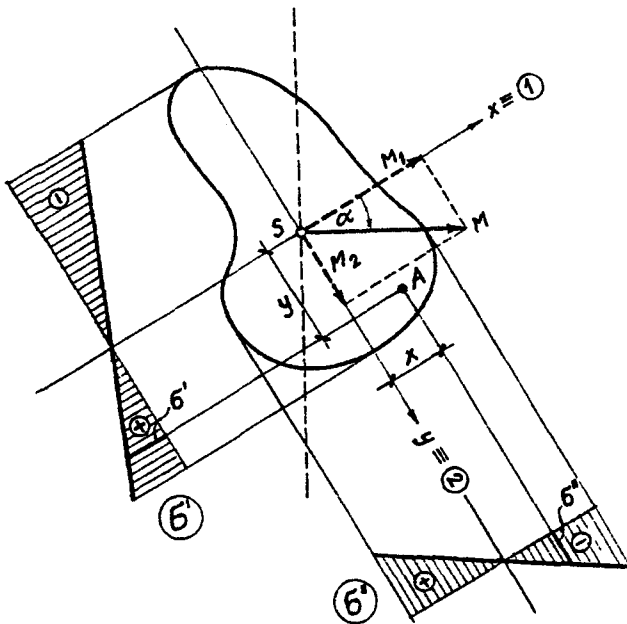
Egy tetszőleges x, y koordinátájú (a 2.75 ábrán A jelű) pontban keletkező feszültséget tehát úgy számíthatjuk ki, hogy külön-külön meghatározzuk a M_1 és M_2 hatására ébredő σ' , illetve σ'' feszültségeket, és ezeket előjelhelyesen összegezzük.

$$\sigma' = \frac{M_1}{J_1} y,$$

$$\sigma'' = - \frac{M_2}{J_2} x.$$

σ'' képletében a negatív előjel abból adódik, hogy pozitív x koordinátájú pontokban M_2 hatására nyomófeszültség keletkezik. A két feszültség összege:

$$\sigma = \frac{M_1}{J_1} y - \frac{M_2}{J_2} x \quad \dots (1).$$

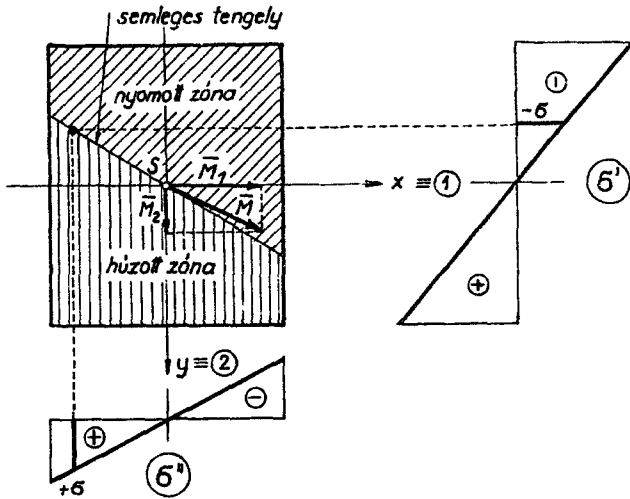


2. 75 ábra

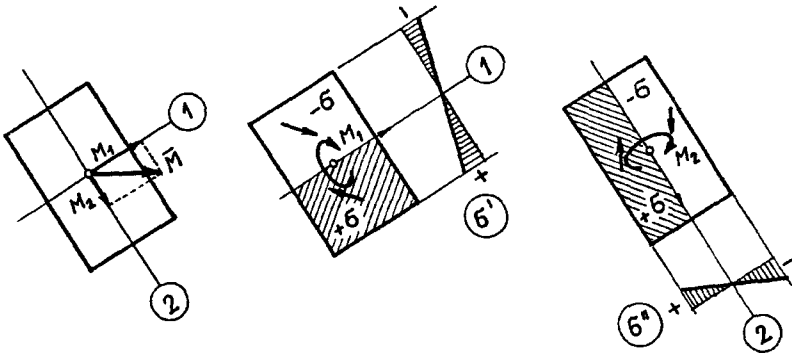
A ferde hajlításból keletkező normálfeszültség az x , y koordináták lineáris függvénye, tehát a feszültségi testet - az egyenes hajlításhoz hasonlóan - sík lapok határolják. A feszültségek eloszlását ábrázolni is tudjuk, de csak úgy, hogy külön - külön rajzoljuk fel az M_1 és M_2 hatására keletkező feszültségeket.

A keresztmetszetnek vannak olyan pontjai, amelyekben feszültség nem keletkezik, ezek a pontok egy egyenes, a semleges tengely mentén helyezkednek el. A semleges tengely két részre, húzott és nyomott zónára osztja a keresztmetszetet. A semleges tengely a ferde hajlításnál is keresztülhalad a súlyponton, mert ott sem az M_1 , sem az M_2 nyomatékkomponens hatására nem ébred feszültség. A semleges tengelynek egy másik pontját úgy határozhatjuk meg, hogy egy olyan helyet keresünk, ahol M_1 és M_2 hatására azonos nagyságú, de ellentétes előjelű feszültség keletkezik (2. 76 ábra).

Az (1) jelű képlet a normálfeszültséget előjelhelyesen adja meg, ha az $x \equiv 1$, $y \equiv 2$ koordináta-rendszert alkalmazzuk, amelynél az y tengely pozitív iránya és az x tengely 90° -os pozitív irányba történő elforgatásával kapható. Célszerű azonban, ha szemlélet útján is meg tudjuk ál-



2.76 ábra



2.77 ábra

lapítani a feszültségek előjelét. Ennek módja a következő (2.77 ábra). A nyomatékvektor pozitív irányba (az óramutató járásával egyezően) forog, ha nyilával szemben nézünk, így meg tudjuk állapítani - az M_1 és M_2 komponensekből külön-külön - hogy a nyomaték a keresztmetszetnek melyik részét húzza és melyiket nyomja. (Az ábrán a feszültség vektorait és a forogást mutató körivet axonometrikusan ábrázoljuk.)

Adott igénybevétel esetén a keresztmetszet ellenőrzését az (1) jelű képlet felhasználásával végezhetjük el. Akkor megfelelőek a keresztmetszeti

méretek, ha a számított feszültség nem nagyobb a megengedett feszültség-nél:

$$|\sigma| \leq \sigma_{\text{eng}}$$

Nem tudjuk azonban előre megmondani, hogy a legnagyobb feszültség a keresztmetszetnek melyik pontjában keletkezik, mert a semleges tengely helyzetét nem ismerjük. (A semleges tengelytől legtávolabb levő pontban legnagyobb a feszültség.) Meghatározhatjuk viszont az M_1 és M_2 nyomaték-komponensek hatására ébredő σ' illetve σ'' feszültségek nagyságát és megoszlását, és ezek ismeretében ki tudjuk számítani a legnagyobb feszültséget.

Ellenőriztük a 2.78.a ábrán látható keresztmetszetet, amelyre az $M = 1,5$ kNm nyomaték hat. A megengedett feszültség: $\sigma_{\text{eng}} = 180$ N/mm². A keresztmetszeten bejelölt A, B, C, illetve A', B', C' pontokban fogjuk kiszámítani a normálfeszültséget.

A tehetetlenségi főnyomatékok nagyságát és a tehetetlenségi főtengelyek irányát már egy korábbi példában meghatároztuk. Ezek a következők:

$$J_1 = 2,189 \cdot 10^5 \text{ mm}^4,$$

$$J_2 = 0,345 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\alpha = 6,34^\circ.$$

Az α szög a súlyponton átmenő vízszintes u tengelytől pozitív irányba mérve értendő, és az 1-es főtengely irányát adja meg.

Vegyük fel az $x \equiv 1$ és $y \equiv 2$ koordináta rendszert, és bontsuk M -et x és y irányu komponensekre. Az x, y koordináta-rendszerben a nyomatékvektor irányszöge negatív: $\alpha = -6,34^\circ$.

$$M_1 = 1,5 \cdot \cos(-6,34^\circ) = 1,491 \text{ mkN},$$

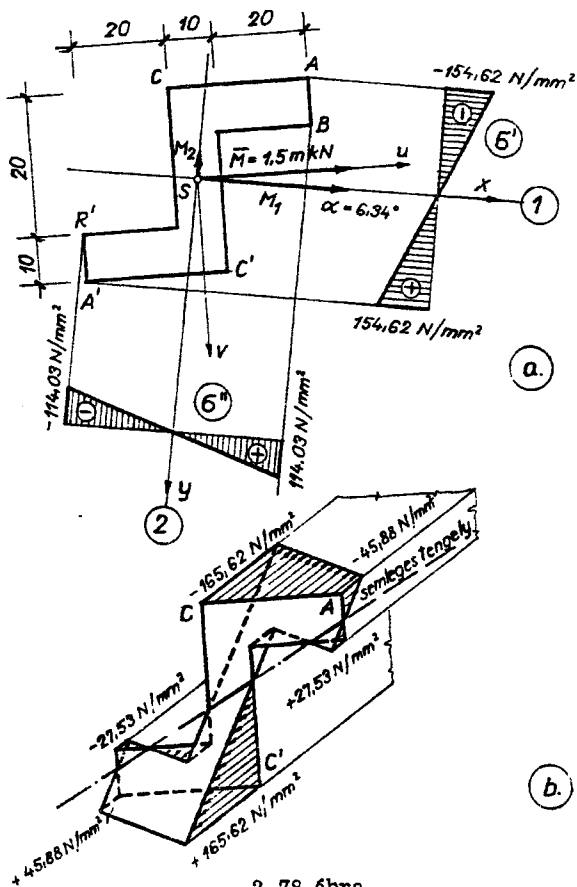
$$M_2 = 1,5 \cdot \sin(-6,34^\circ) = -0,166 \text{ mKn}.$$

A feszültségek számításához szükségünk lesz az A, B, C pontok x, y rendszerbeli koordinátáira. Ezek az

$$x = u \cdot \cos \alpha + v \cdot \sin \alpha,$$

$$y = v \cdot \cos \alpha - u \cdot \sin \alpha.$$

transzformációs képletek alkalmazásával kaphatók:



2. 78 ábra

$$X_A = 25 \cdot \cos 6,34^\circ - 20 \cdot \sin 6,34^\circ = 22,6 \text{ mm},$$

$$X_B = 25 \cdot \cos 6,34^\circ - 10 \cdot \sin 6,34^\circ = 23,7 \text{ mm},$$

$$X_C = -5 \cdot \cos 6,34^\circ - 20 \cdot \sin 6,34^\circ = -7,1 \text{ mm},$$

$$y_A = -20 \cdot \cos 6,34^\circ - 25 \cdot \sin 6,34^\circ = -22,7 \text{ mm},$$

$$y_B = -10 \cdot \cos 6,34^\circ - 25 \cdot \sin 6,34^\circ = -12,7 \text{ mm},$$

$$y_C = -20 \cdot \cos 6,34^\circ + 5 \cdot \sin 6,34^\circ = -19,3 \text{ mm}$$

Az A, B, C pontokban keletkező feszültségek:

$$\sigma_A = \frac{-1,491 \cdot 10^6}{2,189 \cdot 10^5} \cdot 22,7 + \frac{0,166 \cdot 10^6}{0,345 \cdot 10^5} \cdot 22,6 = -45,88 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_B = \frac{-1,481 \cdot 10^6}{2,189 \cdot 10^5} \cdot 12,7 + \frac{0,166 \cdot 10^6}{0,345 \cdot 10^5} \cdot 23,7 = +27,53 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_C = \frac{-1,491 \cdot 10^6}{2,189 \cdot 10^5} \cdot 19,7 - \frac{0,166 \cdot 10^6}{0,345 \cdot 10^5} \cdot 7,1 = -165,62 \text{ N/mm}^2.$$

Az A', B', C' pontokban ugyanilyen nagyságu, de ellentétes előjeli feszültségek keletkeznek, mert az A, B, C és az A', B', C' pontok koordinátái között csak előjel különbség van.

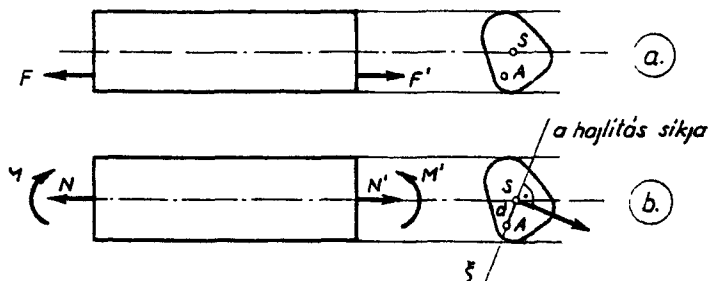
A vizsgált keresztmetszet az adott igénybevételre megfelel, mert

$$\sigma_{\max} = 165,62 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{\text{eng}} = 180 \text{ N/mm}^2.$$

A 2.78.b ábrán megrajzoltuk a feszültségek eloszlását szemléltető feszültségi testet is.

2.3.2 A kulponos húzás és nyomás

A 2.79. a ábrán látható egyenes tengelyű prizmatikus rud igénybevétele kulponos húzás, mert a rud két véglapjára ható F illetve F' erő nem a rud geometriai (és egyben szilárdsági) tengelyében működik. Ha az F és F' erők nyilat megfordítjuk, akkor az igénybevétel kulponos nyomás lesz.



2.79 ábra

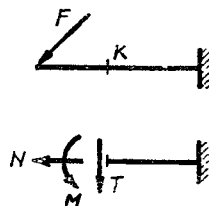
Redukálhatjuk az F illetve F' erőt a rud szilárdsági tengelyére (2.79.b ábra). Ez azt jelenti, hogy az F erőt áthelyezzük a keresztmetszet S súlypontjába, és ezzel egyidejűleg egy hajlítónyomatékot is működtetünk, amely nyomaték nagysága megegyezik az F erő súlypontra vonatkozó nyomatékával. Az áthelyezett erő normáligénybevétel, ezt N -nek jelöljük. Az M nyomaték az erő támadáspontján és a keresztmetszet súlypontján átmenő ξ egyenes és a rud tengelye által meghatározott síkban működik. Az $F = (N, M)$ egyenértékűség alapján N és M nagysága:

$$N = F, \quad M = F \cdot d,$$

ahol d a keresztmetszet súlypontjának és az F erő dőléspontjának távolsága.

Látjuk tehát, hogy a kültpontos húzás összetett igénybevétel, visszavezethető egy kültpontos húzásra és egy hajlításra. A hajlítás síkja keresztül megy a P és az S pontokat összekötő ξ egyenesen. Mivel ez általános esetben nem esik a keresztmetszeti síkidom tehetetlenségi főirányába, ezért ez a hajlítás általában ferde hajlítás. (Speciális esetként természetesen egyenes hajlítás is adódhat.)

Az excentrikus húzás vagy nyomás igénybevétele igen gyakori, és nemcsak abban a formában jelentkezik, amit az imént láttunk. Excentrikus húzásról vagy nyomásról beszélhetünk minden olyan esetben, amikor a tartónak egy vizsgált keresztmetszetére normálerő és hajlítónyomaték is hat. (Ezekon kívül általában más nyomóigénybevétel is fellép, amit azonban külön kezelünk.) Fentieket szemlélteti a 2.80 ábra, ahol a K keresztmetszetre ható igénybevételeket külön is kirajzoltuk.



2.80 ábra

2.3.2.1 A feszültségek számítása

A kültpontos húzásból és nyomásból keletkező normálfeszültségeket az egymásra halmazás módszerével lehet kiszámítani. Az előzőekben láttuk, hogy a kültpontos húzás egy központos húzásra és egy hajlításra (amely általában ferde) vezethető vissza. A ferde hajlítást két egyenes hajlításra bonthatjuk, így a kültpontos húzó- vagy nyomóerőt egy központos erővel és két nyomatékkal helyettesíthetjük:

$$F = (N, M_1, M_2).$$

A feszültségek számításához vegyük fel a keresztmetszet súlypontjában az $x \equiv 1$, $y \equiv 2$ tehetetlenségi főtengely irányu koordináta-rend-

szert (2.81 ábra). Az x, y koordinátájú pontjában keletkező normál-feszültség:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{J_1} y - \frac{M_2}{J_2} x \quad \dots (1).$$

A képletben A a keresztmetszeti síkidom területe, J_1 és J_2 a keresztmetszet tehetetlenségi főnyomatékai.

A M_1 és M_2 nyomaték-komponenseket legegyszerűbben az F erő A támadáspontjának x_A, y_A koordinátáinak felhasználásával számíthatjuk ki:

$$M_1 = F \cdot y_A,$$

$$M_2 = -F \cdot x_A.$$

A nyomaték-komponensek kifejezését az (1) jelű képletbe helyettesítve:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_A}{J_1} y + \frac{F \cdot x_A}{J_2} x \quad \dots (2).$$

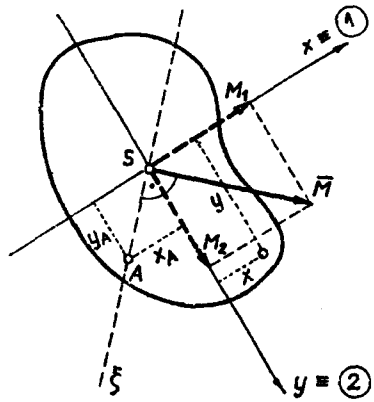
Példaként számítsuk ki a 2.82. a ábrán látható rudkeresztmetszet sarokpontjában ébredő feszültséget. A rudat az ábrán bejelölt P pontban $F = -50$ kN nagyságú, rudtengellyel párhuzamos nyomóerő terheli.

A számításhoz szükséges keresztmetszeti adatok:

$$A = 60 \cdot 120 = 7,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^2,$$

$$J_1 = \frac{60 \cdot 120^3}{12} = 8,64 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$J_2 = \frac{120 \cdot 60^3}{12} = 2,16 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$



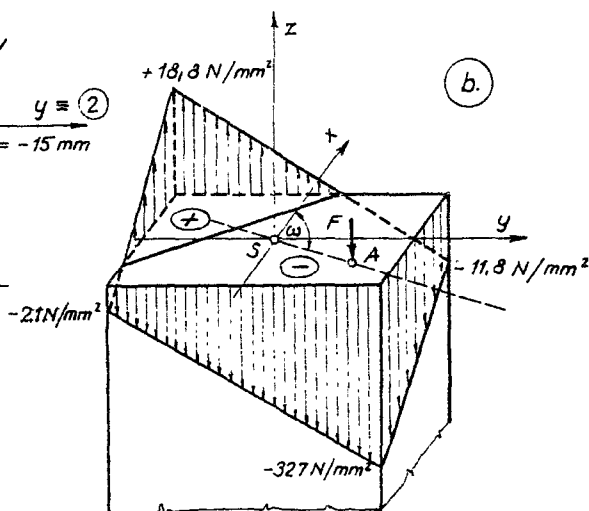
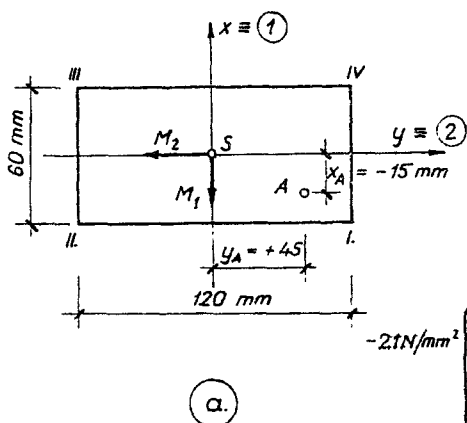
2.81 ábra

$$\sigma_I = -\frac{50 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^3} - \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 45}{8,64 \cdot 10^6} \cdot 60 - \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 15}{2,16 \cdot 10^6} \cdot 30 = -32,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{II} = -\frac{50 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^3} + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 45}{8,64 \cdot 10^6} \cdot 60 - \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 15}{2,16 \cdot 10^6} \cdot 30 = -2,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{III} = -\frac{50 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^3} + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 45}{8,64 \cdot 10^6} \cdot 60 + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 15}{2,16 \cdot 10^6} \cdot 30 = +18,8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{IV} = -\frac{50 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^3} - \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 45}{8,64 \cdot 10^6} \cdot 60 + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 15}{2,16 \cdot 10^6} \cdot 30 = -11,8 \text{ N/mm}^2$$



2. 82 ábra

A kapott feszültségeket a 2.82.b ábrában fölmértük a sarokpontokban, és az így nyert pontokat egyenesekkel kötöttük össze. Ezzel megkaptuk a feszültségek ábráját, az ugynevezett feszültségi testet, amelyet sík lap határol, összhangban a Bernoulli-Navier-féle feltételezéssel és a Hooke-törvénnyel.

A feszültségek ábrájában kiadódik a húzott és a nyomott zónát elválasztó semleges tengely. Figyeljük meg, hogy a semleges tengely nem megy

keresztül a súlyponton (mint a hajlításnál), és ferde szöveget zár be a hajlítás síkjának ξ egyenesével, (mert itt ferde a hajlítás).

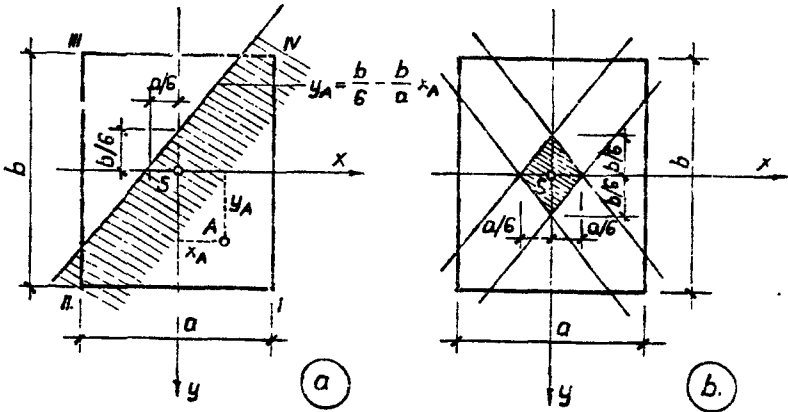
2.3.2.2 A belső mag

Vizsgáljuk meg, hogy mi a feltétele annak, hogy egy adott keresztmetszetben külpontos nyomás esetén csak normálfeszültség keletkezzen. Először az a és b élhosszúságu derékszögű négyzetkeresztmetszetet vizsgáljuk (2.93.a ábra). A normálfeszültséget a (2) jeli képlet felhasználásával számíthatjuk ki. Ez most csak nyomófeszültség lehet ($\sigma \leq 0$). A képletbe helyettesítsük be a téglalap területét, valamint x és y tengelyekre vonatkozó inercianyomatékát:

$$\sigma = \frac{F}{ab} + \frac{F \cdot y_A}{\frac{a \cdot b^3}{12}} y + \frac{F \cdot x_A}{\frac{a \cdot b}{12}} x \leq 0.$$

Osszuk el mindkét oldalt $12 F/ab$ -vel. (Mivel F negatív, az egyenlőtlenség megfordul.)

$$\frac{1}{12} + \frac{y_A}{b^2} y + \frac{x_A}{a^2} x \geq 0.$$



2.83 ábra

Ha ebbe az egyenletbe az I. jelű sarokpont koordinátáit helyettesítjük, akkor olyan összefüggést kapunk, x_A és y_A között, amely megadja az I. sarokpontban a nyomóeszűtségek keletkezésének feltételeit:

$$y = \frac{b}{2} ; \quad x = \frac{a}{2} ;$$

$$\frac{1}{12} + \frac{y_A}{b} \cdot \frac{b}{2} + \frac{x_A}{a} \cdot \frac{a}{2} \geq 0,$$

$$\frac{1}{6} + \frac{y_A}{b} + \frac{x_A}{a} = 0,$$

$$y_A \geq -\frac{b}{6} - \frac{b}{a} x_A.$$

Ez utóbbi egyenlet egy egyenes egyenlete, amelyet a 2.83.a ábrán meg is rajzoltunk. Akkor keletkezik az I. pontban nyomóeszűtségek, ha az F erő az egyenes alatt helyezkedik el (az ábrán besraffozott részen). Ha az F erő támadáspontja éppen az egyenesen van, akkor az I. pontban keletkező feszűtségek értéke zérus.

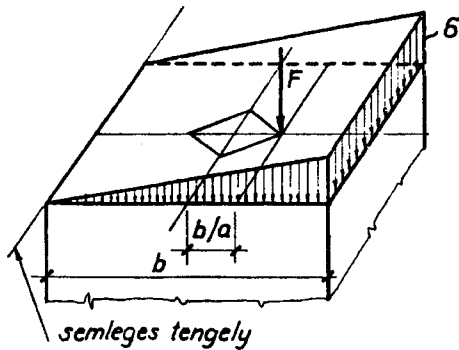
A II. III. és IV. jelű sarokpontokhoz is meghatározható egy-egy egyenes, amelyeket a 2.83.b ábrán rajzoltunk meg. Ezek az egyenesek a koordinátatengelyeket az

$$x = +\frac{a}{6} \quad \text{és} \quad y = +\frac{b}{6}$$

helyeken metszik. Az egyenesek egy síkidomot határolnak, amelyet belső mának, vagy magidomnak nevezünk. Akkor keletkezik az egész keresztmetszetben nyomóeszűtségek, ha a terhelő erő a magidomon belül áll. Ha a normális erő éppen a magidom határán működik, akkor a semleges tengely érinti a keresztmetszeti síkidomot, az érintési pontban zérus a feszűtségek. A magidom sarokpontján álló erő esetén az erő támadáspontjával szemközti él a semleges tengely (2.84 ábra).

Vizsgáljuk meg a külponton nyomott körkeresztmetszetű rudat is (2.85 ábra). Keressük az e excentricitásnak azt az értékét, amelyhez a B pontban zérus feszűtségek tartozik. A B pontban ébredő feszűtségek a központos nyomásból és az y tengely körűli hajlításból határozhatjuk meg. A hajlításból keletkező feszűtségek most a keresztmetszeti tényező (K_y) felhasználásával számítjuk ki:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} + \frac{e \cdot F}{K_y} = 0.$$



2. 84 ábra

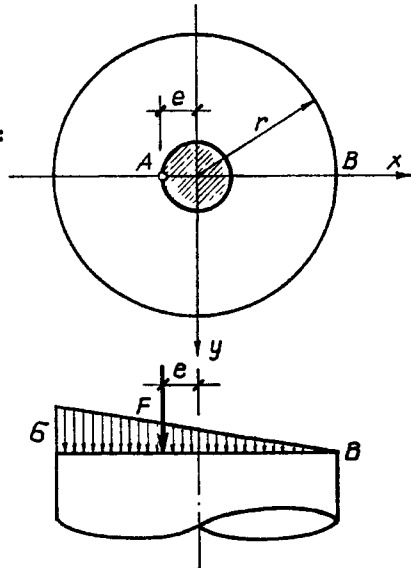
Az egyenletből:

$$e = \frac{K_y}{A}$$

Behelyettesítve A és K_y értékét:

$$e = \frac{r^3 \pi}{4} \cdot \frac{1}{r^2 \pi} = \frac{r}{4}$$

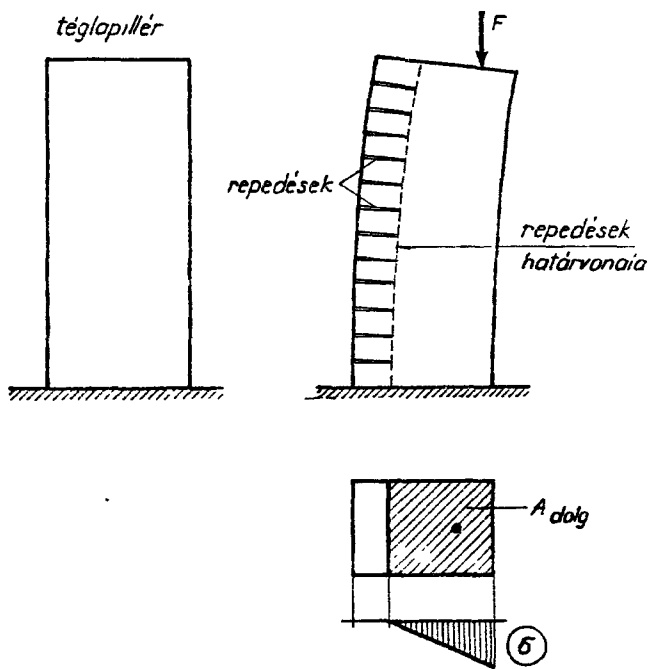
A körszimmetria miatt nyilvánvaló, hogy minden irányban ugyanakkora excentricitást kapunk, ezért megállapíthatjuk, hogy a körkeresztmetszetnek kör alakú a belső magja, a magidom sugara pedig $e = r/4$.



2. 85 ábra

2.3.2.3 Csak nyomásnak ellenálló anyagu rudak

Néhány építőanyag húzófeszültséget egyáltalán nem, vagy csak elhanyagolhatóan kis mértékben képes felvenni. Az ilyen anyagu szerkezeti elemek különös nyomásával külön kell foglalkoznunk.

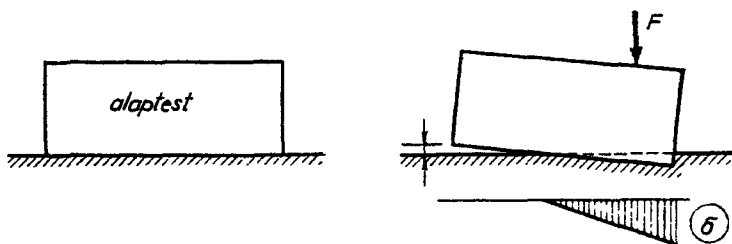


2. 86 ábra

A csak nyomásnak ellenálló anyagu rudakra példaként megemlítjük a téglapillért (2.86 ábra), amely külpontos nyomásra - a lineárisan változó feszültségmegoszlás miatt - kissé meghajlik. Ha az F erő külpontosága elég nagy (a belső magon kívül hat), akkor az erővel ellentétes oldalon húzófeszültségek ébrednének, ha az anyag húzást is fel tudna venni. A téglák közötti habarcsréteg azonban húzás felvételére nem képes, már egészen kis húzófeszültségek hatására berepedezik, a keresztmetszet berepedt részén pedig semmilyen feszültség nem keletkezik. A téglapillérek külpontos nyomásánál tehát csak nyomófeszültséggel számolhatunk. Hasonló módon viselkednek a vasatlan beton és a kőből falazott szerkezetek.

Másik jellegzetes példa a sicalapozás. Könnyen elképzelhetjük, hogy a merev alaptest külpontos nyomóerő hatására a 2.87 ábrán bemutatott módon fog viselkedni. Az alaptest kissé megbillen, a talajba benyomódik, és a benyomódás mértéke szerinti nyomófeszültségek ébrednek a talaj és az alaptest érintkezési síkján. Az alaptest és a talaj között húzófeszültségek nem keletkezhetnek, így ha a külpontoság elég nagy, akkor az alaptest egyes helyeken megemelkedve el is válik a talajtól.

A külpontoság mértékének megítélése szempontjából döntő fontossága van a belső magnak. Ha a nyomóerő a keresztmetszet belső magján be-



2.87 ábra

lül hat, akkor közömbös az a körülmény, hogy az anyag huzást fel tud-e venni, vagy sem.

A csak nyomásnak ellenálló anyagu rudakban a belső magon kívül álló erő esetén a keresztmetszetnek csak az egyik részén ébrednek (nyomó) feszültségek. Ezt a részt dolgozó keresztmetszetnek nevezzük (a 2.86 ábrán vonalkázva). A nyomófeszültségek megoszlásáról most is feltételezhetjük, hogy lineáris, vagyis a semleges tengelytől mért távolsággal arányosan változik. A keresztmetszet dolgozó része fölött kialakuló feszültségi testet síklap határolja.

A továbbiakban csak a derékszögű négyszög keresztmetszetű rudakkal foglalkozunk, és azt is kikötjük, hogy a terhelő erő valamelyik szimmetriasíkban működik. (A gyakorlati esetek döntő többsége ilyen.) Célunk az F erő hatására keletkező maximális nyomófeszültség meghatározása.

A feszültségek meghatározását arra alapítjuk, hogy a feszültségek egyenértékűek a nyomóerővel:

$$F = [\sigma].$$

Az egyenértékűségből két következtetést vonhatunk le:

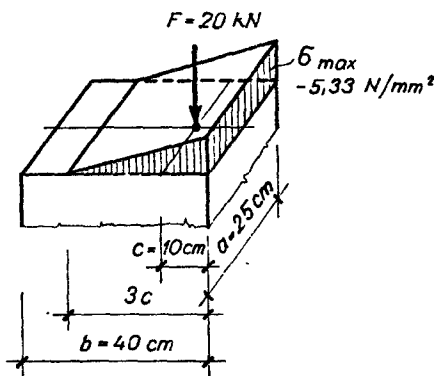
- az F erő egyenlő a feszültségi test köbtartalmával,
- az F erő átmegy a feszültségi test súlypontján.

A második következtetésből meghatározhatjuk a semleges tengely helyzetét (a dolgozó keresztmetszet nagyságát), az elsőből pedig a maximális feszültség értékét.

A számítás részleteit egy számpélda kapcsán mutatjuk be. A 2.88 ábrán látható keresztmetszetű rudat a b oldallal párhuzamos szimmetriasíkban az a oldaltól $c = 10$ cm távolságban $F = 200$ kN nagyságú erő terheli.

A feszültségi test ék alakú lesz. Az F erőnek át kell mennie a feszültségi test súlypontján, így a semleges tengely helye (most a keresztmetszet jobb oldalától nézve):

$$3c = 30 \text{ cm.}$$



2.88 ábra

A dolgozó keresztmetszet:

$$A_{\text{dolg}} = 3c \cdot b = 30 \cdot 25 = 750 \text{ cm}^3$$

A feszültségi test köbtartalma az F erővel azonos:

$$F = \frac{A_{\text{dolg}} \cdot \sigma_{\text{max}}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \frac{2F}{A_{\text{dolg}}} = \frac{-2 \cdot 2000 \cdot 10^5}{750 \cdot 10^2} = \\ &= -5,33 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

A képletből kitétnék, hogy a maximális feszültség az átlagfeszültség kétszerese.

2.3.3 A hajlított és nyírt tartó

A hajlítással egyidejű nyírás vizsgálatánál a terhelés síkjának és a keresztmetszet alakjának megkülönböztetett szerepe van. Az alábbiakban csak olyan keresztmetszetekkel foglalkozunk, amelyeknek legalább egy szimmetriatengelye van. A megoldás különböző attól függően, hogy tömör, illetve üreges zárt, vagy pedig vékonyfalú nyitott szelvényről van-e szó. A továbbiakban először azzal az esettel foglalkozunk, amikor a terhelés síkja a keresztmetszet szimmetriatengelyén halad keresztül. Ebben az esetben a szimmetrián kívül a keresztmetszet alakjára vonatkozóan további megkötést nem teszünk, lehet az tömör, üreges, vékonyfalú nyitott vagy zárt szelvény is. Ezt követően a szimmetriasíkjára merőlegesen terhelt nyitott szelvényeket fogjuk tárgyalni.

2.3.3.1 Szimmetriasíkjában terhelt hajlított és nyírt rudelem

A 2.89. a ábrán szimmetriasíkjában terhelt tömör keresztmetszetű rudat láthatunk. A z koordinátájú helyen a rudtengelyre merőleges síkokkal vágunk ki a rudból egy dz hosszúságú rudelemet. A rudelemre a keresztmetszet szimmetriatengelyében egy-egy nyíróerő, a szimmetriasíkjában pedig egy-egy hajlítónyomaték működik (2.89. b ábra). A nyíróerő és a hajlítónyomaték nagysága a rud tengelye mentén általában változhat, így a rudelemet határoló két keresztmetszet mentén sem azonos, hanem dT , illetőleg dM mértékben különbözhet egymástól. Feladatunk a nyíróerő és a hajlítónyomaték együttes hatására ébredő feszültségek meghatározása.

A nyírás és a hajlítás külöb-külön való vizsgálatakor - a sík keresztmetszetek feltételezéséből kiindulva - aránylag egyszerű eredményekre jutottunk: a nyírásból csak nyírófeszültségek, a hajlításból pedig csak normál-feszültségek keletkeznek, és azokat a

$$\tau_z = \frac{T}{A} \quad \text{illetőleg} \quad \sigma_z = \frac{M}{J_x} y$$

képletekből lehet kiszámítani.

Könnyen belátható, hogy a nyíróerő és a hajlítónyomaték együttes működésekor a nyírófeszültségek és a normál-feszültségek fentiek szerinti, egymástól független meghatározása ellentmondásra vezet. Tudjuk ugyanis, hogy a nyíróerő és a hajlítónyomaték közötti a

$$\frac{dM}{dz} = - T$$

összefüggés áll fenn, így nyilvánvaló, hogy a hajlítónyomaték és a nyíróerő együttes hatására ébredő nyíró és normál-feszültségek sem lehetnek egymástól függetlenek. A feszültségek fenti két képlete közül tehát legalább az egyiket el kell vetni, és helyette a hajlítónyomaték és a nyíróerő fenti összefüggésének figyelembevételével új képletet kell levezetni. Ez azt jelenti, hogy a sík keresztmetszetek feltételezése - legalábbis az egyik igénybevételből származó feszültségek meghatározásakor - nem használható fel.

A fentieknek megfelelően a sík keresztmetszetek feltételezését csak a hajlításból származó normál-feszültségek számításához tartjuk meg, a nyírás vizsgálatakor viszont elvetjük, és a nyírófeszültségeket a nyíróerő és a hajlítónyomaték közötti összefüggés figyelembevételével, egyensúlyi egyenletek felhasználásával határozzuk meg. Eszerint a hajlításból keletkező normál-feszültség változatlanul a

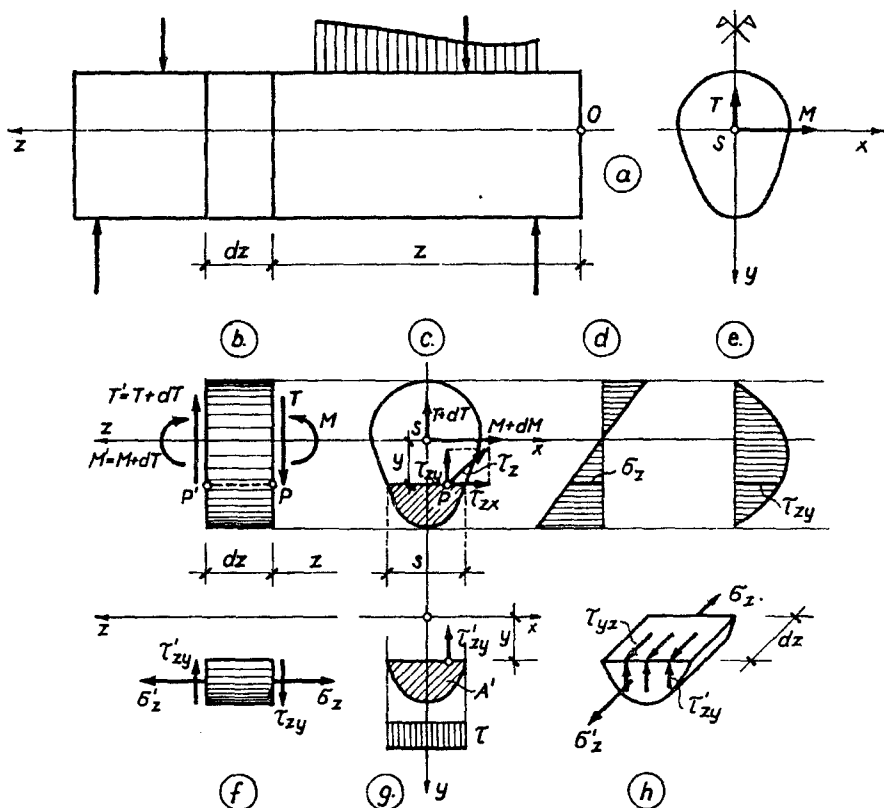
$$\sigma_z = \frac{M}{J_x} y$$

képletből számítható, vagyis a normál-feszültség a keresztmetszet mentén összik el (2.89.d ábra).

A keresztmetszetnek egy tetszőleges P pontjában ébredő τ_z feszültség iránya ismeretlen, ezért célszerű azt a szimmetriatengellyel párhuzamos τ_{zy} és arra merőleges τ_{zx} komponensekre felbontani (2.89.c ábra).

Foglalkozunk először a τ_{zy} feszültségkomponens meghatározásával.

Erről feltételezzük, hogy nagysága a keresztmetszet tetszőleges P pontján keresztül felvett s hosszúságú, a szimmetriatengelyre merőleges hur mentén állandó, azaz csak az y és z koordináta függvénye. E függvény meg-



2. 89 ábra

határozása céljából képzeletben különítsük el a vizsgált dz hosszúságú rudelemnek az s hur alatti részét (2. 89. f, g, h ábra). Ennek a jobb oldali (z koordinátájú) keresztmetszettel határolt felületére a már tárgyalt σ_z normál feszültség és a vizsgálat tárgyát képező τ_{zy} és τ_{zx} nyírőfeszültségek működnek. A bal oldali, dz távolsággal távolabb levő keresztmetszetre működő σ'_z , τ'_{zy} és τ'_{zx} feszültségek ezektől $d\sigma_z$, $d\tau_{zy}$ és $d\tau_{zx}$ mértékkel különböznek. A feszültségek változását a dz hosszúságon lineárisnak feltételezve:

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz,$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz,$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz.$$

A vizsgált rudelemnek az s vonalon átmenő vízszintes határolólapjára a τ_{yz} nyírófeszültségek működnek. Ezek nagysága a nyírófeszültségek dualitásának tétele szerint meggyezik a keresett τ_{zy} feszültségkomponens nagyságával, azaz $|\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|$.

A vizsgált elem vízszintes határolólapján működő x irányú nyírófeszültségeknek és y irányú normálfeszültségeknek zérusnak kell lenniük, ezért a rajzon fel sem tüntettük őket. Az egyszerűség kedvéért a 2.89.g és h ábrán a τ_{zx} feszültségkomponenset sem tüntettük fel, mert ezek a feltrandó egyenleteinkben nem fognak szerepelni.

A kis hasábra ható feszültségek elemzése után kimondhatjuk, hogy a hasábra működő erők egyensúlyban vannak. (A hasáb dG súlya ebben a vizsgálatban elhanyagolható. Írjuk fel egy z irányú vetületi egyenletet:

$$\sum F_{iz} = \int_{(\hat{A})} \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dA - \int_{(\hat{A})} \sigma_z dA + \tau_{yz} sdz = 0$$

Az integrálást tagonként kijelölve látható, hogy a σ_z -t tartalmazó tagokkal egyszerűsíthetünk. A $|\tau_{zy}| = |\tau_{yz}|$ összefüggés felhasználásával az egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\int_{(\hat{A})} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA + \tau_{yz} \cdot s = 0.$$

Most differenciáljuk a

$$\sigma_z = \frac{M(z)}{J_x} y$$

függvényt:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{y}{J_x} \frac{\partial M(z)}{\partial z}.$$

$M(z)$ parciális differenciálhányadosa helyett dM/dz differenciálhányadost is írhatjuk, mert M csak z függvénye, tehát egyváltozós. A

$$\frac{dM}{dz} = -T$$

összefüggés felhasználásával

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{y}{J_x} T.$$

Ezt az összefüggést helyettesítsük be a vetületi egyenletbe, és emeljük ki a konstansokat:

$$-\frac{T}{J_x} \int_{(A)} y \, dA + \tau_{zy} s = 0.$$

Az összefüggésben szereplő határozott integrál az A' területi súlyponti x tengelyre vonatkozó statikai nyomatéka:

$$\int_{(A')} y \, dA = S'_x.$$

Az S'_x jelölés alkalmazásával a keresett nyirófeszültség:

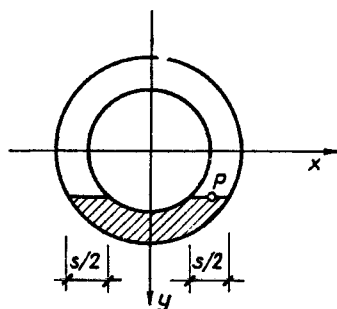
$$\tau_{zy} = \frac{TS'_x}{J_x s} \quad \dots(1).$$

A képletben T a keresztmetszetben működő nyiróerő előjeles nagysága; S'_x a keresztmetszeti síkidomnak a vizsgált ponton át vett x tengellyel párhuzamos metszet alatti (vagy feletti) részének statikai nyomatéka a súlyponti x tengelyre; J_x a keresztmetszeti síkidom x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka; s pedig a keresztmetszet x tengellyel párhuzamos szélessége a vizsgált pont magasságában.

Meg kell jegyeznünk, hogy az s szélesség üreges keresztmetszetenél csak az anyagi részekben áthaladó metszet hosszát jelenti, mint ahogy a példaként bemutatott körgyűrű keresztmetszetenél az a 2.90 ábrán berajzoltuk.

Térjünk rá a nyirófeszültség τ_{zx} komponensének meghatározására. Erről feltételezzük, hogy a P ponton át húzott s hosszúságú vízszintes mentén lineárisan változik, és nagysága a szimmetriasíkokban zérus. (Csak

így lehet a keresztmetszet feszültségeloszlása szimmetrikus.) A vizsgált vízszintes minden pontjában ugyanakkora a τ_{zy} nyírófeszültség, amely az (1) jelű képlet alapján számítható ki. Most nézzük a 2.91 ábrát, ahol megrajzoltuk a vízszintes metszet B végpontjában a síkidom érintőjét. A keresztmetszet síkjában működő τ_z nyírófeszültségnek



2.90 ábra

a B pontban nem lehet erre az érintőre merőleges irányú vetülete, mert akkor a dualitás értelmében a rud B pontbeli érintősíkjában is kellene lenni nyírófeszültségnek. A rud külső felületén pedig nincs nyírófeszültség, mert nem érintkezik semmivel, ami azt kifejthetné rá. Ebből az következik, hogy a B pontban a τ_z^B nyírófeszültség érintő irányú.

A τ_{zx}^B feszültség-komponensnek tehát akkorának kell lennie, hogy az ismert τ_{zy} -hoz vektorálisan hozzáadva, érintő irányú τ_z^B nyírófeszültséget kapjunk. A keresett vízszintes komponens a 2.91 ábrán bejelölt mennyiségekkel ki is számítható:

$$\tau_{zx}^B = \tau_{zy} \cdot \operatorname{tg} \varphi_B = \tau_{zy} \frac{s}{2t}.$$

Térjünk át a tetszőleges belső, P jelű pontra. A függőleges komponens itt is ugyanakkora, a vízszintes összetevő pedig a lineáris megoszlás alapján arányos háromszögekből felírható:

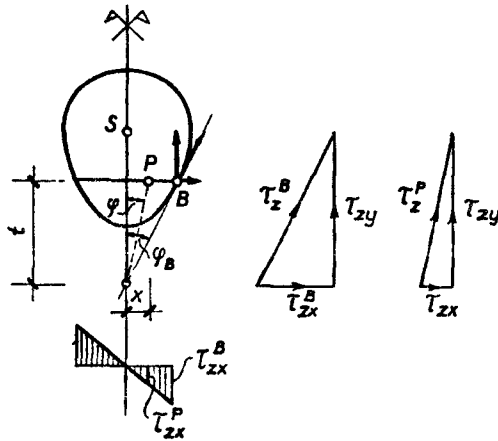
$$\tau_{zx} = \frac{2x}{s} \tau_{zx}^B.$$

Helyettesítsük be az előbbi kifejezést, akkor a

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} \frac{x}{t}$$

képletre jutunk, amely alkalmas a vízszintes nyírófeszültség-komponens kiszámítására.

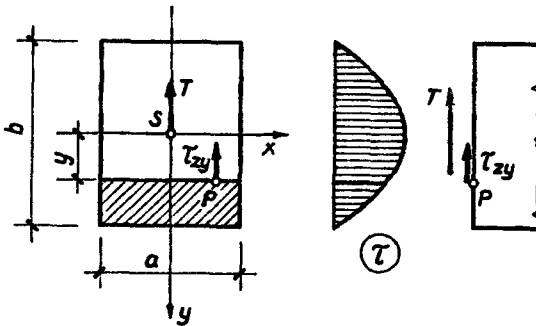
A keresztmetszetnek az olyan vízszintes egyenesein, amelyek végpontjain a kontúrérítők függőlegesek, nem keletkeznek vízszintes nyírófeszültségek, csak függőlegesek. Gyakori az olyan keresztmetszet, amelynek kontúrvonalai vízszintesek és függőlegesek, az ilyen keresztmetszetekben a nyírófeszültség mindenütt függőleges.



2. 91 ábra

A továbbiakban vizsgáljuk meg a nyirőfeszültség változását a keresztmetszet magassága mentén. Legyen a keresztmetszet a 2. 92 ábra szerinti derékszörű négyszög. A keresztmetszetben csak függőleges nyirőfeszültség keletkezik, amelynek nagysága:

$$\tau_{zy} = \frac{TS'}{J_x s}$$



2. 92 ábra

Fejezzük ki a keresztmetszet adataival az y koordinátájú P pontra vonatkozólag a képletben szereplő mennyiségeket. Az inerciayomaték és az s szélesség független az y koordinátától:

$$J_x = \frac{ab^3}{12}; \quad s = a.$$

A P pont alatti beszafozott síkidomrész statikai nyomatéka viszont y függvénye. A statikai nyomatékot a súlyponttávolság és a terület szorzataként írjuk fel. A kiegészítés tételét alkalmazva:

$$S'_x = \frac{b}{4} \cdot \frac{ab}{2} - \frac{y}{2} \cdot ay = \frac{a}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right).$$

fenti kifejezéseket behelyettesítve a nyirófeszültség képletébe a

$$\tau_{zy} = \frac{6T}{ab^3} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right)$$

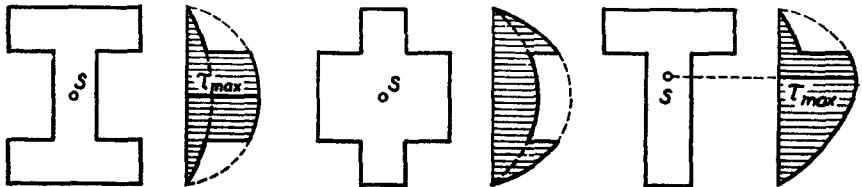
összefüggésre jutunk, amely y függvényében a keresztmetszet bármely pontjában megadja a nyirófeszültséget. Ezek szerint a nyirófeszültség a keresztmetszet magassága mentén másodfoku parabola szerint változik. Az alsó és felső pontokban, az $y = \pm b/2$ helyeken a nyirófeszültség zérus, maximális értékét pedig középen, $y = 0$ -nál éri el:

$$\tau_{zy \max} = \frac{3}{2} \frac{T}{ab}.$$

A nyirófeszültségek ábráját ennek megfelelően rajzoltuk meg.

A tiszta nyírás $\tau = T/A$ képlete szerint számolva T/ab átlagos nyirófeszültséget kapnánk, ami a maximális nyirófeszültségnek (itt a téglalap keresztmetszetnél) kétharmada.

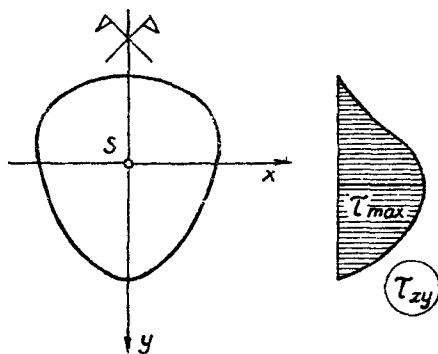
Az előző vizsgálatok alapján - részletezés nélkül - meghatározhatjuk a nyirófeszültségek ábráját olyan keresztmetszeteknél, amelyeket vízszintes és függőleges egyenesek határolnak (2.93 ábra). A statikai nyomaték ezekben az esetekben is y^2 függvénye, így a feszültségi diagram másod-



2.93 ábra

foku parabola. Csakhogy az s szélességben ugrásszerű változások vannak, és ezek a feszültségi ábrában is jelentkeznek. Mivel s a nevezőben van, kisebb szélességhez nagyobb feszültség is tartozik, és fordítva.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy amikor a súlypont környékén a szélesség nem változik, akkor a maximális nyírófeszültség a súlyvonalban ke-



2.94 ábra

lesz általában a súlypont magasságában. A megoszlás jellege azonban hasonló a diagram görbe vonalú, az alsó és felső szélső szálakban az ordináta zérus, és a maximum helye valahol a súlypont környezetében van.

letkezik, vagy legalábbis helyi maximum lép fel. Ez abból következik, hogy a nyírófeszültség változása csak a statikai nyomaték változásától függ ($s = \text{const}$), az pedig a súlyvonal alatti (vagy feletti) síkdiomrész esetében a legnagyobb.

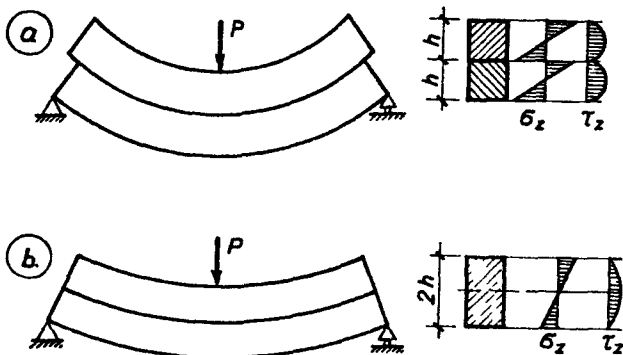
Amennyiben a keresztmetszetet nem függőleges és vízszintes egyenesek határolják, hanem ferde egyenesek, vagy görbék (pl. 2.94 ábra), akkor a nyírófeszültségek függőleges komponensének megoszlása már nem másodfoku parabola, és a maximum sem

2.3.3.2 A hajlított és nyírt tartóban keletkező csuszató erők

Az eddigiekben a z normális keresztmetszeten ébredő nyírófeszültségek meghatározásával foglalkoztunk. Képleteink levezetésében azonban láttuk, hogy a nyírófeszültségek dualitása következtében ugyanakkora nyírófeszültségek működnek a rúdelem y normális felületelemein is (lásd: 2.89 ábra):

$$\tau_{yz} = -\tau_{zy} = \frac{-TS'x}{J_s}$$

Ez a feszültség természetesen a z tengely irányában a T nyíróerőnek megfelelően változik. Ennek a feszültségnek az ismerete lehetővé teszi annak a vízszintes csuszatóerőnek a meghatározását, amely egy gerenda egymás felett levő részei között egy véges hosszúságú szakaszon működik. Ennek a csuszatóerőnek a szerepét a 2.95 ábra szemlélteti. A 2.95. ábra azt mutatja be, hogy ha két tökéletesen síma gerendát egy-



2. 95 ábra

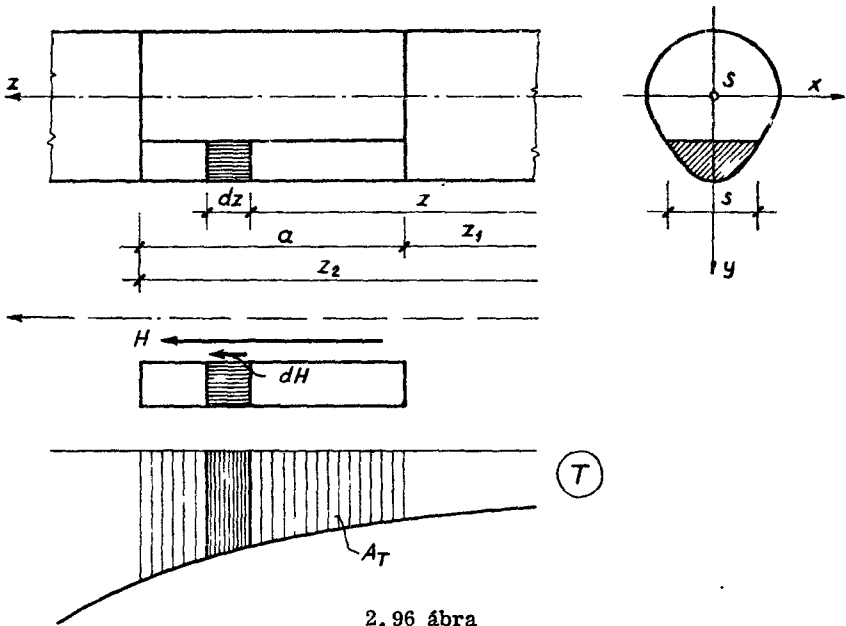
másra helyezzük, akkor ezek a terhelés hatására egymáson elcsuszognak, és így a teher egy-egy meghatározott hányadát a két gerenda külön-külön viseli. Ha viszont a két gerenda egymásra való elcsuszását valamilyen módon (pl. ragasztással) megakadályozzuk, akkor a tartó a 2.95.b ábra szerint fog viselkedni, a két gerenda illesztési felületét az említett vízszintes csuszátóerő nyírásra veszi igénybe. Erre a két gerenda közötti kapcsolatot természetesen méretezni kell. Ha ez a kapcsolat megfelelő, akkor a két gerenda teljesen együtt dolgozik, és egyetlen $2h$ magasságú gerendával azonos módon viseli a külső terhelést.

Ha a tartónak az egymáshoz képest "elcsuszni akaró" két része (esetünkben a két gerenda) közötti kapcsolat folytonos (pl. ragasztás), akkor a kapcsolat méretezéséhez elegendő kiszámítani a legnagyobb csuszató feszültséget (nyírófeszültséget). Ez a legnagyobb feszültség a legnagyobb nyíróerő helyén keletkezik. Nagysága:

$$\tau_{yz \max} = \frac{-T_{\max} \cdot S'_x}{J_x \cdot s}$$

ahol T_{\max} a legnagyobb nyíróerő (a nyíróerő ábra abszolút értelemben vett legnagyobb ordinátája), S'_x az elcsuszni akaró keresztmetszet statikai nyomatéka a teljes keresztmetszet súlypontjára, s pedig a kapcsolatnak a tartó tengelyére merőleges, szélességi méret.

Gyakori eset, hogy az egymásra helyezett tartók együttműködésüket csak bizonyos helyeken elhelyezett kapcsolóelemekkel biztosítják. Ilyenkor ki kell számítani az egy kapcsolóelemre jutó vízszintes csuszatóerőt, és azt kell összehasonlítani az egy kapcsolóelemre megengedett erővel. Az ilyen kapcsolat úgy működik, hogy a kapcsolóelem egy a hosszúságú szakaszon a vízszintes csuszató erőket "összegyűjti". Határozzuk meg az



2.96 ábra

a hosszúsága szakaszra jutó H , vízszintes csuszátóerőt (2.96 ábra).
 A dz hosszúságú elemi rudszakra ható z irányú csuszátóerő:

$$dH = \tau_{yz} \cdot s \cdot dz = \frac{-TS'}{J_x} \frac{x}{s} s dz = \frac{-TS'}{J_x} \frac{x}{s} dz.$$

A fajlagos csuszátóerő:

$$h = \frac{dH}{dz} = - \frac{S'}{J_x} \frac{x}{s} T.$$

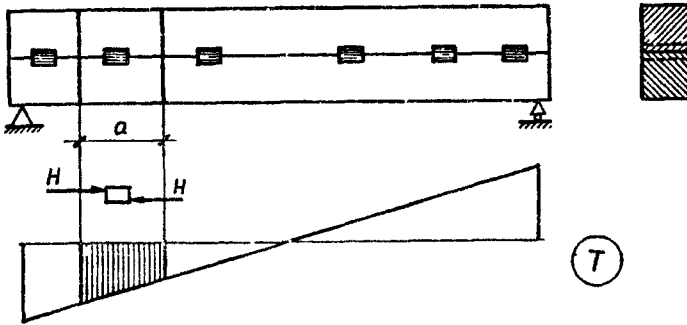
Dimenziója N/mm vagy kN/mm .

Az a hosszúságú szakaszra jutó teljes csuszátó erő:

$$H = \int_{z_1}^{z_2} dH = \int_{z_1}^{z_2} h dz = - \frac{S'}{J_x} \frac{x}{s} \int_{z_1}^{z_2} T dz = - \frac{S'}{J_x} A_T,$$

ahol A_T az a szakasz alatti nyírőerőábra előjeles területe.

A csusztatóerők számításának az imént megismert módját alkalmazhatjuk pl. a 2.97 ábrán feltüntetetti keményfabetétes tartón.



2.97 ábra

2.3.3.3 Szimmetriásikjára merőlegesen terhelte vékonyfal hajlított és nyírt rúdelem

A 2.98 ábrán vázolt befogott tartó keresztmetszete az x tengelyre szimmetrikus, a terhelő erők síkja pedig az arra merőleges y, z sík. A tartó végén a keresztmetszet súlypontjában működik az y irányú F erő, és ennek hatására az egyes keresztmetszetek hajlítással egyidejű nyírásra vannak igénybe véve. Mivel a szimmetriából kifolyólag az x tengely tehetetlenségi főtengely, egyenes hajlításról van szó. Ennek megfelelően azt várnánk, hogy a tartó alakváltozása az y, z síkkal párhuzamos lesz, a keresztmetszetek csak az x tengely körül fordulnak el. A tapasztalat azonban a fentiekől eltérően azt mutatja, hogy annak ellenére, hogy az F erőt a súlyponton át működtetjük, a keresztmetszetek nemcsak az x , hanem a z tengely körül is elfordulnak. A rud tehát a lehajlásokon kívül el is csavarodik (2.98.b ábra). A következőkben megvizsgáljuk e jelenség okát.

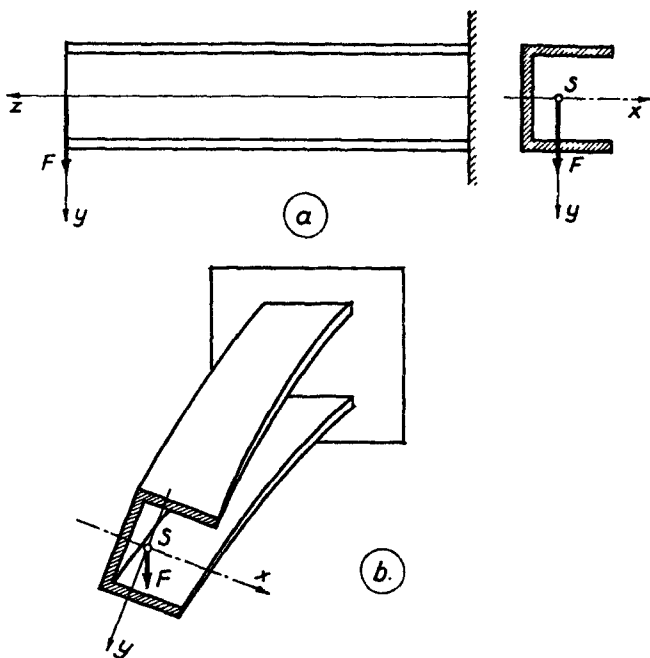
A keresztmetszeti méreteket a 2.99. a ábrán tüntettük fel. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a t vastagság a keresztmetszet mentén állandó és a keresztmetszet egyéb méreteihez képest kicsi.

Az M erőpár - amint tudjuk - a keresztmetszetben normálfeszültségeket okoz, ezek a

$$\sigma_z = \frac{M}{J_x} y$$

képlettel számíthatók.

A T nyíróerő hatására a keresztmetszeten keletkező nyírófeszültségekről azt állapítottuk meg a 2.3.3.1 pontban, hogy irányuk a kereszt-



2.98 ábra

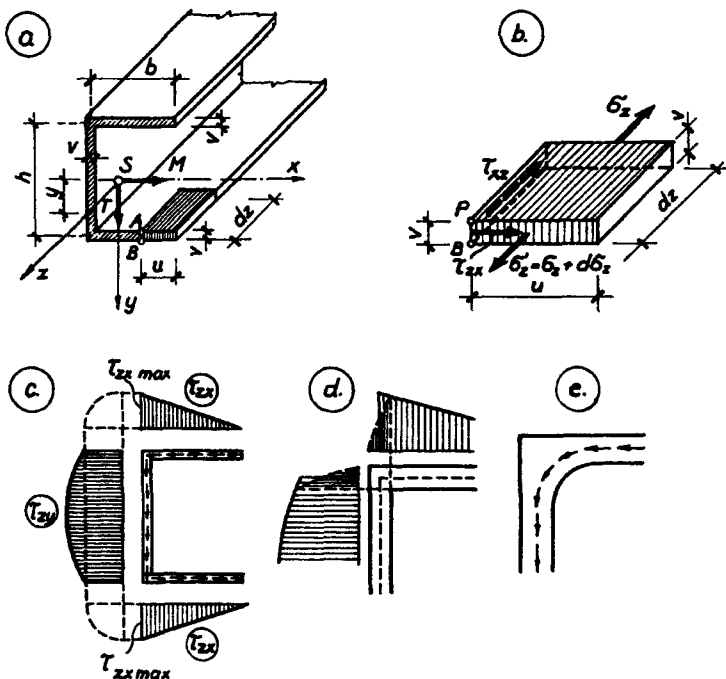
metszeti síkidom határvonalán levő bármely pontban csak a határvonalat érintő egyenesbe eshet. Így például a P pontban a nyirófeszültség csak az x tengellyel párhuzamos lehet, tehát $\tau_{zy} = 0$. A P-vel szemközti Q pontban szintén csak x irányú τ_{zx} feszültség keletkezhet, és a v vastagság kis értékére való tekintettel feltételezhető, hogy a P és Q pontok között a nyirófeszültség nagysága nem változik.

A rudból képzeletben kivágott dz hosszúságú és u szélességű rud-elem (2.99.b ábra) egyensúlyára felírt z irányú vetületi egyenletből az alábbi képlet vezethető le:

$$\tau_{zx} = \frac{TS'_x}{J_x \cdot v}$$

A képlet hasonló a τ_{zy} képletéhez, a levezetés részletei is megegyeznek. A képletben S'_x az $A' = u \cdot v$ területű síkidomrész statikai nyomatéka az x tengelyre:

$$S'_x = u \cdot v \left(\frac{h}{2} - \frac{v}{2} \right)$$



2.99 ábra

Mivel $v \ll h$, $v/2$ elhanyagolható, így

$$S'_x = \frac{1}{2} u \cdot v \cdot h .$$

S'_x behelyettesítésével:

$$\tau_{zx} = \frac{T h}{2 J_x} u .$$

Ez az összefüggés u -ra nézve lineáris, tehát a vízszintes övek mentén a nyírófeszültség lineárisan változik, és a 2.99.c ábrán feltüntetett diagrammal jellemezhető. A legnagyobb x irányú nyírófeszültség a sarknál keletkezik, nagysága:

$$\tau_{zx \max} = \frac{T h \cdot b}{2 J_x} .$$

A függőleges gerinc mentén a nyirófeszültségek az y tengellyel párhuzamosak, és nagyságuk az előzőekben megismert módon határozható meg:

$$\tau_{zy} = \frac{T S'_x}{J_x \cdot v}$$

A fentiekben meghatározott nyirófeszültségeket a 2.99.c ábra szemlélteti. Ezek nyilfolytonos nyirófolyamot alkotnak.

Megjegyezzük, hogy az eredmények a gerinc és az övek csatlakozásánál csak a v vastagságot felelő középvonalon érvényesek. A sarokpontok közelében a nyirófeszültségek fokozatosan zérusra csökkennek, annak a feltételnek megfelelően, hogy a rud határolólapján az érintősíkra merőleges nyirófeszültség-komponens nem lehet (2.99.d ábra). A sarokpontok közelében a nyirófeszültség iránya fokozatosan változik, így a nyirófolyamban nem jelentkezik iránytörés. A homoru sarokpontoknál még így is "feszültség-csucsok" keletkeznek, ezért ennek csökkentése érdekében a belső sarkokat a 2.99.e ábrán látható módon le szokták kerekíteni.

Határozzuk meg a továbbiakban a fentiekben levezetett nyirófeszültségek eredőjét, és hasonlítsuk azt össze a keresztmetszetre ható igénybevételekkel. A nyirófeszültségek eredőjeként a keresztmetszetre ható nyiróerőt kellene kapnunk, de amint látni fogjuk ez az egyenértékűségi feltétel most nem teljesül. Ez az ellentmondás magyarázatot ad arra, hogy bár a rudra csavarónyomaték nem hat, az mégis elcsavarodik.

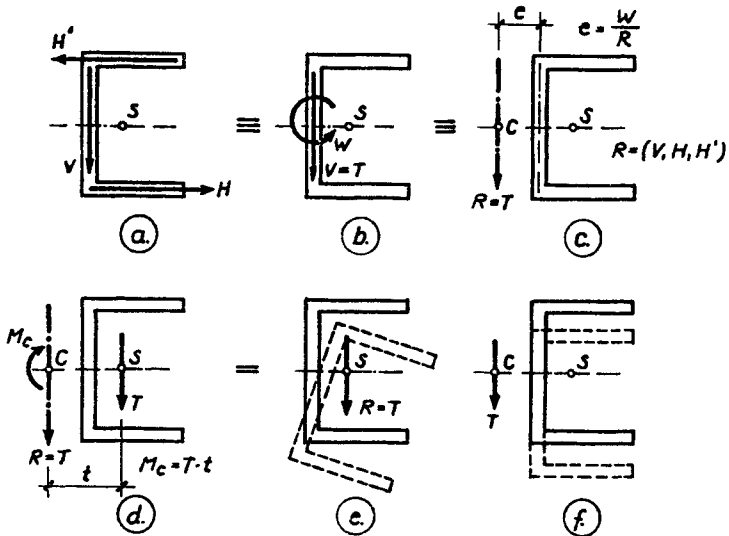
Könnyen igazolható, hogy a függőleges τ_{zy} feszültségek eredője egy olyan V függőleges erő, amely a gerinc tengelyében működik, és nagysága megegyezik a nyiróerővel: $V=T$ (2.100.a ábra). Emellett azonban a két övben is működnek nyirófeszültségek, és ezek eredője egy-egy vízszintes, azonos nagyságu, de ellenkező értelmű erő: $H = -H'$.

$$H = \tau_{zx} \max \frac{b \cdot v}{2} = \frac{T \cdot h \cdot b^2 \cdot v}{4 J_x}$$

A H és H' erő $W = h \cdot H$ nagyságu erőpárt alkot, amely a függőleges erővel összetéve függőleges $R=T$ nagyságu eredőt eredményez (2.100.b és c ábrák). Ez az erő a gerinc középvonalától

$$e = \frac{W}{R} = \frac{H \cdot h}{T} = \frac{T \cdot h \cdot b^2 \cdot v \cdot h}{4 T J_x} = \frac{h^2 \cdot b^2 \cdot v}{4 J_x}$$

távolságban helyezkedik el és a szimmetriatengelyt a C pontban metszi. A C pontot nyirási középpontnak nevezzük. Látható, hogy a nyirási középpont a gerincnek az S súlyponttal ellentétes oldalán helyezkedik el,

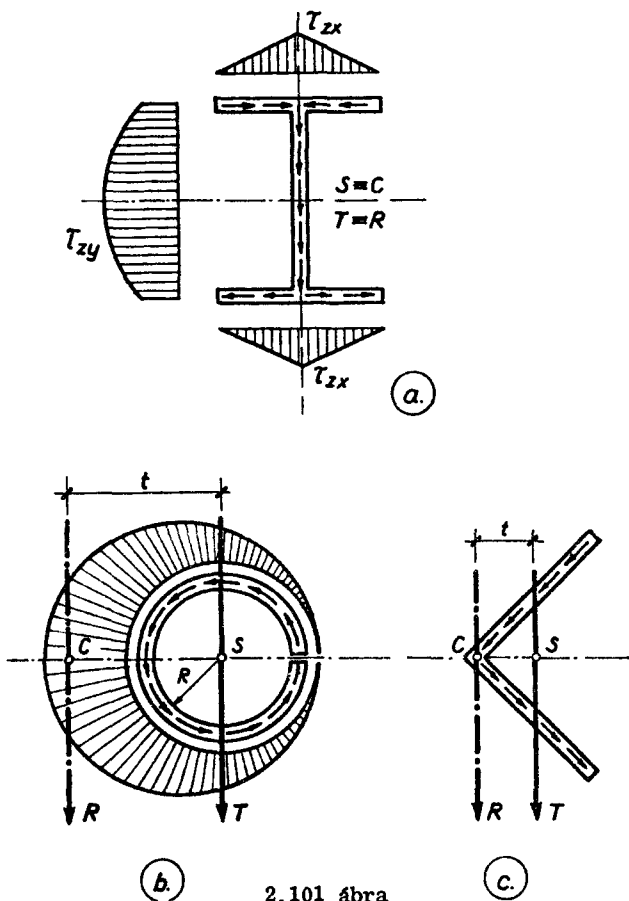


2.100 ábra

így a nyírófeszültségek eredője R nem esik egybe a keresztmetszetre működő nyíróerővel. A feszültségek és az igénybevételek egyenértékűsége csak akkor teljesül, ha a keresztmetszetben - az eddig meghatározottakon kívül - még olyan feszültségek is létrejönnek, amelyek eredője a keresztmetszet síkjában működő $M = T \cdot t$ nagyságú erőpár (2.100.d ábra). Ez azt jelenti, hogy a keresztmetszet szimmetriatengelyére merőleges és a súlyponton átmenő síkban terhelt tartó csavarásra is igénybe van véve.

A csavarásból keletkező nyírófeszültség a nyírás hatására ébredő τ_{xz} és τ_{zy} feszültségekhez hozzáadódik, tehát előnytelen. Ez a feszültségigénybevétel kiküszöbölhető, ha a külső terhelést a keresztmetszetek súlypontján átmenő sík helyett a nyírás középponton áthaladó síkban működtetjük (2.100.f ábra).

A fentiekben levezetett eredmények és megállapítások az általános alakú vékonyfalú nyitott és zárt szelvényekre is általánosíthatók. Minden keresztmetszetenél található egy C nyírás középpont, amelynek az a jellegzetessége, hogy amennyiben a nyíróerő ezen halad keresztül, akkor a keresztmetszet a rud tengelye körül nem fordul el, azaz csavarásra nincs igénybe véve. Ellenkező esetben viszont a keresztmetszet elcsavarodik. A keresztmetszetek elcsavarodása a C pont körül jön létre, de ezt itt nem bizonyítjuk. A nyírás középpont mindenkor rajta van a keresztmetszet szimmetriatengelyén, így kétszeresen szimmetrikus keresztmetszetek esetében egybeesik a súlyponttal. Ilyenkor tehát a súlyponton áthaladó teher nem okoz csavarást (2.101.a ábra). Egyszeresen szimmetrikus és általán-

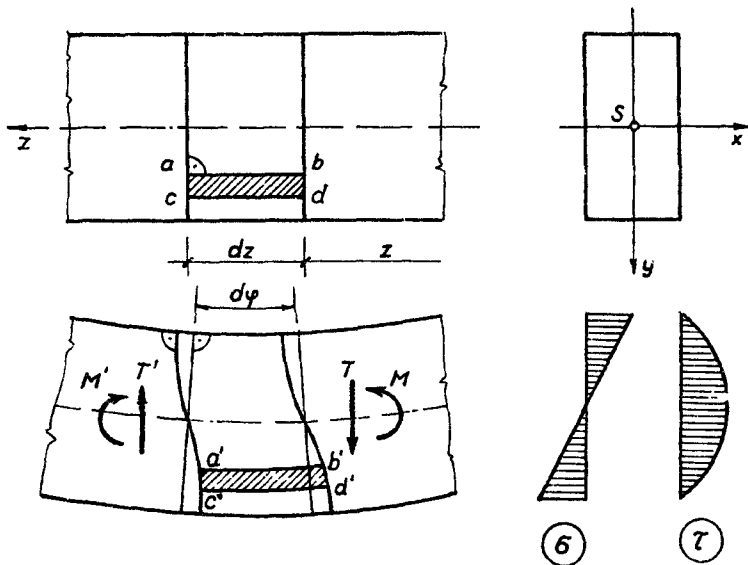


2.101 ábra

nos alaku keresztmetszeteknél a C és az S pont nem esik egybe. A 2.101.b és c ábra két ilyen példát szemléltet.

2.3.3.4 A hajlított és nyírt tartó alakváltozása

A következőkben a hajlított és nyírt rudból kiragadott dz hosszúságu rúdlem alakváltozását fogjuk megvizsgálni (2.102 ábra). A hajlítás hatására az egymástól dz távolságra levő keresztmetszetek egymáshoz képest $d\varphi$ szöggel elfordulnak. Ezt az elfordulást - a tiszta hajlítás tárgyalásánál szerzett ismereteink alapján - ki tudjuk számítani:



2.102 ábra

$$d = \frac{M}{E J_x} dz .$$

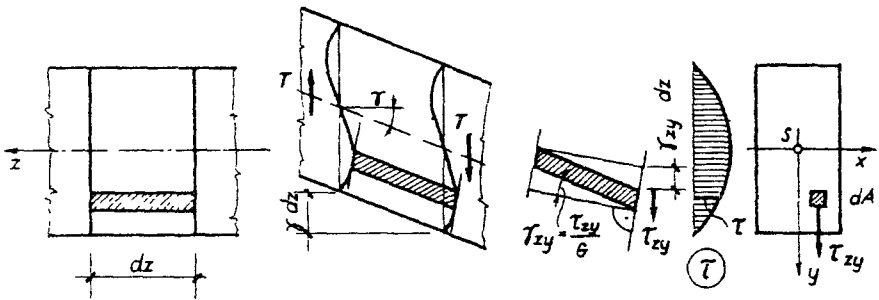
A nyirőfeszültségek hatására azonban további alakváltozás is bekövetkezik. Mint tudjuk, a nyirőfeszültségek hatására azok között a síkok között, amelyekre ezek működnek, szögtorzulás lép fel. Ennek nagysága:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} .$$

A fentieknek megfelelően, a 2.102 ábrán oldalnézetben ábrázolt (vonalkázott) elemi hasáb véglapjai egymáshoz képest elfordulnak és el is tolódnak (mert az elfordulás egy külső pont körül következik be), ugyanakkor a véglapoknál szögtorzulás is bekövetkezik. A szögtorzulás a τ_{zy} nyirőfeszültség függvénye, és mivel ez a keresztmetszet mentén változik, változik a szögtorzulás mértéke is. Ez azt jelenti, hogy az eredetileg sík keresztmetszetek a hajlított és nyírt tartóban nem maradhatnak síkok, Az elemi szálak csak ott maradnak a keresztmetszetre merőlegesen, ahol τ_{zy} zérus.

A továbbiakban vizsgáljuk külön a nyírási alakváltozást. A 2.103 ábrán bemutatott, a dz hosszúságú rudелеmből kiragadott dA keresztmetszetű kis hasábanak az eredetileg z és y normális felületei közötti

lapszögek γ_{zy} értékkel megváltoznak. Ugyanakkor a kis hasáb tengelye is elferdül γ szöggel, de ugyanilyen mértékben változik meg a szilárdsági tengely helyzete is. A szilárdsági tengely elferdülése miatt az egymástól dz távolságban levő keresztmetszetek között $\gamma \cdot dz$ függőleges eltolódás-különbség lesz, ez tehát a dz hosszúságra jutó nyirási alakváltozás. Mint látjuk, a nyirási alakváltozásra a γ szögváltozás jellemző. Határozzuk meg γ értékét.



2.103 ábra

A dz hosszúságú rudelem alakváltozása során a T nyiróerő a $\gamma \cdot dz$ eltolódáson munkát végez. (A munka az erő elmozdulásirányu vetületének és az elmozdulásnak a szorzata. Az elmozdulást az erő hozza létre, mégpedig úgy, hogy a tartó terhelésekor a T nyiróerő és vele párhuzamosan az eltolódás fokozatosan növekszik. A munka számításakor tehát csak az átlagos erőt vehetjük figyelembe, ez most éppen $T/2$, mivel a tartón terheletlen állapotban a nyiróerő zérus, terhelt állapotban pedig T . Az erők és a feszültségek munkájának számításáról a későbbiekben még bővebben lesz szó.) A nyiróerő által végzett munka: $\gamma \cdot dz \cdot T/2$. A nyiróerő és a nyirófeszültségek egyenértékűségéből következik, hogy a saját maguk által létrehozott elmozduláson végzett munkájuknak is egyezniük kell.

A dA felületen működő $\tau_{zy} dA$ erő a kis hasáb véglapjai között $\gamma_{zy} \cdot dz$ eltolódást hoz létre. A nyiróerő és a nyirófeszültségek munkájának egyenlősége az alábbi alakban írható fel:

$$\frac{1}{2} T \gamma dz = \frac{1}{2} dz \int \tau_{zy} \gamma_{zy} dA. \quad (A)$$

Figyelembe véve, hogy

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}.$$

$$\gamma = \frac{1}{G T} \int_{(A)} \tau_{zy}^2 dA.$$

Behelyettesítve τ_{zy} képletét:

$$\gamma = \frac{1}{G T} \frac{T^2}{J_x^2} \int_{(A)} \frac{S_x^2}{s^2} dA.$$

Ha a számlálót és a nevezőt a keresztmetszeti síkidom A területével szorozzuk:

$$\gamma = \frac{T}{A} \frac{A}{J_x^2} \int_{(A)} \frac{S_x^2}{s^2} dA.$$

E képletben szerepel a következő mennyiség:

$$\varrho = \frac{A}{J_x^2} \int_{(A)} \frac{S_x^2}{s^2} dA$$

Ez dimenzió nélküli szám, a keresztmetszetnek csak az alaktól függő adata, a különböző alakú keresztmetszeti síkidomoknál az integrálás elvégzésével kiszámítható. Ennek bevezetésével:

$$\gamma = \varrho \frac{T}{G A}.$$

Néhány szokásos keresztmetszetre - a levezetést mellőzve - megadjuk a ϱ értékét:

- derékszögű négyzögmetszetenél $\varrho = 1,20$;
- körkeresztmetszetenél $\varrho = 10/9 = 1,11$;
- magasgerincu I tartóknál közelítőleg: $\varrho = A/A_g$,

ahol A a keresztmetszet teljes területe, A_g pedig a gerinc területét jelenti.

2.3.4 A hajlított, nyírt és csavart tartó

Az összetett igénybevételeknek jellegzetes esete a hajlított, nyírt és csavart tartó. Az ilyen tartók keresztmetszetében a hajlításból normálfeeszültségek, a nyírásból és a csavarásból pedig nyírófeeszültségek ébrednek. A hajlításból keletkező feszültségek továbbra is a

$$\sigma = \frac{M}{J} y$$

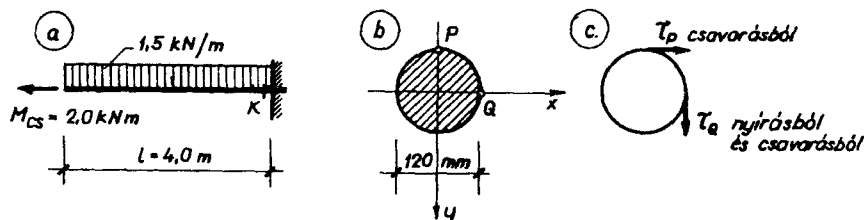
képletből számíthatók. A nyírásból származó nyírófeeszültségeket a hajlított és nyírt tartó tárgyalásánál megismert módon tudjuk számítani:

$$\tau_{zy} = \frac{T S'_x}{J s_x}$$

A csavarás hatására keletkező nyíró feszültségek - a keresztmetszet alakjától függően - az előzőekben megismert módon különböző képletekből számíthatók. Amennyiben a vizsgált keresztmetszetnek egy adott pontjában a nyírásból és a csavarásból keletkező nyírófeeszültség iránya megegyezik, akkor a kétfajta feszültség skalárisan is összeadható. Az összegzésnél azonban ügyelnünk kell a feszültségek előjelére.

A hajlított, nyírt és csavart tartó feszültségszámításának részleteit két példa mutatja be.

A 2.104. a ábrán látható körkeresztmetszetű befogott tartót egyenletesen megoszló teher és a tartó végén működő csavarónyomaték terheli. Feladatunk a befogás melletti K keresztmetszet P és Q pontjában (2.104.b ábra) a feszültségek meghatározása.



2.104 ábra

A K keresztmetszet igénybevételei:

$$T = -1,5 \cdot 4,0 = -6,0 \text{ kN};$$

$$M_x = -1,5 \cdot \frac{4,0^2}{2} = -12,0 \text{ kNm};$$

$$M_{cs} = 2,0 \text{ kNm.}$$

A feszültségek számításához szükséges geometriai jellemzők:

$$J_x = \frac{60^4 \cdot \pi}{4} = 1,018 \cdot 10^7 \text{ mm}^4;$$

$$J_o = \frac{60^4 \cdot \pi}{2} = 2,036 \cdot 10^7 \text{ mm}^4;$$

$$S'_x = \frac{60^2 \cdot \pi}{2} \cdot \frac{4 \cdot 60}{3 \cdot \pi} = 1,44 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

A P pontban a hajlításból normál feszültség, a csavarásból pedig nyírófeszültség keletkezik. A nyírásból a P pontban nem keletkezik feszültség, mert ehhez a ponthoz tartozó S'_x zérus.

$$\sigma_P = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{-12,0 \cdot 10^6}{1,018 \cdot 10^7} \cdot (-60) = 70,73 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_P = \frac{M_{cs}}{J_o} r = \frac{2,0 \cdot 10^6}{2,036 \cdot 10^7} \cdot 60 = 5,89 \text{ N/mm}^2$$

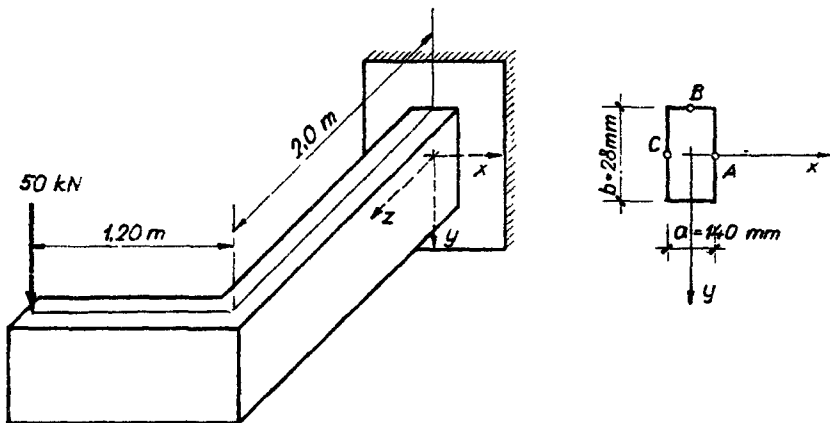
A keresztmetszet Q pontjában nem keletkezik feszültség a hajlításból, mivel a Q pont a semleges tengelyen van. Nyírófeszültség viszont a csavarásból és a nyírásból is keletkezik, és ezek a Q pont esetében érintőirányúak, tehát előjelhelyesen összegezhetőek. A nyírásból keletkező nyírófeszültség előjele a nyíróerő előjelével azonos (tehát esetünkben negatív). A csavarás hatására ébredő nyírófeszültség előjelét szemlélet útján lehet a legegyszerűbben meghatározni. A 2.104. a és c ábrára tekintve megállapíthatjuk, hogy a csavarónyomaték a K keresztmetszet Q pontját lefelé igyekszik elmozdítani, tehát lefelé ható nyírófeszültség működik. A nyírófeszültségek előjelszabálya értelmében az ilyen nyírófeszültség negatív, mert a Q pontban képzelt pozitív normál feszültség (húzófeszültség) vektorát negatív irányba (az óramutató járásával ellentétesen) kell elfordítani, hogy lefelé mutató nyírófeszültséget kapjunk. (Hasonló szemlélettel a nyíróerő hatására ébredő feszültségek előjele is eldönthető.)

A Q pontban keletkező nyírófeszültség:

$$\tau_Q = \frac{T \cdot S'_x}{J_x \cdot s} + \frac{M_{cs}}{J_o} r = - \frac{6,0 \cdot 10^3 \cdot 1,44 \cdot 10^5}{1,018 \cdot 10^7 \cdot 120} - \frac{2,0 \cdot 10^6}{2,036 \cdot 10^7} \cdot 60 =$$

$$= -0,71 - 5,89 = -6,60 \text{ N/mm}^2.$$

Második példaként határozzuk meg a 2.105 ábrán látható tartó befogási keresztmetszetének A, B és C pontjaiban keletkező feszültségeket.



2.105 ábra

A befogási keresztmetszet igénybevételei:

$$T = -50 \text{ kN};$$

$$M_x = -50 \cdot 2 = -100 \text{ kNm};$$

$$M_{cs} = -50 \cdot 1,2 = -60 \text{ kNm}.$$

A feszültségek számításához szükséges geometriai jellemzők:

$$J_x = \frac{140 \cdot 28^3}{12} = 2,56 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

$$S'_x = 140 \cdot 140 \cdot 70 = 1,372 \cdot 10^6 \text{ mm}^3.$$

A vizsgált pontok közül normál feszültség csak a B pontban ébred:

$$\sigma_A = \sigma_C = 0;$$

$$\sigma_B = \frac{M}{J_x} y = \frac{-100 \cdot 10^6}{2,56 \cdot 10^3} \cdot (-140) = 54,69 \text{ N/mm}^2$$

Nyirófeszültség a vizsgált pontok mindegyikében ébred. Az A és C pontban a nyírás és a csavarás hatására is keletkezik nyirófeszültség, ezek a keresztmetszet síkjában függőleges irányban működnek. A B pontban csak a csavarás hoz létre nyirófeszültséget. Ez a nyirófeszültség vízszintes irányú. A csavarás hatására ébredő nyirófeszültségek a 2.2.4.5 pontban megismert módon számítható.

Az A pontban keletkező nyirófeszültség:

$$\begin{aligned} \tau_A &= \frac{T S'_x}{J_x S'_x} + \frac{M}{a^2 b} (3+1,8 \frac{a}{b}) = \\ &= - \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1,372 \cdot 10^6}{2,56 \cdot 10^8 \cdot 140} + \frac{60 \cdot 10^6}{140^2 \cdot 280} (3+1,8 \frac{140}{280}) = \\ &= -1,91 + 42,64 = 40,73 \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

A C pontban keletkező nyirófeszültség az előző részeredmények felhasználásával számíthatók, a különbség csupán annyi, hogy a C pontban a csavarásból az előzővel ellentétes előjelű nyirófeszültség ébred.

$$\tau_C = -1,91 - 42,64 = -44,55 \text{ N/mm}^2.$$

A B pontban keletkező nyirófeszültség az A ponti, csavarás hatására ébredő nyirófeszültség β -szorososa. Mint tudjuk, β a keresztmetszet oldalainak a/b arányától függ. (Lásd: 2.2.4.5 pont.)

$$\frac{a}{b} = \frac{140}{280} = 0,5; \quad \beta = 0,8.$$

$$\tau_B = 0,8 \cdot 42,64 = 34,11 \text{ N/mm}^2.$$

2.4 A főfeszültségek meghatározása

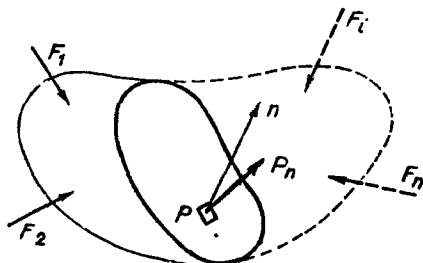
Az előző fejezetekben megismertedtünk az egyszerű és az összetett igénybevételek esetén a keresztmetszetben működő feszültségek számításának módjával. A normál- és nyirófeszültségeket az eddigiekben mindig a

vizsgált rud tengelyére merőleges metszetekben számítottuk ki. A vizsgált rudon azonban ferde metszeteket is felvehetünk, és a ferde metszeteken működő feszültségek szükségyszerűen különbözni fognak a merőleges metszeteken (keresztmetszeteken) működő feszültségektől. A továbbiakban először összefüggést kerestünk a merőleges és a ferde metszetekben működő feszültségek között, majd meghatározzuk azokat az - általában ferde - irányokat, amelyekben a legnagyobb, illetve a legkisebb normálfeszültségek működnek, és kiszámítjuk a normálfeszültségek szélsőértékeit. A normálfeszültségek szélsőértékeit főfeszültségeknek nevezzük.

A főfeszültségek az általános szilárdságtan módszereivel határozhatók meg. Az általános szilárdságtanban nem teszünk semmiféle kikötést a szilárd test alakjára vonatkozóan, a megállapítások a teljesen általános alaku szilárd testekre is érvényesek. A szilárd test anyagára vonatkozó kikötéseinket azonban a továbbiakban is fenntartjuk. Csak homogén, izotróp és a Hooke-törvényt követő (lineárisan rugalmas) anyagu szilárd testekkel foglalkozunk. Az általános szilárdságtannak azt a részét, amely a fent leírt anyagu testek feszültségeit (és alakváltozásait) tárgyalja, lineáris rugalmasságtannak nevezik.

2.4.1 A feszültségi állapot általános vizsgálata

Vizsgáljunk egy általános alaku szilárd testet, amelyre egyensúlyban levő erőrendszer működik. A test belsejében ilyenkor feszültségek ébrednek. Tetszőleges síkkal vágjuk ketté a testet, és a test egyik részét távolítsuk el (2.106 ábra). A meghagyott részre a metszet minden pontjában feszültségek működnek, amelyek az eltávolított testrész mechanikai hatását helyettesítik.



2.106 ábra

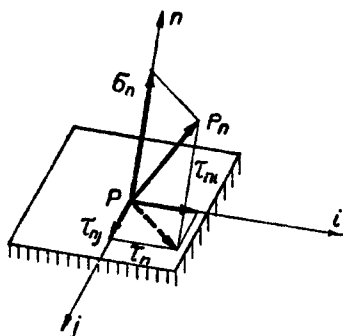
leges n normálvektorral jellemezhetjük. A metszet P pontjában a p_n feszültségvektor működik. Az n index arra utal, hogy ez a feszültség az n normálisu metszetben ébred. A p_n feszültségvektor helyzete az n normálvektorhoz képest általában ferde (2.107 ábra), így az i és j koordinátatengelyek felvételével három derékszögű összetevőre bontható:

$$\bar{p}_n = (\sigma_n, \tau_{ni}, \tau_{nj}).$$

Természetesen a P ponton keresztül egy másik sík is felvehető, és ehhez a síkhoz egy másik feszültségvektor tartozik. Tehát, ha egy szilárd test valamely pontjában a feszültséget keressük, akkor azt is meg kell adnunk, hogy a ponton át felvehető végtelen sok sík közül melyikben keressük a feszültséget.

Feszültségi állapoton a szilárd test egy pontjában működő feszültségvektorok összességét értjük. A feszültségi állapot matematikailag egy

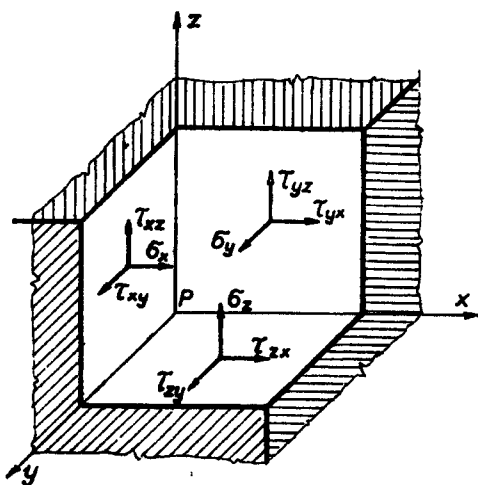
$$\bar{p}_n = f(\bar{n})$$



2.107 ábra

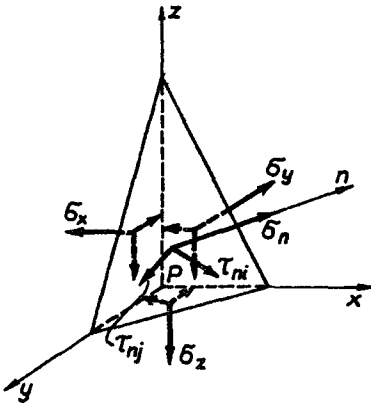
alaku vektor - vektor függvény, amely minden normálshoz hozzárendel egy feszültségvektort.

Azt állítjuk, hogy a feszültségi állapotot akkor tekintjük ismertnek, ha ismerjük három (egymásra merőleges) metszetben a feszültségeket. A P ponton át felvehető x,y,z normálisú síkokon működő feszültségeket a 2.108 ábrán ábrázoltuk.



2.108 ábra

Az állítás igazolására tekintünk a 2.109 ábrát. Ha az állítás igaz, akkor a 2.108 ábrán feltüntetett feszültségekből ki tudjuk számítani a



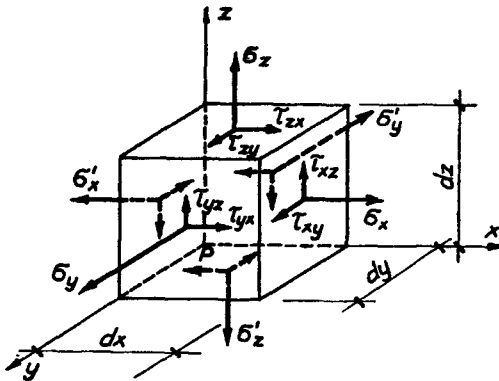
2.109 ábra

tetszőleges n normálisú metszetben működő feszültségeket. Az ismeretlen feszültségek kiszámításának az lehet a módszere, hogy a P pont környezetéből kimetszünk egy elemien kicsiny testet, és megállapíthatjuk, hogy milyen feszültségek, illetve erők működnek ennek lapjain, és ezekre egyensúlyi egyenleteket írunk fel. Esetünkben a legegyszerűbben kimetszhető test a 2.109 ábrán látható tetraéder. Az ismeretlen σ_n , τ_{ni} és τ_{nj} feszültségkomponensek a

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \text{és} \quad \sum F_{iz} = 0$$

vetületi egyenletekből kiszámíthatók. Megjegyezzük, hogy a tetraéder egyensúlya alapján három nyomatéki egyenlet is felírható, ezekből a nyírófeszültségek dualitásának azonosságait kapnánk.

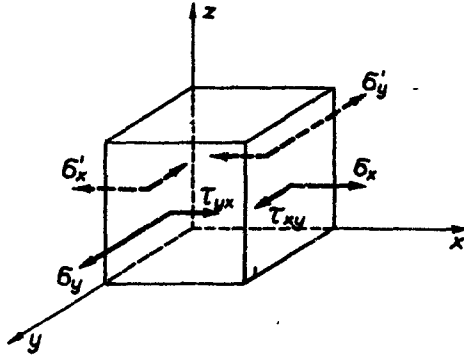
A feszültségi állapotnak eddig a legáltalánosabb esetéről beszéltünk, amikor a P ponton keresztül felvehető síkok mindegyikében keletkezik feszültség. Az ilyen feszültségi állapotot térbeli feszültségi állapotnak nevezzük. Térbeli feszültségi állapot esetén a P pont környezetéből kivágható dx , dy , dz méretű elemi hasáb minden lapján működnek feszültségek (2.110 ábra).



2.110 ábra

A feszültségi állapotnak vannak speciális esetei is, a síkbeli és a lineáris feszültségi állapot.

Síkbeli feszültségi állapot akkor beszélünk, ha található a ponton keresztül egy feszültségmentes sík. A 2.111 ábrán az elemi hasáb z normálisú felületein nem működnek feszültségek: $\bar{p}_z = 0$.



2.111 ábra

A feszültségkomponensekkel felírva:

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0.$$

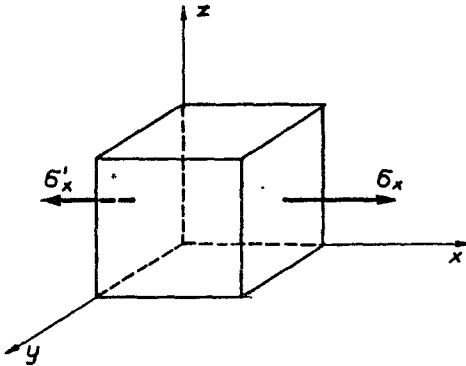
A nyírófeszültségek dualitásának tételéből következik, hogy még két további nyírófeszültség is zérus:

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0.$$

A bemutatott példában a feszültségi állapot síkja az x, y sík, a feszültségkomponensek e síkkal párhuzamosan működnek.

A lineáris feszültségi állapotot az jellemzi, hogy két metszet is található (legalább kettő), amelyben nincsenek feszültségek. A 2.112 ábrán látható kis hasáb y és z normálisú metszetei feszültségmentesek. Az ábrán látható koordináta-rendszer felvétele esetén az egyetlen zérustól különböző feszültség az x normálisú metszeten működő σ_x feszültség.

Az említett feszültségi állapotokra lássunk egy-egy példát. Térbeli feszültségi állapot van például a talajban (vagy a talajba ágyazott szilárd testben), mert ott minden irányból különféle nagyságú nyomások uralkodnak. Általában bármilyen ferde metszetet is veszünk fel a talajban, arra feszültségek hatnak. Speciális esetnek tekinthető a folyadékokban uralkodó hidrosztatikus nyomás. Itt akármilyen irányban jelölünk ki metszetet egy adott



2.112 ábra

ponton keresztül, mindegyik metszetben ugyanakkora feszültség működik, és ez a feszültség mindig a metszetre merőleges.

Síkbeli feszültségi állapotra példaként említhetjük az olyan falakat, amelyek csak síkjukban vannak terhelve. Ilyenkor a feszültségi állapot síkja a fal síkja.

Lineáris feszültségi állapot van például egy huzott rudban. A 2.112 ábra hasábjá egy olyan huzott rud kimetszett részének tekinthető, amelynek tengelye az x tengellyel párhuzamos.

A térbeli feszültségi állapot összefüggéseivel a továbbiakban nem foglalkozunk, részletesen csak a síkbeli feszültségi állapotot fogjuk tárgyalni. A lineáris feszültségi állapot a síkbeli feszültségi állapot speciális esetének tekinthető.

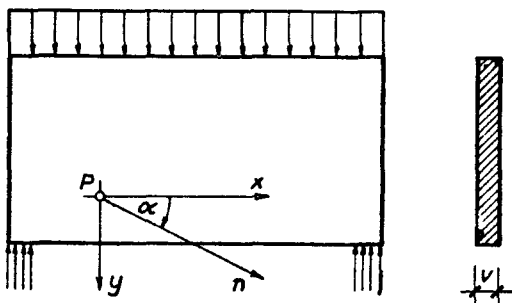
2.4.2 A síkbeli feszültségi állapot összefüggései

Tételezzük fel, hogy a 2.113 ábrán látható, saját síkjában terhelt tárcsa P pontjában az x és y normális metszeten működő feszültségeket már meghatároztuk. E feszültségek ismeretében számítsuk ki az n normális síkon működő feszültségeket.

A vizsgálat céljából vesszünk ki a P pont környezetéből egy elemien kicsiny háromszöget (2.114 ábra), amelynek oldalai merőlegesek a kijelölt x , y és n normálisokra, hosszúságuk pedig dx , dy , ds . (Síkbeli a feladat, ezért beszélhetünk háromszögről. Pontosabb volna háromszög alapu hasábról szólni, itt azonban a vastagsági méret nem játszik szerepet.)

A kimetszett háromszögre rárajoltuk a feszültségeket. Az ábrán a σ'_x , σ'_y , és τ_{xy} feszültségeket pozitív értelemmel rajoltuk fel, a

τ_{yx} feszültség viszont a nyírófeszültségek dualitása miatt csak negatív lehet. Abszolút értelemben a két nyírófeszültség egyenlő nagy:

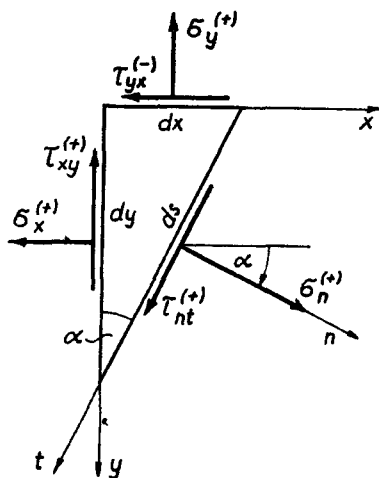


2.113 ábra

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|.$$

Rajzoljuk be az n normális metszetre működő feszültségeket is. Ezek nagysága még ismeretlen, előjelüket pedig pozitívnak tételezzük fel. A 2.114 ábrán berajoltuk az n tengely derékszögű pontját, a t tengelyt is, így a ds hosszúságon működő nyírófeszültség második indexet.

A keresett σ_n és τ_{nt} feszültségek az elemi háromszög alapu hasáb egyensulya alapján felírható vetületi egyenletekből számíthatók ki. A feszültségekből erőt úgy kapunk, hogy beszorozzuk azzal a területtel, amelyen működnek. Tekintsük a ki-metszett részt dz vastagságu hasábnak.



2.114 ábra

Az n irányu vetületi egyenlet:

$$\begin{aligned} \sum F_{in} = & \sigma_n ds dz - \sigma_x dy dz \cos \alpha - \sigma_y dx dz \sin \alpha - \\ & - \tau_{xy} dy dz \sin \alpha - \tau_{yx} dx dz \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

A t irányu vetületi egyenlet:

$$\begin{aligned} \sum F_{it} = & \tau_{nt} ds dz + \sigma_x dy dz \sin \alpha - \sigma_y dx dz \cos \alpha - \\ & - \tau_{xy} dy dz \cos \alpha + \tau_{yx} dx dz \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Látható, hogy dz -vel mindkét egyenletben egyszerűsíteni lehet. Vegyük figyelembe, hogy

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|, \text{ valamint}$$

$$dy = ds \cos \alpha \quad \text{és} \quad dx = ds \sin \alpha.$$

Ez utóbbiakat behelyettesítve d -sel is egyszerűsíthetünk, és az alábbi összefüggésekre jutunk.

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau_{nt} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

A fenti összefüggések egyszerűbb alakra hozhatók az alábbi trigonometrikus azonosságok felhasználásával:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha, \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

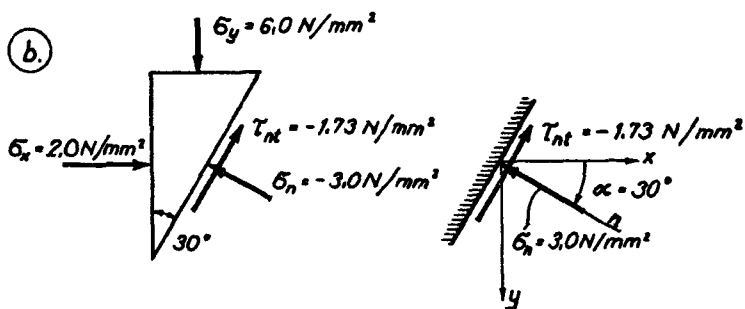
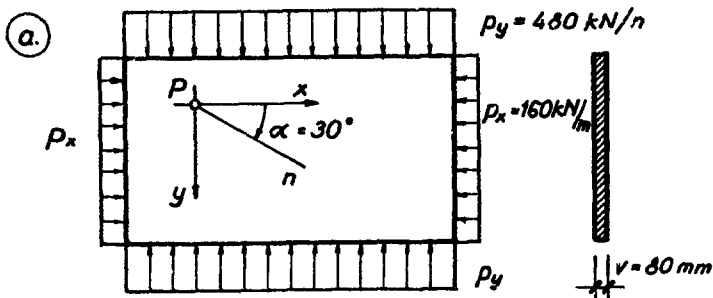
Ezeket behelyettesítve:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad \dots (1)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad \dots (2).$$

Ezzel megkaptuk a keresett összefüggéseket, amelyek alkalmasak arra, hogy σ_x , σ_y és τ_{xy} ismeretében kiszámítsuk a tetszőleges n normális metszeten működő σ_n és τ_{nt} feszültségeket. Látható, hogy síkbeli feszültségi állapot esetén két metszeten kell adottnak lenni a feszültségeknek ahhoz, hogy a feszültségi állapot meghatározott legyen. (A térbeli feszültségi állapotnál - mint láttuk - három metszeten kell ismerni a feszültségeket.)

Példaként számítsuk ki a 2.115. ábrán látható tárcsa P pontjában az n normális metszeten fellépő feszültségeket. A tárcsa függőleges és vízszintes irányban is nyomott, a külső terhekből kiszámíthatjuk σ_x és



· 2.115 ábra

σ feszültségeket. Az adott terhelésnél az x és y normális felületeken nyírófeszültség nem keletkezik: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$. A függőleges és a vízszintes metszetekben keletkező normál feszültség:

$$\sigma_x = - \frac{160 \cdot 10^3}{100 \cdot 80} = - 2,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = - \frac{480 \cdot 10^3}{100 \cdot 80} = - 6,0 \text{ N/mm}^2$$

Ezeket az adatokat az (1) és (2) jelű képletekbe helyettesíthetjük. $\alpha = 30^\circ$ -nál $\cos 2\alpha = 0,5$ és $\sin 2\alpha = 0,866$.

$$\sigma_n = \frac{-2,0 - 6,0}{2} + \frac{-2,0 + 6,0}{2} \cdot 0,5 + 0 = - 3,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{nt} = \frac{-2,0 + 6,0}{2} \cdot 0,866 + 0 = -1,73 \text{ N/mm}^2$$

Az eredményeket a 2.115.b ábrán kétféleképpen is feltüntettük.

2.4.3 A síkbeli feszültségi állapot főfeszültségei

A σ_n képlete (1.) azt mutatja, hogy a feszültség az α szög függvénye: $\sigma_n = f(\alpha)$. Mivel az n tengely körbeforgatható $f(\alpha)$, csak periodikus függvény lehet. Nyilvánvalóan e függvény változása két határ között megy végbe, vagyis e függvénynek szélső értékei kell, hogy legyenek. A σ_n feszültség szélsőértékeit főfeszültségeknek nevezzük.

A σ_n függvénynek szélső értékei ott lesznek, ahol az α szerinti deriváltja zérus, vagyis:

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Innen

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0. \quad \dots(3)$$

Ez azonban azonos τ_{nt} képletével, tehát a szélső érték olyan n irányban lesz, ahol:

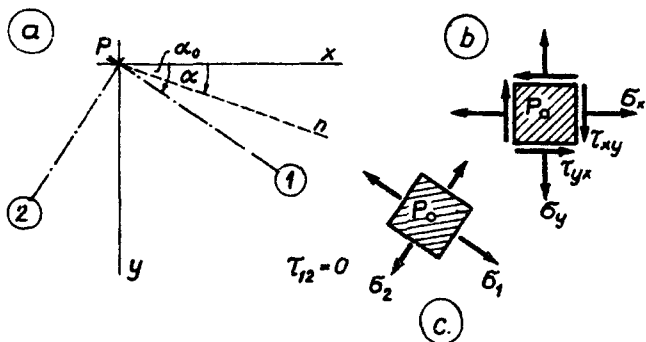
$$\tau_{nt} = 0$$

Tehát a főfeszültség metszetében nincs nyírófeszültség. (A (3.) jelű egyenletből megkapható a szélső értéket adó α_0 szög kiszámítására alkalmas képlet:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Ez a képlet α_0 -ra a 0 és 2π tartományon belül két értéket ad: α_0 és $\alpha_0 + \pi/2$. Ezek szerint két egymásra merőleges irányt kapunk (2.116 ábra 1. és 2. tengelye), amelyeket feszültségi főirányoknak, illetőleg az ezekben az irányokban felvett tengelyeket feszültségi főtenge-lyeknek nevezzük.

Ezek után vezessük le a normális feszültség szélső értékeit, a főfeszültségeket. A főfeszültségek irányát megadó képletből (3.) kell kifejez-



2.116 ábra

nünk az α_0 szög megfelelő szögfüggvényeit, és azokat kell behelyettesíteni a σ_n képletébe (1.).

Ehhez a következő trigonometriai átalakítások szükségesek:

$$\cos 2 \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2 \alpha_0}},$$

$$\sin 2 \alpha_0 = \frac{\operatorname{tg} 2 \alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2 \alpha_0}}.$$

A fenti összefüggésekbe a (3.) jeli képletet helyettesítve:

$$\begin{aligned} \cos 2 \alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4 \tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}} = \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \end{aligned}$$

Az

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

jelölés alkalmazásával

$$\cos 2 \alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{R}$$

Hasonlóképpen nyerhető $\sin 2 \alpha_0$ kifejezése:

$$\sin 2 \alpha_0 = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{R} = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

E két szögfüggvényre kapott összefüggéseket helyettesítsük be az (1.) jelű képletbe, és végezzük el az átalakításokat:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \frac{1}{R} + \frac{\tau_{xy}^2}{R} = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R^2 \frac{1}{R} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R. \end{aligned}$$

Helyettesítsük ide vissza R képletét, és vegyük figyelembe a négyzetgyök kétféle előjelét. Két megoldást kapunk:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned}$$

Ezek a főfeszültségek képletei. A főfeszültségek a főirányokban ébrednek, tehát ha az 1 és 2 főtengelyre merőlegesen veszünk fel metszete-
ket (2.116.c ábra), akkor ezekben működnek a σ_1 és σ_2 főfeszültsé-
gek ($\tau_{12} = 0$). Megállapodás szerint az algebrailag nagyobb feszültséget
jelöljük σ_1 -gyel, a kisebbet pedig σ_2 -vel.

A két főfeszültséget összeadva a

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

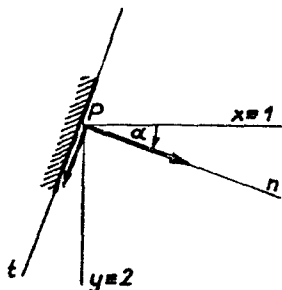
egyenlőségre jutunk. Mivel x és y két egymásra merőleges, egyébként tetszőleges tengely, ezért azt mondhatjuk, hogy bármely két egymásra merőleges normálfeszültség összege egyenlő a főfeszültségek összegével.

A 2.4.2 pontban levezettük σ_n és

τ_{nt} képleteit, amelyekkel kiszámíthatók

az n normálisú metszeten működő feszültségek az x és y metszetekben működőkből. Most felírjuk azokat az összefüggéseket, amelyekkel a főfeszültségekből számíthatjuk ki σ_n és τ_{nt} értékét.

Vegyük fel az x és y tengelyt a főirányokban (2.117 ábra), így



2.117 ábra

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{12} = 0.$$

Helyettesítsük be ezeket σ_n és τ_{nt} képletébe:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad \dots(4.)$$

$$\tau_{nt} = - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad \dots(5.)$$

Ezzel áttekintettük a síkbeli feszültségi állapot legfontosabb összefüggéseit.

A feszültségi állapot térbeli, síkbeli, vagy lineáris voltát a főfeszültségekkel is definiálhatjuk. Térbeli a feszültségi állapot akkor, ha mindhárom főfeszültség zérustól különböző (a térbeli feszültségi állapotnál három főfeszültség van); síkbeli, ha két zérustól különböző főfeszültség van; és lineáris akkor, ha csak egy zérustól különböző főfeszültség van:

$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_3 \neq 0$ térbeli (három tengelyű) feszültségi állapot;

$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_3 = 0$ síkbeli (két tengelyű) feszültségi állapot;

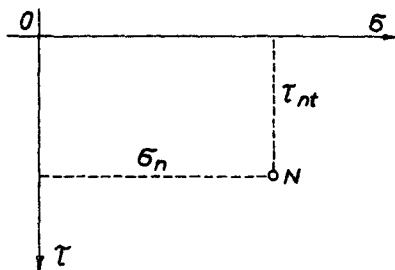
$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0$ lineáris (egy tengelyű) feszültségi állapot.

A feszültségi állapot megnevezésére a zárójelbe tett megnevezéseket is szokták alkalmazni.

2.4.4 A feszültségi Mohr-kör

A szilárd test egy pontjában uralkodó feszültségi állapot igen szemléletes ábrázolása származik Mohrtól.

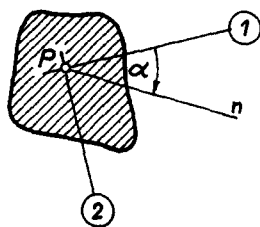
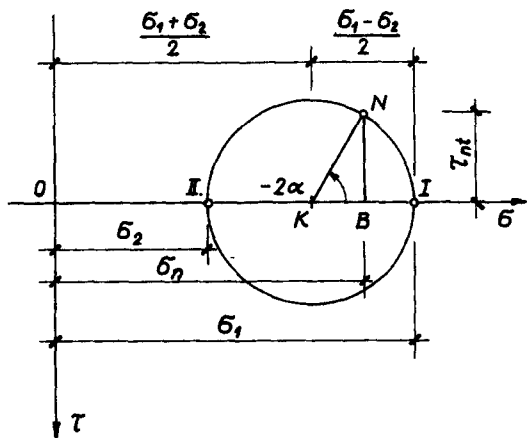
Vegyünk fel egy σ, τ koordináta-rendszert (2.118 ábra), és mérjük fel az n normális metszethez tartozó σ_n és τ_{nt} feszültségeket.



2.118 ábra

Igy jutunk az N ponthoz, amelynek tehát az n normális metszeten működő feszültségek a koordinátái. Látható, hogy a σ, τ koordináta-rendszerben bármely metszeten működő normál- és nyírófeszültségek egy ponttal ábrázolhatók. Igazolni fogjuk, hogy az ábrázoló pontok egy körön, a Mohr-féle feszültségi körön helyezkednek el.

Legyenek adottak a szilárdtest P pontjában az 1. és 2. feszültségi főirányok és az ezekhez tartozó σ_1 és σ_2 főfeszültségek. A σ, τ koordináta-rendszerben a főirányokhoz tartozó feszültségek is egy-egy pont-



2.119 ábra

tal ábrázolhatók, de ezek most rajta lesznek a σ tengelyen, mivel $\tau_{12} = 0$. A 2.119 ábrán az I. főirányhoz tartozó pontot I-gyel, a II. főirányhoz tartozót pedig II-vel jelöltük. Ezután a feszültségi kört úgy kapjuk, hogy az I. és II. pont távolságára, mint átmérőre kört rajzolunk.

Jelöljük ki a P pontban egy tetszőleges n normállist, amely α szöggel hajlik az I. főtengelyhez. Bizonyítani fogjuk, hogy az n normállisu síkra ébredő feszültségek N ábrázoló pontja a Mohr-körön a -2α középponti szöghöz tartozó kerületi pont.

Számítsuk ki a -2α középponti szöghöz tartozó N kerületi pont koordinátáit. A 2.119 ábrát szemlélve ezek a következők:

$$\sigma_n = OB = OK + KB = OK + KN \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\tau_{nt} = BN = KN \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Összehasonlítva a kapott eredményeket az előző pontban felírt képletekkel, láthatjuk, hogy valóban a keresett feszültségeket kaptuk, és ezzel igazoltuk a Mohr-féle ábrázolás helyességét.

Ezek után nézzük meg, hogy hogyan kell megszerkeszteni a Mohr-kört, ha nem a főfeszültségek ismertek, hanem két egymásra merőleges metszetben ismerjük a feszültségeket. Ezzel a szerkesztéssel a főfeszültségek nagyságát és irányát is megszerkeszthetjük.

Tegyük fel, hogy valamely szilárd test P pontjában ismerjük az x és y normállisu metszetekben ébredő σ_x , σ_y és τ_{xy} feszültségeket. Azt is tudjuk, hogy a nyírófeszültségek dualitása miatt $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$.

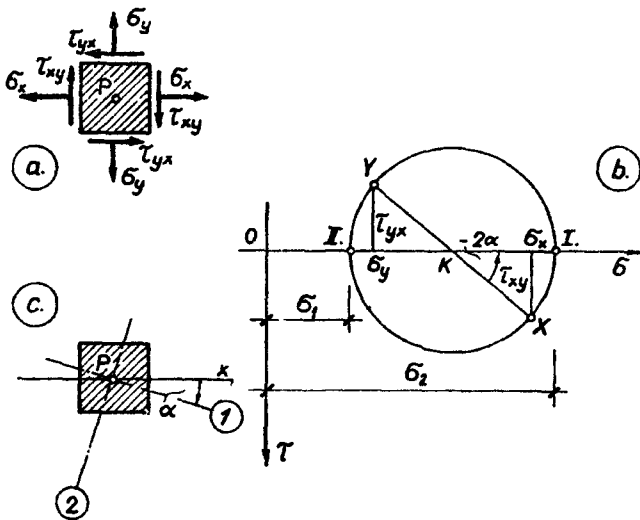
Rajzoljuk fel a σ , τ koordináta-rendszerben az x és y normállisu metszetek feszültségait ábrázoló X és Y pontokat (2.120.b ábra). Az előző pontban megismert

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

egyenlőségből következik, hogy a Mohr-kör középpontjának az origótól mért távolsága:

$$OK = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

A 2.120.b ábrára tekintve látjuk, hogy a Mohr-kör középpontját is megkaphatjuk úgy, hogy megszerkesztjük az X és Y pontokat összekötő egyenes és a σ tengely metszéspontját. Ezek után körzőnyílásba véve a KX (vagy KY) távolságot megrajzolhatjuk a P pont feszültségi állapotára jellemző Mohr-kört. A főfeszültségek nagyságát a kör és a σ tengely met-



2.120 ábra

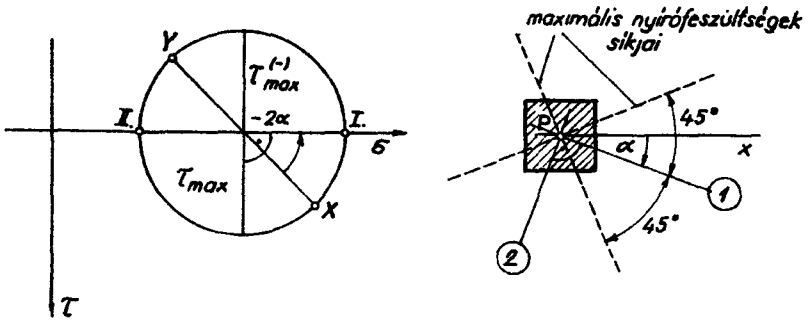
széspontjainál olvashatjuk le. Megállapodás szerint a jobb oldali metszéspont a σ_1 , a bal oldali pedig a σ_2 főfeszültséget jelenti. A főfeszültségek irányát a 2.119 ábra kapcsán megismert összefüggésekből határozhatjuk meg. A 2.119 ábrán látható, hogy míg az 1-es főirány az n iránytól α szöggel tér el, addig az ezen irányhoz tartozó feszültségeket ábrázoló pontok között a különbség -2α középponti szög. Tehát ha a 2.120.b ábrán az x normális metszet feszültségét ábrázolt X pont és a σ_1 főfeszültséget ábrázoló I . pont közötti középponti szög -2α , akkor az x irány és az 1-es főirány közötti szög α (2.120.c ábra).

A feszültségi Mohr-körrel leolvashatjuk azt is, hogy az adott feszültségi állapot esetén a legnagyobb nyírófeszültség mekkora, és milyen normális metszeten keletkezik. A maximális nyírófeszültség nagysága a Mohr-kör sugarával azonos:

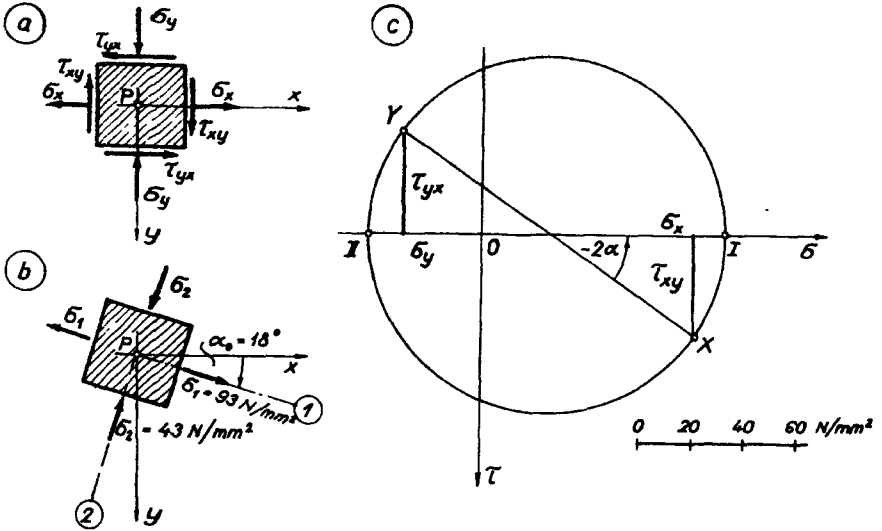
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Mivel a maximális nyírófeszültségnek és a σ_1 főfeszültségnek a Mohr-körön levő pontjai közötti középponti szög $\pm 90^\circ$, így a legnagyobb nyírófeszültségek azokon a metszeten keletkeznek, amelyek az 1-es főiránnyal $\pm 45^\circ$ -os szöget zárnak be (2.121 ábra).

A maximális nyírófeszültségeket szokás főnyírófeszültségeknek is nevezni. Megjegyezzük, hogy a főnyírófeszültségek síkjában normálfeszültség is keletkezik.



2.121 ábra



2.122 ábra

Példaként számítsuk ki a főfeszültségeket, és határozzuk meg a feszültségi főirányokat a 2.122. a ábrán feltüntetett feszültségek esetén. Rajzoljuk meg a Mohr-kört is. Az x és y normális síkokon működő feszültségek értékei:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= + 80 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_y &= - 30 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{xy} &= + 40 \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

A főfeszültségek:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{80 - 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80 + 30}{2}\right)^2 + 40^2} = 25 \pm 68; \\ \sigma_1 &= 25 + 68 = 93 \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_2 &= 25 - 68 = -43 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

A σ_1 tehát húzó-, a σ_2 pedig nyomófeszültség.

A feszültségi főirányok meghatározása:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 40}{80 + 30} = 0,727, \\ 2\alpha &= 36^\circ, \quad \alpha = 18^\circ.\end{aligned}$$

Az eredményeket célszerűen úgy ábrázolhatjuk, hogy a P pont környezetéből a főirányra merőlegesen metszünk ki egy kis elemi hasábot, ennek lapjaira éppen a főfeszültségek működnek (2.122.b ábra).

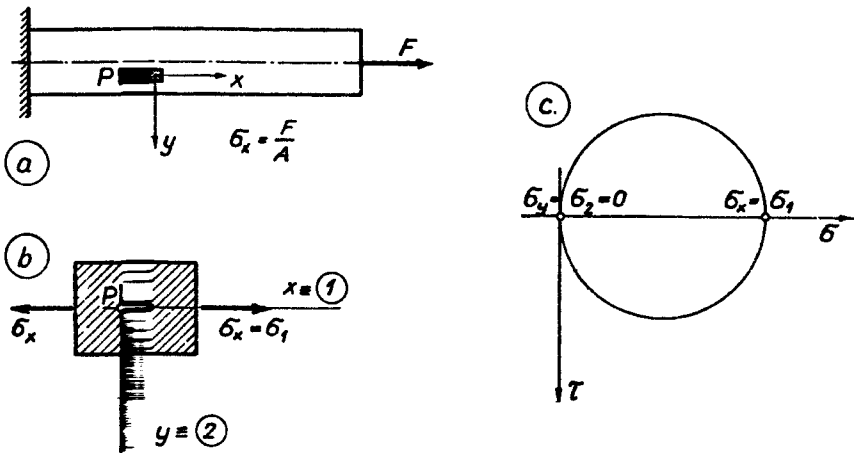
A feszültségi Mohr-kör szerkesztését a 2.122.c ábrán láthatjuk. A szerkesztést természetesen valamilyen feszültség-léptéknek megfelelően kell elvégezni.

A számított és a szerkesztett eredmények megegyeznek.

Az előbbi példa egy teljesen általános síkbeli feszültségi állapotot szemléltetett. A következőkben néhány speciális feszültségi állapot Mohr-körét mutatjuk be.

A 2.123.a ábrán látható központosan húzott rud P pontjának környezetéből kiragadott kis hasábnak csak az x normálisú felületén ébred feszültség. Ez a σ_x normálfeszültség. Nyirófeszültségek az x és y normálisú síkokban nem működnek, és nincs y irányú normálfeszültség sem ($\tau_{xy} = \tau_{yx} = \sigma_y = 0$).

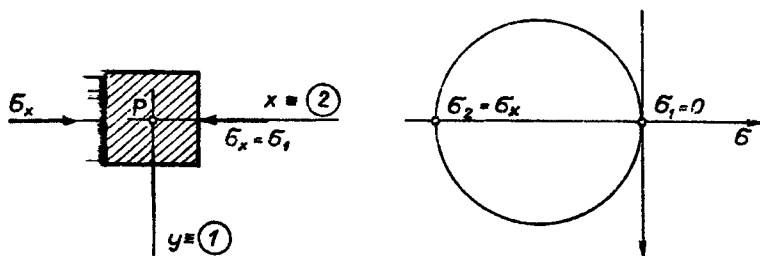
Az x és y feszültségi főirányok kell, hogy legyenek, mert síkjaikon a nyirófeszültség zérus. Így $\sigma_x = \sigma_1$ és $\sigma_y = \sigma_2 = 0$. Ennek megfelelően rajzoltuk meg a 2.123.c ábrán a Mohr-kört, amelyből látszik, hogy tiszta húzás esetén is keletkezik nyirófeszültség a feszültségi főirányoktól eltérő metszetekben. A legnagyobb nyirófeszültség értéke:



2.123 ábra

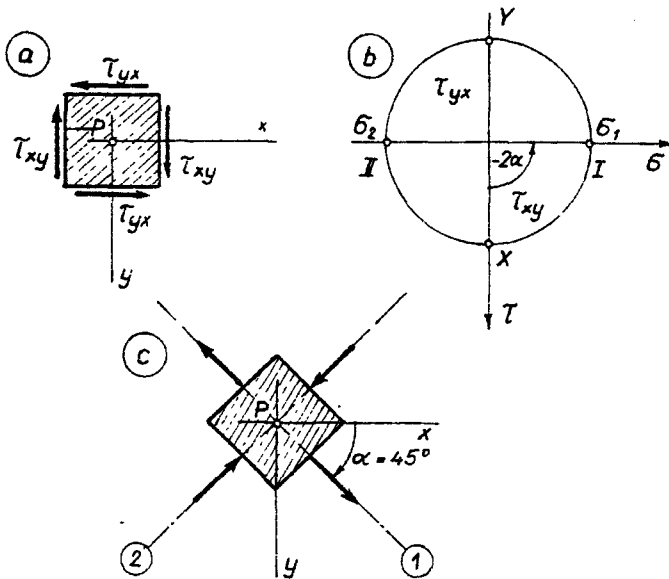
$\tau_{\max} = \sigma_1 / 2$, és ez az 1-es főtengellyel $\pm 45^\circ$ -os szöget bezáró metszetekben keletkezik.

A 2.124 ábrán a tiszta nyomás feszültségi állapotot szemléltetjük. Az előző példához képest az eltérés csak annyi, hogy a σ_x előjele most negatív. Ilyen feszültségi állapot alakul ki a központosan nyomott oszlopokban. A főfeszültségek: $\sigma_1 = 0$ (ez az algebrailag nagyobb) és $\sigma_2 = -\sigma_x < 0$.



2.124 ábra

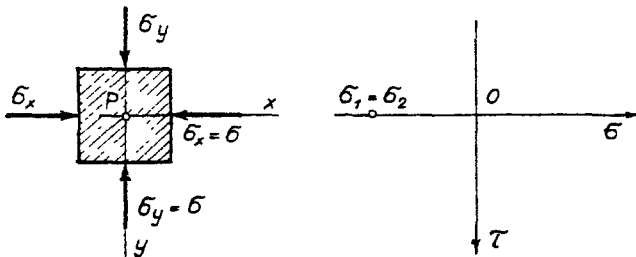
A tiszta nyírás feszültségállapotának sajátosságait figyelhetjük meg a 2.125 ábrán. A 2.125. ábrán bemutatott kis hasábnak az x és y normális felületein csak nyírófeszültségek működnek, és ezek a dualitás tétele folytán azonos nagyságúak, de ellentétes előjelűek. Így az x és y normális felületek feszültségeit ábrázoló X és Y pontok a τ tengely-



2.125 ábra

re kerülnek, következésképpen az origó lesz a Mohr-kör középpontja. A főfeszültségek: $\sigma_1 = +\tau_{xy}$ és $\sigma_2 = -\tau_{xy}$. A feszültségi főirányok az x illetve y tengellyel 45° -os szöget zárnak be (2.125.b és c ábra).

A 2.126. ábrán a hidrosztatikus nyomás feszültségi állapotát mutatjuk be. Az x és y normális metszetenek egyenlő nagyságú nyomófeszültség működik, a nyírófeszültség pedig zérus. E feszültségi állapot Mohr-köre egy ponttá zsugorodik össze, mivel a két főfeszültség egyenlő:



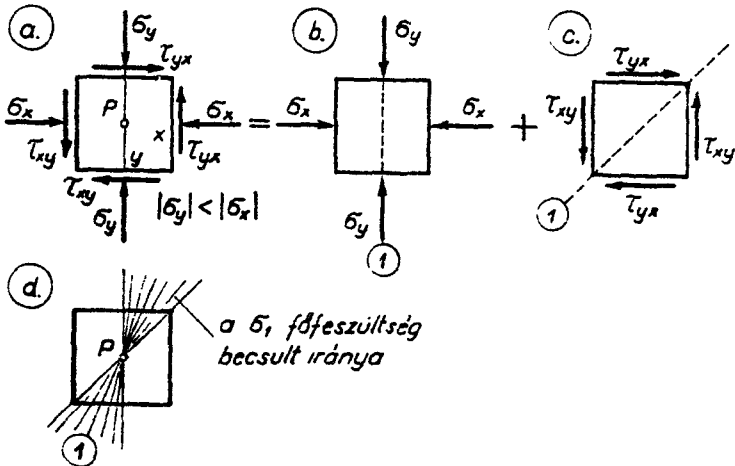
2.126 ábra

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_1 = \sigma_2 .$$

Mivel a kör egy ponttá fajult el, ebből az is következik, hogy egyik metszetben sincs nyírófeszültség. Ez viszont azt vonja maga után, hogy minden irány feszültségi főirány.

Ilyen feszültségi állapot van a folyadékokban, azzal a különbséggel, hogy ott térbeli feszültségi állapot van, minden irányban (például az x, y síkra merőlegesen is) ugyanakkora nyomás uralkodik.

Síkbeli feszültségi állapot esetén a feszültségi főirányok - közelítőleg - becsléssel is meghatározhatók. Ennek módját a 2.127 ábra kapcsán mutatjuk be.



2.127 ábra

A 2.127.a ábrán megrajzolt elemi hasábra a σ_x , σ_y , τ_{xy} és τ_{yx} feszültségek működnek. A feszültségek felbonthatók úgy, hogy külön működtetjük a normál- és külön a nyírófeszültségeket (2.127.b és c ábra). Ha csak a normálfeszültségek hatnak az elemi hasábra, akkor a σ_x és a σ_y főfeszültségek. Példánkban $\sigma_y = \sigma_1$, mert algebrailag ez a nagyobb. A nyírófeszültségek működése esetén pedig a 2.127.c ábrán szaggatva megrajzolt 45° -os egyenes az 1-es főirány. A fentiekből következik, hogy ha a normál- és nyírófeszültségek együttesen hatnak, akkor az 1-es főirány csak a b és c ábrán rajzolt irányok között lehet (2.127.d ábra).

2.4.5 A feszültségi állapot vizsgálata gerendatartók esetén

Vizsgáljuk meg a feszültségi állapotot a 2.128.a ábrán látható tartó K keresztmetszetének P pontjában. A tartó K keresztmetszetére általában az N , T , M_x igénybevételek működnek. Ezekből a

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y$$

és

$$\tau_{zy} = \frac{T S'_x}{J_x s}$$

ismert, elemi szilárdságtani képletek felhasználásával kiszámíthatjuk a rud-tengelyre merőleges metszetben ébredő feszültségeket. Ezek a feszültségek a P ponton át felvett z normális metszetben működnek, ezért kapták a fenti indexet.

A feszültségi állapot vizsgálata céljából messzünk ki a P pont környezetéből egy elemien kicsiny hasábot. A kis hasábot az x és z irányból szemlélve lerajzoltuk a 2.128.c és d ábrán. Itt feltüntetjük a kis hasáb oldallapjain működő feszültségeket is. E feszültségek nagysága megegyezik a 2.128.b ábrán levő feszültségi diagramok P pontbeli ordinátaival. A σ_z feszültség előjele pozitív, mert húzásról van szó. A kis hasáb bal oldali metszetén a τ_{zy} nyírófeszültség azonos irányú (és előjeli) a nyíróerővel.

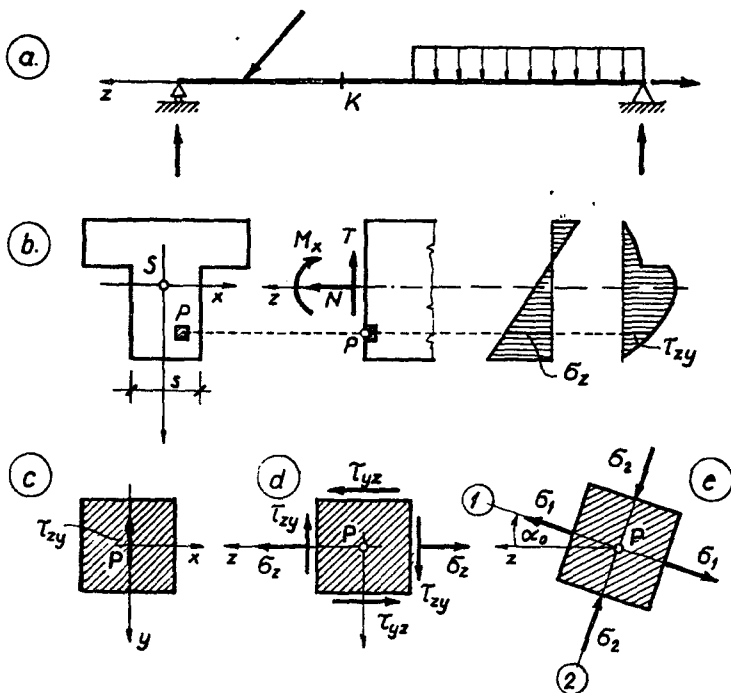
Az y normális metszeten feltételezhetjük, hogy nincs normálfeszültség: $\sigma_y = 0$. (Pontosabb vizsgálatoknál a terhelés és a reakcióerők támadási y felületein szokás σ_y -t figyelembe venni, de ennek hatása a

kis felületeken ható nagy intenzitású koncentrált erők kivételével elhanyagolható.) A nyírófeszültségek dualitásából kifolyólag viszont nyírófeszültségek működnek az y normális felületeken.

A kis hasáb x normális metszetein nem működnek feszültségek, ugyanis nincs semmilyen hatás, ami a tartóban oldalirányban feszültségeket ébresztene:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{array} \right\} \bar{p}_x = 0.$$

Mivel találtunk egy feszültségmentes síkot, kimondhatjuk, hogy a P pontban síkbeli feszültségi állapot van. A feszültségi állapot síkja az y, z



2.128 ábra

sík. Ezek után az ismert módszerekkel meghatározhatjuk a feszültségi állapot főfeszültségeit és főtengelyeit.

A 2.128 ábrán a gerendatartó P pontját teljesen általános helyen választottuk ki, és megállapítottuk, hogy ott síkbeli feszültségi állapot van. Vannak azonban a K keresztmetszetnek olyan pontjai, ahol a feszültségi állapot még egyszerűbb. A keresztmetszetnek az alsó és felső szélső szálaiban nincs nyírófeszültség, következésképpen ezeken a helyeken lineáris feszültségi állapot van. Lineáris feszültségi állapot van a gerendatartó keresztmetszetének teljes felületén akkor, ha a keresztmetszetre nem hat sem nyíróerő, sem csavarónyomaték, ugyanis ekkor a keresztmetszetnek egyetlen pontjában sem ébred nyírófeszültség.

Példaként határozzuk meg a feszültségi állapotot a 2.129 ábrán látható kéttámaszú tartó K keresztmetszetének P pontjában.

A K keresztmetszetben működő igénybevételek:

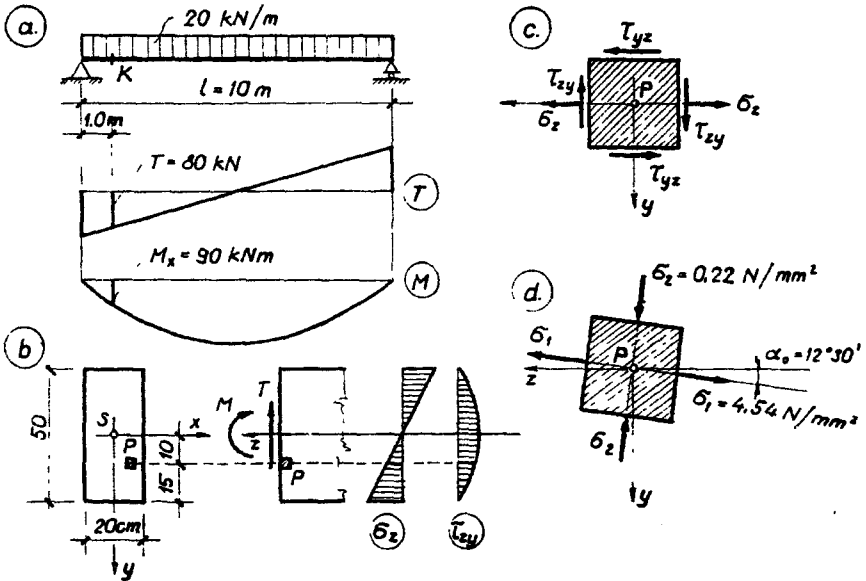
$$T = \frac{20 \cdot 10}{2} - 1.20 = 80 \text{ kN}$$

$$M_x = 100 \cdot 1 - \frac{20 \cdot 1^2}{2} = 90 \text{ kNm}$$

A P pontbeli feszültségek számításához szükséges keresztmetszeti jellemzők:

$$J_x = \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 2,08 \cdot 10^5 \text{ cm}^4 = 2,09 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$S'_x = 20 \cdot 15 \cdot 17,5 = 5250 \text{ cm}^3 = 5,25 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$



2.129 ábra

A feszültségek (2.129.b ábra):

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{90 \cdot 10^6}{2,09 \cdot 10^9} \cdot 100 = 4,33 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xy} = \frac{TS'_x}{J_x s} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 5,25 \cdot 10^6}{2,09 \cdot 10^9 \cdot 200} = 1,01 \text{ N/mm}^2$$

Ezek után megrajzolhatjuk a P pont környezetéből kimetszett elemi hasábra működő feszültségeket (2.129.c ábra).

A főfeszültségek:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = \\ &= \frac{4,33}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4,33}{2}\right)^2 + 1,01^2} = 2,16 \pm 2,38; \\ \sigma_1 &= 2,16 + 2,38 = 4,54 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 &= 2,16 - 2,38 = -0,22 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

A feszültségi főirányok:

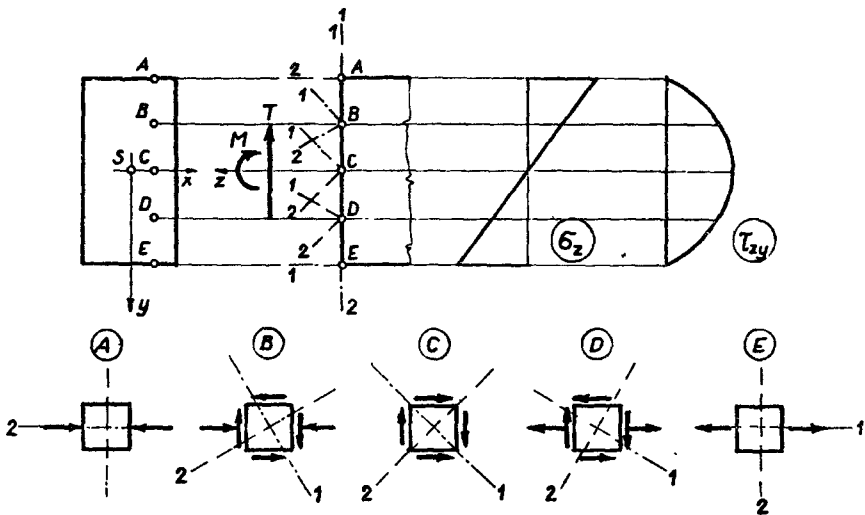
$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 1,01}{4,33} = 0,467; \\ 2\alpha &= 25^\circ \\ \alpha &= 12^\circ 30' .\end{aligned}$$

2.4.6 A főfeszültségi trajektóriák

Az eddigiekben a feszültségi állapotot mindig csak a tartónak egy kiválasztott pontjában vizsgáltuk. A tartószerkezetek méretezésénél azonban szükséges, hogy a tartó egészében ismerjük a feszültségi állapotot, legalábbis annak jellegét.

A síkbeli tartók feszültségi állapotának minőségi jellemzésére a főfeszültségi trajektóriák alkalmasak. A főfeszültségi trajektóriák olyan görbeseregek, amelyek érintői minden pontban a feszültségi főirányok. Két ilyen görbesereg van: a húzó-trajektóriák és a nyomó-trajektóriák. Az előbbi érintői az 1-es, az utóbbié pedig a 2-es főirányok. E két görbesereg minden pontban merőlegesen (ortogonálisan) metszi egymást.

Először azt vizsgáljuk meg, hogy hogyan változnak a főirányok a keresztmetszet magasság mentén egy hajlításra és egyidejű nyírásra igénybe vett tartóban. A kiválasztott keresztmetszet σ_z és τ_{zy} feszültségi ábráit a 2.130 ábrán felrajzoltuk. Jelöljünk ki a tartó vizsgált keresztmetszetében különböző magasságokat, és határozzuk meg ott a főirányokat. Példánkban öt pontot jelöltünk ki a tartómagasság negyedeleiben, és a vizsgált pontok környezetéből kiragadott elemi hasábokat külön is felrajzoltuk. A kis hasábokra működő feszültségek ismeretében a vizsgált pontokban a feszültségi főirányok az ismert módszerek segítségével meghatározhatók. Ha

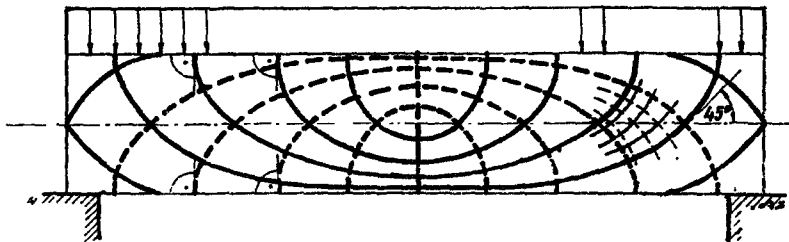


2.130 ábra

a pontonként meghatározott főirányokat a tartó oldalmetszetére rárajzoljuk, akkor a vizsgált pontokban a főfeszültségi trajektóriák érintőit kapjuk.

A 2.130 ábrán bejelölt öt pont közül háromban speciális feszültségi állapot uralkodik: az A pont a tiszta nyomás, a C a tiszta nyírás, az E pedig a tiszta húzás feszültségállapotában van. E speciális feszültségi állapotok sajátosságainak megfelelően az A pontban az 1-es főirány a tartó tengelyére merőleges, a C-ben 45°-os szöveget zár be vele, az E-ben pedig a tartó tengelyével párhuzamos.

A 2.131 ábrán egy kéttámaszu, egyenletesen megoszló teherrel terhelt főfeszültségi trajektóriáit rajzoltuk meg. E görbék pontos felrajzolása - még az ilyen egyszerű terhelés esetén is - igen munkaigényes. A trajektóriákat úgy rajzolhatjuk fel, hogy viszonylag sok pontban meghatározzuk a főirányokat, és olyan görbéket szerkesztünk, amelyek érintői a fe-



2.131 ábra

szültségi főirányok. Az ábrán a két húzótrajektóriákat folytonos, a nyomótrajektóriákat pedig szaggatott vonallal rajzoltuk meg. Figyeljük meg, hogy mindkét görbesereg az alsó, illetve a felső szélső szálát és egymást mérőlegesen, a tartó tengelyét pedig 45° -os szögben metszi.

3. A TARTÓK ALAKVÁLTOZÁSA

A tartók alakváltozásának számítására három alapvető módszert fogunk ismertetni az alábbiakban: a kis elmozdulások elméletével, a munkatételek segítségével és a rugalmas vonallal történő alakváltozás meghatározást. A kis elmozdulások elméletével gyorsan megállapíthatjuk a tartó tetszőleges számú pontjának alakváltozását. A munkatételek a tartó egy (vagy néhány) alakváltozási értékének kiszámítására adnak jó módszert. A rugalmas vonal függvényét is fel tudjuk írni differenciálegyenlet integrálás útján.

3.1 A tartók alakváltozásának meghatározása a kis elmozdulások tételével

Ebben a fejezetben a kis elmozdulások elméletének ismertetése után megmutatjuk ennek alkalmazását a tartók alakváltozásának számítására.

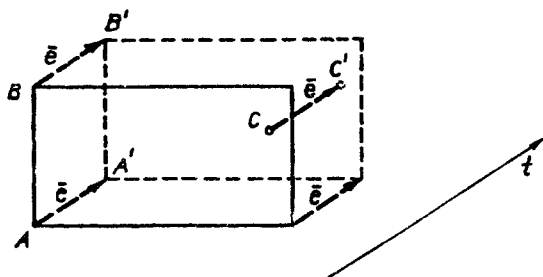
3.1.1 A kis elmozdulások elmélete

3.1.1.1 A kis elmozdulások fogalma

Az alábbiakban csak merev testek síkbeli elmozdulásaival foglalkozunk. Képzeljünk el egy merev síklapot, amely a saját síkjában mozdul el. A merevség azt jelenti, hogy a síklap egyes pontjai egymáshoz képest nem mozdulnak el, más szóval a síklap nem deformálódik, hanem eredeti alakját és méretét megtartva mozdul el eredeti helyzetéhez képest.

Az elmozdulás összefoglaló elnevezése az eltolódásnak és az elfordulásnak. Ezután értelmezzük az egyes elmozdulás fajtákat.

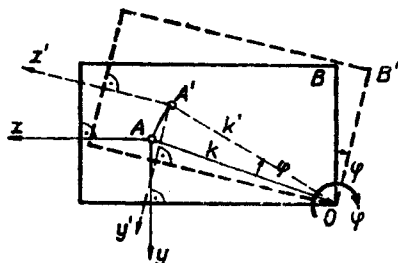
Egy merev testről akkor mondjuk, hogy eltolódik, ha valamennyi pontja azonos mértékben tolódik el. A síklap eltolódásakor tehát a sík minden pontjának ugyanakkora az eltolódása: pl. az A, a B és a C pontoké egyaránt e (3.1 ábra). Az eltolódás egy \vec{e} eltolódásvektorral adható meg. Másként fogalmazva a merev síklap egyenesei az eltolódás során irányukat nem változtatják meg, azaz önmagukkal párhuzamos helyzetbe



3.1 ábra

kerülnek. Az \vec{e} eltolódást akkor nevezzük pozitívnak, ha az előre felvett tengely pozitív irányába mutat, pl. a 3. 1 ábrán pozitív.

Elfordulást láthatunk a 3.2 ábrán. A merev síklap az O pont körül φ szöggel elfordul. Ez az elmozdulás megadható az O elforduláspont helyzetével és az elfordulás φ szögével. A φ szög nagyságát radiánban mérjük, értelmét az óramutató járásával egyezően nevezzük pozitívnak.



3.2 ábra

Az O elforduláspont és a φ szög valóban meghatározza a síklap új helyzetét, mert ezeknek az ismeretében bármely pont új helyzete meghatározható. Az ábrán bejelöltük az A és a B pontok elmozdulását. Figyeljünk meg, hogy minden pont köríven mozdul el. A pontoknak az O elfordulásponttól mért távolsága a kör sugara. Az egyes pontok mozgása egy-egy köríssel jellemezhető, s e köríssel középponti szöge mindig egyenlő a síklap elfordulásával. Az O pont körül bekövetkező véges nagyságú φ elfordulás következtében, tehát a tetszőleges A pont egy köríven mozdul el. E körív hossza:

$$\widehat{AA'} = k\varphi$$

ahol k a körív sugara. A továbbiakban ezt a sugarat karnak fogjuk nevezni.

A köríven való elmozduláson kívül az egyes pontok el is fordulnak, pontosabban szólva, az egyes pontok kis környezete fordul el. Ez az elfordulás úgy érzékelhető, hogy felvesszünk az A ponthoz egy y, z koordináta-rendszert. A síklal együtt ez a koordináta-rendszer is elfordul. Könnyen belátható: a koordináta-rendszer ugyanakkora φ szöggel fordul el, mint maga a sík. Bármelyik pontban jelöljük ki a tengelyeket, ezek mindegyike ugyanazzal a φ szöggel fordul el. Azt mondjuk röviden, hogy a sík minden pontja φ szöggel elfordul.

Az elmozdulások között megkülönböztetünk abszolút (földhöz viszonyított) és relatív (egymáshoz képest bekövetkező) elmozdulásokat (eltolódásokat és elfordulásokat egyaránt). Ennek szemléltetésére nézzük az alábbi példát.

Képzeljük el, hogy a földhöz képest mozdulatlan rajzasztalunkra rajztáblát, erre egy kemény rajzlapot, végül arra vonalzót helyezünk. Mozdítsuk el kissé a rajztáblát a földhöz rögzített asztalon a rajta levő tárgyakkal együtt. Ez az elmozdulás a rajztábla valamely A_1 pontjának e_1 eltolódásával és φ_1 elfordulásával adható meg, amelyből az egyetlen merev testként elmozduló rajztábla, rajzlap és vonalzó bármely pontjának elmozdulása számítható. Az egyetlen merev testként elmozduló tárgyak az asztalhoz (a földhöz) képest új helyzetbe kerültek. A földhöz képest mutató elmozdulásokat abszolút elmozdulásoknak nevezzük, e -vel és φ -vel jelöljük.

Ezután gondoljuk mozdulatlanak a rajztáblát, és ahhoz képest mozdítsuk el a rajzlapot a rajta levő vonalzóval együtt. Az elmozdulás egyértelműen megadható a rajzlap valamely A_2 pontjának u_2 eltolódásával és ψ_2 elfordulásával. Azonban az A_2 pontnak az előző e_1 és φ_1 elmozdulásából is keletkezett valamekkora elmozdulása. A két hatásból számítható az A_2 pont e_2 és φ_2 földhöz viszonyított elmozdulása. Az e_1 és φ_1 , illetve u_2 és ψ_2 figyelembevételével határozható meg a rajzlap és a vonalzó bármely pontjának végleges helyzete. Az u_2 eltolódást és a ψ_2 elfordulást relatív mozgásnak nevezzük.

Teljesen hasonlóan folytathatjuk tovább gondolatmenetünket. A többi test mozdulatlansága mellett a vonalzó valamely A_3 pontját u_3 és ψ_3 elmozdulásokkal hozzuk új helyzetbe. A vonalzó A_3 pontjának végleges e_3 és φ_3 elmozdulásokkal jellemezhető helyzetének meghatározásához az e_1 , φ_1 , u_2 , ψ_2 , u_3 , ψ_3 elmozdulásokat kell figyelembe venni.

A fenti egyszerű szemléltető példából az alábbi - a továbbiakban fontos szerepet játszó - lényeges megállapítást vonhatjuk le.

Valamely pont (A_3) abszolút elmozdulása egy ismert pont (A_1) abszolút elmozdulásából (e_1 , φ_1) és a közöttük levő relatív mozgásokból (u_2 , ψ_2 , u_3 , ψ_3) számítható ki!

Az elfordulásokkal kapcsolatos eddigi megállapításaink véges nagyságu elfordulásra vonatkoztak. A továbbiakban azonban csak az ugynevezett kis elmozdulásokkal kívánunk foglalkozni, mert a tartók alakváltozásainak számításakor ezek hasznosíthatók (a tartók alakváltozásai szemmel alig látható nagyságúak). Ha azonban az elfordulás φ szöge nagyon kicsi - nem úgy, mint azt a szemléletesség miatt a 3.3 ábrán feltüntetettük - akkor nyil-

ván jó közelítéssel dolgozunk, ha az A pont eltolódását egyrészt a valóságnak megfelelő AA' helyett az A ponton és a forgástengelyen átrajtott síkra merőleges AA'' vektorral jellemezzük, másrészt az AA'' körív hosszával vesszük egyenlő nagynak (l. 3.3 ábrát).

Az eltolódást az

$$e = k \cdot \varphi$$

képlettel számoljuk. A pontos képlet $e = k \cdot \text{tg } \varphi$ lenne, de olyan kis elmozdulásokról van szó, amelyeknél megengedhetőek a

$$\text{tg } \varphi \approx \varphi \approx \sin \varphi$$

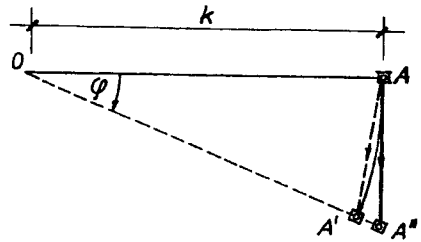
$$\cos \varphi \approx 1$$

közelítések.

A kis elmozdulások alkalmazásakor a fenti közelítések nagy mértékben egyszerűsítik a számításokat, elsősorban azért, mert a kis elmozdulások elméletében érvényes a szuperpozíció elve. Ez annyit jelent, hogy több kis elmozdulás következtében a test végső helyzete független az elmozdulások sorrendjétől.

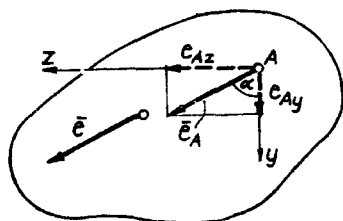
Síkbeli elmozdulás nemcsak a sík alakzatoknál képzelhető el, hanem térbeli kiterjedésű testeknél is. Valamely merev test, egy vagy több elmozdulás bekövetkezése esetén akkor végez síkbeli elmozdulást, ha az egyes eltolódások vektora egy síkkal párhuzamos, valamint az egyes elfordulások tengelye egyenállal párhuzamos és merőleges az említett síkra. Ekkor a merev test minden pontja egy-egy síkban mozdul el, és e síkok egymással párhuzamosak.

A következőkben olyan síkbeli tartószerkezetekkel foglalkozunk, mint amilyenekről a 2. fejezetben szilárdságtani tanulmányaink során eddig is szó volt. A szerkezet síkja legyen egyben annak szimmetriasisíkja is. A szerkezet pontjai közül az alakváltozások számítása során csak a szimmetriasisíkban fekvő pontok elmozdulásaival foglalkozunk. A szimmetria miatt e pontok az elmozdulás után is a szimmetriasisíkban maradnak, tehát síkmozgást végeznek. E pontok elmozdulásainak meghatározása után már bármely más pont elmozdulásai is ismeretesek, hiszen a keresztmetszeti síkidomok változatlanlenségét (Bernoulli és Navier nyomás) ezuttal is feltételezzük és ezek a keresztmetszetek az említett szimmetriasisíkra merőlegesek maradnak.



3.3 ábra

3.1.1.2 A kis elmozdulások számítása



3.4 ábra

A merev test eltolódása egyetlen pontjának \bar{e} eltolódásvektorával megadható, mert minden pont ugyanugy mozdul el. A merev test egy tetszőleges A pontjának (3.4 ábra) eltolódása $\bar{e}_A = \bar{e}$ és elfordulás ugyanakkor nem következik be:

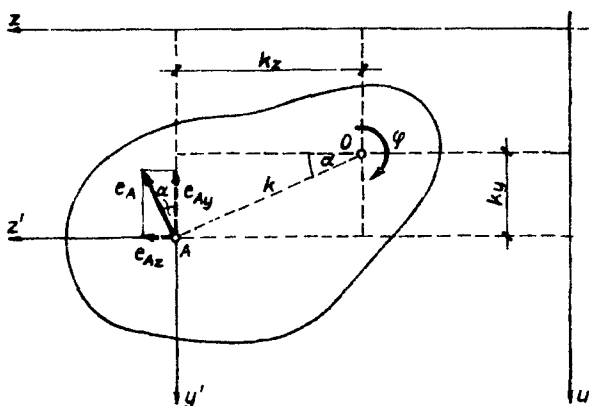
$$\varphi_A = 0.$$

Az eltolódásvektor két vetületével is megadható:

$$e_{Ay} = |\bar{e}| \cos \alpha$$

$$e_{Az} = |\bar{e}| \sin \alpha .$$

Ezután vizsgáljuk meg, milyen elmozdulást végez a merev test A pontja, ha a test az O pont körül φ szöggel elfordul (3.5 ábra). Először



3.5 ábra

is bekövetkezik egy eltolódás, amelynek vektora merőleges a k karra, a pontot az elforduláspontról összekötő távolságra. E vektor nagysága:

$$e_A = k \varphi .$$

Továbbá bekövetkezik egy elfordulás:

$$\varphi_A = \varphi.$$

Vagyis az A pont eltolódik és elfordul. Az eltolódás vektor vetületei:

$$e_{Ay} = e \cos \alpha$$

$$e_{Az} = e \sin \alpha.$$

Mivel $e = k \varphi$, így

$$e_{Ay} = \varphi k \cos \alpha$$

$$e_{Az} = \varphi k \sin \alpha.$$

E képletekben a 3.5 ábráról leolvashatóan

$$k_z = k \cos \alpha$$

$$k_y = k \sin \alpha$$

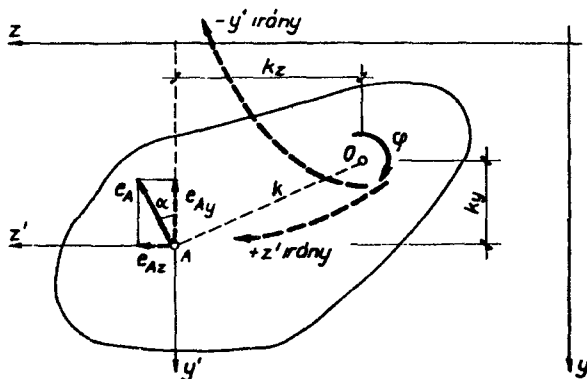
a k kar megfelelő vetületeit jelenti. Végeredményben az eltolódásvektor vetületei e vetületi karokkal közvetlenül is kiszámíthatók:

$$e_{Ay} = k_z \varphi$$

$$e_{Az} = k_y \varphi.$$

A fenti képletek alapján nagyon hasznos szabályt fogalmazhatunk meg. Valamely tetszőleges A pont e_A eltolódásának y irányu vetülete (e_{Ay}) úgy számítható ki, hogy az elfordulás szögét szorozzuk az elforduláspontnak az A ponton átmenő y tengellyel párhuzamos y' tengelytől mért merőleges távolságával, k_z -vel. Az e_{Ay} vetület előjelét szemlélet alapján állapítjuk meg (3.6 ábra). A pozitív φ elfordulás az A ponton függőlegesen felfelé akarja eltolni: a φ elfordulás a -y' irányt surolja, tehát e_{Ay} előjele negatív. Hasonló módszerrel döntjük el, hogy e_{Az} pozitív eltolódás, hiszen a + φ elfordulás a pozitív z' tengelyt surolja.

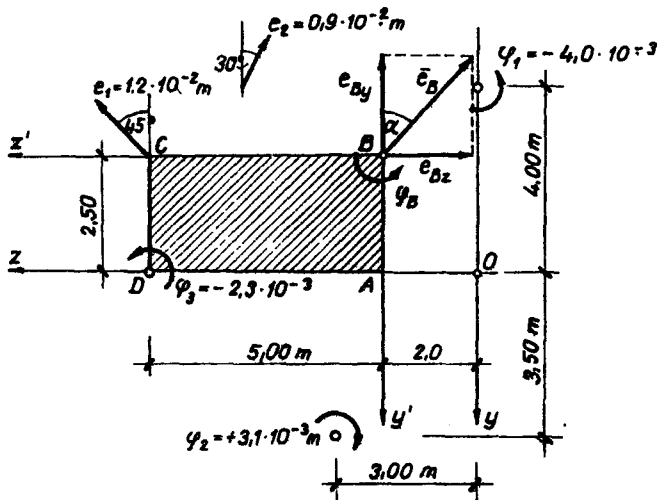
Összefoglalva a merev test $\bar{\theta}$ eltolódásából minden pontjában ugyanaz az eltolódás keletkezik, az elfordulás mindenütt zérus. A merev test φ elfordulásából minden pontjában azonos φ elfordulás jön létre, de az



3.6 ábra

eltolódás pontról-pontra különböző (és az előbb részletezett módon számítható).

Az eddigiek alapján könnyű meghatározni egy merev test valamely pontjának elmozdulásait (elfordulását, eltolódását), ha több eltolódás és elfordulás adott. Az egyes elmozdulások hatása külön-külön számítható, s mivel érvényes a szuperpozíció elve a pont azonos jellegű elmozdulásai egymásra halmozhatók. Ez az elmozdulások vetületeinél algebrai összegzést jelent.



3.7 ábra

Oldjunk meg erre egy feladatot. A 3.7 ábrán adott egy négyszög alakú síkidom. Számítsuk ki a négyszög B sarokpontjának elmozdulását két eltolódásból és három elfordulásból (e_1 , e_2 , φ_1 , φ_2 és φ_3).

Elfordulása:

$$\begin{aligned}\varphi_B &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = (-4,0+3,1-2,3) \cdot 10^{-3} = \\ &= -3,2 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).\end{aligned}$$

Az y irányu eltolódás az adott eltolódások vetületösszege és az adott elfordulások nyomatékösszege az y' tengelyre. A vetületek előjelét mindig szemlélet alapján döntjük el. Az eltolódások y irányu vetülete akkor pozitív, ha a $+y'$ irányba mutat. Az elfordulások okozta eltolódásvetület akkor pozitív, ha az y' tengelyt pozitív irányban surolja. Az ábrán látható, hogy az egyes elfordulások hogyan surolják a B pontba húzott y' tengelyt (φ_1 és φ_2 pozitívan, φ_3 negatívan).

$$\begin{aligned}e_{By} &= 1,2 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 45^\circ - 0,9 \cdot 10^{-2} \cos 30^\circ + 2,4 \cdot 10^{-3} + \\ &+ 1,3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} - 5,2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = -8,49 \cdot 10^{-3} - 7,79 \cdot 10^{-3} + \\ &+ 8 \cdot 10^{-3} + 3,1 \cdot 10^{-3} - 11,5 \cdot 10^{-3} = -16,68 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -16,68 \text{ mm} (\downarrow).\end{aligned}$$

Hasonlóan a z irányu eltolódás:

$$\begin{aligned}e_{Bz} &= +1,42 \cdot 10^{-2} \sin 45^\circ - 0,9 \cdot 10^{-2} \sin 30^\circ - 1,5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - \\ &- 6,3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 2,5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = +8,49 \cdot 10^{-3} - 4,5 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-3} - \\ &- 18,6 \cdot 10^{-3} + 5,75 \cdot 10^{-3} = -14,86 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -14,86 \text{ mm} (\rightarrow).\end{aligned}$$

A B pont teljes eltolódása:

$$e_B = \sqrt{16,68^2 + 14,86^2} = 22,34 \text{ mm} (\nearrow).$$

Az e_B y' tengellyel bezárt szöge:

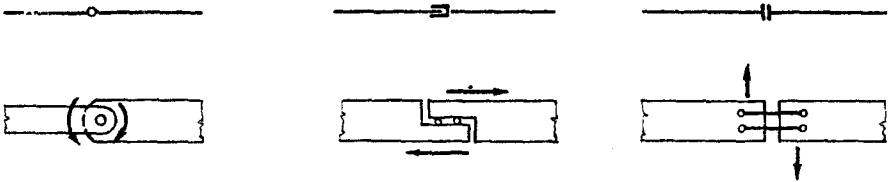
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_{Bz}}{e_{By}} = \frac{14,86}{16,68} = 0,891$$

$$\alpha = 41,70^\circ.$$

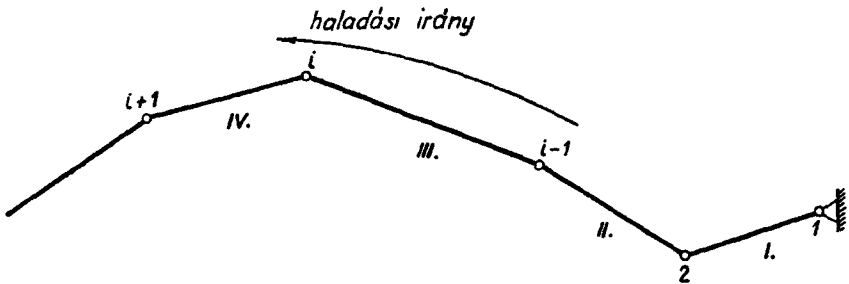
3.1.1.3 A láncolatok kialakítása

Az egyértelműen meghatározott sorrendben, valóságos vagy csak képzelten egymáshoz kapcsolt testekből álló mechanikai alakzatot láncolatnak nevezünk. A továbbiakban csak síkbeli láncolatokról lesz szó. Ilyen láncolatnak tekinthetjük a fentiekben tárgyalt testek összességét, amennyiben vastagságukat többi mérettükhöz képest elhanyagoljuk. A 3.1.1.1 fejezet példájában az egyszerű testek kapcsolata a lehető legszabadabb, mert szerkezeti tulajdonképpen nincsenek összekapcsolva.

A láncolatok szerkezeti különbözőképpen lehetnek kialakítva. A láncolatokban a tartóknál alkalmazott kényszereseken (pl. görgős megtámasztás, síkbeli csukló) kívül három jellegzetes kapcsolat szokásos. A 3.8 ábrán látható e háromféle kapcsolat, egyrészt sematikus ábrázolásban, másrészt a lehetséges elmozdulás irányát berajzolva. Mindegyik kapcsolat csak egyféle elmozdulást tesz lehetővé: az első csak elfordulást, a második csak tengely irányú eltolódást, a harmadik pedig csak tengelyre merőleges irányú eltolódást. A szerkezeti rajzokkal érzékeltetjük, hogy a kapcsolatok, miközben egyféle elmozdulást megengednek, az ábrákon előforduló másik kettőt viszont lehetetlenné teszik.



3.8 ábra



3.9 ábra

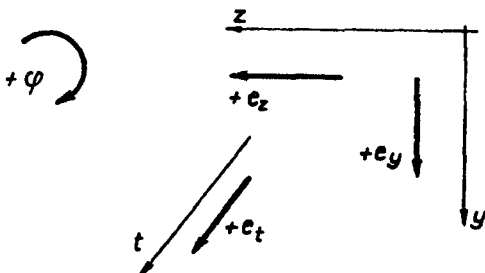
A 3.9 ábrán látható láncolat egyes elemeit csuklók kapcsolják össze, ilyenkor csuklós láncolatról beszélünk. Amennyiben a láncolatot alkotó me-

ru... alakuak, akkor az alakzatos rudláncnak nevezzük. A 3.9
 k sz... erint csuklós rudláncot láthatunk.
 ncol... atok elemeit jobbról balra szoktuk megszámozni, a haladási
 hát... jobbról balra irányul. Számozhatjuk a kapcsolatokat is (arab
 áb... rán) és az elemeket is (római számok).
 ncol... atok elmozdulásainál, amint azt a korábban bemutatott példá-
 megá... llapítottuk, megkülönböztetünk abszolút és relatív elmozdulá-
 ek j... előlése:

absz... olut elfordulás
 absz... olut eltolódás
 rela... tiv elfordulás
 rela... tiv eltolódás.

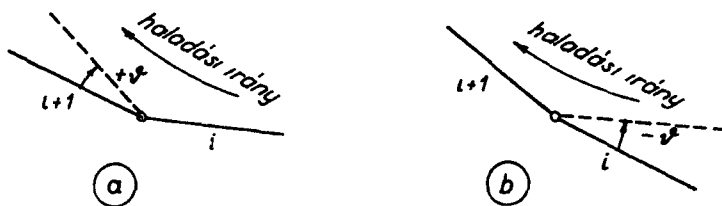
absz... olut elmozdulás a földhöz mérten bekövetkező elmozdulást

absz... olut elmozdulások előjelét már korábban tisztáztuk, most a
 n tü... ntetjük fel. Az elfordulás akkor pozitív, ha az óramutató já-
 nege... yező. Az eltolódás előjelét mindig a megfelelő tengellyel tud-
 álni. Ha például y irányu eltolódásunk van, úgy azt akkor ne-
 zítív... nak, ha nyila azonos irányban mutat a $+y$ tengellyel.



3.10 ábra

elm... ozdulás a láncolat valamelyik elemének az egyik előző - rend-
 köz... etlen megelőző - elemhez viszonyított elmozdulását jelenti.
 a a... megelőző elemet mozdulatlanak tekintjük, akkor a követő
 ozdu... lása jelenti a relatív elmozdulást. Itt fontos szerepet játszik
 illet... t haladási értelem, amely megszabja az elemek sorrendjét.
 elati... v elmozdulások előjelét a következőképpen értelmezzük. A re-
 dula... s (a megelőző elemhez képest a követő elem elfordulása) az
 jár... ásával megegyezően pozitív, ha a haladási értelem jobbról
 at (3.11.a ábra). A 3.11.b ábrán láthatjuk, hogy balról jobbra
 seté... a ahhoz, hogy az $i + 1$ és i elem közötti szög a fentivel
 gyen... negatív ψ elfordulást kell beiktatni. Ezt úgy is megfogal-



3.11 ábra

mazhatjuk, hogy balról jobbra haladás esetén a relatív elfordulások előjelét meg kell fordítani! A relatív eltolódást (annak vetületét), akkor nevezzük pozitívnak, ha a megelőzőhöz képest a követő (jobbról balra haladva) a megfelelő irányu tengely pozitív ága felé tolódik el.

3.1.1.4 A láncolatok függőleges eltolódási ábrái

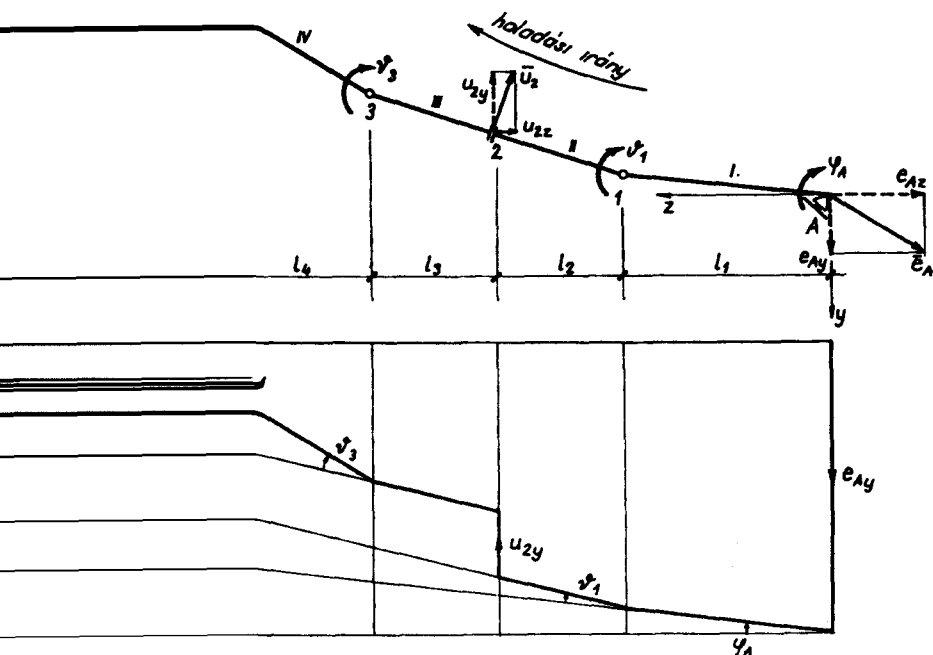
Az eddig tanultak birtokában a láncolatok eltolódási ábráit már fel tudjuk rajzolni. E fejezetben csak függőleges elmozdulási ábrákkal foglalkozunk, de az elmondottak alapján értelemszerűen más irányu eltolódási ábrák is előállíthatók.

A láncolatok függőleges eltolódási ábrái azt mutatják meg, hogy a láncolat egyes pontjai a kapcsolati pontokon felvett relatív elmozdulások hatására függőlegesen mennyit tolódnak el, azaz a pontok tényleges eltolódásának mennyi a függőleges vetülete. Az eltolódási ábra bármely ordinátája a rudlánc fölötté levő pontjának eltolódását mutatja.

Vizsgáljuk meg a 3.12 ábrán látható rudláncot, amelynek méretei adottak. Az ábrán vegyes láncolatot látunk, amelynek rudjai csuklóval, illetőleg rudtengelyre merőleges eltolódást lehetővé tevő kapcsolattal illeszkednek egymáshoz. A rudlánc jobb oldali vége görgős támasszal kapcsolódik a földhöz, de az itt fellépő mozgások ismertek (e_A , φ_A). Adottak a kapcsolatokban bekövetkező ψ_1 , ψ_3 és u_2 relatív elmozdulások.

A függőleges eltolódási (e_y) ábrát torzítva rajzoljuk fel. Ez annyit jelent, hogy míg a láncolatot y és z irányban is azonos léptékben ábrázoljuk, addig az eltolódási ábra vízszintes és függőleges értelemben más-más méretarányban készül. Vízszintes irányban a láncolatéval megegyező méretarányt használjuk, függőlegesen az eltolódásokat ehhez képest felnagyítva rakjuk fel, valamilyen $1 \text{ cm} (=) x \text{ cm}$ alakú eltolódási lépték szerint.

A függőleges eltolódási ábrát vízszintes tengelyhez fogjuk felmérni. Módszerünk a szuperpozíció lesz, vagyis sorra feltételeztük, hogy a láncolon csak az e_A , φ_A , ψ_1 , u_2 , ψ_3 elmozdulás jön létre, ezekből



3.12 ábra

ározzuk meg az egyes pontok függőleges eltolódását, amelyeket összegeztünk.

ntes nullvonalról mérjük fel először az A kezdőpont eltolódás függőleges vetületét. Ha csak ez az elmozdulás jön létre, a mozgási ábra a nullvonalal párhuzamos egyenes, mert minden pont eltolódik el. E mozgás közben feltételeztük, hogy a többi pont alatt az idő alatt nulla.

Amikor létrejön a kezdőpont φ_A elfordulása, feltételezve, hogy nincs relatív elfordulás, azaz a láncolat egyetlen merev testként elmozdulni. A φ_A abszolút elfordulás hatására az egyes pontok elmozdulásának függőleges irányú összetevője az elfordulásponttól (A) függőleges vetületével (a z irányu karral) arányos. Vagyis a függőleges eltolódási ábra egy egyenes, amely φ_A hajlásszöget zár be.

A pozitív elfordulás hatására a láncolat minden pontja felfelé mozog, hiszen bármely ponthoz illesztett $+y'$ tengelyt negatív irányba fordítjuk a φ_A elfordulás.

Ezután következik be a ψ_1 elfordulás. Az I. rud már nem mozdul el, a II., III. és IV. pedig egyetlen merev testként elfordul az 1. pont körül ψ_1 szöggel. Az eddigi eltolódási ábra az 1. ponttól balra módosul, további felfelé bekövetkező elfordulások keletkeznek, melyeket a Q_A vonallal ψ_1 szöget bezáró egyenes határol. A $+\psi_1$ -ből keletkező eltolódások is felfelé mutatnak, ugyanis hatására minden ponton az odahelyezett '+y' tengelyt negatívan (felfelé) érinti a ψ_1 elfordulás.

A 2. kapcsolatban létrejön az u_2 relatív eltolódás, ennek függőleges vetületét kell vennünk. Így a 2. ponttól balra levő III-IV. rudak az előző vonallal párhuzamos helyzetbe kerülve u_{2y} értékkel tolnak el felfelé.

Végül a ψ_3 létrejöttekor már csak a IV. rud fordul el ψ_3 szöggel és toldódik el felfelé. Ezzel megrajzoltuk a függőleges eltolódási ábrát.

A feladat számítással is megoldható. Irjuk fel először az 1. pont elmozdulásait (elfordulását és eltolódásának függőleges vetületei):

$$Q_1 = + Q_A$$

$$e_{1y} = + e_{Ay} - Q_A l_1 .$$

A 2. pont előtt és után is kiszámítjuk az elmozdulásokat:

$$Q_2^J = + Q_A + \psi_1$$

$$e_{2y}^J = + e_{Ay} - Q_A (l_1 + l_2) - \psi_1 l_2 .$$

$$Q_2^b = + Q_A + \psi_1$$

$$e_{2y}^b = e_{Ay} - Q_A (l_1 + l_2) - \psi_1 l_2 - u_{2y} .$$

Hasonlóan a 3. pont elmozdulásai:

$$Q_3 = + Q_A + \psi_1$$

$$e_{3y} = e_{Ay} - Q_A (l_1 + l_2 + l_3) - \psi_1 (l_2 + l_3) - u_{2y} .$$

B pont abszolút elfordulása és abszolút eltolódásának y te:

$$\varphi_B + \psi_1 + \psi_3$$

$$e_{Ay} = \varphi_A (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4) - \psi_1 (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4) -$$

$$u_{2y} - \psi_3 \ell_4$$

eket általánosítva a korábban már említett alábbi megállapítást láncolat valamely pontjának (B) abszolút elmozdulásai (e_B, φ_B)

hatók ki, ha ismerjük valamely, a sorrendben megelőző, ki- (A) abszolút elmozdulásait (e_A, φ_A) és a két pont közötti

dulásokat. Az elmozdulások számítási képletei:

$$\varphi_B = \varphi_A + \sum_A^B \psi_i$$

$$e_{By} = e_{Ay} - \varphi_A k_{ABY} - \sum_A^B u_{jy} - \sum_A^B \psi_i k_{iz}$$

megállapítást szimboliusan az alábbi, az erőknél megismerthez értékűségi kijelentéssel fejezhetjük ki:

$$(e_B, \varphi_B) = [e_A, \varphi_A, (u_i), (\psi_i)]$$

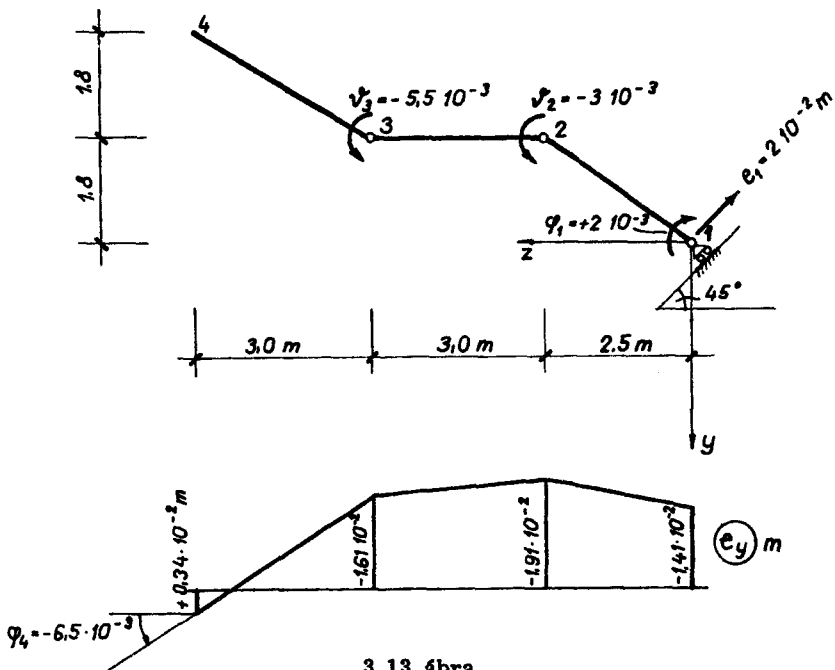
ten felhívjuk a figyelmet a haladási irány jelentőségére, amely relatív elmozdulások előjel meghatározásában játszik szerepet.

amely pontjának elmozdulását a haladási irány szerint az ille- megelőző elmozdulások mindegyike befolyásolja, de a követő pon- lmozdulások hatástalanok.

ük el a 3.13 ábrán megadott rudlanc függőleges eltolódási áb- lnc jobb oldali végpontján csukló és hengerszekér a kapcs- 3. pontban csuklós kapcsolat van. Adottak az 1. pont abszolút φ_1 és e_1 , illetve ψ_2 és ψ_3 relatív elfordulások.

ük ki az 1., 2., 3., és 4. pont abszolút eltolódásának függő- ét. Az 1. pont függőleges eltolódása az e_1 függőleges vetüle- utat, tehát negatív:

$$e_{1y} = -2 \cdot 10^{-2} \sin 45^\circ = -1,41 \cdot 10^{-2} \text{ m } (\uparrow)$$



3.13 ábra

A 2. pont eltolódása a megelőző e_1 , φ_1 elmozdulásokból számítható:

$$e_{2y} = -1,41 \cdot 10^{-2} - 2,5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -1,91 \cdot 10^{-2} \text{ m } (\uparrow).$$

A φ_1 -ből számítható eltolódás szintén negatív, mert φ_1 felfelé surolja a 2. pontban elhelyezett $+y'$ tengelyt.

A 3. pont eltolódásánál e_1 , φ_1 , ψ_1 -et kell figyelembe venni:

$$e_{3y} = -1,41 \cdot 10^{-2} - 5,5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = -1,61 \cdot 10^{-2} \text{ m } (\uparrow).$$

A φ_1 -ből negatív, a ψ_2 -ből pozitív előjeltű függőleges eltolódás keletkezik. Ugyanis pl. a $-\psi_2$ elfordulás a 3. pontban elképzelt $+y'$ tengelyt pozitív irányban érinti.

A 4. pont eltolódásának meghatározásakor az összes mozgással számolni kell:

$$1,41 \cdot 10^{-2} - 8,5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 6,3 \cdot 10^{-3} + 3,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} =$$

$$0,34 \cdot 10^{-3} \text{ m } (\uparrow).$$

olut elfordulások mindig a megelőző elfordulások összegzésé-
Az összegzést most csak a 4. pontban írjuk fel:

$$2 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3} - 5,5 \cdot 10^{-3} = - 6,5 \cdot 10^{-3} =$$

$$0,0065 \text{ (}\searrow\text{)}.$$

ző pontok birtokában felrakhatjuk az e_y eltolódási ábrát.

zintes méretet a rudláncal azonos léptékben $M = 1 \cdot 100$ -ban
va, a függőleges méretarány $M = 1:1$.

3.1.1.5 A láncolatok elmozdulásai

bi példán egy egyszerű láncolat néhány jellegzetes elmozdu-
kiszámítani, és ennek alapján megrajzoljuk a láncolat elmoz-
t, más szóval a láncolat deformált alakját.

ábrán látható csuklós rudlánc relatív elfordulásai legyenek
. Határozzuk meg az A pont elmozdulásait. Ha először a

ás következik be, akkor az A pont A_1 helyzetbe kerül
ezért derékszögű marad a sarok); majd a α_2 elfordulás

bb az A_2 -be. Az A pont elmozdulásait ki is számíthatjuk
hatásait egyaránt figyelembe véve):

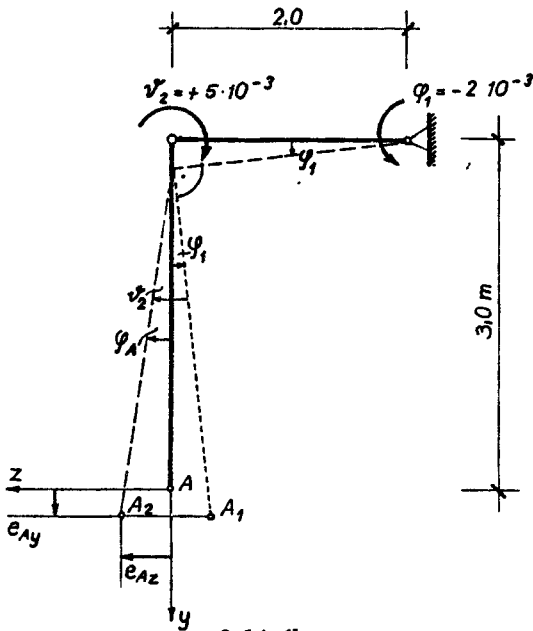
$$\varphi_A = - 2 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} = + 3 \cdot 10^{-3} \text{ (}\curvearrowright\text{)}$$

$$e_{Az} = - 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = + 9 \cdot 10^{-3} \text{ m } (\leftarrow)$$

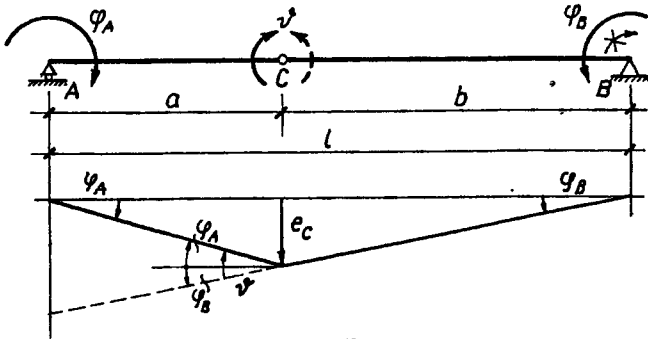
$$e_{Ay} = + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = + 4 \cdot 10^{-3} \text{ m } (\downarrow).$$

g megoldott feladatoknál csak a láncolat jobb oldali végpontja
z kapcsolva. Vannak olyan láncolatok, amelyeket több kényszer-
höz rögzítettünk. A továbbiakban különböző kényszerekkel a föld-
láncolatok ismeretlen elmozdulásait határozzuk meg.

ábra szerinti láncolat egy A - B kéttámaszu tartóból szár-
oly módon, hogy a C pontba csuklót iktatunk be. A merev



3.14 ábra



3.15 ábra

és határozott kéttámaszú tartóba belktatott C csukló labilis láncolatot eredményez. Legyen adott a C pontban a ψ relatív elfordulás, határozzuk meg a φ_A , φ_B támaszponti elfordulásokat, és a C pont e_C eltolódását. Rajzoljuk meg az e_y függőleges eltolódási ábrát is. Megjegyezzük, hogy a kis elmozdulások miatt az A és C pontok vízszintesen

nem tolnának el, ugyanis ezeket mint magasabb rendűen kicsiny mennyiségeket elhanyagoltuk.

Az ismeretlen elmozdulások kiszámítása egy korábbi fontos megállapításunk alapján lehetséges. Egy pont ismeretlen elmozdulásai kiszámíthatók egy másik pont ismert abszolút elmozdulása és a kettő közötti relatív elmozdulások ismeretében. Az ismeretlen támaszponti elfordulás kiszámítására eltolódási egyenletet írunk fel. A B pont mozgását feltételezzük, hogy $+ \varphi_B$. Ebből kiindulva felírhatjuk az e_{Ay} eltolódást, amelyről zelve tudjuk, hogy nulla:

$$e_{Ay} = - \varphi_B \cdot l - v \cdot a = 0$$

$$\varphi_B = - v \frac{a}{l} \quad (\curvearrowright).$$

A felső egyenletben $+ \varphi_B$ -ből és v -ből az A ponton negatív eltolódás adódna. (Ezek az elfordulások az A pontba illesztett $+y'$ tengelyt negatív irányban érintik.) Ahhoz, hogy az eltolódás zérus legyen φ_B -nek negatívnak kell lennie. Amennyiben az ismeretlen elmozdulásról feltesszük, hogy pozitív, a kiszámított előjel egyben az elfordulás előjelét is adja. Fontos azonban, hogy a tényleges irányt az ábránkon kijavítsuk. Ha ez elmarad, a továbbiakban szemléletből megállapított eltolódások előjele hibás lesz.

Az A ponton keletkező elfordulás legyen $+ \varphi_A$. Most az $e_{By} = 0$ egyenletet tudjuk kihasználni, ha A-ből kiindulva felírjuk B függőleges eltolódását. Nagyon vigyázzunk azonban a relatív elfordulás előjelére. Megváltozott a haladási irány, a v -t fordított előjellel kell számításba venni, azaz most negatív lesz. Balról jobbra haladás esetén v irányát a továbbiakban mindig szaggatva fogjuk feltüntetni. Az abszolút elfordulások előjelét (pl. φ_A -t) nem kell megfordítani. A fentiek ismeretében $+ \varphi_A$ lefelé, $-v$ felfelé érinti a B pontban húzott $+y'$ tengelyt, másképpen megfogalmazva lefelé, illetve felfelé tolná el a B pontot.

$$e_{By} = + \varphi_A \cdot l - v \cdot b = 0$$

$$\varphi_A = v \frac{b}{l} \quad (\curvearrowleft).$$

Az ábrából leolvasható:

$$|\varphi_A| + |\varphi_B| = v$$

a támaszponti elfordulások abszolút értékeinek összege egyenlő a relatív elfordulás nagyságával.

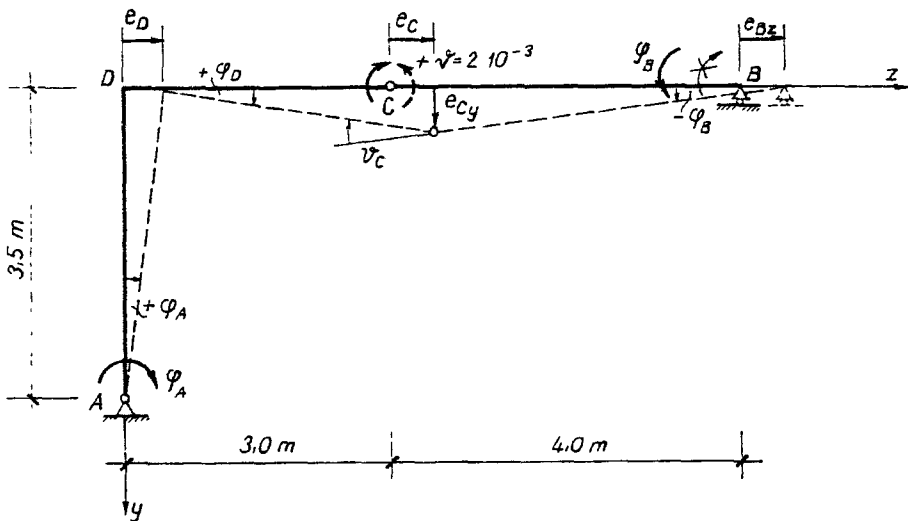
Ugyanez az elfordulás meghatározható B-ből kiindulva φ_B és a köztük levő relatív elfordulás ismeretében:

$$\varphi_A = -\varphi_B + \psi = -\psi \frac{a}{l} + \psi = \psi \frac{l-a}{l} = \psi \frac{b}{l} \quad (\curvearrowright).$$

A C pont eltolódása A és B elmozdulásainak ismeretében bármely oldalról kiszámítható. Célszerű, ha lehet jobbról balra haladni, mert akkor a relatív elmozdulások előjele nem változik meg.

$$e_C = +\varphi_B \cdot b = +\psi \frac{a}{l} b \quad (\downarrow).$$

Végül határozzuk meg a 3.16 ábrán levő láncolat ismeretlen elmozdulásait. Adott a C ponti relatív elfordulás ψ_C .



3.16 ábra

Az A pont függőleges eltolódása, ami nullával egyenlő, felírható a B-ből kiindulva:

$$e_{Ay} = -\varphi_B \cdot 7 - 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = 0$$

$$\varphi_B = -\frac{6}{7} \cdot 10^{-3} = -0,857 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

Hasonlóan felírható $e_{By} = 0$, azonban ne felejtsük el a relativ elfordulás előjelét megváltoztatni negatívra:

$$e_{By} = + \varphi_A \cdot 7 - 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 0$$

$$\varphi_A = \frac{8}{7} \cdot 10^{-3} = +1,143 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

Ellenőrzésként φ_A felírható φ_B -ből kiindulva:

$$\varphi_A = \varphi_B + \psi = -0,857 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} = +1,143 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

Számítsuk ki az eltolódásokat is. A B pont vízszintes eltolódása az A-ból kiindulva, vagyis balról jobbra haladva írható fel. A vízszintes eltolódás számításakor a karokat függőlegesen kell venni.

$$e_{Bx} = +1,143 \cdot 10^{-3} \cdot 3,5 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (\rightarrow).$$

A kis elmozdulások esetében $e_{Dx} = e_{Cx} = e_{Bx} = +4 \cdot 10^{-3}$ m. A C pont függőleges eltolódása jobbról balra haladás esetén a B pont abszolút mozgásából kiindulva:

$$e_{Cy} = +0,857 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 3,429 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (\uparrow).$$

Ugyanez az eltolódás A-ból kiindulva, balról jobbra haladással is felírható. A haladási irány megváltozása miatt φ_A előjelét nem kell megfordítani.

$$e_{Cy} = +1,143 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = 3,429 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (\uparrow).$$

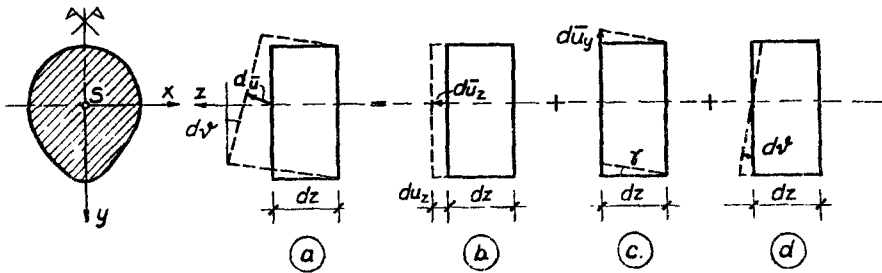
3.1.2 A kis elmozdulások elméletének alkalmazása a tartók alakváltozásának számítására

A kis elmozdulások elmélete lehetőséget ad a tartók alakváltozásának meghatározására. Ha ismerjük a tartók relativ elmozdulásait, ki tudjuk számítani az abszolút elmozdulásokat. A továbbiakban megismerkedünk a

relatív elmozdulások meghatározásával, majd ennek segítségével abszolút mozgások számításával

3.1.2.1 Fajlagos elmozdulások

Vizsgáljuk meg egy szimmetrikus keresztmetszetű síkbeli hajlékony rud dz elemi hosszúságú darabját (3.17 ábra). Az egymástól dz távolságban levő keresztmetszetekkel határolt ruddarab alakváltozását oly módon vizsgáljuk, hogy a jobb oldali metszetet mozdulatlanak tekintjük, és ehhez mérten rajzoljuk meg a bal oldali keresztmetszet elmozdulását.



3.17 ábra

A bal oldali metszet relatív elmozdulása általában egy ferde $d\vec{u}$ eltolódás és egy $d\psi$ elfordulás (3.17.a ábra). A $d\vec{u}$ a keresztmetszet súlypontjának eltolódásvektora. Ezek az elmozdulások relatív jellegűek, mert nem a földhöz, hanem egy másik keresztmetszethez viszonyítottak. Az elemi ruddarab eme deformációja az ábrán is bemutatott három összetevőre bontható fel:

- du_z tengelyirányú eltolódás (3.17.b ábra),
- du_y harántirányú eltolódás (3.17.c ábra),
- $d\psi$ elfordulás (3.17.d ábra)

A fenti elmozdulások elemien kicsinyek, mivel az elemi hosszúságú ruddarabon alakulnak ki, ezért alkalmazzuk a d differenciáljelet. Az elfordulások hosszúság dimenziójuak, az elfordulás dimenzió nélküli.

Az elemi ruddarab relatív elmozdulásai alapján értelmezhetjük a fajlagos elmozdulásokat:

$$\epsilon = \frac{du_z}{dz} \text{ fajlagos nyulás (fajlagos tengelyirányú eltolódás)}$$

$$\gamma = \frac{du}{dz} \quad \text{fajlagos szögtorzulás (fajlagos harántirányú eltolódás)}$$

$$k = \frac{d\varphi}{dz} \quad \text{fajlagos elfordulás}$$

Az ε és a γ dimenzió nélküli, a fajlagos elfordulás mértékegysége m^{-1} . A fajlagos elmozdulás tulajdonképpen a rudtengely mentén bekövetkező relatív elmozdulások intenzitása. Ezek az intenzitások a rudtengely bizonyos pontjához vannak rendelve, és általában a rudtengely mentén változók (lásd: 3.18 ábra).

A tartók deformációját javarészt a terhek okozzák. A fajlagos elmozdulások ebben az esetben közvetlenül a terhek kiváltotta igénybevételekből határozhatók meg. Az egyszerű igénybevételeknél tanultuk, hogy az N normálerő, a T nyomóerő és az M hajlítónyomaték milyen fajlagos elmozdulást okoz (lásd: 3.18 ábra).

A húzás-nyomás igénybevétel számításakor megismerkedtünk a Hooke-törvénnyel, amiből a fajlagos nyulás (lásd: 2.2.1.1 pont):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA},$$

ahol E a rugalmassági modulus, A a rud keresztmetszeti területe. A központos normálerőből keletkező fajlagos nyulás a keresztmetszet minden pontjában egyenlő, de keresztmetszetenként változó lehet. A normálerő hatására az egyenes tengelyű rud valamennyi pontja csak rudtengelyirányú eltolódást végez, és így a rud tengelye egyenes marad (3.18 ábra). A hajlításból is keletkezik a keresztmetszet egyes pontjaiban fajlagos nyulás, de éppen a súlypontban, a rud tengelyében nem.

A γ fajlagos szögtorzulás a nyiróigénybevételből nyerhető (lásd: 2.3.3.3 pont):

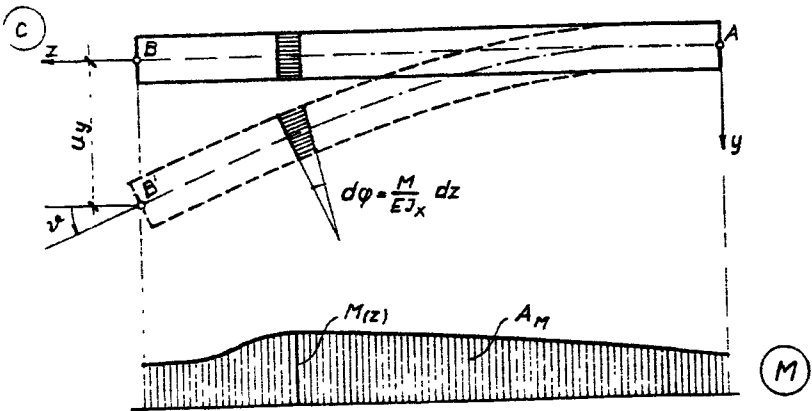
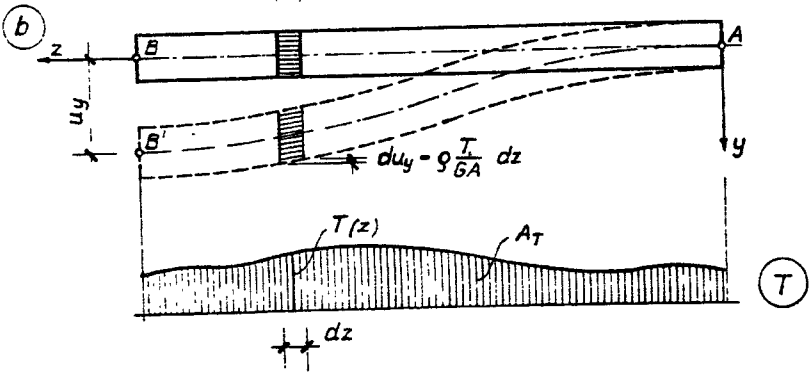
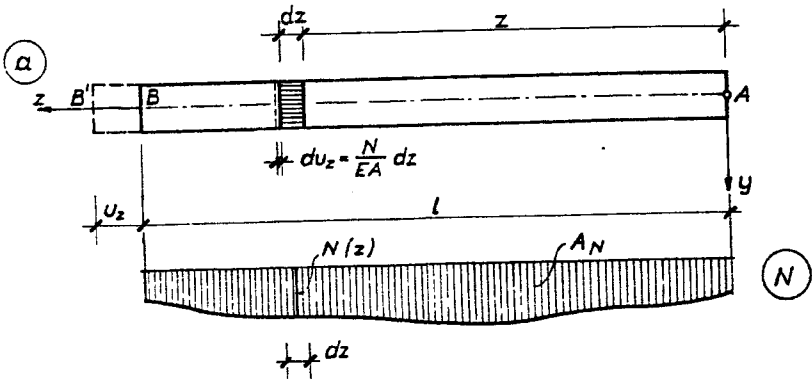
$$\gamma = \varphi \frac{T}{GA}$$

A fajlagosságtorzulás arányos a T nyiróerővel és a φ alaki tényezővel, fordítva arányos a nyirási moduluszal és a keresztmetszeti területtel. A nyiróerő hatására az egyenes tengelyű rud valamennyi pontja csak a rud tengelyére merőlegesen mozdul el (3.18.b ábra).

A fajlagos elfordulás a hajlítóigénybevételből határozható meg. A tiszta egyenes hajlításnál megállapítottuk (lásd: 2.2.3.1 pontot):

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EJ_x}$$

Ennek ismeretében a k fajlagos elfordulásra a



3.18 ábra

$$k = \frac{M}{E J_x}$$

összefüggést nyerjük, ugyanis

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\psi}{dz} = k.$$

A fajlagos elfordulás egyenesen arányos a hajlítónyomatékkal, fordítottan a rugalmassági modulussal, és a hajlítás tengelyére vett tehetetlenségi nyomatékkal. A hajlításra igénybe vett rud tengelye meggörbül és az egyes pontjai z és y irányban egyaránt eltolódhatnak (3.18.c ábra).

Fajlagos elmozdulások számíthatók más hatásokból is: pl. hőmérséklet-változásból, támaszsüllyedésből, gyártási hibából stb. Az alábbiakban a hőmérséklet-változás két fajtájával az egyenletes és az egyenlőtlen hőmérsékletváltozással foglalkozunk.

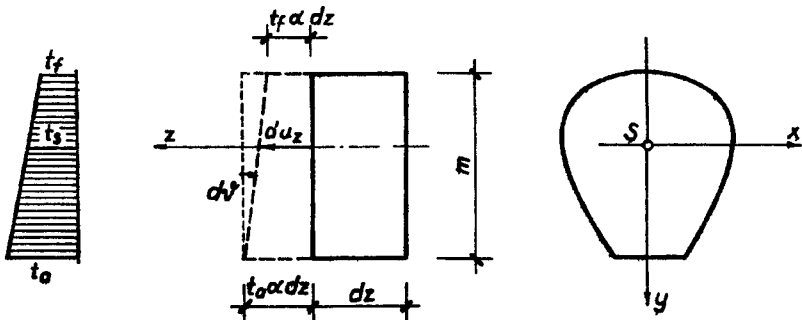
Az egyenletes hőmérsékletváltozás hatására a rud minden pontjában ugyanannyival emelkedik meg, vagy süllyed a hőmérséklet. A hőmérséklet-változásból a fajlagos nyulás:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta t$$

képlettel számítható, ahol Δt a hőmérséklet változása $^{\circ}\text{C}$ -ban, α a hőtágulási együttható $1/^{\circ}\text{C}$ dimenzióban.

Az egyenlőtlen hőmérséklet-változás a rud hossza mentén, annak minden keresztmetszetében egyenlő szabályossággal alakul ki, a keresztmetszeten belül, a magasság mentén változik, mégpedig általában lineárisan. Az egyenlőtlen jelző tehát annyit jelent, hogy a keresztmetszet szélső (alsó és felső) szálakban különböző mértékben változik meg a hőmérséklet, a közbenső szálakban pedig lineáris az átmenet.

Az egyenlőtlen hőmérséklet-változás hatását vizsgáljuk meg a 3.19 ábrán látható y tengelyre szimmetrikus keresztmetszetű, m magasságu



3.19 ábra

rud dz hosszúságu darabján. A változás itt most jelentsen hőmérséklet-emelkedést, a szálak megnyulnak: t_a az alsó szál hőmérséklet-változása, t_f a felső szál hőmérséklet-változása. Az elemi ruddarab bal oldali keresztmetszete a jobb oldaléhoz képest eltolódik és elfordul. A du_z eltolódást a rud tengelyében mérjük, a keresztmetszeti síkidom súlypontjában, ahol a hőmérséklet-változás t_s .

Az elemi ruddarab relatív elmozdulásai az ábrából leolvashatóan:

$$du_z = t_s \alpha dz$$

$$d\psi = \frac{t_a - t_f}{m} \alpha dz$$

A fajlagos elmozdulások:

$$\varepsilon = \frac{du_z}{dz} = \alpha t_s$$

$$k = \frac{d\psi}{dz} = \frac{t_a - t_f}{m} \alpha.$$

E képletek előjelhelyesen adják a relatív elmozdulásokat, ha pozitívnak vesszük a hőmérséklet emelkedést és negatívnak a csökkenést.

3.1.2.2 Relatív elmozdulások

A rudak relatív elmozdulásain mindig valamely keresztmetszetnek valamelyik sorrendben megelőző keresztmetszethez mért elmozdulásait értjük.

A dz elemi hosszúságu ruddarab relatív elmozdulását a 3.17 ábrán láttuk:

$$du_z = \varepsilon dz$$

$$du_y = \gamma dz$$

$$d\psi = k dz$$

Most vizsgáljuk meg a yéges hosszúságu egyenes rúdszakasz relatív elmozdulásait, vagyis azokat az elmozdulásokat, melyeket a bal oldali rudvég a jobb oldaléhoz képest végez. A fajlagos elmozdulások függvényeit integrálni kell a rud hossza mentén:

$$u_z = \int_0^l \varepsilon dz$$

$$u_y = \int_0^l \gamma dz$$

$$\psi = \int_0^l \kappa dz.$$

A fajlagos elmozdulások a fenti egyenletekben bármilyen hatásból keletkezhetnek.

Amennyiben a fajlagos elmozdulásokat az igénybevételek okozták, felhasználhatók a fajlagos elmozdulások és az igénybevételek közötti korábban ismertetett összefüggések (3.18 ábra).

A normálerőből csak rudtengely irányú eltolódás keletkezik (3.18. a ábra):

$$u_z = \int_0^l \frac{N}{EA} dz$$

Tekintsük a rudat állandó keresztmetszetűnek, vagy legalább szakaszonként annak vehetőnek, ekkor EA állandó az integráljel alól kiemelhető. Végül csak a normálerőábrát kell integrálni a rud tengelye mentén. Ez az integrál a normálerő ábra területe: A_N . Vagyis az

$$u_z = \frac{A_N}{EA}$$

képletet kapjuk.

Hasonlóan a nyíróerőből csak rud tengelyre merőleges eltolódás lép fel (3.18. b ábra):

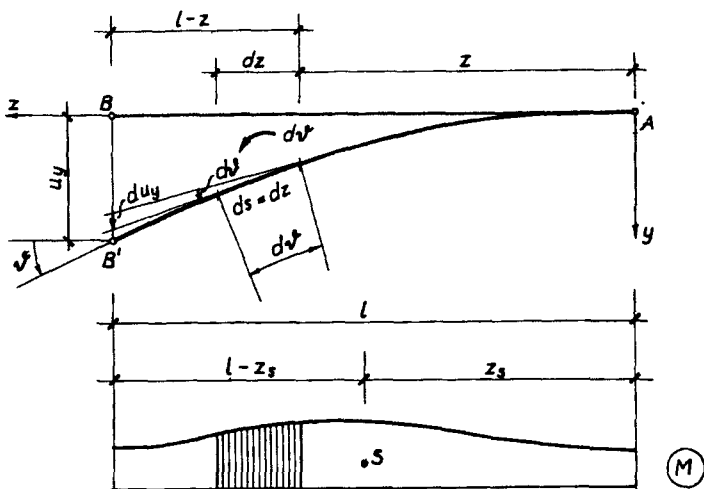
$$u_y = \int_0^l \varrho \frac{T}{GA} dz = \frac{A_T}{GA}.$$

A hajlítónyomaték hatására a rud tengelye meggörbül, és egyes pontjai el is tolnak. A relatív elfordulás (3.18.c ábra):

$$\vartheta = \int_0^l \frac{M}{EJ_x} dz = \frac{A}{EJ_x} M$$

A hajlításra igénybe vett rud tengelye u_y harántirányú eltolódást is szenved, ezt rögtön részletesen is tárgyaljuk. Előtte egy megjegyzés: minden eddig részletezett relatív elmozdulás a megfelelő igénybevételi ábrával arányos. Tehát két keresztmetszet egymáshoz viszonyított elmozdulásai a két keresztmetszet közötti igénybevételi ábraszakasz területével arányosak.

Térjünk vissza a hajlított rud relatív eltolódásának meghatározására. Rajzoljuk ki mégegyszer a 3.18 ábrán már felrajzolt hajlított rud tengelyét (3.20 ábra).



3.20 ábra

Jelöljük ki a ruden egy dz hosszúságú elemi részt. Ennek az alakváltozás után a meggörbült ruden a ds ívdarab fog megfelelni. Mivel kis elmozdulásokkal foglalkozunk, ezért az egyes pontok az eredeti rudtengelyre merőlegesen tolnak el, továbbra is $ds = dz$ (vagyis a z irányú eltolódásokat elhanyagoljuk).

A dz szakasz végén levő keresztmetszetek relatív elfordulása az eddigiek alapján

$$d\psi = \frac{M}{EJ_x} dz$$

Ez a $d\psi$ szög megmutatkozik az elfordult két keresztmetszet között, de a ds ívdarab két végponti érintője között is. Ezek az érintők kimetszik az A ponti függőlegesből a du_y jelű távolságot, amely az A pont függőleges eltolódását jelenti a $d\psi$ elfordulásból, vagyis a dz darab meggörbüléséből, A $d\psi$ elfordulás előjele - megegyezően a nyomaték-ábrával - negatív, amiből pozitív eltolódás keletkezik. Mivel a dz távolság elemien kicsiny, azért a $d\psi$ elfordulás karja az A függőlegesétől $l - z$ távolságnak tekinthető. A keresett eltolódás

$$du_y = d\psi (l - z).$$

Behelyettesítve $d\psi$ előtti kifejezését:

$$du_y = \frac{M}{EJ_x} (l - z) dz.$$

Innen integrálással nyerhetjük a B pontnak az A-hoz mért, rudtengelyre merőleges irányu, hajlításból származó relatív eltolódását:

$$u_y = \int_A^B \frac{M}{EJ_x} (l - z) dz.$$

A gyakorlatban az integrálás általában elkerülhető. Az EJ_x legyen állandó (de legalább szakaszonként annak tekinthető), s akkor kiemelhető. Az $\int M (l - z) dz$ integrál tulajdonképpen a nyomaték ábrának, mint síkidomnak az eltolódás egyenesére (az A függőlegesére) vett statikai nyomatéka. Ezek szerint valamely keresztmetszet a megelőzőhöz mért relatív eltolódását úgy kapjuk meg, hogy a két keresztmetszet közötti nyomatéki ábra területét szorozzuk a rudtengelyre vetített súlypontjának az eltolódás egyenesétől mért merőleges távolságával, és osztjuk EJ_x -szel:

$$u_y = \frac{A}{EJ_x} \frac{M (l - z_s)}{s} = \psi (l - z_s).$$

Az eddig tárgyalt relatív elmozdulások viszonylagos nagysága különböző, ezért együttes fellépésük esetén egyiket - másikat el is hanyagolhatjuk a domináns elmozdulás mellett. Legnagyobbak a hajlításból származó

elmozdulások: a ψ relatív elfordulás és a vele kapcsolatos u_y harántirányú eltolódás. Ehhez képest a nyírásból származó u_y eltolódást mindig elhanyagolhatjuk viszonylagos kicsinysege miatt. A normális igénybevételből adódó u_y eltolódás is kicsiny a hajlítás okozta elforduláshoz képest. Ezért a hajlított rudak deformációját csak a hajlításból szoktuk meghatározni és elhanyagoljuk a nyírásból, valamint a normális igénybevételből származó alakváltozásokat. Ha azonban egy rudban csak normális igénybevétel van (pl. a rácsos tartók rudjában), akkor természetesen az u_x rudirányú relatív eltolódás nem hanyagolható el. Más esetek, pl. keretszerkezetek is vannak a kivételek között - ahol a hajlítást és a normálerőt is figyelembe kell venni - ezt majd később tárgyaljuk.

A hajlítónyomatékból számítható ψ és u_y meghatározását - fontosságukra való tekintettel - a gyakorlatban jól alkalmazható módszerben foglaljuk össze (3.21 ábra).

A hajlított tartó két keresztmetszete közötti relatív elfordulás a közöttük levő nyomatékkábra területének és az EJ_x -nek a hányadosa:

$$\psi = \frac{A}{EJ_x} M$$

A ψ előjele jobbról balra haladás esetén mindig megegyezik a nyomatékkábra előjelével (esetünkben negatív). A relatív elfordulás helye a nyomatékkábra súlypontja alatt a tartó tengelyén van.

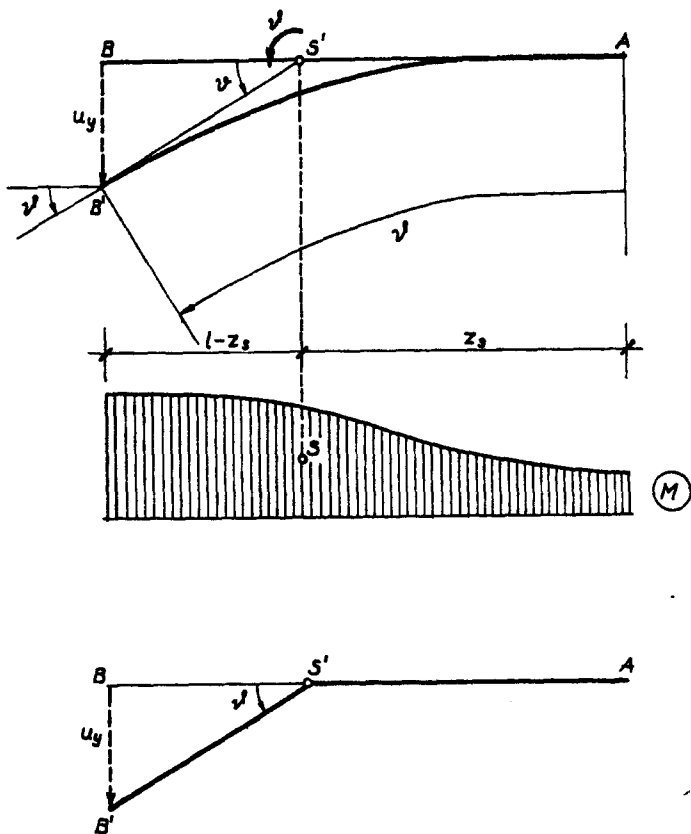
A két keresztmetszet közötti relatív eltolódás:

$$u_y = \psi (l - z_s)$$

Vagyis az eltolódás a relatív szögforgás nyomaték (ψ szorozva $(l - z_s)$ karjával) a végpontban illesztett függőleges $+y'$ tengelyre. Előjelét szemléletből állapítjuk meg (esetünkben pozitív, hiszen a negatív ψ lefelé surolja a $+y'$ tengelyt).

Az előbbi összefoglalás alapján megállapítható, hogy a fenti relatív elmozdulások meghatározása teljesen megegyezik a rudláncnál tanult összefüggésekkel. Ily módon a hajlékony rudat - a két végpont közötti relatív elmozdulások kiszámítása céljából - kéttagú rudláncsal helyettesíthetjük.

A rudlánc csuklóját a relatív elfordulások eredőjének helyén, a geometriai ábra súlypontja alatt kell a tartóba beilleszteni. Itt működtetve a ψ -relatív elfordulást, a kis elmozdulások elméletével meghatározható a másik végpont eltolódása. Megemlítjük még, hogy a rudlánc az A és a B végpontokban érintője a rugalmas vonalnak.



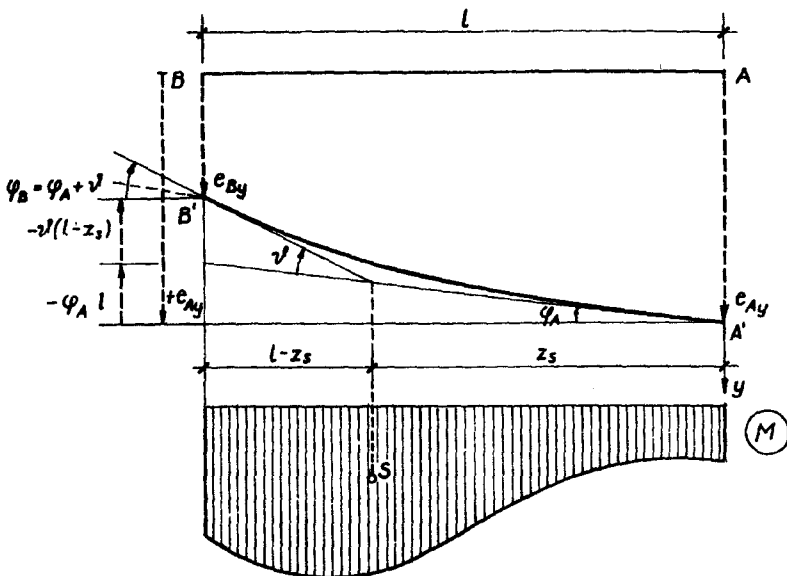
3.21 ábra

3.1.2.3 A hajlított rud abszolút elmozdulása

A tartótengely valamely pontjának a földhöz képest bekövetkező elmozdulásait abszolút elmozdulásoknak nevezzük: δ abszolút eltolódás, φ abszolút elfordulás.

Az alábbiakban a tömör tartók abszolút elmozdulásaival foglalkozunk oly módon, hogy elhanyagoljuk a nyíró és normális igénybevételből származó alakváltozásokat, csak a hajlításból keletkezőket vesszük figyelembe.

Vizsgáljuk az AB egyenestengelyű rudszakaszt, keressük B végpontjának abszolút elfordulását és abszolút eltolódásának rúdtengelyre mérőleges (függőleges) összetevőjét (3.22 ábra).



3.22 ábra

Ismertek az A kezdőpont (haladási irány a kis elmozdulásoknál alkalmazott jobbról-balra) e_{Ay} , φ_A abszolút elmozdulásai. Legyen adott a rudon az M nyomatékképra, így annak területéből számítható

$$v = \frac{A M}{E J x}$$

relatív elfordulás, amelynek helye a nyomatékképra súlypontja alatt a rud-tengelyen található, előjele azonos a nyomatéki ábra előjével (esetünkben pozitív). A kis elmozdulások elméletével meg tudjuk határozni a B pont e_{By} , φ_B abszolút elmozdulásait.

Rajzoljuk fel a rudlánc eltolódási ábráját. Először rakjuk fel az e_{Ay} eltolódást, majd mérjük fel a φ_A szöveget. A nyomatékképra súlypontja Ay alatt a $+v$ szöveget kell felrakni. Ez az egyenes a B pontba huzott függőleges tengelyből kimetszve az e_{By} abszolút eltolódást és kiadja a φ_B abszolút elfordulást. Az A és B pontban ismertek a rugalmas vonal végértékei ezekhez csatlakozva megrajzolhatjuk a rugalmas vonalat is.

Az abszolút elmozdulások ki is számíthatók. A kis elmozdulások tárgyalásakor leszögeztük: egy pont abszolút mozgása megkapható egy másik pont ismert abszolút mozgásából és a közöttük levő relatív mozgásból. A B pont abszolút elfordulásának kiszámítására a következő - a 3.22 ábrából is leolvasható - elfordulási egyenletet írhatjuk fel:

$$\varphi_B = + \varphi_A + \psi.$$

Az elfordulásokat előjelhelyesen kell összegezni (a haladási irány jobbról balra mutat). A B pont y irányu abszolút eltolódásának kiszámítására az előbbi ugynevezett eltolódási egyenletet fogalmazhatjuk meg:

$$e_{By} = e_{Ay} - \varphi_A \ell - \psi (\ell - z_s)$$

Az eltolódások előjelét szemléletből állapítjuk meg. Az e_{Ay} lefelé mutat, így pozitív. A második és a harmadik tag $+\varphi_A$ és $+\psi$ elfordulásokból keletkezik, amelyek a B pontba elhelyezett '+y' tengelyt lefelé érintik, azaz negatív eltolódást okoznak.

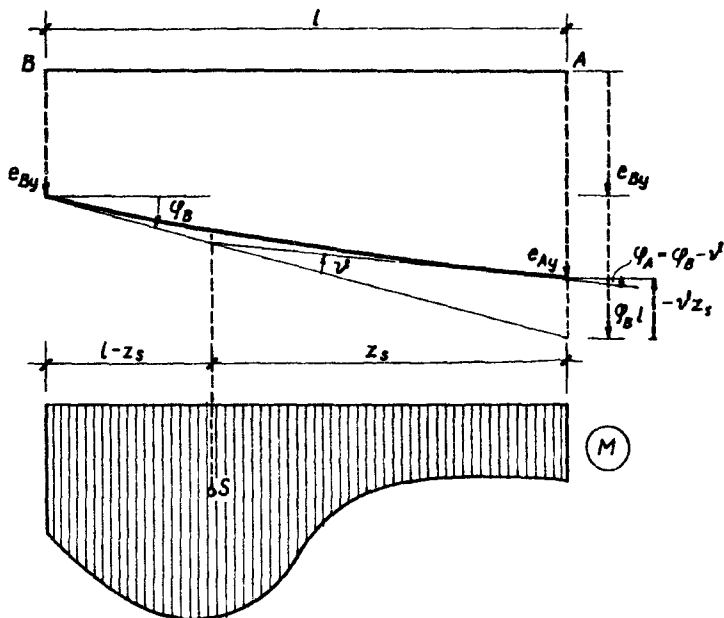
Amennyiben fordított sorrendben haladunk, a bal oldali végpont (B) abszolút elmozdulásait ismerjük és ebből kívánjuk kiszámítani egy jobbra, a haladási iránnyal ellentétesen elhelyezkedő (A) pont abszolút elmozdulásait, akkor a relatív elmozdulások előjelét meg kell fordítani. Most e_{By} , ψ_B és ψ az ismert mennyiségek; φ_A , e_{Ay} abszolút elmozdulások elfordulási és eltolódási egyenletekből meghatározhatók (3.23 ábra):

$$\varphi_A = \varphi_B - \psi.$$

A relatív elfordulások előjele balról jobbra haladásnál a nyomatékra előjelének ellentettje (esetünkben negatív)

$$e_{Ay} = e_{By} + \varphi_B \ell - \psi z_s.$$

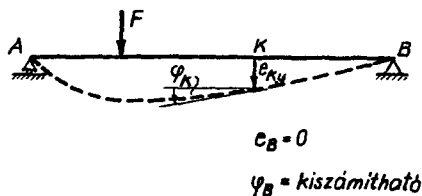
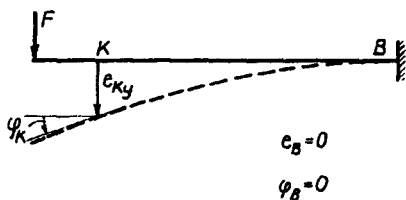
Az elmondottak alapján tehát valamely tartó K keresztmetszetében a φ_K , e_{Ky} abszolút elmozdulások kiszámításához egy olyan pontból indulunk ki, amelynek ismerjük az abszolút elmozdulásait. A kiindulási pont és a K keresztmetszet közötti relatív elfordulás a nyomatékra vonatkozó területre, osztva EJ_x -szel. Az ismert pont abszolút elmozdulásai és az utána levő relatív elfordulás birtokában a K pont abszolút elmozdulásai a fordulási és eltolódási egyenletek segítségével meghatározhatók. A relatív elfordulás előjele jobbról balra haladás esetén megegyezik a nyomatékra előjelével, fordított haladási iránynál a ψ előjelét meg kell fordítani. Az



3.23 ábra

eltolódások előjelének megállapítása szemléletből történik (az elfordulás milyen irányban érinti a kérdéses pontban elhelyezett függőleges +y tengelyt).

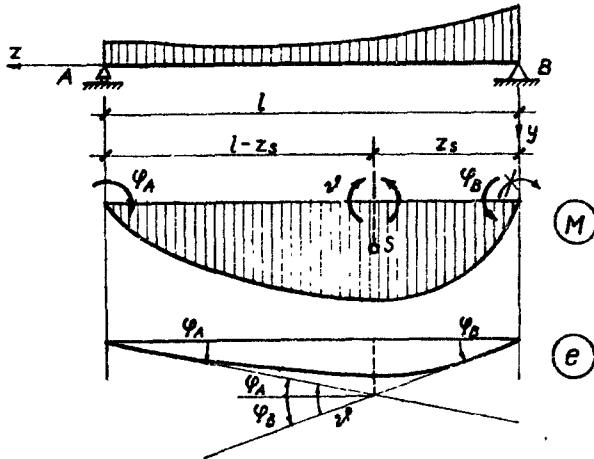
A kiindulási pont megválasztására a 3.24 ábrán két alapesetet mutatunk be. A konzoltartó esetében a B befogási pontot igen előnyösen választhatjuk kiindulási pontnak, mert elfordulása és eltolódása zérus $e_{By} = 0$, $\varphi_B = 0$ (3.24.a ábra). A kéttámaszú tartónál valamelyik támaszpontot vehetjük kiindulópontnak (a 3.24.b ábrán a B támaszt választottuk).



3.24 ábra

A támaszpont függőlegesen el nem tolódik, azonban elfordulhat, ezért ha a támaszpontot kiindulási pontnak akarjuk kijelölni, akkor előzőleg meg kell határoznunk a támaszpont elfordulását.

A kéttámaszu tartó támaszpont elfordulásának meghatározásával teljesen azonos feladatot oldottunk meg a kis elmozdulások elméleténél a 3.1.5 pontban a 3.15 és a 3.16 ábra kapcsán. Elevenítsük fel az ott tanultakat a 3.25 ábrán.



3.25 ábra

A B és az A pont közötti relatív elfordulás:

$$\psi = \frac{A \cdot M}{EJ \cdot x}$$

a nyomatéki ábra területéből számítható. Előjele azonos a nyomatéki ábra előjével, pozitív.

A B pont abszolút elfordulásáról feltételezzük, hogy $+\varphi_B$ ($e_B = 0$).

Ebből kiindulva felírhatjuk az A pont függőleges eltolódását, amelyről tudjuk, hogy nulla:

$$e_{Ay} = -\varphi_B \cdot l - \psi(l - z_s) = 0$$

$$B = -\psi \frac{l - z_s}{l} \quad (\psi).$$

Az eltolódási egyenletben a $+\varphi_B$ és a $+\psi$ is negatív eltolódást okoz az A pontban (az A pontban képzelt $+y'$ tengelyt felfelé érinti).

tlk). A φ_B negatív előjele arra utal, hogy a felvett pozitív irány nem megfelelő: φ_B valójában negatív (a feltételezett irányt a rajzon meg kell fordítani a ténylegesre).

Az A ponti elfordulás φ_A meghatározásakor balról jobbra haladunk a tartón, a relatív elfordulás irányát meg kell fordítani (az ábrán szaggatott vonallal jelölve). Ehhez $e_{By} = 0$ eltolódási egyenletet kell felírunk:

$$e_{By} = + \varphi_A \ell - \psi z_s = 0$$

$$\varphi_A = \psi \frac{z_s}{\ell} \quad (\curvearrowright).$$

Ugyanaz a φ_A elfordulás meghatározható φ_B -ből kiindulva és a közöttük levő ψ ismeretében egyszerű összegzéssel:

$$\varphi_A = \varphi_B + \psi = -\psi \frac{\ell - z_s}{\ell} + \psi = \psi \frac{z_s}{\ell} \quad (\curvearrowright).$$

A nyomatékábra alatt megrajzoltuk a rugalmas vonalat, bejelöltük a szóban forgó szögeket is. A rugalmas vonalat lehajlási ábrának is nevezhetjük, mivel minden ordinátája a fölötte levő keresztmetszet lehajlását mutatja. A lehajlási ábra jele: e.

3.1.2.4 Példák egyenes tengelyű tartók alakváltozásának kiszámítására

Az alábbiakban néhány esetben meghatározzuk az egyenes tengelyű tartók egy-egy jellegzetes elmozdulását, közben megszerkesztjük a rugalmas vonalat is, más szóval a lehajlási ábrát is.

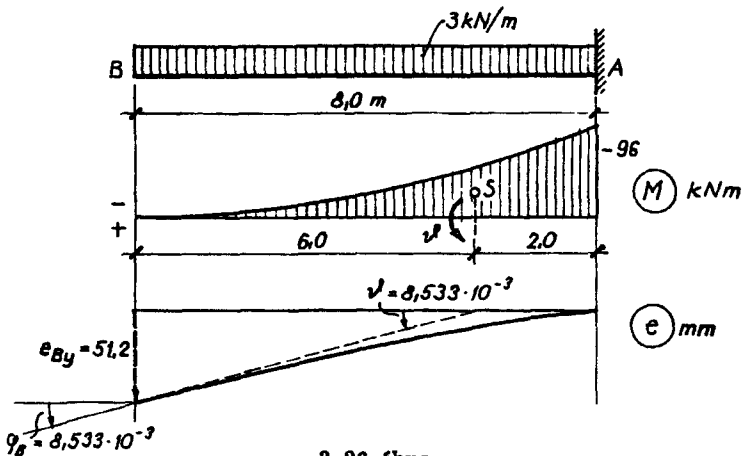
Először oldjuk meg a 3.26 ábrán látható 3 kN/m egyenletesen megoszló teherrel terhelt konzoltartót. Határozzuk meg a B pont vízszintes elmozdulásait.

$$EJ_x = 3 \cdot 10^4 \text{ kN m}^2.$$

Kiindulási pontnak válasszuk az A befogást, ahol tudjuk, hogy $e_A = 0$, $\varphi_A = 0$.

$$(e_B, \varphi_B) \doteq (e_A, \varphi_A, \psi).$$

A tartón levő relatív elfordulások eredője, a nyomatéki ábra területével arányos



3.26 ábra

$$\varphi = - \frac{A M}{E J_x} = - \frac{96,8}{3,3 \cdot 10^4} = - 8,533 \cdot 10^{-3},$$

előjele azonos - jobbról balra haladás esetén a nyomatékra előjelével, azaz negatív. Helye a nyomatékra súlypontja alatt a tartó tengelyén: a befogástól 2 m-re.

Az ismert A pont $\varphi_A = 0$ elfordulásából kiindulva, és figyelembe véve a közöttük levő relatív elfordulásokat, a B végpont abszolút elfordulása:

$$\varphi_B = \varphi_A - \varphi = 0 - 8,533 \cdot 10^{-3} = - 8,533 \cdot 10^{-3} \text{ (}\curvearrowright\text{)}.$$

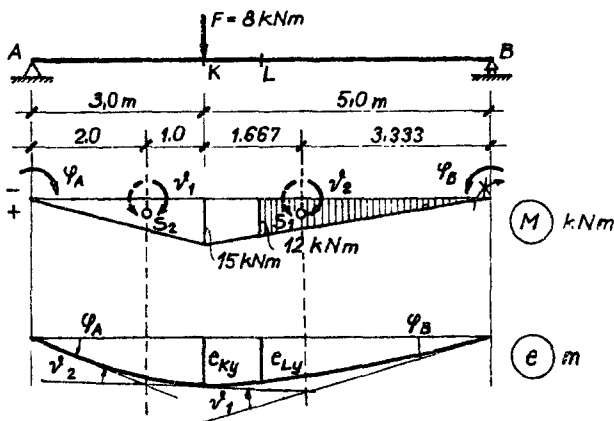
Az eltolódás is az A pontból kiindulva határozható meg:

$$e_{By} = + 8,533 \cdot 10^{-3} \cdot 6,0 = + 51,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = + 51,2 \text{ mm (}\downarrow\text{)}.$$

Az elfordulás előjele szemlélet alapján dönthető el, a negatív előfordulás a B pontot függőlegesen lefelé tolja el, így az eltolódás pozitív.

Következő feladatunkban a kéttámaszu tartót a K keresztmetszetben terheli az $F = 8 \text{ kN}$ koncentrált erő (3.27 ábra). $EJ_x = 2,10^4 \text{ kN m}^2$.

Határozzuk meg a támaszponti elfordulásokat φ_A , φ_B -t, valamint a K és a középső L keresztmetszet függőleges elmozdulásait.



3.27 ábra

Kiindulási pontnak az A vagy a B támasz tekinthető, miután megismertük a támaszponti elfordulását. Elégendő csak az egyiket meghatározni, de most gyakorlásképpen mindkettőt felírjuk.

Első lépésként rajzoljuk meg a nyomatékkábrát. A relatív elfordulást két részeredőjével célszerű felírni. A K keresztmetszetenél két részre osztott nyomatékkábrából meghatározott relatív elfordulások nagysága és helye könnyen meghatározható, hiszen ismertek a résznyomatékkábra területek és azok súlypontja.

$$\varphi_1 = + \frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 10^4} = + 2,25 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright)$$

$$\varphi_2 = + \frac{15 \cdot 5}{2 \cdot 10^4} = + 3,75 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

A relatív elfordulások arányosak a nyomatékkábra területekkel, előjelük - a hajadási irány betartása esetén (jobbról balra) - megegyezik a nyomatékkábra előjével.

A φ_B meghatározása az $e_{Ay} = 0$ eltolódási egyenlet segítségével lehetséges (φ_B -ről feltesszük, hogy pozitív):

$$e_{Ay} = - \varphi_B \cdot 8 - 3,75 \cdot 10^{-3} \cdot 4,667 - 2,25 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 0$$

$$\varphi_B = - 2,75 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowleft).$$

A feltételezett pozitív irány helyett negatív adódott, fordítsuk meg φ_B berajzolt irányát a tengelyre, hogy ne a rossz irányban mutató φ_B -vel számoljunk tovább.

A φ_A meghatározására e_{By} -ra írhatunk fel hasonló eltolódási egyenletet. Ügyeljünk arra, hogy most balról jobbra haladnak, így a ψ -ák előjelét meg kell fordítani. (A szaggatott nyilak érvényesek.)

$$e_{By} = + \varphi_A \cdot 8 - 2,25 \cdot 10^{-3} \cdot 6 - 3,75 \cdot 10^{-3} \cdot 3,333 = 0$$

$$\varphi_A = + 3,25 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

A fenti érték ellenőrizhető az elfordulási egyenletből a B pontból kiindulva:

$$\varphi_A = - \varphi_B + \psi_1 + \psi_2 = (-2,75 + 2,25 + 3,75) \cdot 10^{-3} =$$

$$= + 3,25 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

A középső L keresztmetszet abszolút elmozdulásait a B végpont abszolút elmozdulásai és a közöttük levő relatív elmozdulások ismeretében lehet meghatározni.

$$(e_L, \varphi_L) = (e_B, \varphi_B, \psi_{BL}).$$

A B és L pont közötti relatív elfordulás nagysága az ábrán bejelölt nyomatéki ábra területéből:

$$\psi_{BL} = + \frac{12 \cdot 4}{2 \cdot 10^{-4}} = + 2,4 \cdot 10^{-3}.$$

Helye a B támasztól $4 \cdot \frac{2}{3} = 2,667$ m-re van.

Az L pont abszolút eltolódása:

$$e_{Ly} = + 2,75 \cdot 10^{-3} \cdot 4 - 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,333 = + 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (\uparrow).$$

Az első tag előjele pozitív: $-\varphi_B$ az L pontot lefelé tolná el.

A második tag negatív szám: $+\psi_{BL}$ az L ponton negatív eltolódást okoz.

Az L pont abszolút elfordulása:

$$\varphi_L = -\varphi_B + \psi_{BL} = (-2,75 + 2,4) \cdot 10^{-3} = -0,35 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

Hasonlóan számíthatók a K keresztmetszet abszolút elmozdulásai a B pontból kiindulva, és figyelembe véve, hogy B és K között a relatív elfordulások eredője ψ_2 .

$$(e_K, \varphi_K) \doteq (e_B, \varphi_B, \psi_2).$$

$$e_{Ky} = +2,75 \cdot 10^{-3} \cdot 5 - 3,75 \cdot 10^{-3} \cdot 1,667 =$$

$$= +7,50 \cdot 10^{-3} \text{ m } (+)$$

$$\varphi_K = (-2,75 + 3,75) \cdot 10^{-3} = +1 \cdot 10^{-3} \text{ (}\curvearrowright\text{)}.$$

A K pontbelli e_{Ky} és φ_K az A végpontból elindulva is felírható. Nem szabad megfeledkezni ekkor arról, hogy balról jobbra haladásnál a pozitív haladási irányval ellentétesen indulunk el. Ilyenkor a relatív elmozdulások előjelét meg kell fordítani (az abszolút elfordulásokat nem). Esetünkben az A és a K pont között ψ_1 relatív elfordulás negatív előjeli lesz (az ábrán szaggatott nyíl jelzi).

$$e_{Ky} = +3,25 \cdot 10^{-3} \cdot 3 - 2,25 \cdot 10^{-3} \cdot 1,0 = +7,50 \cdot 10^{-3} \text{ m } (+)$$

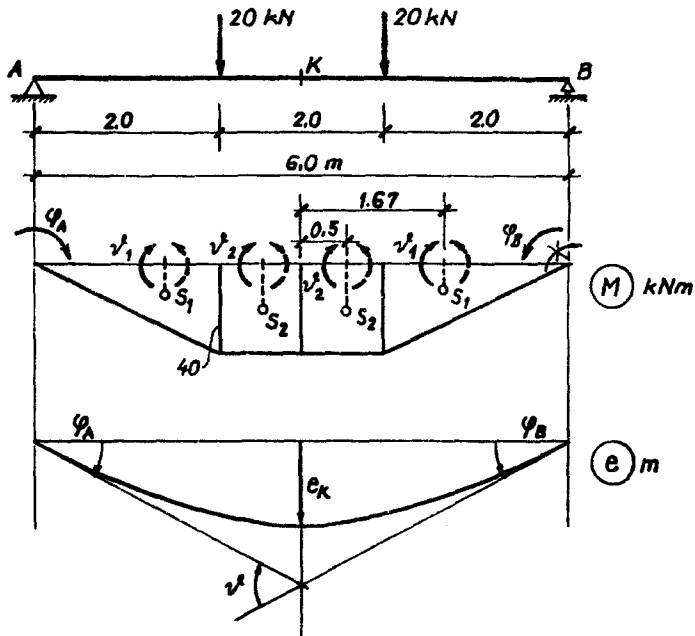
$$\varphi_K = (+3,25 - 2,25) \cdot 10^{-3} = +1 \cdot 10^{-3} \text{ (}\curvearrowright\text{)}.$$

A 3.28 ábrán szimmetrikus elrendezésű és terhelésti kéttámaszu tartó látható. Adottak a rugalmassági modulus $E = 210\,000 \text{ MN/m}^2$, a tartó keresztmetszetének inercianyomatéka $I = 12\,000 \text{ cm}^4 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$. Számítsuk ki a φ_A és φ_B véglap elfordulásokat és a középső keresztmetszet e_K lehajlását.

A hajlítási merevség:

$$EJ = 210\,000 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} = 25,2 \text{ MN m}^2 = 2,52 \cdot 10^4 \text{ kN m}^2.$$

A nyomatéki ábra területét nagyított ψ_1 -nak nevezhetjük. A számítást végig nagyított értékkel is elvégezhetjük, s csak a kérdéses elmozdulásokat kell megadni, EJ-vel osztott tényleges nagysággal. A nagyított elmozdulásokat - megkülönböztetésként - zárójelbe tesszük.



3.28 ábra

A nagyított relatív elfordulás:

$$(\psi) = + 40 \frac{6+2}{2} = +160 \text{ kN m}^2 \quad (\curvearrowright)$$

helye a szimmetria miatt középen van.

A támaszponti elfordulást eltolódási egyenletből számíthatjuk ki. A Q_B -ről feltesszük, hogy pozitív. Felírjuk az $e_{Ay} = 0$ eltolódást:

$$(e_{Ay}) = - 6 (Q_B) - 3.160 = 0$$

$$(Q_B) = - 80 \text{ kN m}^2 \quad (\curvearrowright)$$

$$Q_B = - \frac{80}{2,52 \cdot 10^4} = - 3,175 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

A másik támaszponti elfordulás, Q_A , elfordulási egyenletből adódik:

$$(Q_A) = -80 + 160 = + 80 \text{ kNm}^2 \quad (\curvearrowright)$$

$$\varphi_A = \frac{80}{2,52 \cdot 10^4} = + 3,175 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright).$$

A középső keresztmetszet lehajlása a B pontból kiindulva figyelembe véve a közöttük levő relatív elfordulásokat számítható ki.

$$(e_K, \varphi_K) \doteq (e_B, \varphi_B, \psi_1, \psi_2).$$

A B és K közötti relatív elfordulásokat feladatunkban célszerű két részeredővel jellemezni: egy téglalapra és egy háromszögre bontva a nyomatékábrát. A fenti idomok súlypontja, így a részeredők helye jól ismert: a 3.28 ábrán bejelöltük.

$$(\psi_1) = + \frac{2,40}{2} = + 40 \text{ kN m}^2$$

$$(\psi_2) = + 1,40 = + 40 \text{ kN m}^2.$$

A nagyított lehajlás a B-ből elindulva:

$$(e_{Ky}) = +3,80 - 40 \cdot 1,67 - 40 \cdot 0,5 = +153,3 \text{ kN m}^3$$

$$e_{Ky} = + \frac{153,3}{2,52 \cdot 10^4} = + 6,08 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (\downarrow).$$

Ugyanez balról jobbra haladva az A pontból is felírható. Ne feledjünk (ψ_1) és (ψ_2) előjele negatívvá változik.

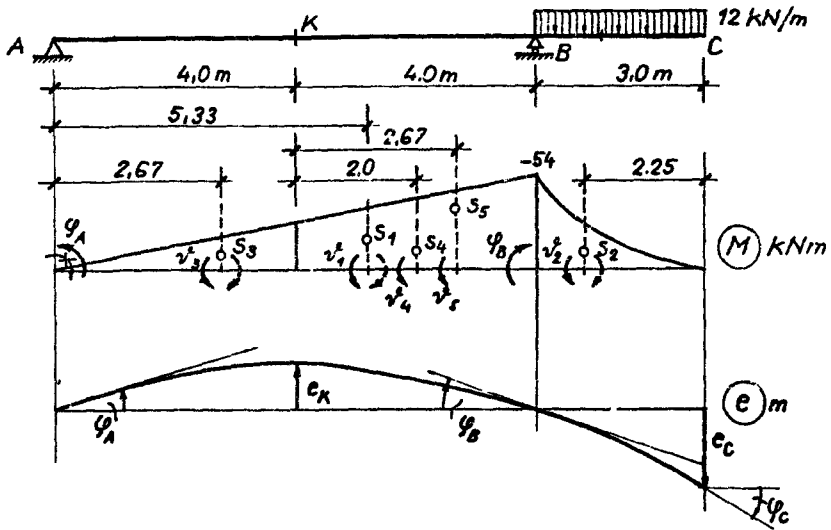
$$(e_{Ky}) = +3,80 - 40 \cdot 1,67 - 40 \cdot 0,5 = + 153,3 \text{ kN m}^3.$$

Csak az érdekesség kedvéért említettük meg, hogy a szimmetria miatt $\varphi_K = 0$, ami számítással is belátható.

Vizsgáljuk meg a 3.29 ábrán látható konzolos kéttámaszu tartót és számítsuk ki a C konzolvég, valamint a K középső keresztmetszet abszolút elmozdulásait. $EJ = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kN m}^2$.

Először rajzoljuk meg a nyomatékábrát, ennek B támasz fölötti jellemző ordinátája a konzolon levő teherből számítható:

$$M_B = - \frac{12,3^2}{2} = - 54 \text{ kN m}$$



3.29 ábra

A támaszponti elfordulások kiszámításához szükség van az AB szakaszon levő relatív elfordulások eredőjére (nagyított elfordulásokkal fogunk számolni):

$$(\psi_1) = - \frac{54 \cdot 8}{2} = - 216 \text{ kN m}^2,$$

amelynek helye az A támasztól $\frac{16}{3} = 5,33$ m-re.

A φ_B meghatározása az $e_{Ay} = 0$ egyenletből lehetséges, φ_B -t tételezzük fel pozitívnak:

$$(e_{Ay}) = - (\varphi_B) \cdot 8 + 216 \cdot 5,33 = 0$$

$$(\varphi_B) = + 144 \text{ kN m}^2.$$

Hasonlóképpen φ_A $e_{By} = 0$ egyenletből kapható meg:

$$(e_{By}) = + (\varphi_A) \cdot 8 + 216 \cdot 2,66 = 0$$

$$(\varphi_A) = - 72 \text{ kN m}^2.$$

A felső egyenletben φ_A -t pozitívnak tételeztük föl. A $+ \varphi_A$ a B ponton pozitív eltolódást hozna létre. A (ψ_1) előjele pozitív (balról jobbra haladás esetén a szaggatott megfordított irány is érvényes), amely a B pontot szintén lefelé tolná el. Megjegyezzük, hogy az abszolút elfordulás előjelét fordított haladási irány esetén sem kell megváltoztatni.

Ezek után számítsuk ki a C pont abszolút elmozdulásait. A kiindulási pont legyen a B támasz (ellentétes haladási irány), a közöttük levő relatív elfordulás:

$$(\psi_2) = \frac{-54.3}{3} = -54 \text{ kN m}^2.$$

$$(e_C, \varphi_C) \doteq (e_B, \varphi_B, \psi_2).$$

A C pont abszolút elmozdulásai:

$$(\varphi_C) = +144 + 54 = +198 \text{ kN m}^2$$

$$\varphi_C = + \frac{198}{2,5 \cdot 10^4} = +7,92 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright)$$

$$(e_C) = +144.3 + 54.2,25 = +553,5 \text{ kN m}^3$$

$$e_C = + \frac{553,5}{2,5 \cdot 10^4} = +22,14 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (\downarrow).$$

Végül számítsuk ki a K pont abszolút elmozdulásait. Kiindulásul az A pontot választjuk (ellentétes haladási irány). Szükségünk van a relatív elfordulás eredőjére az \overline{AK} szakaszon:

$$(\psi_3) = - \frac{27.4}{2} = -54 \text{ kN m}^2$$

$$(e_K, \varphi_K) \doteq (e_A, \varphi_A, \psi_3).$$

A K pont abszolút elmozdulásai:

$$(\varphi_K) = -72 + 54 = -18 \text{ kN m}^2$$

$$\varphi_K = - \frac{18}{2,5 \cdot 10^4} = -0,72 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowleft)$$

$$(e_K) = -72.4 + 54.1,33 = -216 \text{ kN m}^3$$

$$e_K = - \frac{216}{2,5 \cdot 10^4} = - 8,64 \cdot 10^{-3} \text{ m } (\uparrow).$$

Ezeket az elmozdulásokat kiszámíthatjuk a B pontból kiindulva is. A B és K pont közötti relatív elfordulások eredője egy trapéz alakú nyomatékábra súlypontja alatt lesz. Ehelyett célszerű egy téglalap és egy háromszög alakú nyomatékábra területtel számolni.

$$(\nu_4) = - 27,4 = - 108 \text{ kN m}^2$$

$$(\nu_5) = \frac{- 27,4}{2} = - 54 \text{ kN m}^2$$

$$(e_K, \varphi_K) = (e_B, \varphi_B, \nu_4, \nu_5).$$

$$(\varphi_K) = + 144 - 108 - 54 = - 18 \text{ kN m}^2$$

$$\varphi_K = - \frac{18}{2,5 \cdot 10^4} = - 0,72 \cdot 10^{-3} \text{ (}\downarrow\text{)}.$$

$$(e_K) = - 144,4 + 108,2 + 54,2,67 = - 216 \text{ kN m}^3$$

$$e_K = \frac{- 216}{2,5 \cdot 10^{-4}} = - 8,64 \cdot 10^{-3} \text{ m } (\uparrow).$$

A B pontból kiindulva két relatív elfordulást kellett figyelembe venni. Az A pont felől pedig a relatív elfordulást - a balról jobbra haladás miatt - meg kellett fordítani. Mindkét módszer egyaránt választható, attól függően, melyik a kellemesebb az olvasónak.

3.1.2.5 Példák törtengelyű tartók alakváltozásának számítására

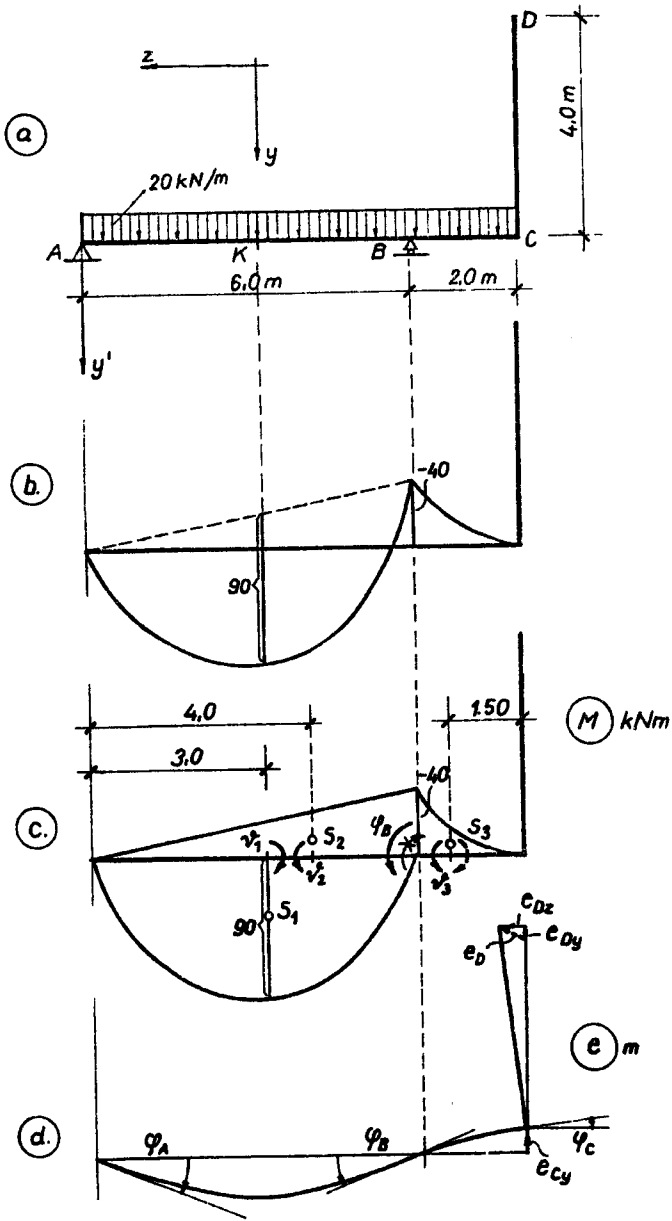
Vegyük a 3.30. ábrán megadott kéttámaszu törtvonalu tartót és számítsuk ki C és D pontjának abszolút elmozdulásait. Adottak:

$$E = 210\,000 \text{ MN/m}^2, I = 3760 \text{ cm}^4 = 0,376 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Ebből a hajlítási merevség:

$$EJ = 210\,000 \cdot 0,376 \cdot 10^{-4} = 7,9 \text{ MN m}^2 = 7,9 \cdot 10^3 \text{ KN m}^2.$$

A C és D pont abszolút eltolódásának számításakor célszerű a B pontból kiindulva balról jobbra haladni (haladási irányral ellentétesen).



3.30 ábra

Ehhez ismerünk kell a B pont abszolút elmozdulásait, amelyet a relatív elfordulások ismeretében határozhatunk meg.

Először megrajzoljuk a nyomatékábrát (3.30.b ábra). Az ábrát megvizsgálva látjuk, hogy az AB szakaszon egyszerűen nem tudjuk meghatározni a relatív elfordulások eredőjét és helyét sem. Gondoljuk át a nyomatékára szerkesztésének menetét: a konzolon levő teher okozta nyomatéki vonalra függesztjük a parabolát. Rajzoljuk most fel a nyomatékábrát két részből: csak a konzolon és csak az AB szakaszon levő teher esetén (3.30.c ábra).

Ezek után már könnyen számíthatjuk a relatív elfordulások nagyságát, helyét (a 3.30 ábrán bejelöltük) és előjelét, amely a nyomatékára előjével azonos:

$$(\psi_1) = \frac{90 \cdot 6 \cdot 2}{3} = + 360 \text{ kNm}^2$$

$$(\psi_2) = - \frac{40 \cdot 6}{2} = - 120 \text{ kNm}^2$$

$$(\psi_3) = - \frac{40 \cdot 2}{3} \cdot \frac{1}{4} = - 26,67 \text{ kNm}^2.$$

A B pont abszolút elfordulását az A pont függőleges eltolódásának zérus voltából számíthatjuk ki. Tekintsük pozitívnak az ismeretlen φ_B -t, tudjuk, hogy $e_{Ay} = 0$:

$$(e_{Ay}) = - 6 (\varphi_B) - 360 \cdot 3 + 120 \cdot 4 = 0$$

$$(\varphi_B) = - 100 \text{ kNm}^2 \quad (\checkmark)$$

A fenti egyenletben a $+(\varphi_B)$ okozta eltolódás negatív, hiszen az A pontban képzelt függőleges $+y'$ tengelyt felfelé érinti. Hasonló megfontolással a $+(\psi_1)$ okozta eltolódás szintén negatív, míg a $-(\psi_2)$ hatása pozitív, mivel a $+y'$ tengelyt lefelé surolja.

A C pont elmozdulásait a B ponttól kiindulva a közöttük levő relatív elmozdulás, (ψ_3) figyelembevételével számítjuk ki (ellentétes haladási irány; ψ_3 előjelére az ábrán szaggatott nyíl érvényes).

$$(e_C, \varphi_C) = (e_B, \varphi_B, \psi_3).$$

$$(\varphi_C) = - 100 + 26,67 = - 73,33 \text{ kNm}^2$$

$$(e_{Cy}) = - 100 \cdot 2 + 26,67 \cdot 1,50 = - 160 \text{ kNm}^3.$$

A D pont elmozdulásait is a B pontból kiindulva határozzuk meg:

$$(e_D, \varphi_D) \doteq (e_B, \varphi_B, \psi_3).$$

Most a D ponton nemcsak függőleges, hanem vízszintes eltolódás is keletkezik

$$(\varphi_D) = -100 + 26,67 = -73,33 \text{ kNm m}^2 = (\varphi_C)$$

$$(e_{Dy}) = -100 \cdot 2 + 26,67 \cdot 1,50 = -160 \text{ kNm}^3 = (e_{Cy})$$

$$(e_{Dz}) = +100 \cdot 4 - 26,67 \cdot 4 = +293,3 \text{ kNm}^3.$$

A tényleges elmozdulások:

$$\varphi_C = \frac{(\varphi_C)}{EJ} = \frac{-73,33}{7,9 \cdot 10^3} = -9,282 \cdot 10^{-2} \text{ (}\curvearrowleft\text{)}$$

$$e_{Cy} = \frac{(e_{Cy})}{EJ} = -\frac{160}{7,9 \cdot 10^3} = -20,25 \cdot 10^{-3} \text{ m (}\downarrow\text{)}$$

$$\varphi_D = \frac{-73,33}{7,9 \cdot 10^3} = -9,282 \cdot 10^{-2} \text{ (}\curvearrowleft\text{)}$$

$$e_{Dy} = -\frac{160}{7,9 \cdot 10^3} = -20,25 \cdot 10^{-3} \text{ m (}\downarrow\text{)}$$

$$e_{Dz} = \frac{+293,3}{7,9 \cdot 10^3} = +37,13 \cdot 10^{-3} \text{ m (}\leftarrow\text{)}.$$

Az eddig tanultak alapján az olvasó határozza meg a K keresztmetszet abszolút mozgásait. Kiindulhat a B pontból (haladási értelemmel megfelelően), ekkor a relatív elfordulásokat három részeredőként célszerű felogni (parabola, téglalap, háromszög). Az A pont felől is megoldhatja a feladatot: ehhez meg kell határozni a φ_A -t, majd balról jobbra haladva az e_K -t és φ_K -t. A haladási iránnyal szemben menve a ψ -ák előjelét meg kell fordítani.

Rajzoljuk meg a 3.30.d ábrán a rugalmas vonalat. A φ_A , φ_B , φ_C , φ_D , e_C , e_D ismeretében a rugalmas vonal alakhelyesen felvázolható.

Végezettől oldjuk meg a 3.31. a ábrán adott kéttámaszu kerettartót. Legyenek adottak $E=210\,000\text{ MN/m}^2$, $I = 4500\text{ cm}^4 = 0,45 \cdot 10^{-4}\text{ m}^4$, így $EJ=210\,000 \cdot 0,45 \cdot 10^{-4} = 9,45\text{ NMm}^2 = 9450\text{ kNm}^2$. Számítsuk ki a középső K keresztmetszet eltolódásvetületét. A tartó és a teher is szimmetrikus, ezért a nyomatéki ábra és a rugalmas vonal alakja is szimmetrikus lesz, azaz $\varphi_K = 0$.

A külső vízszintes erők egyensúlyban vannak, így vízszintes reakció nem lép fel. A reakciók függőlegesek $A = B = 90\text{ kN}$. A C és a D sarokpontokban a nyomaték a vízszintes erőből számítható:

$$M_C = M_D = -20,2 = -40\text{ kNm}.$$

A gerenda végpontjaiban is ennyi a nyomaték, e pontokat összekötő egyenestől kell lemérni a

$$\frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{30 \cdot 6^2}{8} = 135\text{ kNm}$$

belógású parabolát (3.31.b ábra).

A relatív elfordulások meghatározásához két részletben kell felrajzolniuk a nyomatékábrát: külön a vízszintes erőkre és külön az egyenletesen megoszló teherre (3.31.c ábra). A nagyított relatív elfordulások előjeles nagysága (előjelük azonos a nyomatékábra előjével):

$$(\psi_1) = -\frac{40 \cdot 2}{2} = -40\text{ kNm}^2$$

$$(\psi_2) = -40 \cdot 3 = -120\text{ kNm}^2$$

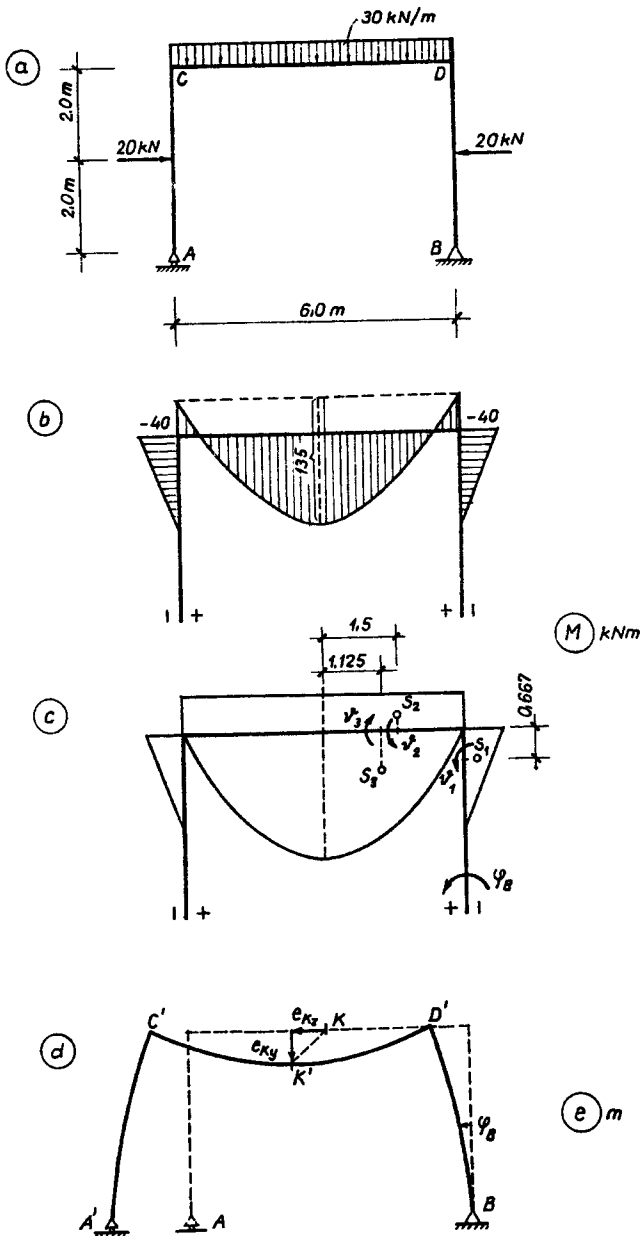
$$(\psi_3) = +\frac{135 \cdot 3 \cdot 2}{3} = +270\text{ kNm}^2.$$

Ezeknek a relatív elfordulásoknak az elforduláspontja a tartó tengelyén van a nyomatékábra súlypontja alatt (3.31.c ábrán bejelöltük).

A K pont elmozdulásait a B pontból kiindulva határozzuk meg:

$$(e_K, \varphi_K) = (e_B, \varphi_B, \psi_1, \psi_2, \psi_3).$$

Az elfordulási egyenlet:



3.31 ábra

$$\varphi_K = \varphi_B + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3.$$

A szimmetria miatt tudjuk, hogy $\varphi_K = 0$, ezt felhasználva:

$$0 = (\varphi_B) - 40 - 120 + 270$$

$$(\varphi_B) = -110 \text{ kNm}^2.$$

Ha nem állna fenn a szimmetria, akkor az $e_{Ay}=0$ eltolódási egyenletből lehetne a φ_B elfordulást meghatározni.

A függőleges és vízszintes eltolódási egyenletből e_K két komponense kiszámítható:

$$(e_{Ky}) = 110.3 + 40.3 + 120.1,5 - 270.1,125 = +326,25 \text{ kNm}^3$$

$$(e_{Kz}) = +110.4 + 40.0,667 = +466,67 \text{ kNm}^3.$$

A tényleges elmozdulások:

$$\varphi_B = \frac{(\varphi_B)}{EJ} = -\frac{110}{9450} = -0,0116 \text{ (r)}.$$

$$e_{Ky} = \frac{(e_{Ky})}{EJ} = +\frac{326,25}{9450} = +3,45 \cdot 10^{-2} \text{ m (↑)}$$

$$e_{Kz} = \frac{(e_{Kz})}{EJ} = +\frac{466,67}{9450} = +4,94 \cdot 10^{-2} \text{ m (←)}.$$

A rugalmas vonal megrajzolásához tudnunk kell, hogy a B pont helyben marad, a C és a D pont vízszintesen tolódik el, és pedig éppen annyit, mint a K pont. Az A pont eltolódása pedig kétszerese az előbbinek, amit az olvasó maga is ellenőrizhet számítással.

3.2 A tartók alakváltozásának meghatározása munkatételek segítségével

Ebben a fejezetben ismertetjük a szilárdságtan munkatételeit, majd megmutatjuk, hogyan használhatjuk fel ezeket a tartók alakváltozásának számítására.

3.2.1 A munkatételek

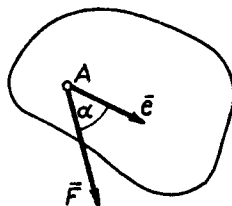
3.2.1.1 Az erő és az erópár munkája

A szilárd test A pontjában működjék az F erő, és hasson a testre az M nyomaték is. A test tetszőleges mozgást végezhet, amelynek során eltolódás és elfordulás is bekövetkezhet. A merev test elmozdulása legyen olyan kicsiny, mint amilyenekkel a kis elmozdulások elméletében foglalkoztunk.

Legyen az F erő A támadáspontjának eltolódása \vec{e} (3.32 ábra).

Az erő munkáját a

$$W = \vec{F} \cdot \vec{e}$$



3.32 ábra

skalárszorozattal értelmezzük. Ebből megállapíthatjuk, hogy az erő munkájának képletében a φ elfordulás nem szerepel. Jelöljük α -val az \vec{F} és az \vec{e} által bezárt szöveget, akkor a skalárszorozatok kiszámításmódjának megfelelően a

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{e}| \cos \alpha$$

Ebből azonnal leolvashatjuk, hogy ha $\alpha = 0$, akkor $W = + |\vec{F}| \cdot |\vec{e}|$ (3.33.a ábra). Ha $\alpha = \pi$, akkor $W = - |\vec{F}| \cdot |\vec{e}|$ (3.33.b ábra). Végül $\alpha = \pi/2$ esetben $W = 0$ (3.33.c ábra).

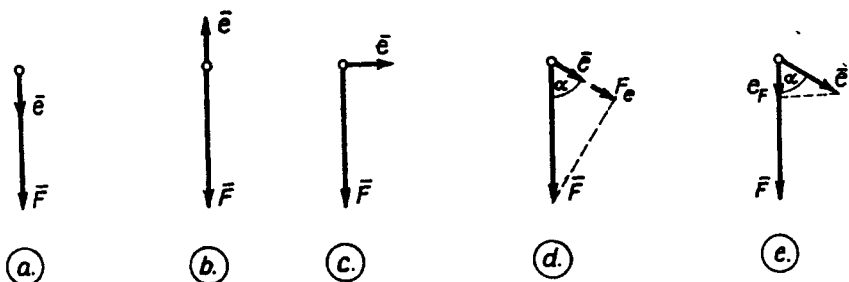
Nevezzük az $F \cos \alpha$ szorzatot F_e -nek. Így

$$W = F_e \cdot |\vec{e}|$$

Az erő munkáját tehát megkapjuk, ha a támadáspont eltolódásának nagyságát szorozzuk az erő eltolódás irányu merőleges vetületével (3.33.d ábra).

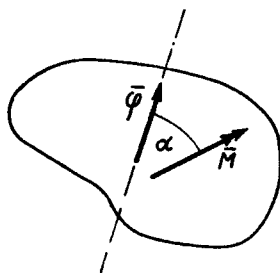
Alkalmazzuk az $e_F = e \cos \alpha$ jelölést, akkor

$$W = |\vec{F}| \cdot e_F$$



3.33 ábra

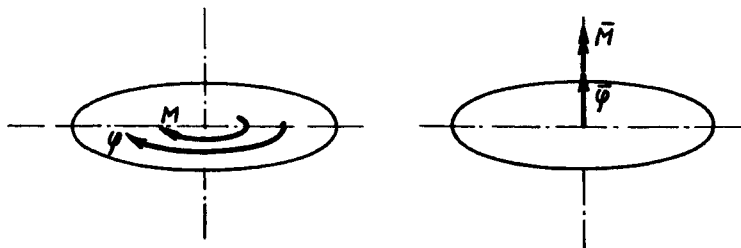
Az erő munkáját úgy is megkaphatjuk, hogy az erő nagyságát szorozzuk a támadáspont eltolódásának erőirányu merőleges vetületével (3.33.e ábra). A 3.34 ábrán a merev test a bejelölt tengely körül φ szöggel elfordul. Ez a forgástengelyben fölvevett $\bar{\varphi}$ elfordulásvektorral adható meg. A szilárd testre működjék az \bar{M} erőpár. Az erőpár munkáját a $\bar{W} = \bar{M} \cdot \bar{\varphi}$ skalárszorzattal értelmezzük. Ebből láthatjuk, hogy az erőpár munkájának kiszámításakor az eltolódásnak nincs szerepe. Jelöljük α -val az M és a φ közötti szöveget, akkor a skalárszorzat kiszámításmódjának megfelelően:



3.34 ábra

$$W = |M| \cdot |\varphi| \cos \alpha.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $\alpha = 0$ $W = + |M| |\varphi|$ (3.35 ábra), ha pedig $\alpha = \pi$, akkor $W = - |M| |\varphi|$, végül ha $\alpha = \pi/2$, akkor $W = 0$.



3.35 ábra

Vezessük be a következő jelölést: $|M| \cos \alpha = M_\varphi$. Ekkor

$$W = M_\varphi \cdot |\varphi|.$$

Az erőpár munkáját megkapjuk, ha a támadáspont elfordulásának nagyságát szorozzuk az erőpár vektorának az elfordulásvektorra eső merőleges vetületével.

Ha pedig $|\varphi| \cos \alpha = \varphi_M$, akkor

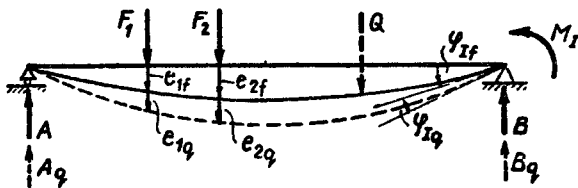
$$W = |M| \cdot \varphi_M.$$

Az erőpár munkáját úgy kapjuk meg, hogy az erőpár nyomatékának nagyságát szorozzuk a támadáspont elfordulásának az erőpár vektorára eső merőleges vetületével.

3.2.1.2 A külső erőrendszer idegen munkája

A külső erőrendszer idegen munkájának fogalmát egy egyszerű kéttámaszú tartón illusztráljuk, (3.36 ábra), a megállapítások azonban bármilyen tartóra érvényesek. Vizsgálataink során lengésekkel nem foglalkozunk, feltételezzük, hogy az alakváltozások lassan és fokozatosan alakulnak ki. Képzeljük el, hogy a tartóra az (F) erőrendszer működik. Jelen példánkban

$$(F) = (F_1, F_2, M_1, A, B) = 0$$



3.36 ábra

egyensúlyi erőrendszerről van szó. Általában az F_i ($i=1, 2, \dots$) erők és az M_j ($j = I, II \dots$) erőpárok együttesen alkotják az (F) külső erőrendszert. A külső erőrendszer a tartóra ható, egyensúlyban levő összes aktív és passzív (reakció) dinámot jelenti.

Az (F) erőrendszer bizonyos alakváltozásokat hoz létre a tartón. Az ábrán azokat az alakváltozásokat jelöltük be, amelyekkel az (F) erőrendszer egyes tagjai munkát végeznek. Ezek az elmozdulások

$$e_{1f}, e_{2f}, \varphi_{1f}$$

Az első index az elmozdulás helyét jelöli, a második az okát (vagyis jelenleg az (F) erőrendszerre utal).

Most tegyük fel, hogy az (F) erőrendszert rajta hagyjuk a tartón, de ráhelyezünk egy újabb erőrendszert, mely az előbbitől független és ugyancsak egyensúlyban van. Ez a másik erőrendszer álljon most a Q aktív erőből és az általa ébresztett reakciókból:

$$(Q) = (Q, A_q, B_q) = 0.$$

Ez az újabban felvett erőrendszer további alakváltozásokat okoz, melynek az előzőkkel azonos helyen fellépő elemei:

$$e_{1q}, e_{2q}, \varphi_{1q}$$

Az első index most is a helyet, a második az okot jelöli.

Ezután már megfogalmazhatjuk a külső erőrendszer idegen munkáját: a tartóra ható összes külső dinám munkájának összege, amely valamilyen más (idegen) okból keletkező elmozdulás mentén jön létre.
A külső idegen munka általános képlete:

$$W_k^{fq} = \sum_i F_i e_{iq} + \sum_j M_j \varphi_{jq}$$

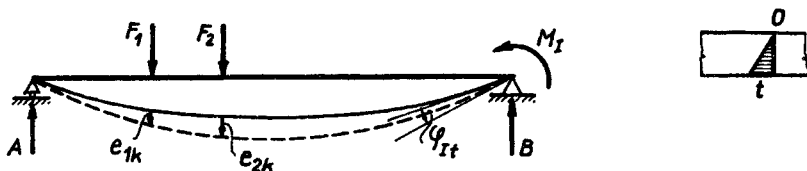
A k index a külső rövidítése. A felső fq indexek jelentése: az (F) erőrendszer végzi a munkát a (Q) erőrendszer által okozott elmozdulások hatására. Ez tehát idegen munka, mert más erőrendszer végzi a munkát (F), és más erőrendszer okozza az alakváltozást (Q).

A 3.36 ábra példájában az (F) erőrendszer külső idegen munkája:

$$W_k^{fq} = F_1 e_{1q} + F_2 e_{2q} + M_I \varphi_{1q}$$

Az A és B erők nem végeznek munkát, mert támadáspontjuk nem tolódik el.

Az alakváltozást, illetőleg az elmozdulásokat nemcsak egy másik erőrendszer okozhatja, azok más okból is létrejöhetnek, például támadáspont-stílyedésből, vagy hőmérséklet-változásból is. A 3.37 ábrán egyenlőtlen hőmérséklet-változásból keletkező alakváltozást rajzoltunk meg. A tartó alsó szélén legyen a hőmérséklet-emelkedés t, amely fölfelé lineárisan nullára csökken. A hőmérséklet-változás minden keresztmetszetben ugyanilyen. Ilyen esetben a tartó meggörbül és alulról nézve domboru lesz. Ekkor a határozott tartón, amilyen a 3.37 ábra példája is, nem keletkezik



3.37 ábra

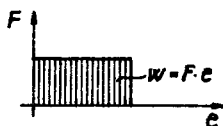
igénybevétel, hiszen az alakváltozások szabadon kialakulhatnak, a görgős támasz el tud mozdulni. Ezzel szemben határozatlan tartón egyenletes vagy egyenlőtlen hőmérsékletváltozásból, támadáspontsúlyedésből igénybevételek jönnek létre, mivel az ilyen szerkezetekben az alakváltozások nem alakulhatnak ki szabadon.

A tartó tehát deformálódik, az (F) dinámrendszer tagjainak támadáspontjában a hőmérséklet-változásból

$$e_{1t} \cdot e_{2t} \cdot \varphi_{It}$$

elmozdulások jönnek létre. Ezekkel az (F) dinámrendszer az alábbi külső idegen munkát végzi:

$$W_k^{ft} = \sum_i F_i e_{it} + \sum_j M_j \varphi_{jt}$$



3.38 ábra

Még egy körülményre szeretnénk rávilágítani az idegen munkát illetően. Láttuk, hogy egy erő idegen munkája a $W = F \cdot e$ szorzattal számítható ki. Ez az $e - F$ koordináta-rendszerben egy téglalap területét jelenti (3.38 ábra). Ebben az fejeződik ki, hogy amíg az eltolódás felő nulláról e értékre, ezalatt az F erő elejétől végéig teljes értékével működik (hiszen már előzőleg is rajta volt a tartón).

3.2.1.3 A külső erőrendszer saját munkája

Valamely erőrendszer munkáját akkor nevezzük saját munkának, ha a munkát végző erőrendszer maga hozza létre az alakváltozást is. A 3.39 ábrán látható F erő a saját maga okozta e_{ff} eltolódással saját munkát végez. Az eltolódás első indexe azt jelzi, hogy az F erő helyén levő elmozdulásról van szó, a második f index azt mutatja, hogy azt az F erő okozta. A kettős f index tehát a saját munkára utal, jelezve, hogy a munkát végző, és az alakváltozást okozó erőrendszer ugyanaz. A konzol-



3.39 ábra

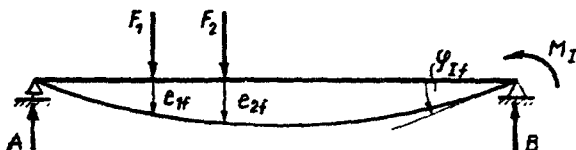
tartó reakciói munkát nem végeznek, így a tartón a külső diárendszer saját munkája a

$$W^{ff} = \frac{1}{2} F e_{ff}$$

képlettel számítható ki. Az 1/2-es szorzó magyarázatára hamarosan kitérünk.

Ezután írjuk fel általánosságban valamely tartón a külső erőrendszer saját munkáját (3.40 ábra):

$$W_k^{ff} = \frac{1}{2} \sum_i F_i e_{if} + \frac{1}{2} \sum_j M_j \varphi_{jf}$$



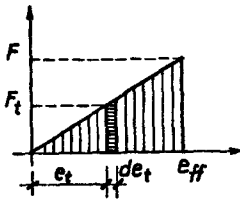
3.40 ábra

Most indokoljuk meg az 1/2-es szorzót. A saját munkavégzést úgy kell elképzelnünk, hogy kezdetben nincs rajta az erő a tartón, ekkor természetesen még nincs alakváltozás. Azután az F_i erőt nulláról lassan, fokozatosan felnöveljük a teljes F értékre. Eközben az alakváltozás is fokozatosan eléri a teljes e_{if} értéket. Az erő és a lehajlás a Hooke-törvény értelmében arányos egymással. Egy közbenső t időpontokban:

$$F_t = C e_t$$

Itt C állandót jelent. Ez az összefüggés a 3.41 ábra szerinti egyenessel ábrázolható.

Írjuk fel most azt a munkát, amely akkor keletkezik, ha a tartón a közbenső értéket elért F_t erő működik (amelyhez az eltolódás tartozik) és megnöveljük a lehajlást egy elemien kicsiny de_t értékkel:



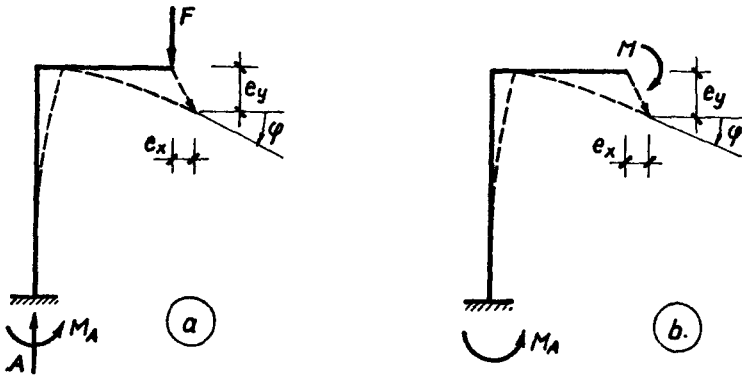
3.41 ábra

$$dW = F_t de_t$$

Ezt az elemien kicsiny munkát a bejelölt négyszög területe méri. A teljes munka integrálással kapható meg:

$$W = \int dW.$$

Az elemien kicsiny négyszögek területének összege az integrál fogalma szerint az egyenes alatti területtel egyenlő. Az pedig valóban az F_{eff} téglalap területének a fele. Ezért kell alkalmazni a saját munkánál az 1/2-es szorzót.



3.42 ábra

A 3.42 ábrán szeretnénk rávilágítani még egyszer a külső dinámok munkájának egyik lényeges tulajdonságára. Ha a dinám támadáspontja különbözőféle elmozdulásokat végez, a dinám akkor is csak a neki megfelelő (azonos jellegű) elmozdulással végez munkát. Például a 3.42. a ábrán az F erő támadáspontja e_y , r_y , φ elmozdulásokat végez. Ezek közül az F erő csak az irányába eső e_y eltolódással végez munkát. A 3.42. b ábrán az M erőpár támadáspontja ugyancsak e_x , e_y , φ elmozdulásokat szenved, de az M erőpár csak a neki megfelelő elfordulással végez munkát. Tehát az erő az irányába eső eltolódással, az erőpár pedig a síkjába eső elfordulással végez csak munkát.

A 3.42. a ábrán az (F) erőrendszer külső saját munkája:

$$W_k^{ff} = \frac{1}{2} F \cdot e_y .$$

A 3.42.b ábrán az (M) erőrendszer külső saját munkája:

$$W_k^{ff} = \frac{1}{2} M \cdot \varphi .$$

Az a megállapítás, hogy minden dínám csak a neki megfelelő elmozdulással végez munkát, nemcsak a saját munkára érvényes, hanem természetesen az idegen munkára is.

3.2.1.4 A tömör tartók alakváltozási munkája

Ebben a fejezetben a tömör tartókban keletkező alakváltozási munka fogalmával ismerkedünk meg. Prizmatikus rudakkal foglalkozunk, olyan speciális alaku szilárd testekkel, amilyenek az elemi szilárdságtanban is szerepeltek. Vizsgáljunk egy rudat, amelynek valamely keresztmetszetére N, T és M igénybevételek hatnak. Ha a rudon deformáció következik be, akkor ezzel az igénybevételek munkát végeznek. Alakváltozási munkának nevezzük az igénybevételek deformációval végzett munkáját. Az alakváltozási munkát szokták belső munkának is nevezni, mivel belső erők végzik.

Az alakváltozási munkánál is megkülönböztetünk

idegen alakváltozási munkát, és saját alakváltozási munkát.

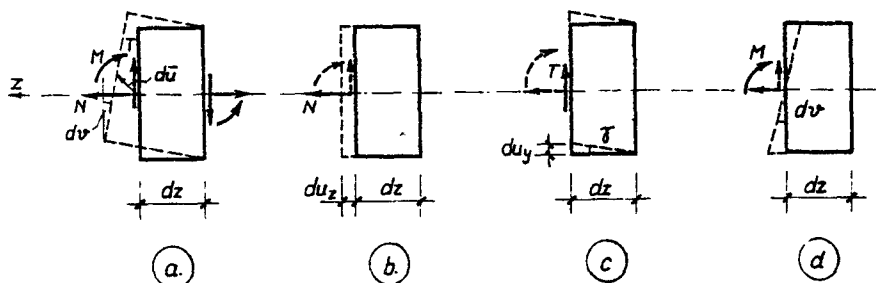
Az (F) erőrendszerből származó N, T, M igénybevételek akkor végeznek idegen alakváltozási munkát, ha valamilyen más okból létrejött deformáció - például egy másik (Q) erőrendszer okozta deformáció - mentén dolgoznak. Az (F) erőrendszer saját alakváltozási munkáját az (F) erőrendszer okozta N, T, M igénybevételek az (F) erőrendszer által létrehozott deformációval végzik.

Az alakváltozási munka meghatározásához vesszünk ki a rudból egy dz hosszúságú elemi darabot (3.43 ábra). Az elemi ruddarab deformációja (a bal oldali metszet relatív elmozdulása) általában egy ferde dű eltolódás és egy dϕ elfordulás (3.43.a ábra). A deformáció három összetevőre bontható fel: du_z tengelyirányú eltolódás (3.43.b ábra), du_y harántirányú eltolódás (3.43.c ábra) és dϕ elfordulás (3.43.d ábra). Ezeket a relatív elmozdulásokat a fajlagos elmozdulásokkal fejezzük ki (lásd: 3.1.2.1 pontot):

$$du_z = \varepsilon dz$$

$$du_y = \gamma dz$$

$$d\phi = k dz.$$



3.43 ábra

Ezekkel az elmozdulásokkal az igénybevételek végeznek munkát. Az elemi ruddarab bal oldalán az N , T , M igénybevételek működnek, a jobb oldali véglapra ezek ellentettjei hatnak (jobbról vett igénybevételek). Az elemi ruddarabon működhet még megoszló erőrendszer is, ezt azonban most a munkák számításánál elhagytuk, mert elhanyagolhatóan kicsiny a hatása. Koncentrált erő helyén a deformációt nem vizsgáljuk.

Először az idegen alakváltozási munka meghatározásával foglalkozunk. Képzeltük el, hogy a deformáció összetevői külön-külön következnek be. Ennek során a ruddarab bal oldali véglapja elmozdul, ezzel elmozdul a bal oldali igénybevételek támadáspontja is, így az igénybevételek munkát végeznek. Azonban minden alakváltozási elemnél csak az egyik igénybevétel végez munkát: a tengelyirányú eltolódással a du_z -vel az N normálerő, a du_y harántirányú eltolódással a T nyírőerő és a $d\psi$ elfordulással az M nyomaték. Így az elemi ruddarabban keletkező elemi alakváltozási munka ("a" a megkülönböztető indexe):

$$dW_a = N_f \varepsilon_q dz + T_f \gamma_q dz + M_f k_q dz$$

Itt az f , q indexekkel azt jelöltük, hogy idegen alakváltozási munkáról van szó, amikor az (F) dinámrendszer igénybevételei végzik a munkát valamilyen más (Q) okból keletkező deformációval.

Az egész rudra, illetve a tartóra a fenti munka integrálja adja az idegen alakváltozási munkát:

$$W_a^{fQ} = \int_0^l N_f \varepsilon_q dz + \int_0^l T_f \gamma_q dz + \int_0^l M_f k_q dz$$

Amennyiben a deformációt egy (Q) dinámrendszer okozza, akkor a fajlagos elmozdulások a (Q) dinámrendszer ébresztette igénybevételekből számíthatók (lásd: 3.1.2.1 pontot):

$$\varepsilon_q = \frac{N_q}{EA}$$

$$\gamma_q = \varphi \frac{T_q}{GA}$$

$$k_q = \frac{M_q}{EJ}$$

A fajlagos elmozdulások más hatások következtében is keletkezhetnek: pl. hőmérséklet-változás, támaszsüllyedés, gyártási hiba. Most idézzük fel a 3.1.2.1 pontban tanult egyenlőtlen hőmérséklet-változás okozta deformációt:

$$\varepsilon_q = t_s \alpha$$

$$\gamma_q = 0$$

$$k_q = \frac{t_a - t_f}{m} \alpha$$

ahol t_a az alsó, t_f a felső és t_s a súlyponti szálaban a hőmérséklet emelkedése, m a tartó magassága, α a hőtágulási együttható.

Vizsgáljuk meg részletesen az idegen alakváltozási munkát, ha a deformációt egy másik erőrendszer okozza. Helyettesítsük be W_a^{fq} kifejezésbe az ε_q , γ_q és k_q képleteket:

$$W_a^{fq} = \int_0^{\ell} \frac{N_f N_q}{EA} dz + \int_0^{\ell} \varphi \frac{T_f T_q}{GA} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_f M_q}{EJ} dz .$$

Az egyes igénybevételekből számítható alakváltozási munka nem azonos nagyságrendű. A nyírásból származó alakváltozás, így a nyíróerők munkája gyakorlatilag mindig elhanyagolhatóan kicsiny a többihez képest. Hajlított tartóknál általában a hajlításból származó alakváltozáshoz képest nemcsak a nyírásból, hanem az esetleg egyidejűleg fellépő normálerőből keletkező deformáció is elhanyagolható. Csak bizonyos tartótipusoknál kell figyelembe venni a normálerő hatását is: keretszerkezetek, rácsos tartók. A rácsos tartókra - ahol nincs is más igénybevétel, mint minden rudban az S ruderő, azaz normálerő - még visszatérünk. Végző soron tömör tartók esetén az idegen alakváltozási munkát általában a domináns M nyomatékból számítjuk:

$$W_a^{fq} = \int_0^l \frac{M_f M_q}{EJ} dz.$$

Hasonlóan írhatjuk fel a saját alakváltozási munkát. Vegyük figyelembe a külső munkáknál tett megállapításunkat az 1/2-es szorzóra vonatkozóan (lásd: 3.2.1.3 pontot), amely az alakváltozási munkára is érvényes:

$$W_a^{ff} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N_f^2}{EA} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \rho \frac{T_f^2}{GA} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2}{EJ} dz.$$

A tömör tartókra - a szokásos elhanyagolások után - a

$$W_a^{ff} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2}{EJ} dz$$

összefüggés érvényes.

Vizsgáljuk meg az idegen és saját alakváltozási munkák elhanyagolásokkal egyszerűsített

$$W_a^{fq} = \int_0^l \frac{M_f M_q}{EJ} dz,$$

illetve

$$W_a^{ff} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f}{EJ} dz$$

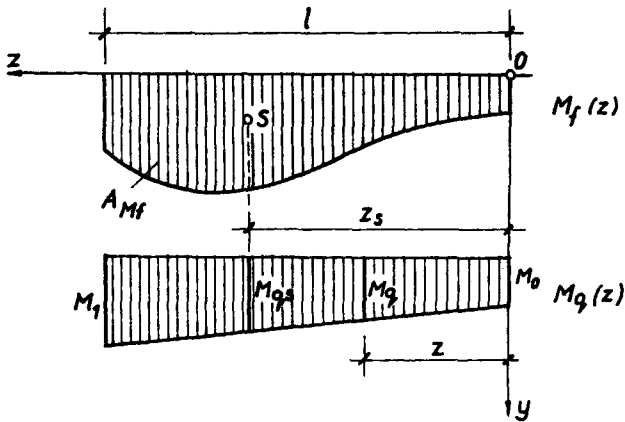
képletét. Először csak az idegen alakváltozási munkával foglalkozunk. A képletben az EJ legtöbbször konstans, a rúdengely mentén nem változik (legalábbis egy-egy szakaszon állandónak tekinthető). A nyomaték viszont z függvénye. Így az alakváltozási munka kiszámítása során a

$$W_a^{fq} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_f(z) M_q(z) dz$$

szorzatintegrál meghatározása válik szükségessé. Az alábbiakban ismertetendő segédétel alkalmazásával a gyakorlati feladatokban mindig megkerülhetjük az integrálást.

Legyen a 3.44 ábrán látható $M_f(z)$ függvény a vizsgált szakaszon tetszőleges görbe vonala, az $M_q(z)$ függvény legyen lineáris. Az $M_q(z)$ függvény z abszcisszáju ordinátája a végértékekkel kifejezve:

$$M_q(z) = M_0 + \frac{M_1 - M_0}{l} z.$$



3.44 ábra

Ezt helyettesítsük be a szorzatintegrálba, írjuk fel tagonként az integrálást és emeljük ki az állandókat:

$$\begin{aligned} W_a^{fq} &= \frac{1}{EJ} \int_0^l M_f(z) M_q(z) dz = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[M_0 \int_0^l M_f(z) dz + \frac{M_1 - M_0}{l} \int_0^l M_f(z) z dz \right]. \end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben

$$\int_0^l M_f(z) dz = A_{Mf}$$

az M_f nyomatékára területe

$$\int_0^l M_f(z) z dz = S_{Mf} = A_{Mf} z_s$$

az M_f nyomatékábrának mint síkidomnak a statikai nyomatéka az y tengelyre A statikai nyomatékot felírhatjuk a nyomatékára területe és a nyomatékára súlypontjának z_s koordinátája szorzataként.

Ily módon az integrál:

$$\begin{aligned} W_a^{fq} &= \frac{1}{EJ} \int_0^l M_f(z) M_q(z) dz = \frac{1}{EJ} \left[M_o A_{Mf} + \frac{M_1 - M_o}{l} A_{Mf} z_s \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} A_{Mf} \left(M_o + \frac{M_1 - M_o}{l} z_s \right) \end{aligned}$$

A zárójeles kifejezés nem más, mint az M_q lineáris függvénynek a z_s abszcisszához tartozó ordinátája, amelyek jelölhetünk M_{qs} -sel.

Végül is a szorzatintegrál a

$$W_a^{fq} = \int_0^l \frac{M_f(z) M_q(z)}{EJ} dz = \frac{A_{Mf} M_{qs}}{EJ}$$

képlet szerint számítható ki. Természetesen A_{Mf} és M_{qs} előjeles mennyiségek. Végeredményben az integrál értéke a nem lineáris ábra területe szorozva a lineáris ábrának a nem lineáris ábra súlypontja alatti ordinátájával. Nyomatékosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy a képlet csak akkor alkalmazható, ha legalább az egyik ábra lineáris.

A segédétel akkor is használható, ha az egyik ábra több egyenes szakaszból áll. Ilyen esetekben az ábrát olyan szakaszokra kell felbontani, amelyekben belül legalább az egyik függvény lineáris. Ezekre a szakaszokra alkalmazhatjuk a képletet. Végül a kapott részeredményeket összegezni kell.

A segédtelet a saját alakváltozási munka kiszámítására is alkalmas, ha az $M_f(z)$ függvény lineáris szakaszokból áll:

$$W_a^{ff} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2(z)}{EJ} dz = \frac{A_{Mf} M_{fs}}{2 \cdot EJ}.$$

3.2.1.5 A rácsos tartók alakváltozási munkája

A csuklókon terhelt rácsos tartókról tudjuk, hogy minden rudjukban csak normálerő van (huzás vagy nyomás), a rudakban sem nyírás, sem hajlítás nem keletkezik.

$$M \equiv 0, \quad T \equiv 0, \quad N \equiv S.$$

A normálerőt ruderőnek nevezzük és S -sel jelöljük. A rácsos tartóknál tehát csak a ruderők végeznek alakváltozási munkát.

Írjuk fel az i -edik rudban keletkező idegen alakváltozási munkát:

$$\begin{aligned} W_a^{fq} &= \int_0^s \frac{N_f N_q}{EA} dz = \int_0^s \frac{S_f S_q}{EA} dz = \\ &= \frac{S_f S_q}{EA} \int_0^s dz = \frac{S_f S_q \cdot s}{EA} \end{aligned}$$

A képletben: S_f a ruderő az (F) erőrendszerből,

S_q a ruderő a (Q) erőrendszerből,

A a rud keresztmetszeti területe,

s a rud hossza,

E a rugalmassági modulus.

Az egész tartóban fellépő alakváltozási munkát az egyes rudakban keletkező munkák összegként kapjuk.

A rácsos tartóban keletkező idegen alakváltozási munka:

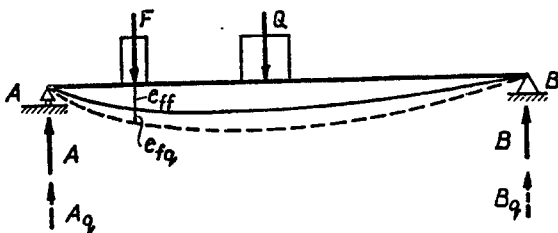
$$W_a^{fq} = \sum_1^n \frac{S_f S_q}{EA} s.$$

Hasonlóan felírhatjuk a rácsos tartó saját alakváltozási munkáját:

$$W_a^{ff} = \sum_1^n \frac{S_f^2}{EA} s.$$

3.2.1.6 A szilárdságtan munkatételei

A szilárdságtan munkatételei az energiamegmaradás tételére vezethetők vissza, amely a tartók alakváltozásainál is érvényes. Vizsgáljuk meg a 3.45 ábrán látható egyszerű kéttámaszu tartót. Helyezzük rá a tartóra az F sulyu terhet, erre a tartó lehajlik. A teher alatt e_{ff} lehajlás jön létre. Terheljük meg a tartót még a Q erővel is. Ennek hatására a tartón további lehajlások következnek be, az F erő támadáspontja további e_{fq} eltolódást szenved.



3.45 ábra

Ez utóbbi deformáció során az $(F) \doteq (A, B, F)$ külső erőrendszer

$$W_k^{fq} = F \cdot e_{fq}$$

külső munkát végez. Tulajdonképpen ennyivel csökken az F sulyu test helyzeti energiája.

Tételezzük fel, hogy a mechanikus energiákban nincs veszteség (például hőfejlődés nincs), akkor az energiamegmaradás tétele a mechanikai energiákra mondható ki. Azaz a helyzeti energiában mutatkozó fenti csökkenés teljes egészében a tartó deformálására fordítódik. A tartó alakváltozására

$$W_a^{fq} = \int_0^l \frac{M_f M_q}{EJ} dz$$

alakváltozási munka szükséges (N_f és T_f munkáját elhanyagoljuk).

A mechanikai energiák megmaradásának értelmében ez a két energia egyenlő.

Ezt fejezi ki az

I. munkatétel (az idegen munkák tétele):

$$W_k^{fq} = W_a^{fq},$$

a külső idegen munka egyenlő az alakváltozási idegen munkával.

Hasonló gondolatmenet vezethető végig a saját munkákra is:

II. munkatétel (a saját munkák tétele):

$$W_k^{ff} = W_a^{ff},$$

a külső saját munka egyenlő az alakváltozási saját munkával.

Az idegen munkák tételéből két felcserélhetőségi tétel következik.

Betti tétele.

Könnyen beláthatjuk, hogy

$$W_a^{fq} = W_k^{qf}.$$

vagyis két dinámrendszer egymás hatására végzett alakváltozási munkája egyenlő. Az alakváltozási munkák az alábbi integrálokkal számíthatók ki:

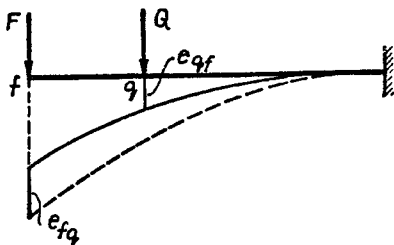
$$\int_0^l \frac{M_f M_g}{EJ} dz = \int_0^l \frac{M_g M_f}{EJ} dz.$$

Ezek valóban egyenlők, mivel a szorzat értéke nem változik, ha a tényezők sorrendjét felcseréljük. Az I. munkatételből következik:

$$W_k^{fq} = W_k^{qf}.$$

Ez Betti tétele: a külső idegen munkák felcserélhetősége. Két (egyenként egyensúlyban levő) külső dinámrendszer egymás hatására végzett külső idegen munkája egyenlő.

Ezt a tételt a 3.46 ábrán egyszerű példán szemléltetjük. Az F erő hatására a Q erő támadáspontja e_{qf} -el tolódik el. A Q erő követke-



3.46 ábra

tében az F támadáspontja e_{fq} -val.

Az (F) , illetve a (Q) erőrendszer külső idegen munkája:

$$W_k^{fq} = F \cdot e_{fq},$$

illetve

$$W_k^{qf} = Q \cdot e_{qf}.$$

A Betti tétel értelmében:

$$F \cdot e_{fq} = Q \cdot e_{qf}$$

azaz az egymás hatására végzett külső idegen munkák egyenlőek.

Maxwell tétele.

Az $F \cdot e_{fq} = Q \cdot e_{qf}$ egyenletből következik, ha $F=Q$, azaz az erők nagysága azonos, akkor

$$e_{fq} = e_{qf}$$

Maxwell tétele az elmozdulások felcserélhetőségét mondja ki. Az F erőből a q helyen keletkező e_{qf} eltolódás egyenlő a q helyre áthelyezett F erőből ($Q = F$) az eredeti f helyen keletkező e_{fq} eltolódással. A felcserélhetőségi tétel nemcsak eltolódásra áll fenn, hanem bármely elmozdulásra érvényes.

3.2.2 A tartók alakváltozásának számítása a munkatételekkel

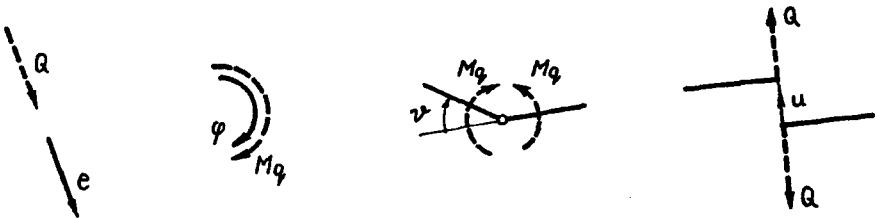
3.2.2.1 Az elmozdulások számítása munkatétellel

A munkatételek felhasználásával a tartó egy-egy eltolódását, vagy elfordulását lehet kiszámítani. Ezzel szemben a kis elmozdulások elméletével a támaszponti elmozdulások ismeretében a tartó tetszőleges számú pontjában gyorsan meghatározhatók az elmozdulások. A munkatételek alkalmazása, tehát akkor célszerű, ha a tartó egy(-két) bizonyos pontjának elmozdulását keressük. Ha több ponton szeretnénk megismerni az elmozdulást, célravezető

zetőbb a feladatot a kis elmozdulások elméletével megoldani. Ily módon a tanult két módszer előnyösen kiegészíti egymást.

A munkatétel alkalmazásakor a keresett elmozdulás helyén felvesszünk egy Q dinámot úgy, hogy a Q dinám a keresett elmozdulás jellegének megfelelően, azaz a Q dinám a keresett elmozdulással munkát végezzen. Ezzel egy olyan (Q) dinámrendszerrel vettünk föl, amelyik eredetileg nem volt a tartón, képzeletbeli teher, de a hozzátartozó reakciókkal együtt egyensúlyban van. Ezt az önkényesen felvett Q dinámot virtuális dinámnak, a reakcióval együtt pedig a Q virtuális erőrendszernek nevezzük.

Most tekintsük át a 3.47 ábrán miképpen kell a virtuális dinámot fölvenni, ha abszolút elmozdulást (e, φ), illetőleg relatív elmozdulást (v, u) kell kiszámítani.



3.47 ábra

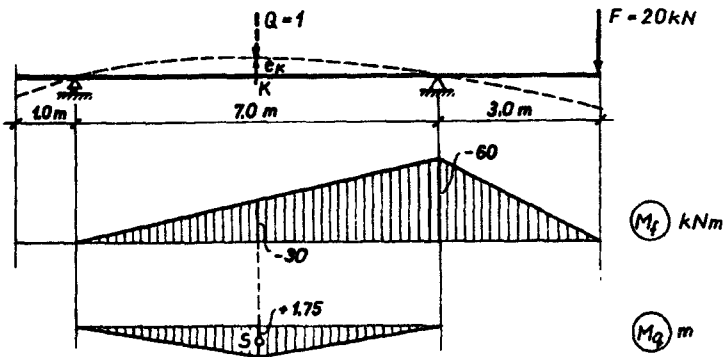
A (Q) virtuális dinámrendszer munkát végez a tartón levő terhelő (F) dinámrendszer okozta alakváltozással. Erre nézve felírhatjuk az idegen munkák tételét, amely egyenletet szolgáltat a keresett elmozdulás kiszámítására. A továbbiakban (F) lesz az adott terhelő erőrendszer és mindig az ebből keletkező elmozdulásokat fogjuk keresni. Azt a virtuális erőrendszert, amelyik a keresett e_{qf} elmozdulással - végez munkát, (Q)-val fogjuk jelezni. Az elmozdulás munkaegyenletből kiadódott (+) vagy (-) előjele azt mutatja, hogy az elmozdulás megegyezik-e a fölvert virtuális dinám értelmével, vagy sem. Célszerű a virtuális dinámok értelmét az elmozdulások pozitív értelmének megfelelően megválasztani, ahogyan az a 3.47 ábrán látható.

Az alábbiakban négy egyszerű, de jellegzetes példát mutatunk be a négyféle elmozdulás: e, φ, u, v meghatározására.

Az abszolút eltolódás meghatározását a 3.48 ábra kapcsán mutatjuk be. Az adott F erő egy konzolos kéttámaszu tartó végén támad. Keresünk a nyulás középső pontjának függőleges eltolódását. Az

$$EJ = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

Fel kell vennünk a keresett eltolódás jellegének megfelelő virtuális erőt úgy, hogy éppen a keresett eltolódással végezzen munkát, azaz jelen esetben egy függőleges Q erőt. Irjuk föl az idegen munkák tételét oly módon, hogy a (Q) végezze a munkát az (F) okozta alakváltozással:



3.48 ábra

$$W_k^{qf} = W_a^{qf}$$

A virtuális dinámrendszer reakciói nem végeznek munkát, mert a támaszoknál nincs eltolódás, csak a Q erőnek lesz munkája. A munkátélt részletesebben felírva:

$$Q \cdot e_{qf} = \int_0^l \frac{M_q M_f}{EJ} dz$$

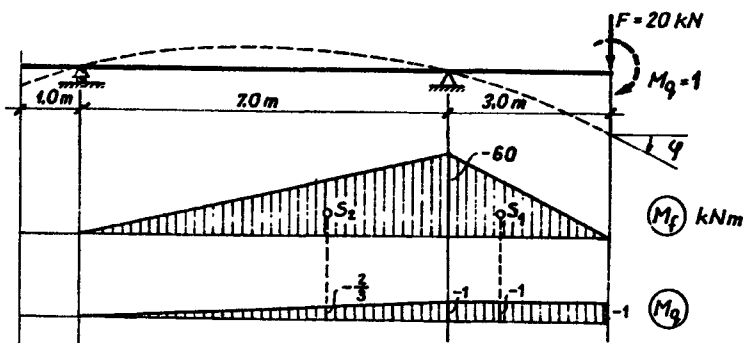
$Q = 1$ -t vegyünk fel, ekkor a külső munka az $1 \cdot e_{qf}$ keresett eltolódással azonos.

Az alakváltozási munkában csak a nyomatékok munkáját vesszük figyelembe (a nyírőerőt elhanyagoljuk, normálerő nincs a tartón).

Az alakváltozási munka kiszámításához megrajzoltuk az M_f és M_q nyomatékábrákat. Mivel az M_f ábra lineáris, alkalmazhatjuk a szorzatintegrál kiszámítására az ismert segédtelet. Vegyük az M_q ábra területét, ezt megszorozzuk a súlypontja fölötti M_f ábrabeli ordinátával és osztjuk EJ -vel. Ügyeljünk arra, hogy a nyomatékára terület és a súlypont alatti ordináta egyaránt előjeles mennyiségek (azonos előjelűek a nyomatékábrával).

$$e_{ky} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 10^4} \cdot \frac{1 \cdot 75 \cdot 7}{2} \cdot (-30) = -7,35 \cdot 10^{-3} \text{ m } (\downarrow)$$

A negatív jel arra mutat, hogy az eltolódás a Q erő felvett értelmében ellentétes; felfelé mozdul el a pont.



3.49 ábra

Az abszolút elfordulás kiszámítására vegyük a 3.49 ábrán látható feladatot. A tartó és a terhelés legyen azonos a 3.48 ábrán vázolt feladattal. A konzolvég elfordulását keressük. Az $EJ = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$.

Felvesszük a φ -vel munkát végző M_q virtuális erőpárt és alkalmazzuk az idegen munkák tételét:

$$W_k^{qf} = W_a^{qf}$$

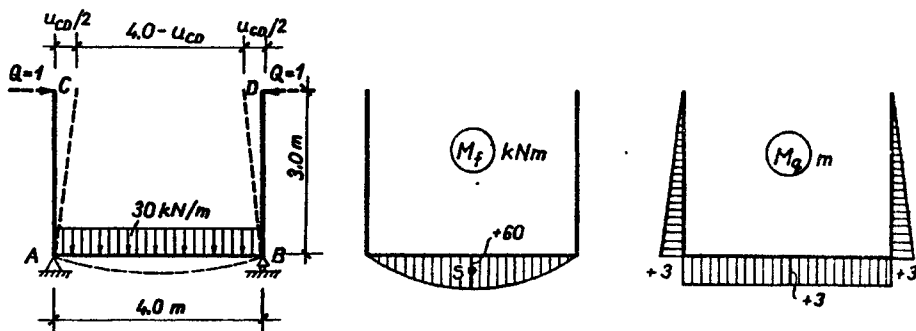
A virtuális dinámrendszer reakciói nem végeznek munkát. Az alakváltozási munka számításánál csak a nyomatékok munkáját vesszük figyelembe. A felvett virtuális erőpár $M_q = 1 \text{ kNm}$.

$$1 \cdot \varphi_{qf} = \varphi = \int_0^l \frac{M_q M_f}{EJ} dz.$$

Rajzoljuk meg a nyomatékábrákat és alkalmazzuk a segédtelet. Az M_f ábrának vesszük a területét, a lineáris szakaszoknak megfelelően két részletben, és az M_q -ból vesszük az ordinátákat.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2,5 \cdot 10^4} \left[\frac{(-60) \cdot 3}{2} (-1) + \frac{(-60) \cdot 7}{2} \left(-\frac{2}{3}\right) \right] = \frac{230}{2,5 \cdot 10^4} = \\ &= + 9,2 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright). \end{aligned}$$

A relatív eltolódás meghatározására oldjuk meg a 3.50 ábrán látható feladatot. Egyenletesen megoszló teher terheli a kéttámaszú konzolos tartót.



3.50 ábra

Határozzuk meg, hogy a C és D pont milyen mértékben közeledett egymáshoz: $EJ = 2 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$.

Az egyenletesen megoszló teher deformációt okoz a tartón. Ennek során a C és a D pont egymáshoz közeledik. A két pont relatív eltolódásának (u_{CD}) kiszámításához két $Q = 1$ virtuális erőt kell felvenni a relatív eltolódás irányában (feladatunkban vízszintesen). Ugyanis mind a C, mind a D pont el fog mozdulni, e két részeltolódás abszolút értelemben vett összege lesz a keresett u_{CD} eltolódás.

Alkalmazzuk az idegen munkák tételét:

$$W_k^{qf} = W_a^{qf}$$

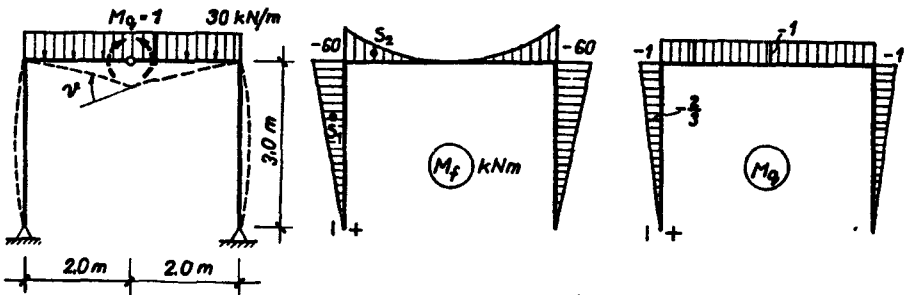
Részletesebben:

$$Q u^{qf} = 1 \cdot u_{CD} = \int_0^l \frac{M_q M_f}{EJ} dz.$$

A nyomatékképek megrajzolása után az alakváltozási munkát a segéd-tétel felhasználásával írhatjuk fel. Az M_f nem lineáris ábra területét szorozzuk az M_q lineáris ábrából vett ordinátával:

$$u_{CD} = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \frac{+60 \cdot 4 \cdot 2}{3} (+3) = +24 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

A pontok - az alakváltozási ábrából is láthatjuk - közelednek egymáshoz.



3.51 ábra

A relatív elfordulás kiszámítására háromcsuklós tartón mutatunk be példát (3.51 ábra). A csuklóban keletkező relatív elfordulást keressük. Adott $EJ = 3 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$.

Az egyenletesen megoszló teher hatására a C csuklóban relatív elfordulás jön létre. Ennek kiszámítására két $M_q = 1$ erőpárt kell felvenni, egyet a csuklót megelőző keresztmetszetben, egy ellentéteset pedig a követőben. A keresett elmozdulással ez a dínám munkát végez. Az idegen munkák tétele:

$$W_k^{qf} = W_a^{qf}.$$

Részletesebben:

$$M_q \cdot \psi_C^{qf} = 1. \quad \psi_C = \int_0^l \frac{M_q M_f}{EJ} dz.$$

A nyomatékábrák megrajzolása után a segédétel alkalmazásával írhatjuk fel az alakváltozási munkát. Az M_f nem lineáris nyomatékábrából vesszük a területeket, a másiktól az ordinátákat. A szimmetriát kihasználva elegendő a felére felírt alakváltozási munkát megkértszerezni:

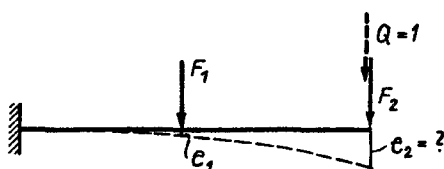
$$\begin{aligned} \psi_C &= \frac{1}{3 \cdot 10^4} \left[2 \frac{(-60) \cdot 3}{2} \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{(-60) \cdot 2}{3} (-1) \right] = + \frac{200}{3 \cdot 10^4} = \\ &= + 6,67 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright). \end{aligned}$$

A fenti példák alapján láthatjuk, hogy a virtuális Q dínám nagysága közömbös. Ez így is van rendjén, hiszen az általunk ténylegesen felvett virtuális dínám a keresett elmozdulást, amelyet a tőle független, adott (F) erőrendszer okoz, nem befolyásolhatja. Éppen ezért célszerű a virtuális

dinámot egynek választani: $Q = 1$. Ezt a módszert követtük eddigi feladatainkban is.

Az előbbieken mindig az I. munkatételt, az idegen munkák tételét használtuk fel. A saját munkák tételének (II. munkatétel) alkalmazására ritkábban kerülhet sor. A II. munkatétel alkalmazásának feltételei:

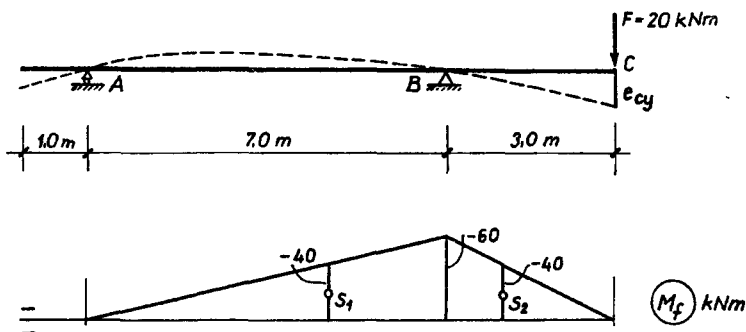
- a tartón csak egy teher legyen,
- az adott teher a keresett elmozdulással képes legyen munkát végezni,
- a teher és a keresett elmozdulás azonos helyen legyen.



3.52 ábra

A fenti második feltétel hiánya miatt a 3.49 ábrán vázolt feladat nem oldható meg saját munkatétellel. A 3.48 ábrán látható példa esetén a harmadik feltétel hiányzik. Az első feltétel szükségességét a 3.52 ábrán illusztráljuk. A külső saját munka két ismeretlent tartalmaz (e_1 , e_2), a keresett egyetlen (e_2) helyett.

Ilyen esetben az e_2 eltolódás a Q virtuális erő felvételével, és az idegen munkák tételével számítható ki.



3.53 ábra

A 3.53 ábrán mutatunk be egy feladatot a saját munkák tételének alkalmazására. A tartó és a teher azonos a 3.48 ábrán vázolt példával. Az erő alatti, konzolvégi lehajlást (eltolódást) keressük. Az $EJ = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$.

A keresett eltolódással az F erő képes munkát végezni. Alkalmazzuk a saját munkák tételét:

$$W_k^{ff} = W_a^{ff}.$$

Az adott F erő éppen a keresett elmozdulással végez munkát, ezért nincs szükség virtuális erő felvételére. Lényeges körülmény, hogy az (F) erőrendszer többi tagjal a reakciók nem végeznek munkát. Így a munkatétel:

$$\frac{1}{2} F \cdot e^{ff} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2}{EJ} dz$$

Az alakváltozási munkát a segédtétellel számítjuk ki. A területet és az ordinátát is ugyanabból az M_f ábrából kell venni (képzeljük úgy, mint-ha az M_f ábra kétszer egymás alá le lenne rajzolva).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot e_{Cy} &= \frac{1}{2 \cdot 2,2 \cdot 5 \cdot 10^4} \left(\frac{(-60) \cdot 7}{2} (-40) + \frac{(-60) \cdot 3}{2} (-40) \right) = e_{Cy} = \\ &= + 24 \cdot 10^{-3} \text{ m } (\downarrow). \end{aligned}$$

A feladatot természetesen megoldhattuk volna az idegen munkák tételével is, az eredmény teljesen azonos lett volna a fentivel.

3.2.2.2 Példák a munkatételek alkalmazására a tartók alakváltozásának számításánál

Az alábbiakban néhány számpéldán mutatjuk meg a munkatételek alkalmazásának lehetőségét és az elmozdulások kiszámítását.

A 3.54 ábrán látható kéttámaszu konzolos tartót két koncentrált erő terheli. Számítsuk ki a C konzolvég függőleges eltolódását és az A pont elfordulását. Legyen $EJ = 0,75 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$.

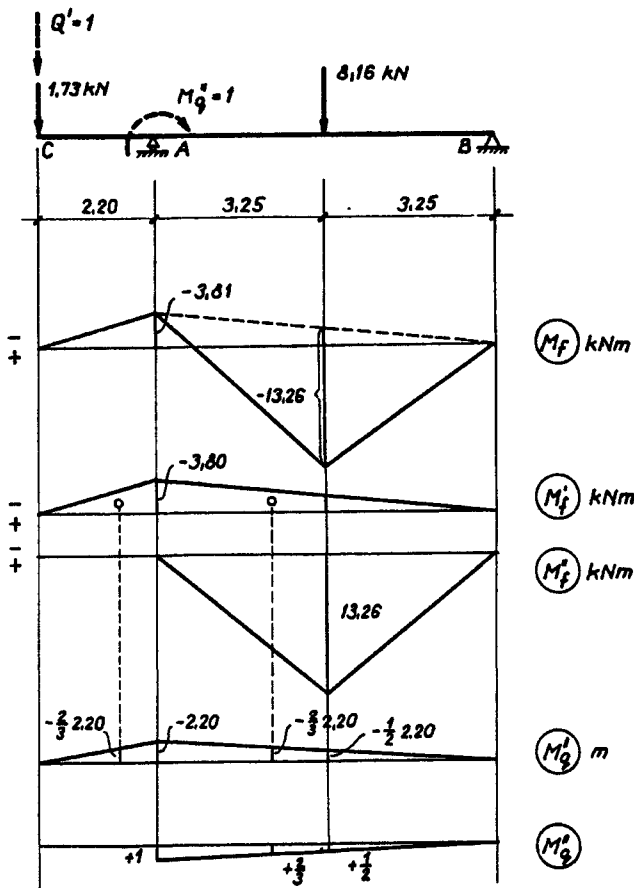
Az első feladat megoldásához a C pontban $Q=1$ virtuális erőt veszünk fel, majd a másodikhoz az A keresztmetszetben az $M_q = 1$ virtuális erőpárt.

Először állítsuk elő a nyomatékkébrákat. Az adott teherből a támaszpont felett:

$$M_A = -1,73 \cdot 2,20 = -3,81 \text{ kNm.}$$

A pozitív nyomatéki maximum helyén a nyomatékkébrára belógása:

$$\frac{F \cdot l}{4} = \frac{8,16 \cdot 6,5}{4} = + 13,26 \text{ kN.}$$



3.54 ábra

Ezzel az adatokkal az M_F nyomatékábra megrajzolható. Az AB nyílásban ezt bontjuk fel két könnyen kezelhető részre az ábra szerint (M'_F , M''_F). A $Q = 1$ virtuális teherből a támaszpontnál:

$$M_A = -1.2, 20 = -2, 20 \text{ m keletkezik.}$$

Ezzel az M'_Q ábrát megrajzolhatjuk.

Végül megrajzoljuk az $M_Q = 1$ erőpárból az M''_Q jelű nyomatékábrát.

A C pont függőleges eltolódásának kiszámítására írjuk fel az idegen munkák tételét:

$$1. e_{Cy} = \int_0^l \frac{M'_q M_f}{EJ} dz$$

A szorzatintegrál kiszámítása a segédtétellel lehetséges. A területeket az M_f , illetve M'_f és M''_f ábrákból vesszük, az ordinátákat pedig az M'_q ábrából:

$$\begin{aligned} e_{Cy} &= \frac{1}{0,75 \cdot 10^4} \left[\frac{(-3,80) \cdot 2,20}{2} \left(-\frac{2}{3} \cdot 2,20\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{(-3,80) \cdot 6,50}{2} \left(-\frac{2}{3} \cdot 2,20\right) + \frac{13,26 \cdot 6,50}{2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2,20\right) \right] = \\ &= \frac{-23,16}{0,75 \cdot 10^4} = -3,088 \cdot 10^{-3} \text{ m.} \end{aligned}$$

A keresett lehajlás:

$$e_{Cy} = -3,09 \text{ mm } (\downarrow).$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy a Q erővel ellentétes irányban, tehát felfelé következik be az eltolódás.

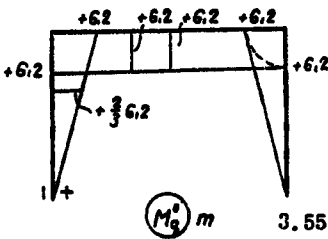
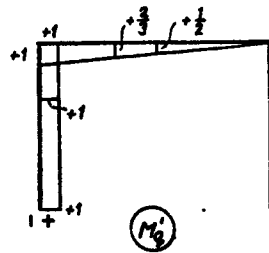
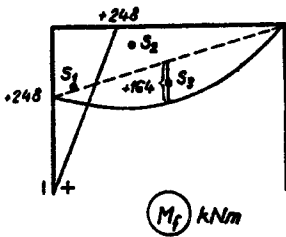
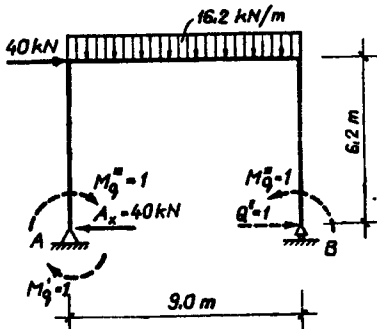
A φ_A elfordulás kiszámítása is az idegen munkák tételével lehetséges:

$$1. \varphi_A = \int_0^l \frac{M''_q M_f}{EJ} dz.$$

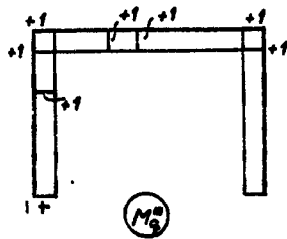
$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{0,75 \cdot 10^4} \left[\frac{(-3,80) \cdot 6,50}{2} \frac{2}{3} + \frac{13,26 \cdot 6,50}{2} \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{+13,31}{0,75 \cdot 10^4} = +0,00178 \text{ } (\curvearrowright). \end{aligned}$$

A 3.55 ábrán látható kétfázisú kerettartót 40 kN-es vízszintes erő, valamint 16,2 kN/m megoszló erőrendszer terheli. Adott $EJ = 2,28 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$. Határozzuk meg a φ_A , e_{Bx} és v_{AB} elmozdulásokat.

Rajzoljuk fel az adott terhelésre az M_f nyomatékképletét. Az $A_x = 40 \text{ kN}$, így a C sarokpontban a nyomaték:



3.55 ábra



$$M_C = 40 \cdot 6,2 = 248 \text{ kNm.}$$

A parabola belógása:

$$\frac{16,2 \cdot 9^2}{8} = 164,0 \text{ kNm.}$$

A q_A abszolút elfordulás kiszámításához vegyük föl az A pontban az $M'_q = 1$ virtuális erőpárt. Rajzoljuk meg az M'_q nyomatékábrát. Írjuk fel az idegen munkák tételét:

$$1 \cdot q_A = \int_0^l \frac{M_f M'_q}{EJ} dz$$

A szorzatintegrál kiszámítására alkalmazzuk a segédtelet, a területeket az M_f ábrából, az ordinátákat az M'_q ábrából vesszük:

$$\begin{aligned} q_A &= \frac{1}{2,28 \cdot 10^5} \left[\frac{248,6,2}{2} \cdot 1 + \frac{248,9}{2} \cdot \frac{2}{3} + 164,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{2004,8}{2,28 \cdot 10^5} = + 8,79 \cdot 10^{-3} \quad (\curvearrowright). \end{aligned}$$

A B pont vízszintes eltolódásának meghatározásához vegyük föl a B pontban a $Q'' = 1$ virtuális erőt. Ábrázoljuk az M''_q nyomatékábrát. Az idegen munkák tétele:

$$1 \cdot e_{Bx} = \int_0^l \frac{M_f M''_q}{EJ} dz$$

Az ábraterületeket az M_f -ből, az ordinátákat az M''_q ábrából vesszük:

$$\begin{aligned} e_{Bx} &= \frac{1}{2,28 \cdot 10^5} \left[\frac{248,6,2}{2} \cdot 6,2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{248,9}{2} \cdot 6,2 + \right. \\ &\left. + 164,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,2 \right] = \frac{16197,7}{2,28 \cdot 10^5} = 7,10 \cdot 10^{-2} \text{ m } (\rightarrow). \end{aligned}$$

Az A és B keresztmetszetek között fellépő ψ_{AB} relatív elfordulás kiszámításához az $M'''_q = 1$ erőpárt kell felvenni, az egyiket az A, a másikat a B keresztmetszetben. Ebből az M'''_q nyomatékára meghatározható. Az idegen munkák tétele:

$$1. \nu_{AB} = \int_0^l \frac{M_f M_q'''}{EJ} dz$$

Részletezve (M_f területét szorozzuk az M_q''' -ből vett ordinátákkal):

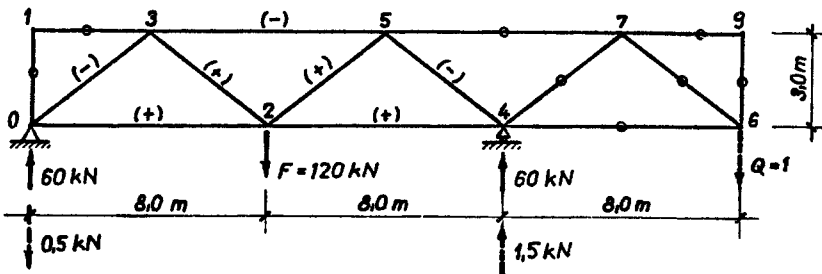
$$\begin{aligned} \nu_{AB} &= \frac{1}{2,28 \cdot 10^5} \left[\frac{248,6 \cdot 2}{2} \cdot 1 + \frac{248,9}{2} \cdot 1 + 164,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \\ &= + \frac{2868,8}{2,28 \cdot 10^5} = 1,258 \cdot 10^{-2} = 0,01258 \quad ('). \end{aligned}$$

Határozzuk meg a 3.56 ábrán vázolt konzolos rácsos tartó 2 és 6 jelű csomópontjának függőleges eltolódását. A teher a 2 csomóponton ható $F=120$ kN nagyságú függőleges koncentrált erő. A rudak keresztmetszeti területe:

$$\text{övrudak } A_o = 20 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\text{rácsrudak } A_r = 15 \text{ cm}^2 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

A rugalmassági modulus: $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$.



3.56 ábra

Az e_2 lehajlás kiszámítása a saját munkák tételével lehetséges:

$$\frac{1}{2} F \cdot e_{1y} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{S_i^2 s_i}{EA_i}$$

Az eltolódás meghatározásához ki kell számítanunk az (F) erőrendszerből az S_{fi} ruderókat. Az S_{fi} ruderók közül nyolc zérussal egyenlő (vakrudak), az ábrán ezeket karikával jelöltük meg. A maradék hét ruderó is szimmetrikus az F teherre, így ténylegesen csak négyet kell kiszámítanunk. A reakciók $A = B = 60$ kN.

A 0. csomópont egyensúlya alapján vektorháromszög rajzolható, amelyből grafoanalitikus módszerrel:

$$S_{2-0} = + 60 \frac{4}{3} = + 80 \text{ kN (huzott)}$$

$$S_{3-0} = - 60 \frac{5}{3} = - 100 \text{ kN (nyomott)}.$$

A szimmetria miatt $S_{4-5} = S_{0-3} = 100$ kN, $S_{2-4} = S_{0-2} = + 80$ kN.

Ezután vegyünk fel függőleges hármas átmetszést a 2. és 3. csomópontok között. A bal oldali tartórész egyensúlya (A , S_{2-0} , S_{2-3} , S_{3-5}) = 0 alapján:

$$\sum M_i^{(2)} = + 60 \cdot 8 + S_{3-5} = 0$$

$$S_{3-5} = - 160 \text{ kN (nyomott)}$$

$$\sum F_{ly} = - 60 + S_{2-3} \frac{3}{5} = 0$$

$$S_{2-3} = + 100 \text{ kN (huzott)}.$$

A szimmetria következtében $S_{2-5} = S_{2-3} = + 100$ kN. Az ábrába (+) és (-) jelekkel bejelöltük a S_{fi} ruderók előjelét.

Az eredményeket célszerű táblázatba foglalni. A táblázatban i a rud jele, s a hossza, A a rud keresztmetszeti területe. Ezután kiszámítjuk a s_i/A_i hányadost, majd a következő oszlopba a korábban kiszámított S_{fi} ruderókat írjuk be. Ezután kiszámítjuk a

$$\frac{S_{fi}^2 \cdot s_i}{A_i}$$

mennyiségeket, és ezt összegezzük, így kapjuk a

$$\sum_{i=1}^7 \frac{S_{fi}^2 s_i}{A_i} = 28,69 \cdot 10^7 \text{ kN}^2/\text{m}.$$

mennyiséget. Felírva a saját munkák tételét:

$$\frac{1}{2} 120 e_{2y} = \frac{1}{2} \frac{28,69 \cdot 10^7}{2,1 \cdot 10^8}$$

$$e_{2y} = 1,14 \cdot 10^{-2} \text{ m } (\downarrow).$$

s_i	A_i	$\frac{s_i}{A_i}$	S_{fi}	$\frac{S_{fi}^2 \cdot s_i}{A_i}$	S_{qi}	$S_{qi} \cdot S_{fi}$	$\frac{S_{qi} S_{fi} s_i}{A_i}$	
m	m ²	m ⁻¹	kN	kN ² m ⁻¹		kN	kN m ⁻¹	
0-2	8	$2,10^{-3}$	4000	+80	$2,56 \cdot 10^7$	-0,667	-53,33	$-2,133 \cdot 10^5$
0-3	5	$1,5 \cdot 10^{-3}$	3333	-100	$3,33 \cdot 10^7$	+0,833	-83,33	$-2,778 \cdot 10^5$
2-3	5	$1,5 \cdot 10^{-3}$	3333	+100	$3,33 \cdot 10^7$	-0,833	-83,33	$-2,778 \cdot 10^5$
2-4	8	$2,10^{-3}$	4000	+80	$2,56 \cdot 10^7$	-2,000	-160,00	$-6,40 \cdot 10^5$
2-5	5	$1,5 \cdot 10^{-3}$	3333	+100	$3,33 \cdot 10^7$	+0,833	+83,33	$+2,778 \cdot 10^5$
3-5	8	$2,10^{-3}$	4000	-160	$10,24 \cdot 10^7$	+1,333	-213,33	$-8,533 \cdot 10^5$
4-5	5	$1,5 \cdot 10^{-3}$	3333	-100	$3,33 \cdot 10^7$	-0,833	+83,33	$+2,778 \cdot 10^5$
<u>$28,69 \cdot 10^7$</u>								<u>$-17,07 \cdot 10^5$</u>

Az e_6 eltolódás kiszámításához fel kell venni a 6. csomóponton a $Q = 1$ virtuális erőt és alkalmaznunk kell az idegen munkák tételét:

$$Q \cdot e_{6y} = \sum_{i=1}^n \frac{S_{fi} S_{qi}}{E A_i} s_i$$

A $Q = 1$ virtuális erőből a reakciók $A = -0,5$, $B = 1,5$. Ebből a teherből felesleges az összes ruderőt kiszámítani, az alakváltozási munkában csak azok a ruderők kapnak szerepet, amelyek az (F) erőrendszerben

nem voltak vatrudak. Tehát csak a táblázatban már szereplő rudakban kell az S_{qi} ruderőket kiszámítanunk.

A 0. csomópont egyensúlyából grafoanalitikusan:

$$S_{2-0} = -0,5 \frac{4}{3} = -0,667 \text{ (nyomott)}$$

$$S_{3-0} = +0,5 \frac{5}{3} = +0,833 \text{ (huzott).}$$

A 2. és 3. csomópontok között felvett függőleges átmetszés alapján:

$$\sum M_i^{(2)} = -0,5 \cdot 8 + 3 S_{3-5} = 0$$

$$S_{3-5} = +1,333 \text{ (huzott)}$$

$$\sum F_{iy} = +0,5 + S_{2-3} \frac{3}{5} = 0$$

$$S_{2-3} = -0,833 \text{ (nyomott).}$$

A 2. és 5. csomópontok között felvett függőleges átmetszés alapján:

$$\sum M_i^{(5)} = -0,5 \cdot 12 - S_{2-4} \cdot 3 = 0$$

$$S_{2-4} = -2,0 \text{ (nyomott).}$$

$$\sum F_{iy} = +0,5 - S_{2-5} \frac{3}{5} = 0$$

$$S_{2-5} = +0,833 \text{ (huzott)}$$

Az 5. csomópont egyensúlyából:

$$\sum F_{iy} = +0,833 \cdot \frac{3}{5} + S_{4-5} \cdot \frac{3}{5} = 0$$

$$S_{4-5} = -0,833 \text{ (nyomott).}$$

Ezeket a ruderőket írjuk be a táblázatban és számítsuk ki a hátralevő két oszlopot is, majd összegezzük az utolsó oszlopot

$$\sum_{i=1}^7 \frac{S_i S_i S_i}{A_i} = -17,07 \cdot 10^5 \text{ kN/m}$$

összeget kapunk. Ebből az idegen munkák tételével:

$$1 \cdot e_{6y} = \frac{-17,07 \cdot 10^5}{2,1 \cdot 10^8} = -8,13 \cdot 10^{-2} \text{ m } (\uparrow).$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy az eltolódás a Q virtuális erővel ellentétes, vagyis felfelé jön létre.

3.3 A tartók alakváltozásának meghatározása a rugalmas vonalak törvényével

A tartók alakváltozását analitikus úton is tárgyalhatjuk, ha előállítjuk a lehajlási vonal, más szóval a rugalmas vonal függvényét.

A rugalmas vonal függvényének tárgyalásakor csak egyenes tengelyű tartókkal foglalkozunk, melyekre a tengelyre merőleges terhek hatnak, azaz $N = 0$. (3.57 ábra) A feladat megoldásához az alábbi öt függvény közötti kapcsolatot kell megkeresni:

- $p(z)$ teherfüggvény
- $T(z)$ nyíróerőfüggvény
- $M(z)$ nyomatékfüggvény
- $\varphi(z)$ elfordulásfüggvény
- $e(z)$ lehajlásfüggvény.

E függvények a tartó tengelyében futó z koordináta függvényei. A függvények differenciálhatók.

Az igénybevételi ábrák tárgyalásakor a fenti függvények között differenciális összefüggéseket állapítottunk meg.

$$\frac{dT(z)}{dz} = p(z) \quad \frac{dM(z)}{dz} = -T$$

A két egyenletet össze is vonhatjuk:

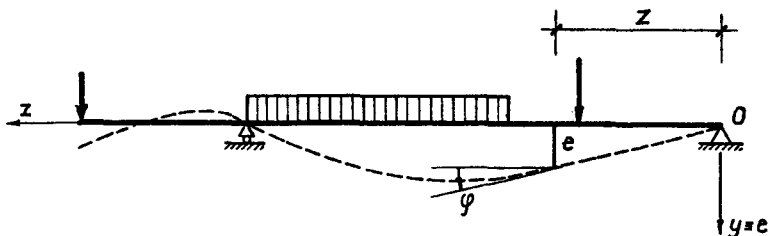
$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = -\frac{dT(z)}{dz} = -p(z)$$

A hajlított rudak vizsgálata során láttuk, hogy

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M(z)}{EJ}$$

Foglalkozunk ezután a lehajlásfüggvény és az elfordulásfüggvény közötti kapcsolattal. A valamely keresztmetszet elfordulásszögét jelenti, de ugyanakkor a rudtengely elfordulásával is azonos. Mivel a φ a rudtengely elfordulásszöge az nem más, mint az $e(z)$ lehajlásvonal érintőjének a vízszintessel bezárt szöge (3.57 ábra). Ennek a szögnek a tangense az $e(z)$ függvény differenciálhányadosa

$$\frac{de(z)}{dz} = - \operatorname{tg} \varphi(z).$$



3.57 ábra

Vegyük figyelembe, hogy kis elmozdulásokról van szó, így a szög és tangense egyenlőnek tekinthető:

$$\frac{de(z)}{dz} = - \varphi(z).$$

Felhasználva a $\varphi(z)$ és $M(z)$ közötti összefüggést:

$$\frac{d^2 e(z)}{dz^2} = - \frac{d\varphi(z)}{dz} = - \frac{M(z)}{EJ}.$$

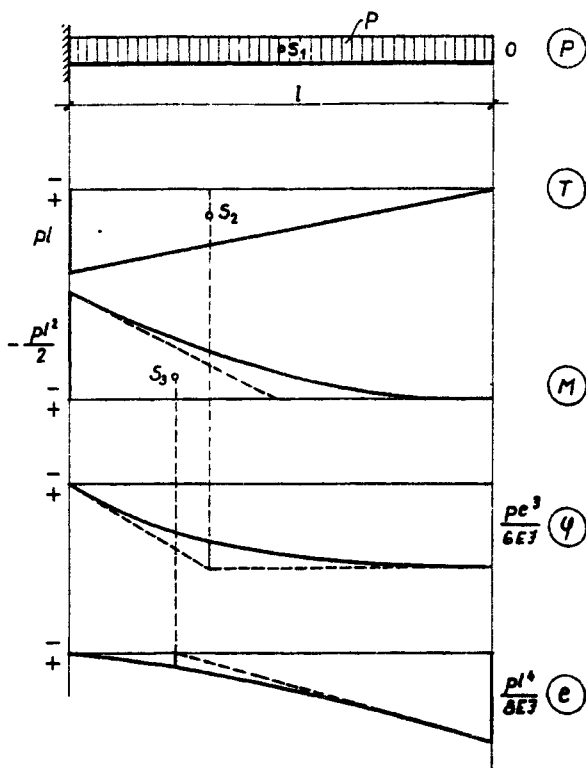
Ez a közönséges másodrendű differenciálegyenlet a rugalmas vonal differenciálegyenlete.

A fentiekben tárgyalt igénybevétel és alakváltozási differenciálegyenletek összevonva is felírhatók:

$$\frac{d^2 e(z)}{dz^2} = - \frac{d^3 \varphi(z)}{dz^3} = - \frac{1}{EJ} \frac{d^2 M(z)}{dz^2} = + \frac{1}{EJ} \frac{dT(z)}{dz} = + \frac{1}{EJ} p(z).$$

Ebből az összefüggésből jól látható, hogy a szóban forgó δ_i függvény milyen szoros kapcsolatban áll egymással. Ha az $e(z)$ lehajlásfüggvényt ismerjük, akkor sorozatos differenciálással előállítható a többi függvény is. Amennyiben a $p(z)$ teherfüggvény adott, akkor sorozatos integrálással adódik a többi függvény. Ekkor tulajdonképpen differenciálegyenleteket kell megoldani a megfelelő területi feltételek figyelembevételével.

Legyen adott a 3.58 ábrán látható konzoltartó, lefelé mutató, egyenletesen megoszló p teherrel. Határozzuk meg az igénybevételek függvényeit, az elfordulás és lehajlásfüggvényeket.



3.58 ábra

A teherfüggvény most állandó, lefelé mutató, azaz pozitív:

$$p(z) = p.$$

A nyíróerő függvénye a

$$\frac{dT(z)}{dz} = p.$$

differenciálegyenlethez határozható meg.

$$dT(z) = p dz$$

$$T(z) = p dz = pz + C_1.$$

A C_1 integrálási állandót abból a területi feltételből határozhatjuk meg, hogy $z = 0$ -nál $T = 0$ (a szabad végen zérus a nyomóerő):

$$T(0) = p \cdot 0 + C_1 = 0 \quad C_1 = 0$$

$$T(z) = p z$$

A nyomatékfüggvény meghatározásakor indulunk ki a

$$\frac{dM(z)}{dz} = -T(z)$$

differenciál egyenlethez:

$$dM(z) = -T(z) dz$$

$$M(z) = -\int T(z) dz = -\int p z dz = -p \frac{z^2}{2} + C_2$$

A $z = 0$ helyen $M = 0$, tehát

$$M(0) = -\frac{p}{2} \cdot 0 + C_2 = 0 \quad C_2 = 0$$

$$M(z) = -\frac{p}{2} z^2.$$

Következik az elfordulásfüggvény. Kiindulunk a

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M(z)}{EJ}$$

differenciálegyenlethez

$$d\varphi(z) = \frac{M(z)}{EJ} dz$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{EJ} M(z) dz = -\frac{1}{EJ} \int \frac{p z^2}{2} dz = -\frac{p z^3}{6 EJ} + C_3$$

Kerületi feltétel: a befogási keresztmetszet nem fordulhat el, $z = \ell$,
 $\varphi = 0$:

$$\varphi(\ell) = -\frac{p \ell^3}{6 EJ} + C_3 = 0 \quad C_3 = \frac{p \ell^3}{6 EJ}$$

$$\varphi(z) = \frac{p}{6 EJ} (\ell^3 - z^3).$$

Az eltolódásfüggvény a

$$\frac{de(z)}{dz} = -\varphi(z)$$

differenciálegyenlet segítségével határozzuk meg:

$$e(z) = -\varphi(z) dz = +\frac{p}{6 EJ} (z^3 - \ell^3) dz =$$

$$= \frac{p}{6 EJ} \left(\frac{z^4}{4} - \ell^3 z \right) + C_4$$

Kerületi feltételünk, hogy a befogásnál nincs lehajlás $z = \ell$, $e = 0$:

$$e(\ell) = \frac{p}{6 EJ} \left(\frac{\ell^4}{4} - \ell^3 \cdot \ell \right) + C_4 = 0$$

$$C_4 = \frac{p}{6 EJ} \frac{3}{4} \ell^4$$

$$e(z) = \frac{p}{6 EJ} \left(\frac{z^4}{4} - \ell^3 z + \frac{3}{4} \ell^4 \right)$$

Előállítva a keresett függvényeket láthatjuk, hogy azok egyre magasabb rendűek. Jelen feladatunkban p nulladrendű, F első-, M második-, φ harmad-, e negyedrendű. A görbék megrajzolását megkönnyíti, ha legalább a végérintőket meg tudjuk rajzolni. A végérintők mindig a kettővel alacsonyabb rendű görbe súlypontja alatt metsződnek. A kis elmozdulásoknál láttuk, hogy egy rudszakasz két végérintője közötti relatív szög a nyomatékábra súlypontja (S_3) alatt van. Az igénybevételek tárgyalásából tudjuk, hogy egy rudszakasz nyomatékai ábrájának végérintői e teher eredője alatt metsződnek (S_1 súlypont alatt).

A rugalmas vonal előállításának ismertetése egy gyors, a gyakorlatban jól alkalmazható módszere az ún. Mohr-elv. Ennek lényege a következő. Vizsgáljuk meg a nyomaték és a teher, illetve a lehajlás és a nyomaték kapcsolatát:

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = -p(z), \quad \text{illetve} \quad \frac{d^2 e(z)}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EJ}$$

Láthatjuk, hogy ez a két kifejezés analóg egymással, csupán EJ-vel kell osztani a második egyenlet jobb oldalát.

Ezek alapján a lehajlást előállíthatjuk a nyomatékábrára mint teherre rajzolt nyomatékábraként. A nyomatéki teherre rajzolt nyomatékábrát EJ-vel elosztva kapjuk meg a lehajlási ábrát.

4. A STATIKAILAG HATÁROZATLAN TARTÓK SZÁMÍTÁSA

4.1 A statikailag határozatlan tartók

A statikailag határozott, illetve határozatlan tartó fogalmával már a statikában találkoztunk.

Ha a tartó, vagy a tartórészek a földhöz, vagy egymáshoz kapcsolása a szükségesnél több kapcsolórudal történik, vagyis a rudak száma több, mint amennyi a tartó merevvé tételéhez szükséges, a tartót statikailag határozatlannak nevezzük. Megállapítottuk, hogy amennyiben a kapcsolórudak száma a szükségesnél nagyobb, akkor a kapcsoló erőket statikai uton nem tudjuk meghatározni, mert az egyenletek száma kevesebb, mint az ismeretlen kapcsoló erők száma. Az ismeretlenek meghatározásához újabb egyenletek felírására van szükségünk. Ezeket az egyenleteket az erők hatására keletkező alakváltozásokból tudjuk meghatározni. A határozatlan tartók megoldására több számítási módszer ismeretes. Ezek közül a módszerek közül a legszemléletesebbet, az erőmódszert fogjuk a mechanika tantárgy keretében ismertetni.

4.1.1 A statikailag határozatlan tartók hátrányai

A statikailag határozatlan tartók tervezése sokkal körülményesebb, mint a határozott tartóké. A kapcsolatokban keletkező erők a tartó méretétől és anyagától is függenek, tehát a méretezést először közelítően tudjuk csak elvégezni, a végleges méretek rendszerint csak többszöri közelítés után határozhatók meg. A tervezés tehát munkaigényesebb.

A határozatlan tartók további hátránya, hogy az egyéb hatások, a támaszponti süllyedésekből, a hőmérséklet-változásokból eredő alakváltozások a tartóban többletigénybevételt okoznak.

A tartó alakváltozása az E -nek, a rugalmassági tényezőnek is függvénye. Az E értéket előre meg kell terveznünk. A kivitelezés során a tényleges és tervezett anyagminőség eltérése a rugalmassági tényező különbségében mutatkozik meg. Ha az E értéke a kivitelezés során egyes tartórészeknél lényegesen megváltozik, a tervezés pontossága bizonytalanná válik.

4.1.2 A statikailag határozatlan tartók előnyei

A tartók biztonsága a tönkremenetellel szemben általában nagyobb, mint a méretezési eljárások során kimutatott biztonság.

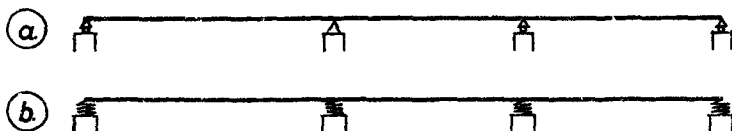
A határozatlan tartók általában merevebbek, mint a határozottak, ezért alakváltozásuk kisebb.

A határozatlan tartókban azonos terhek hatására kisebb igénybevételek keletkeznek, mint a hasonló méretű határozott tartókban, ezért gazdaságosabbak.

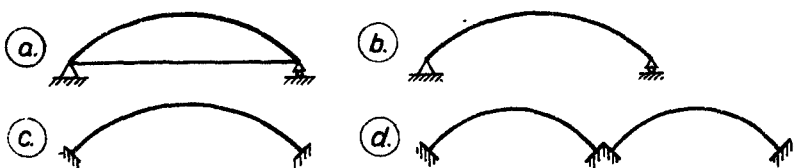
4.1.3 A statikailag határozatlan tartók osztályozása

A tartókat elsősorban alakjuk szerint osztályozzuk.

A folytatólagos tartók olyan gerendatartók, melyek kettőnél több helyen vannak alátámasztva. Megtámasztásuk szerint lehetnek fix (4.1. a ábra) és rugalmas (4.1. b ábra) alátámasztású tartók.



4.1 ábra

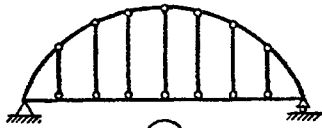


4.2 ábra

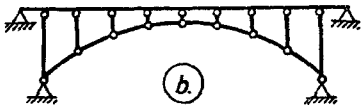
Statikailag határozatlan ívtartók a vonórudas, - (4.2. a ábra), a két-csuklós (4.2. b ábra), és a befogott ívek (4.2. c ábra). Ezek az ívek lehetnek több nyílásúak is (4.2. d ábra). Az ívtartó lehet önmagában labilis rudlanc is, melyet gerendával kell merevíteni. Ez a merevítőgerendás rudlanc (4.3 ábra), vagy más néven Langer-tartó. Ha a labilis ív csak három egyenes rúdból áll, elnevezése függesztőmű (4.4. a ábra), vagy feszítőmű (4.4. b ábra).

A függőtartó is labilis rudazat (lánc vagy kábel), melyet ráfüggesztett tartóval teszünk merevvé (4.5 ábra).

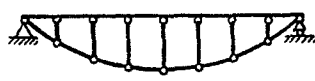
A keretek egymáshoz többnyire sarokmereven kapcsolt, egyenesen-gelyű rudakból állnak. A keret lehet nyitott vagy zárt. A keretlábak lehet-



a.

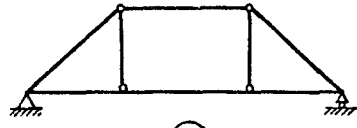


b.

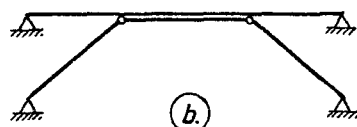


c.

4.3 ábra



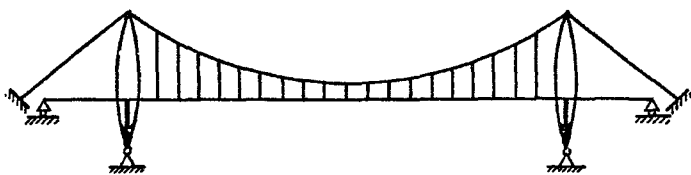
a.



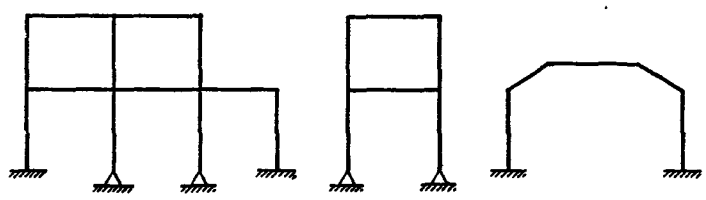
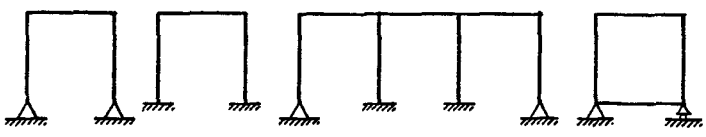
b.

4.4 ábra

nek mereven befogottak, vagy fix csuklóval megtámasztottak. A keret lehet egy vagy többnyílású, egy vagy többemeletes. Ilyen keretmegoldásokat mutat be a 4.6 ábra



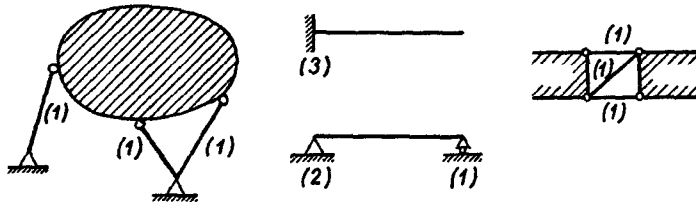
4.5 ábra



4.6 ábra

4.2 A statikai határozatlanság fokának meghatározása

A határozottság illetve határozatlanság fogalmát már a statikai tanulmányinkban megismertük, most megismételjük és kibővítjük az ott tanultakat. A merev megtámasztás. Valamely testnek a földhöz vagy más testhez való kapcsolatát akkor nevezzük merevnek, ha semmiféle erőhatásra nem következhet be elmozdulás. Már láttuk, hogy egy síkbeli merev test földhöz vagy egy másik testhez való merev kapcsolásához három, nem közös metszéspontu rud szükséges. A szükséges kényszerek fokszáma tehát egyenlő hárommal. Ez lehet pl. egy merev befogás vagy egy fix csukló és egy görgős alátámasztás együttesen. A 4.7 ábrán bemutatott kényszerek száma három. Az anyagi összefüggés is egy három fokszámú kényszernek felel meg.



4.7 ábra

Természetesen merev a megtámasztás akkor is, ha a kényszerek fokszáma nagyobb háromnál, de ez esetben a megtámasztás statikailag határozatlan.

A mereven kapcsolt szerkezeteket tartóknak nevezzük. Amennyiben a testek elmozdíthatóan kapcsolódnak egymáshoz, labilis szerkezet keletkezik, ilyen volt az eddigi tanulmányainkban a rudlánc, ezeket azonban nem nevezzük tartóknak.

A tartók akkor határozottak, ha a merevséget a lehető legkevesebb kényszerrel biztosítjuk. A statikailag határozott tartóknak az ismeretlen kapcsolóerők száma megegyezik a statikai egyenletek számával, egyetlen kapcsolat átvágásával labilis szerkezet keletkezik belőle.

A 4.8 ábrán látott statikailag határozott tartóknál egy kapcsolóelemet eltávolítva, labilis szerkezetet kapunk. A tartó kényszereiben vagy magában a tartót alkotó rudban átvágásokat létesítettünk, az első esetben a merev befogásból (3 ismeretlen) fix csuklót, (2 ismeretlen) gördülő alátámasztást (1 ismeretlen) hoztunk létre, a harmadik példában a tartó anyagi összefüggését jelentő három kapcsolórudból (3 ismeretlen) vágunk át egyet, és így egy két ismeretlent jelentő csukló keletkezett.

A tartón természetesen többszörös átvágást is létesíthetünk. Az egyszeres átvágás csak egyféle mozgást tesz lehetővé, például a merev befo-

gás helyén létrehozott csuklóban elfordulás keletkezhet, a csukló helyett létesített görgő vízszintes irányban eltolódhat. A kétszeres átvágásnál már kétféle elmozdulás is létrejöhet, pl. egy fix csukló elhagyásával vízszintes és függőleges eltolódás jöhet létre, amelyet eddig a fix csukló nem tett lehetővé. A háromszoros átvágásnál elfordulás és vízszintes, valamint függőleges eltolódás keletkezhet.

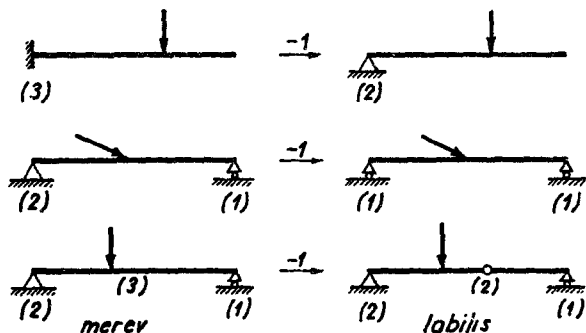
Az elvágás ugyanakkor lehetetlenné teszi az elmozdulás jellegének megfelelő dinám létrejöttét, a fix csuklóban nem keletkezhet nyomaték, a görgő nem vesz fel nyomatékot és vízszintes erőkomponenst.

Amennyiben egy merev test a földhöz vagy több merev test egymáshoz, illetőleg a földhöz több kényszerrel kapcsolódik, mint amennyi a merevséghez feltétlenül szükséges, határozatlan tartó keletkezik.

A statikailag határozatlan tartók lehetnek egyszerűen vagy többszörösen határozatlanok, ezt nevezzük a határozatlanság fokszámának.

A tartó annyiszorosán határozatlan:

- amennyivel több ismeretlen van, mint amennyi a statikai egyenletek száma, illetőleg
- ahányszor elvágást tudunk létrehozni anélkül, hogy a tartó labilissá válna.

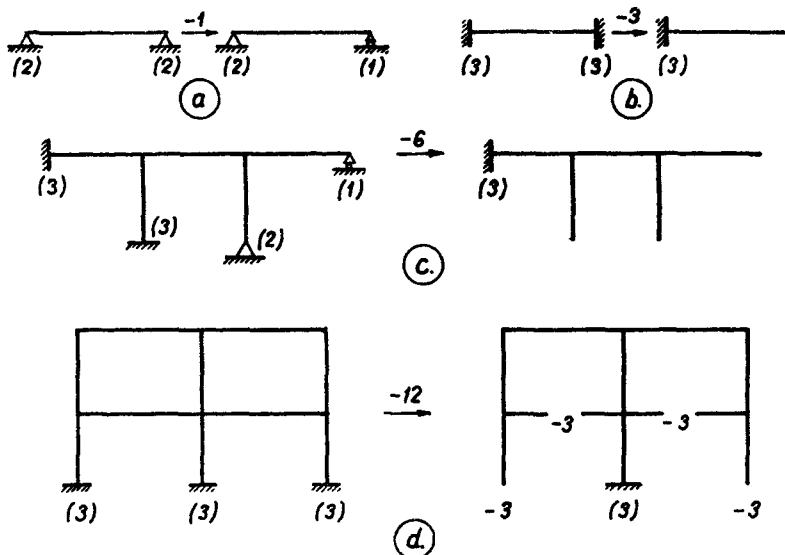


4.8 ábra

Ez a két meghatározás egyenértékű.

A határozatlansági fok megállapításának legegyszerűbb módja az, hogy annyi átvágást hozunk létre a tartón, hogy még egyetlen része se váljon labilissá. Az átvágások száma megadja a határozatlanság fokszámát. Ez a módszer egyaránt érvényes egyszerű és összetett tartókra, alkalmazható határozatlan rácsos tartók esetében is.

A 4.9 ábrán bemutatjuk, hogyan lehet átvágásokkal a határozatlanság fokszámát megadni.



4. 9 ábra

A 4.9.a ábrán egy fix csuklóból hoztuk létre a görgős csuklót, ez egyszeres átvágás, tehát a tartó egyszeresen határozatlan.

A 4.9.b ábrán egy merev befogást hagyunk el, ez háromszoros átvágást jelent, tehát a tartó háromszorosan határozatlan.

A 4.9.c ábrán egy merev befogást (3), egy csuklót (2), és egy görgős csuklót (1) hagyunk el, a tartó merev maradt, további átvágás már labilissá tenné.

Az összes átvágások száma $3+2+1 = 6$, tehát a tartó hatszorosan határozatlan.

A 4.9.d ábrán levő keret két merev befogását elhagyva, még további átvágásokat tudunk bevinni anélkül, hogy a tartó labilissá válna. Két helyen megszüntettük még az anyagi összefüggést, így a bevitt átvágások száma $2.3+2.3 = 12$, tehát a tartó tizenkétszeresen határozatlan.

Többszörösen összetett tartók esetében ez a módszer gondot okozhat, ezért egy másik módszert is bemutatunk a határozatlanság fokszámának meghatározására.

Az összetett tartót képzeletbeli átvágásokkal testekre bontjuk úgy, hogy minden egyes test külön-külön merev, és statikailag határozott legyen. Minden meglévő kapcsolaton keresztül vezetünk egy-egy átvágást jelző vonalat. A földet külön testnek tekintjük. Ezután megállapítjuk a kapott testeknek, valamint az őket összekapcsoló valódi és az átvágásokkal megszüntetett anyagi összefüggést pótló képzelet kapcsolórudak számát. Az anyagi összefüggés három, a csuklók két kapcsolórudat jelentenek. A többszörös csuklókat helyettesítő kapcsolórudak száma $2(t-1)$, ahol a t a többszörös

csukló által összekapcsolt testek száma. A zárt keretet egy helyen mindig át kell vágni, hogy mindig nyitott határozott tartót kapjunk.

Legyen az elválasztott részek száma k (a föld is egy külön tartó) és az átvágott rudak száma s .

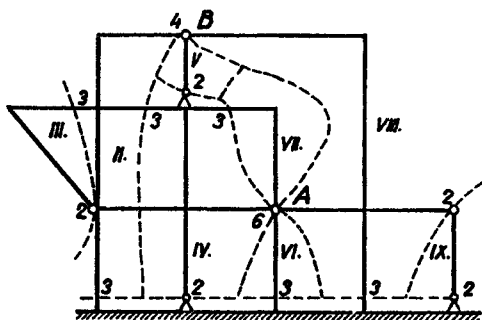
A szerkezet határozott, ha $s = 3(k-1)$. A fölös rudak száma adja a határozatlanság fokszámát

$$n = s - 3(k-1).$$

A 4.10 ábrán feltüntetett keret többszörösen összetett keret. A szerkezetben többszörös csuklók is vannak, az A jelű négy, a B jelű három testet kapcsol össze. Az A jelű csukló tehát $2(4-1) = 6$, a B jelű $2(3-1) = 4$ kapcsolórúddal helyettesíthető. A tartórészekre osztás után a földdel együtt kilenc egymástól független részt kapunk. A szükséges rudak száma $3(9-1) = 24$. Ezzel szemben az átvágott kapcsolórúdak száma:

$$s = 5 \times 2 + 7 \times 3 + 6 + 4 = 41. \text{ Tehát a határozatlanság foka:}$$

$$n = 41 - 24 = 17.$$



4.10 ábra

4.3 Az erőmódszer

Már az előzőekben megállapítottuk, hogy határozatlan tartók esetében a statikai egyenleteken kívül még további egyenleteket kell felírni, mert az ismeretlenek száma nagyobb, mint a statikai egyenletek száma. Az erőmódszer a kapcsolatokban keletkező ismeretlen nagyságu erőket (főlegesen kapcsolati erőket) határozza meg kinematikai egyenletek segítségével.

A statikailag határozatlan tartóban átvágunk annyi kapcsolórúdat, ahányszor határozatlan a tartó. Így statikailag határozott és merev tartót, az úgynevezett törzstartót kapjuk. A határozott törzstartó igénybevételeit és mozgásjellemzőit az eddigi ismereteink alapján meg tudjuk határozni.

A külső erők hatására az átvágások helyén az átvágott kapcsolati dinámnak megfelelő jellegű elmozdulás keletkezik, amely a határozatlan tartónál nem keletkezhett. Ezeket az elmozdulásokat a továbbiakban terhelési tényezőknak nevezzük. A terhelési tényezők száma megegyezik az átvágások számával. Ezek jelölése a_{i0} , ahol az i index az átvágás helyét jelöli, az o index a külső teherre utal. (A külső terhet, mint okot a továbbiakban mindig o indexszel jelöljük.)

A határozatlan tartón ezek a mozgások nem jöhetnek létre, mert a felesleges kényszerekben keletkező dinámok ezeknek létrejöttét megakadályozzák. A kényszerekben keletkező dinámok nagyságát nem ismerjük, ezért ezeket X_i -nek jelöljük. A határozatlan tartónak megfelelő mozgásállapot akkor jön létre, ha a törzstartóra a külső erőkön kívül az $X_1, X_2, X_3 \dots \dots X_1, \dots X_n$ dinámok is hatnak. Az X_i erőkből valamennyi átvágási helyen keletkeznek elmozdulások, melyeknek értékét nem tudjuk meghatározni, mivel az X_i erő ismeretlen. Meg tudjuk határozni azonban az $X_i = 1$ egységerőből (nyomatékból) keletkező elmozdulásokat, amelyeket a_{ki} -vel jelölünk.

A k index az átvágás helyét, az i index az elmozdulást okozó $X_i = 1$ egységerő helyét jelöli. Ezeket az egységerőből keletkező elmozdulásokat nevezzük egységtényezőknak.

Az átvágásokban az ismeretlen erőből keletkező elmozdulás:

$$\text{az 1. helyen: } X_1 a_{1i}$$

$$\text{a 2. helyen: } X_2 a_{2i}$$

$$\text{a k. helyen: } X_k a_{ki}$$

Mivel a határozatlan tartónál a kapcsolati dinámok a mozgást megakadályozzák, az átvágási helyeken jelentkező elmozdulások összege nullával egyenlő. Így tehát a csatlakozási egyenletek felírhatók.

$$a_{10} + X_1 a_{11} + X_2 a_{12} + \dots + X_i a_{1i} + \dots + X_n a_{1n} = 0$$

$$a_{20} + X_1 a_{21} + X_2 a_{22} + \dots + X_i a_{2i} + \dots + X_n a_{2n} = 0$$

⋮

$$a_{k0} + X_1 a_{k1} + X_2 a_{k2} + \dots + X_i a_{ki} + \dots + X_n a_{kn} = 0$$

⋮

$$a_{n0} + X_1 a_{n1} + X_2 a_{n2} + \dots + X_i a_{ni} + \dots + X_n a_{nn} = 0$$

A feltételi egyenletrendszer az X ismeretlen kapcsolati erőkre (nyomatékokra) nézve lineáris.

A megoldás lépései a következők:

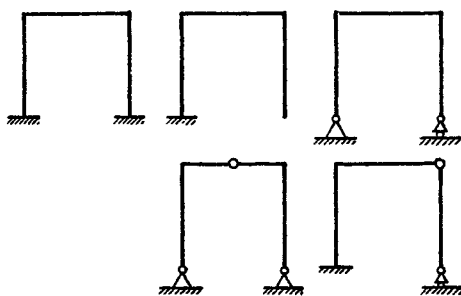
- a törzstartó felvétele,
- az egységtényezők meghatározása,
- a terhelési tényezők meghatározása,
- a feltételi egyenletrendszer felállítása és megoldása.

4.3.1 A törzstartó felvétele

A határozatlan tartót a fölös kapcsolati elemek átvágásával határozott és merev tartóvá, az ugynevezett törzstartóvá alakítjuk. Az átvágás igen sokféleképpen történhet.

A 4.11 ábrán látható keretet négyféleképpen alakítottuk át törzstartóvá.

- Az egyik merev befogást megszüntettük, így egyik végén befogott keretet kapunk.
- Az egyik merev befogásból egyszeres átvágással fix csuklót, a másikkól kétszeres átvágással görgős alátámasztást kapunk, így kéttámaszu keretet nyerünk.
- Mindkét merev befogást egyszeres átvágással fix csuklóvá alakítottuk, és a tartón tetszőleges helyen egyszeres átvágással belső csuklót hozunk létre, s így egy háromcsuklós keretet kapunk.
- Az egyik befogásból kétszeres átvágással görgőt, és tetszőleges helyen egyszeres átvágással belső csuklót hozunk létre, így egy Gerber-rendszerű keretet kapunk.



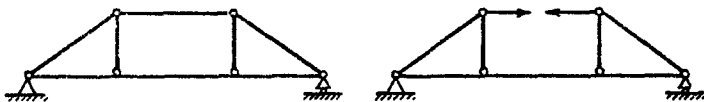
4.11 ábra

A belső csuklót elvileg bárhol felvehetjük, ezért az adott szerkezetnek végtelenül sok lehetséges törzstartója van. Ezek közül azonban a legelőszemből a legcélszerűbb törzstartót kell kialakítani a következő szempontok szerint:

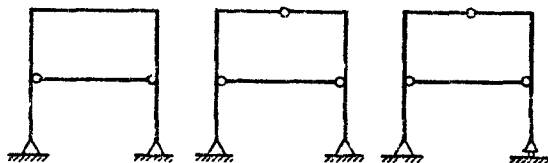
- Könnyen kezelhető határozott tartót kapjunk,
- Kihhasználjuk a terhelésből és elrendezéséből adódó szimmetriát,
- Olyan egyenetrendszerhez jussunk, melynek minél több együtthatója zérus.
- A törzstartó igénybevételeinek eloszlása és nagysága minél kevésbé térjen el a határozatlan tartótól.

Ha a tartó csak belsőleg határozatlan, akkor a tartón belül kell elvágást létrehozni, hiszen ilyenkor a tartónak a földhöz való kapcsolata merev és határozott. Ez látható a 4.12 ábrán.

A külsőleg és belsőleg határozatlan tartónál először mindig a belső határozatlanságot kell megszüntetni. Ez látható a 4.13 ábrán.



4.12 ábra



4.13 ábra

4.3.2 Az egységtényezők meghatározása

Az egységtényezők az átvágási helyeken belktatott egységterőkből keletkező kapcsolati mozgások.

Ezek a mozgások lehetnek abszolút mozgások, melyek a föld és a tartó között megszüntetett kapcsolat helyén keletkeznek, vagy relatív mozgások, ha két tartórész között szüntetünk meg kapcsolórudat. A mozgás lehet elfordulás, vagy eltolódás aszerint, hogy a megszüntetett kényszer nyomaték vagy erő felvételére alkalmas. Az egységtényezők kizárólag a tartó méretétől függenek, és a tartónak éppen úgy állandói, mint a keresztmetszeti terület, vagy inercianyomaték. Az egységtényezők tehát mindenféle terhelési esetre felhasználhatók.

Meghatározásuk történhet bármely eddig tanult módszerrel, de a legcélszerűbben munkatétel segítségével. A k helyen keletkező elmozdulás

az l helyen beiktatott egység erő hatására az általános munkatétel alapján, tömör tartó esetén:

$$l_k a_{kl} = \int_0^l \frac{M_k M_l}{EJ} dz + \int_0^l \frac{N_k N_l}{EA} dz + \varphi \int_0^l \frac{T_k T_l}{GA} dz,$$

és rácsos tartónál:

$$l_k a_{kl} = \sum_{(l)} \frac{S_k S_l}{EA} s$$

egyenletekből határozhatók meg, ahol M_k, T_k, N_k, S_k az l_k egység erőből, M_l, N_l, T_l, S_l az l_l egység erőből keletkező igénybevételeket jelentik.

Ha $l \neq k$, akkor az idegen munkák tételét használjuk, ha $l = k$, akkor a meghatározás saját munkával történik.

Az esetek többségében a normálerőből keletkező elmozdulások elhagyhatók. A nyíróerőből keletkező elmozdulásokat minden esetben elhanyagoljuk.

Számítástechnikailag előnyös egységtényezőként az elmozdulás nagyságát venni, ha EJ állandó a tartóban.

4.3.3 A terhelési tényezők meghatározása

A törzstartón az adott teherből (terhelő erők és egyéb hatások) az elvágási helyeken keletkező elmozdulások a terhelési tényezők. Ezek az egységtényezőkhöz hasonló módon lehetnek abszolút és relatív elfordulások és eltolódások. A terhelési tényezők nemcsak a tartó méreteitől, hanem a terhektől is függenek.

Kiszámításuk legcélszerűbben munkatétellel történik, tömör tartónál:

$$l_l a_{lo} = \int_0^l \frac{M_l M_o}{EJ} dz + \int_0^l \frac{N_l N_o}{EA} dz + \varphi \int_0^l \frac{T_l T_o}{GA} dz,$$

rácsos tartónál pedig:

$$l_l a_{lo} = \sum_{(l)} \frac{S_l S_o}{EA} s \text{ képlettel,}$$

ahol az i helyen beiktatott egységérő végez munkát a külső teherből keletkező alakváltozás mentén. A képletekben M_i, T_i, N_i, S_i az i helyen beiktatott egységérőből, az M_o, T_o, N_o, S_o a külső erőkől ugyanezen a helyeken keletkező belső igénybevételek. Természetesen abban az esetben, ha az egységtényezőnél az EJ -vel nagyított értéket határoztuk meg, itt is ezt kell alkalmazni, hogy a kapcsolati feltételi egyenletbe azonos dimenziójú mennyiségek kerüljenek.

Statilailag határozatlan tartóban hőmérséklet-változás és a támaszpontok egyenlőtlen süllyedése is okozhat igénybevételeket.

Az egyenletes hőmérsékletváltozásból az egyenes tengelyű törzstartón csak normál irányú alakváltozás keletkezik, a fajlagos eltolódás értéke: $\varepsilon = \alpha_t \Delta t$, ahol α_t a hőtágulási együttható, Δt pedig a hőmérséklet-változás. Az elmozdulást itt is munkatétellel tudjuk a legegyszerűbben felírni, ahol az l_i egységérőből keletkező normálérő N_i végez munkát a hőmérséklet-változásból keletkező alakváltozás mentén. Itt is célszerű a nagyított értéket meghatározni.

Tömör tartó esetén:
$$a_{it} = EJ_o \int_0^l N_i \alpha_t \Delta t dz \text{ és}$$

rácsos tartó esetén:
$$a_{it} = EAo \sum_{(l)} S_i \alpha_t \Delta t \text{ s.}$$

Egyenlőtlen hőmérsékletváltozás esetén feltéve, hogy a hőmérséklet-változás lineáris eloszlású, a törzstartóban normálirányú megnyulás és elfordulás keletkezik.

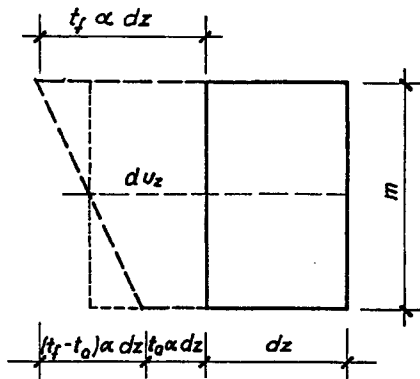
A 4.14 ábra alapján a fajlagos elfordulás

$$k = \alpha_t \frac{t_f - t_a}{m},$$

a fajlagos megnyulás:

$$\varepsilon = \alpha_t \frac{t + t_f}{2}, \text{ ahol } t_a \text{ az al-}$$

só, és t_f a felső szálban keletkező hőmérséklet, m pedig a tartó magassága. A terhelési tényező felírható belső idegen munkaként:



4.14 ábra

$$a_{it} = EJo \left[\int_0^l \frac{M_i \alpha_t (t_f - t_a)}{m} dz + \int_0^l N_i \alpha_t \frac{t_f + t_a}{2} dz \right].$$

A támaszpontok mozgása következtében a határozatlan tartókban igénybevételek keletkezhetnek. Valamely támasz adott Δm jelű elmozdulásából keletkező terhelési tényezőt az l_i egységérő munkájaként határozhatjuk meg. A törzstartó határozott tartó, azon a támaszponti mozgás nem okoz sem igénybevételt sem alakváltozást, ezért a külső és belső munka nullával egyenlő.

A külső munkát felírva $\sum B_{mi} \Delta m + l_{iis} a_{is} = 0$, ahol B_{mi} az l_i egységérőből keletkező reakcióerő az m helyén. Így a terhelési tényező:

$$a_{is} = -EJo \sum B_{mi} \Delta m.$$

4.3.4 A feltételek egyenletrendszeri felállítása és megoldása

Az egység- és terhelési tényezők ismeretében az X_i ismeretlen kapcsolati erőkre felállítható egy lineáris egyenletrendszer, a csatlakozási feltételi egyenletrendszer. Ezen egyenletrendszer minden egyenlete egy-egy mozgás nullértékűségét fejezi ki. Minden elvágási helyre felírható, hogy ott a külső teherből és az ismeretlen kapcsolati erőkből együttesen keletkező elmozdulás egyenlő zérussal. Az n egyenlet éppen elegendő az n darab ismeretlen X_i erő meghatározására.

Az egyenletrendszer általános alakja:

$$a_{10} + a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n = 0$$

$$a_{20} + a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n = 0$$

⋮

$$a_{n0} + a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \dots + a_{nn} X_n = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása a matematikában tanult módszerek segítségével történhet. Ezek egyikét a determinánsokat alkalmazva:

$$X_1 = \frac{D_1}{D} \quad X_2 = \frac{D_2}{D} \quad X_n = \frac{D_n}{D}$$

ahol

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} -a_{10} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{20} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n0} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{10} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -a_{20} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & -a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & -a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & -a_{20} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & -a_{n0} \end{vmatrix}$$

A determinánsok számítása matematikából ismert. Háromnál több ismeretlen esetében azonban a módszer igen hosszadalmas, ilyenkor a határozatlan tartó megoldására más módszert alkalmazunk. A több ismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldására kiválóan alkalmas a számítógépekre programozható mátrix számítás.

4.3.5 Az egyszerűen határozatlan tartó megoldása

Példaként oldjuk meg a 4.15 ábrán látható egyszerűen határozatlan tartót.

A tartón az EJ érték állandó. A törzstartót úgy alakítjuk ki, hogy elvesszük a B támaszt a tartó alól, ezzel egy mereven befogott konzol keletkezik. Az ismeretlen X_1 a B támaszban keletkező függőleges erő. A csatlakozási egyenlet szerint a B pont függőleges eltolódása egyenlő lesz nullával.

Az egységtevező a B támasz helyén keletkező függőleges eltolódás nagyított értéke az l_1 egységereő hatására. Munkatétellel meghatározva:

$$a_{11} = \int_0^l M_1^2 dz = \frac{l^2}{2} \frac{2l}{3} = \frac{l^3}{3} \quad [m^3]$$

A terhelési tényező a B támasz helyén a teher hatására keletkező függőleges eltolódás nagyított értéke. Munkatétellel meghatározva:

$$a_{10} = \int_0^l M_1 M_0 dz = \frac{F\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell 5}{6} = \frac{5 F \ell^3}{48} \quad [\text{kNm}^3]$$

A csatlakozási feltételi egyenlet:

$$a_{11} X_1 + a_{10} = 0$$

$$\frac{\ell^3}{3} X_1 + \frac{5 F \ell^3}{48} = 0$$

$$X_1 = -\frac{5}{16} F$$

A B támasznál tehát egy felfelé mutató $\frac{5}{16} F$ nagyságu erő keletkezik a határozatlan tartón.

A további reakciók a statikai egyenletekből kiszámíthatók:

$$\sum F_{iy} = + A + F - \frac{5}{16} F = 0$$

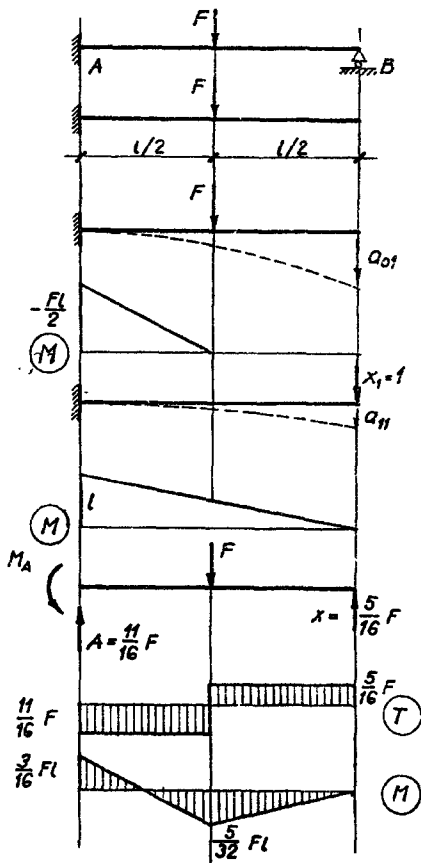
$$A = -\frac{11}{16} F, \text{ felfelé mutat.}$$

$$M_i^{(A)} = M_A + \frac{F\ell}{2} - \frac{5}{16} F\ell = 0$$

$$M_A = -\frac{3}{16} F\ell.$$

A középső keresztmetszetben a nyomaték jobbról számítva:

$$M_k = \frac{5}{16} F\ell \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32} F\ell.$$

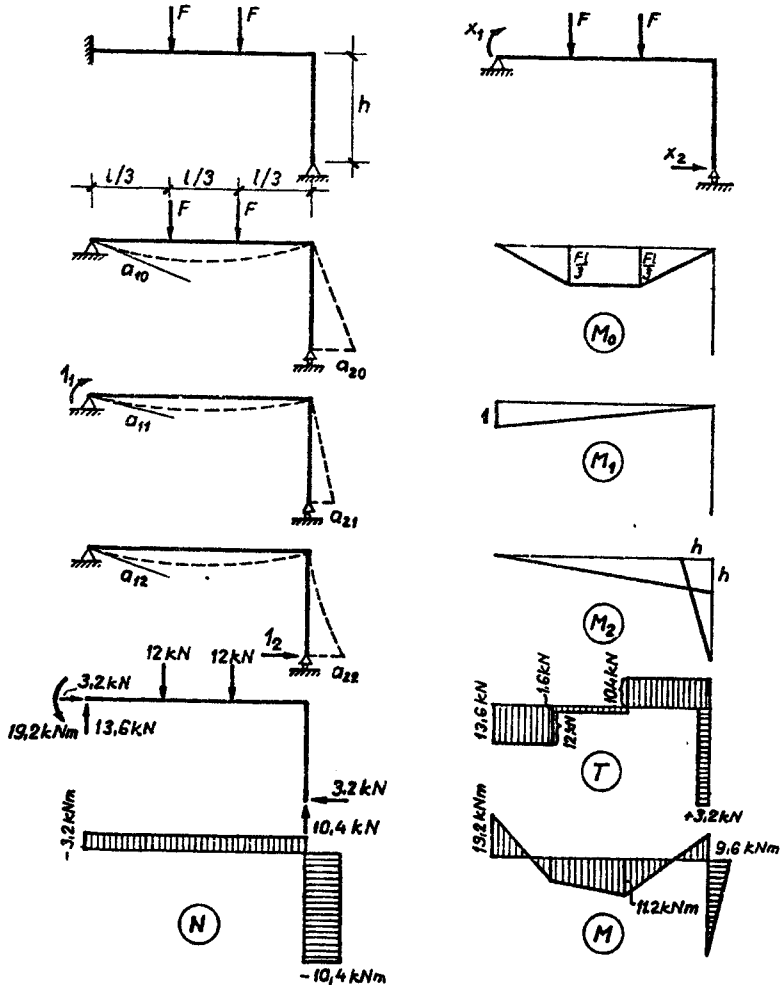


4.15 ábra

Az adatok ismeretében már megrajzolhatjuk a határozatlan tartó igénybevételi ábráit.

4.3.6 A kétszeresen határozatlan tartó megoldása

Oldjuk meg a 4.16 ábrán látható kétszeresen határozatlan tartót, és készítsük el az igénybevételi ábráit.



4.16 ábra

A tartó merev befogással és fix csuklóval megtámasztott keret, az EJ értéke állandó. A törzstartó kéttámaszu keret lesz, úgyhogy a merev befogásból egyszeres átvágással fix csuklót, a csuklóból szintén egyszeres átvágással görgős alátámasztást nyertünk. A fix csuklónál l_1 nyomatékot,

a görgőnél 1_2 vízszintes erőt iktatunk be az egységtényezők meghatározásához, az eredeti kényszerek által gátolt mozgásoknak megfelelően. Az egységtényezőket ismét munkatétellel határozzuk meg. Az A pontnál keletkező támaszponti szögforgás az 1_1 nyomaték hatására a_{11} , az 1_2 hatására a_{12} . A B támasznál jelentkező vízszintes eltolódás az 1_1 nyomaték hatására a_{21} , az 1_2 hatására a_{22} .

Az egységtényezők számítása:

$$a_{11} = \int_{(A)}^{(B)} M_1^2 dz = \frac{\ell}{2} \frac{2}{3} = \frac{\ell}{3} \quad (M_1 \text{ ábrából}) \quad [m]$$

$$a_{12} = \int_{(A)}^{(B)} M_1 M_2 dz = \frac{h\ell}{2} \frac{1}{3} = \frac{h\ell}{6} \quad (M_1 \text{ és } M_2 \text{ ábrából}) \quad [m^2]$$

$$a_{22} = \int_{(A)}^{(B)} M_2^2 dz = \frac{h\ell}{2} \frac{2h}{3} + \frac{h^2}{2} \frac{2h}{3} = \frac{h^2}{3} (\ell+h) \quad (M_2 \text{ ábrából}) \quad [m^3]$$

$$a_{21} = \int_{(A)}^{(B)} M_1 M_2 dz = \frac{\ell}{2} \frac{h}{3} = \frac{h\ell}{6} \quad (M_1 \text{ és } M_2 \text{ ábrából}) \quad [m^2]$$

Természetesen $a_{12} = a_{21}$ Betti-tétele alapján.

A terhelési tényezők számítása:

$$a_{10} = \int_{(A)}^{(B)} M_0 M_1 dz = \frac{F\ell}{3} \frac{4\ell}{3.2} \frac{1}{2} = \frac{F\ell^2}{9} \quad (M_0 \text{ és } M_1 \text{ ábrából}) \quad [kN m^2]$$

$$a_{20} = \int_{(A)}^{(B)} M_0 M_2 dz = \frac{F\ell}{3} \frac{4\ell}{3.2} \frac{h}{2} = \frac{F\ell^2}{9} h \quad (M_0 \text{ és } M_1 \text{ ábrából}) \quad [kN m^3]$$

Miután a tényezőket meghatároztuk, felírhatjuk a csatlakozási feltételi egyenleteket. Az egyik egyenlet kimondja, hogy az A ponton az elfordulás egyenlő nullával, a másik szerint a B pont vízszintes eltolódása nulla.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{10} = 0$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{20} = 0$$

$$X_1 \frac{\ell}{3} + X_2 \frac{\ell h}{6} + \frac{F \ell^2}{9} = 0 \quad [\text{kN m}^2]$$

$$X_1 \frac{h\ell}{6} + X_2 \frac{h^2}{3} (\ell + h) + \frac{F \ell^2}{9} h = 0 \quad [\text{kN m}^3]$$

A két egyenlet megoldható, ha behelyettesítjük F , ℓ , h számszerű értékeit. Az X_1 az A támaszponti nyomatékot, az X_2 a B támaszponti reakció vízszintes vetületét adja meg. Az A támaszerő, valamint a B támaszerő függőleges összetevője a statikai egyenletekből kiszámítható. Ha ismerjük a reakciók számszerű értékeit, az igénybevételi ábrák megrajzolhatók.

Oldjuk meg a példát a következő számadatokból:

$$F = 12 \text{ kN} \quad h = 3 \text{ m} \quad \ell = 6 \text{ m}$$

$$a_{11} = \frac{\ell}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad [\text{m}]$$

$$a_{12} = \frac{h\ell}{6} = \frac{3 \cdot 6}{6} = 3 \quad [\text{m}^2]$$

$$a_{22} = \frac{h^2}{3} (\ell + h) = \frac{3^2}{3} (6+3) = 27 \quad [\text{m}^3]$$

$$a_{10} = \frac{F \ell^2}{9} = \frac{12 \cdot 6^2}{9} = 48 \quad [\text{kN m}^2]$$

$$a_{20} = \frac{F \ell^2}{9} = \frac{12 \cdot 6^2}{9} \cdot 3 = 144 \quad [\text{kN m}^3]$$

$$2 X_1 + 3 X_2 + 48 = 0$$

$$3 X_1 + 27 X_2 + 144 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 27 \end{vmatrix} = 45 \quad X_1 = -\frac{864}{45} = -19,2 \text{ kN m}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -48 & 3 \\ -144 & 27 \end{vmatrix} = -864 \quad X_2 = -\frac{144}{45} = -3,2 \text{ kN}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -48 \\ 3 & -144 \end{vmatrix} = -144$$

Statikai egyenletek:

$$X_1 + A_x - 3,2 = 0 \quad A_x = 3,2 \text{ kN}$$

$$M_A = -19,2 + 12,2 + 12,4 - 6 \cdot B_y + 3,2 \cdot 3 = 0$$

$$B_y = 10,4 \text{ kN}$$

$$Y_1 = +12 + 12 - 10,4 + A_y = 0$$

$$A_y = 13,6 \text{ kN}$$

4.3.7 A rudakkal megerősített tartó megoldása

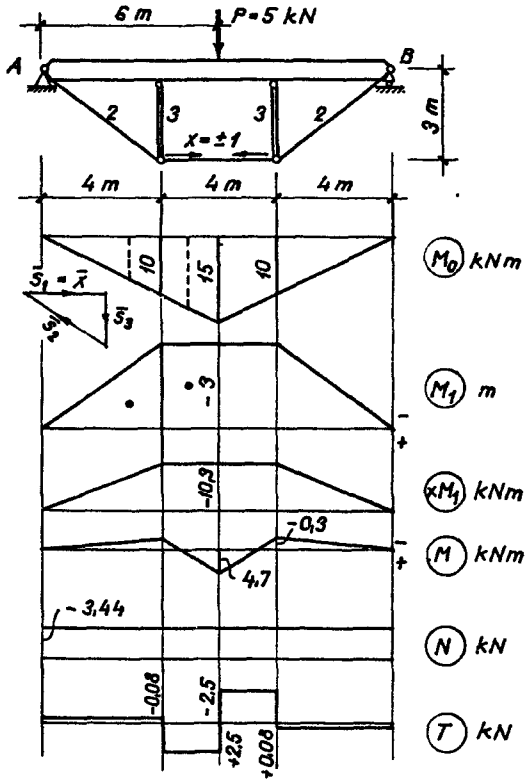
Határozzuk meg a 4.17 ábrán látható feszítőműves tartó igénybevételeit. A tartó külsőleg határozott, belsőleg egyszeresen határozatlan.

A törzstartót úgy alakítjuk ki, hogy a feszítőmű alsó rudját átvágjuk.

A terhelési tényező az átvágott rudvégek relatív eltolódása a teher hatására. Ezt az idegen munkák tételével tudjuk meghatározni. Az átvágott rudvégekre egységerőkkel álló, egyensúlyban levő erőrendszert helyezünk, ez végez munkát a teher hatására keletkező relatív eltolódással. A számítás során a ruderők hatására keletkező nyúlásokat most nem szabad elhanyagolni, mert hatásuk jelentős.

A terhelési tényező tehát:

$$a_{10} = \int_0^l \frac{M_o M_1}{EJ} dz + \sum \frac{S_{1o} S_{1l}}{EA} s_i$$



4.17 ábra

Az egységtényező az elvágott rudvégek relatív eltolódása az egység-erők hatására. Ezt a saját munka tételével határozhatjuk meg:

$$a_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2}{EJ} dz + \sum \frac{S_{11}^2}{EA} s_1$$

A csatlakozási egyenlet:

$$a_{10} + a_{11} X_1 = 0.$$

Itt X_1 az átvágott rudban keletkező erő.

A példát oldjuk meg a következő adatokkal:

A gerenda adatai: $E = 1000 \text{ kN/cm}^2$ (fa)

$$J = 8,10^4 \text{ cm}^4$$

A rudak adatai: $E_o = 21000 \text{ kN/cm}^2$ (acél)

$$A_1 = A_2 = 1,13 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 10 \text{ cm}^2$$

A merevségi tényezők: $EJ = 8,10^7 \text{ kN cm}^2 = 8,10^3 \text{ kN m}^2$

tényezők:

$$E_a A_1 = 2,37 \cdot 10^4 \text{ kN}$$

$$E_o A_3 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ kN.}$$

A terhelési tényezőnél a második tag nullával egyenlő, mert a törzstartón a teherből nem keletkezik erő, az első tag a nyomatéki ábrából számítható:

$$a_{10} = \frac{-2}{8,10^3} \left(\frac{3,4}{2} 66,7 + 3 \cdot 2 \cdot 125 \right) = -0,287 \text{ m}$$

Az egységtényező első tagját az M_1 nyomatékábrából, a másikat a ruderőkből számíthatjuk:

$$a_{11} = \frac{2}{8,10^3} \frac{3,4}{2} \frac{2}{3} 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{2,37 \cdot 10^4} (1^2 \cdot 4 + 1,25^2 \cdot 5) +$$

$$+ \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (2 \cdot 0,75^2 \cdot 3) = 0,00835 \text{ m/kN}$$

A csatlakozási egyenlet:

$$0,00835 X - 0,287 = 0$$

$$X = + \frac{0,237}{0,00835} = + 34,4 \text{ kN}$$

A nyomaték szuperpozícióval számítható:

$$M = M_o + X M_1.$$

A ruderőket is egymásra halmozással számíthatjuk:

$$S_i = S_{i0} + X S_{i1} .$$

Jelen esetben $S_{i0} = 0$, mert a külső erőből nem keletkeznek ruderők

A ruderők: $S_1 = 34,4 \cdot 1 = + 34,4 \text{ kN}$

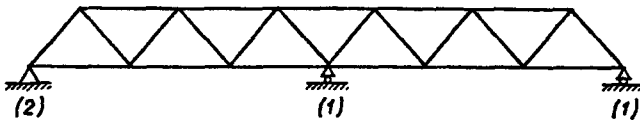
$$S_2 = 34,4 \cdot 1,25 = + 42,9 \text{ kN}$$

$$S_3 = -34,4 \cdot 0,75 = - 25,8 \text{ kN}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk. Az igénybevételeket a 4.17 ábráról leolvashatjuk.

4.4 A statikailag határozatlan rácsos tartók megoldása erőmódszerrel

A rácsos tartók esetében is kétféle határozatlanság lehetséges. A rendszerbeli határozatlanság abból származik, hogy a tartót alkotó határozott rácsos tartórészek földhöz vagy más tartórészekhez való kapcsolatában fölös rudak vannak. A tartó belsőleg határozott, de külsőleg határozatlan. Lásd a 4.18 ábrán levő tartót, amelynél a külső kapcsolatok fokszáma $f = 4$, a tartó belsőleg határozott és merev $r = 2c - 3$ (ahol r = rudak száma, c = csuklók száma: $23 = 2 \cdot 13 - 3$).



4.18 ábra

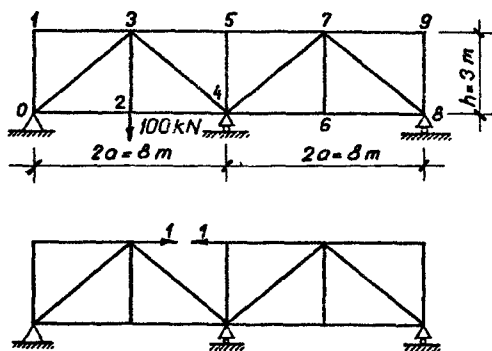
A rácsos szerkezetbeli határozatlanság abból származik, hogy a rudak száma nagyobb, mint a $2c-3$ érték, ilyenkor a tartó belsőleg határozatlan. Ilyenek pl. a kétszeres rácsos tartók.

A kétféle határozatlanság együtt is előfordulhat, tehát lehet egy rácsos tartó külsőleg és belsőleg egyaránt határozatlan.

4.4.1 A határozatlan rendszerű, határozott rácozású tartók megoldása

A megoldás a már begyakorolt módon történik. Törzstartóvá alakítjuk a tartót valamilyen támasztórud, vagy belső rud átvágásával, és az átvágás helyére felírjuk az egyensúlyi feltételi egyenletet. A számítás csak abban különbözik a tömör határozatlan tartó számításától, hogy az egység és terhelési tényezőket a rácos tartó alakváltozásából kell kiszámítani.

A számítás menetét egy számpéldán is bemutatjuk. A 4.19 ábrán adott egy belsőleg határozott, külsőleg egyszeresen határozatlan rácos tartó. A tartót a 3-5 rud átvágásával két egymástól független kéttámaszu rácos tartóra bontottuk, ez lesz a törzstartó. Az átvágott rud helyén a teher hatására fellépő relatív eltolódás a terhelési tényező, az egységérők hatására keletkező relatív eltolódás az egységtényező.



4.19 ábra

A terhelési tényezőt és az egységtényezőt munkatétellel határozzuk meg.

$$a_{10} = \sum_{i=1}^{16} \frac{S_{i0} S_{i1}}{EA} s_i \quad \text{és}$$

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{16} \frac{S_{i1}^2}{EA} s_i$$

A csatlakozási egyenlet kimondja, hogy az átmetszés helyén a relatív eltolódás egyenlő zérussal:

$$a_{11} X_1 + a_{10} = 0.$$

4.1 táblázat

Rud jele	A_i m ²	S_i m	S_{i0} kN	S_{i1} 1	$\frac{S_{i0} S_{i1} s_i}{A}$ kN m ⁻¹	$\frac{S_{i1}^2 s_i}{A}$ m ⁻¹	$X_i S_{i1}$ kN	S_i kN
0-2	0,02	4	66,7	- 0,5	- 6670	50	- 4,80	+ 61,9
2-4	0,02	4	66,7	- 0,5	- 6670	50	- 5,80	+ 61,9
1-3	0,02	4	0	0	0	0	0	0
3-5	0,02	4	0	+ 1,0	0	200	+ 9,7	+ 9,7
0-3	0,01	5	- 83,3	+ 0,625	- 26050	195	+ 6,0	- 77,3
3-4	0,01	5	- 83,3	- 0,625	+ 26050	195	- 6,0	- 89,3
0-1	0,01	3	0	0	0	0	0	0
2-3	0,01	3	+100,0	0	0	0	0	+100
4-5	0,01	3	0	0	0	0	0	0
6-7	0,01	3	0	0	0	0	0	0
8-9	0,01	3	0	0	0	0	0	0
4-7	0,01	5	0	- 0,625	0	195	- 6,0	- 6,0
7-8	0,01	5	0	+ 0,625	0	195	+ 6,0	+ 6,0
5-7	0,02	4	0	+ 1,0	0	200	+ 9,7	+ 9,7
7-9	0,02	4	0	0	0	0	0	0
4-6	0,02	4	0	- 0,5	0	50	- 4,8	- 4,8
6-8	0,02	4	0	- 0,5	0	50	- 4,8	- 4,8
					- 13330	1380		

Ebből az $X_i = S_{35}$ ismeretlen ruderő kiszámítható. A többi ruderő már szuperpozícióval meghatározható az

$$S_i = S_{i0} + X_i S_{i1} \text{ képlet alapján.}$$

A számítás itt is táblázatosan végezhető, mint ahogyan a rácsos tartó alakváltozásainál már tanultuk.

A ruderők rész-számítását nem közöltük. A rudak keresztmetszeti területét a táblázat tartalmazza.

Az összegzések alapján

$$a_{10} = - 13330 \quad \text{kN m}^{-1}$$

$$a_{11} = 1380$$

Az egyenlet: $-13330 + 1380 X = 0$ és ebből

$$X = \frac{13330}{1380} = 9,67 \text{ kN.}$$

A ruderők számítását a 4.1 táblázat tartalmazza.

4.4.2 A határozott rendszerű, határozatlan rácsos tartó megoldása

A reakciók meghatározása egyszerű, mert külsőleg határozott merev testnek tekintjük a szerkezetet.

A ruderők meghatározása erőmódszerrel történik. A felesleges rudat átvágjuk, és ezáltal kialakul a törzstartó. Az átvágott rudban a külső erő hatására keletkező relatív eltolódás a terhelési tényező, az átvágási helyen felvett ± 1 egyensúlyban levő rendszer hatására keletkező relatív eltolódás az egységtényező. Az egyensúlyi egyenlet kimondja, hogy az átvágás helyén a relatív eltolódások összege nulla. Természetesen ez annyi egyenletet ad, ahány felesleges rudat átvágtunk.

Az általános megoldással nem foglalkozunk, mert az a már ismertett táblázat felhasználásával egyszerűen elvégezhető, inkább egy gyakran előforduló határozatlan rácsos szerkezet, az andráskereszt megoldását ismertetjük.

Az andráskereszt vagy más néven X rácsos tartó az állványok, oszlopok merevítéseként és szélrácsoszasaként gyakran előforduló szerkezet, általában közelítő eljárással oldjuk meg.

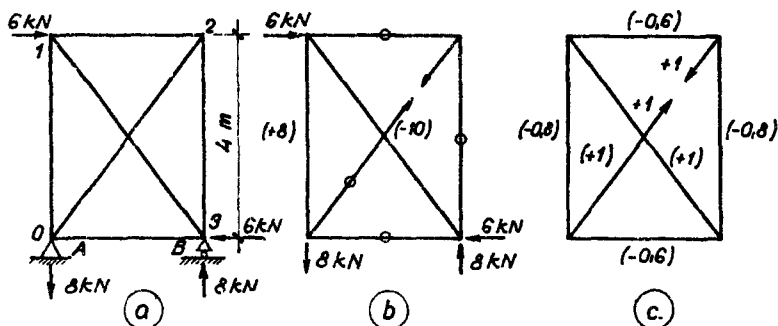
A közelítő eljárás abból indul ki, hogy az egymást keresztező két rácsrudban keletkező ruderő egyenlő. Érdeemes megvizsgálni tehát egy példán, hogy ez a két erő a valóságban mennyire tér el egymástól.

Számítsuk ki a 4.20 ábrán levő belsőleg határozatlan rácsos tartó ruderőit. Az egyszerűség kedvéért a keresztmetszeti területek legyenek egyenlő nagyok. A tartó belsőleg egyszerűen határozatlan, mert az egyik összekötő rud felesleges, a tartó nélküli is merev. Az egyszerűen határozatlanságot megkapjuk akkor is, ha feltételezzük, hogy a rácsrudak csatlakozásánál csukló van, mert a rudak száma

$$8 > 2c - 3 = 2,5 - 3 = 7.$$

A számításnál feltételezett csukló elhagyható, mert a két-két félrudban keletkező erőnek egyenlőnek kell lenni a csomópont egyensúlya miatt.

A törzstartót úgy alakíthatjuk ki, hogy az egyik ferde rácsrudat átvágjuk. A törzstartó hálózatára a 4.20.b ábrán felrajzoltuk a külső erő ha-



4.20 ábra

tására keletkező erőket. A 4.20.c ábrán felrajzoltuk a hálózatra az egységérből keletkező ruderőket. A számítás fejben elvégezhető, részletesen nem foglalkozunk vele.

A terhelési tényező:

$$a_{10} = \sum S_{i0} S_{i1} s_i = -8.0,8.4 - 10.1.5 = -75,6 \text{ m kN.}$$

Az egységtényező:

$$a_{11} = \sum S_{i1}^2 s_i = 2 (0,6^2 \cdot 3 + 0,8^2 \cdot 4 + 5) = 17,28 \text{ m.}$$

Felírjuk a csatlakozási egyenletet:

$$-75,6 + 17,28 X_1 = 0$$

$$X_1 = \frac{75,6}{17,28} = 4,375 \text{ kN.}$$

Tetszőlegesen bármely ruderő számítható az

$$S_i = S_{i0} + X_1 S_{i1} \text{ képletből.}$$

Az egyik ferde rudnál:

$$S_{13} = -10 + 1.4.375 = -5,625 \text{ kN értéket}$$

kapunk, a másiknál

$$S_{o2} = 0 + 4,374 = 4,375 \text{ kN ruderőt.}$$

A két ruderő abszolút értéke egymástól igen nagy mértékben eltér. Ennek elsősorban az az oka, hogy a vízszintes erőt a B csukló veszi fel, az A ponton mozgó saru van.

A gyakorlatban tárgyalt tartók megtámasztása külsőleg is határozatlan, az A ponton is csukló van. Ebben az esetben az eltérés lényegesen kisebb.

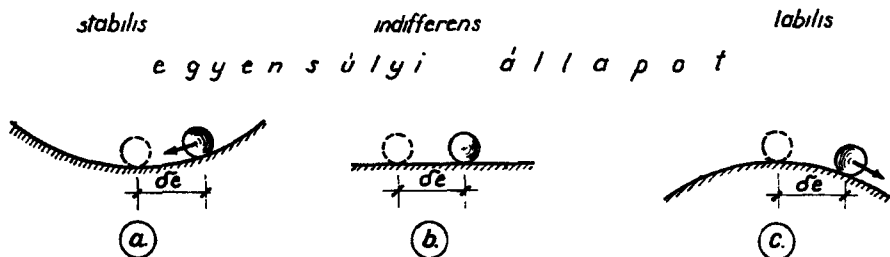
5. STABILITÁS

5.1 A tartószerkezetek stabilitásáról általában

A szilárdságtanban az eddigiek során a szerkezetekben és a testekben létrejövő feszültségek és alakváltozások meghatározásával foglalkoztunk. Ugy tekintettük, hogy ha a legnagyobb feszültségek (igénybevételek), illetőleg alakváltozások (elmozdulások) egy meghatározott értéket elérnek, akkor a szerkezet szilárdsági, illetőleg alakváltozási határállapotba kerül. A tervezést vagy méretezést ezeknek a rendeltetészerű használat megszűnését jelentő határállapotoknak az alapján végeztük el. A szilárdsági határállapot csak a szerkezet bizonyos adataitól: keresztmetszeti területtől, keresztmetszeti modulustól, σ_{eng} megengedett feszültségtől függ. Ezeket szilárdsági jellemzőknek nevezhetjük. Nem függenek viszont a tartó merevségét meghatározó merevségi jellemzőktől, elsősorban a rugalmassági modulus, illetve hajlított tartóknál az EI hajlítási merevség nagyságától. Ezért van fontos szerepe az alakváltozási határállapot vizsgálatának.

Bekövetkezhet olyan állapot is, amelynél a feszültségek és az alakváltozások a megengedett mértéket még nem érik el, a szerkezet, illetve a test mégsem tudja betölteni rendeltetését, mivel a létrejött állapotban az egyensúlyi stabilitása megszűnik, azaz instabil egyensúlyi állapot jön létre. Ezt az állapotot stabilitási határállapotnak nevezzük.

A stabilitás jelenségének jobb megértése céljából ismerkedjünk meg az egyensúlyi állapot három jellegzetes esetével. Az 5.1 ábrán látható golyó megáll mindhárom berajzolt helyen, tehát mindegyik esetben egyensúlyi állapotban van. Csakhogy ezek az egyensúlyi állapotok élesen különböz-



5.1 ábra

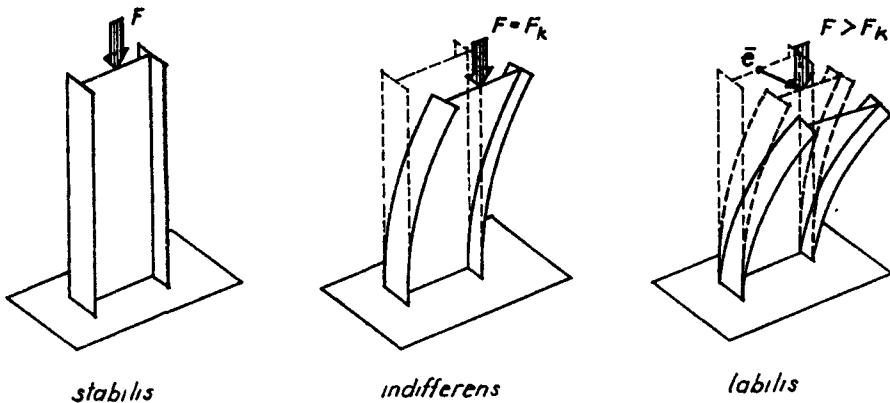
nek egymástól. Ugyanis a golyó helyéről kissé kizozditva és ott magára hagyva különbözőképpen viselkedik. Az a) esetben visszagurul eredeti helyére, a b) esetben megmarad új helyzetében a c) esetben pedig elgurul. Ennek megfelelően az egyensúlyi állapot:

- stabilis (biztos), ha a szerkezet az eredeti helyére visszatér,
- indifferens (közömbös), ha a szerkezet a kimozdított helyzetben nyugalomban marad,
- labilis (bizonytalan), ha a szerkezet az eredeti helyzetétől távolodik.

Az instabilis egyensúlyi állapot lehet lokális (helyi) jellegű, igen gyakran azonban a szerkezet teljes egészére kiterjed. Ekkor a belső erők a kritikus részek, illetőleg a teljes szerkezet stabil egyensúlyi helyzetét nem képesek biztosítani, ezért a szerkezeti részek, illetőleg a teljes szerkezet a legkisebb zavaró hatás következtében kimozdulhat, s ez lokális vagy totális tönkremenetelre vezet. Ez a kritikus állapot rendszerint minden előzetes jelzés (nagyobb alakváltozások, repedések) nélkül, hirtelen következik be, és így súlyos károkat és katasztrófákat is eredményezhet, ezért a stabilitás határállapot vizsgálatának a teherviselő szerkezetek tervezésénél és ellenőrzésénél különösen nagy jelentősége van.

A továbbiakban néhány, a gyakorlatban gyakran előforduló stabilitási problémát mutatunk be. Kezdjük egy egyszerű szemléletes példával. Közismert, hogy a szerkezeti acélok σ_{eng} megengedett feszültsége húzásra és nyomásra gyakorlatilag azonosnak vehető. Ennek ellenére egy hosszu vékony huzalnak tekintélyes húzási teherbírása van, nyomásra azonban egyáltalán nem vehető igénybe. E jelenség oka, hogy a nyomott huzal csak abban az esetben volna teherbíró, ha tökéletesen egyenes volna a tengelye. Ellenkező esetben a nyomás melletti hajlítónyomaték is keletkezik, és mivel a huzalnak gyakorlatilag nincs hajlítómerevsége ($EI \sim 0$), alakját nem tudja megtartani. Tehát nem elegendő kimutatni, hogy a szerkezet elméletileg elképzelt körülmények között egyensúlyban lehet, hanem meg kell vizsgálni annak viselkedését az elképzelt egyensúlyi állapot, egyensúlyi alak megzavarása esetén is.

Az 5.2 ábrán látható nyomott rud abban különbözik a nyomott huzal esetétől, hogy az EI hajlítómerevsége nem zérus. Ezért kis nyomóerők esetében az elméletileg elképzelt egyensúlyi alak (tökéletes központos erő, egyenes tengely, tiszta hajlítónyomaték nélküli nyomás) megzavarása (pl. a rud kisméretű meggörbítése) nem jár kedvezőtlen következményekkel, s a rud újra "kiegyenesedik" és teherbírása megmarad. A rud stabil egyensúlyi állapotban van. Elméletileg és kísérletileg igazolható, hogy egy bizonyos erő nagyság ($F > F_{kr}$) elérése után a helyzet megváltozik, az EI merevség nem elegendő ahhoz, hogy a megzavart egyensúlyi állapot helyreállítsa (a rud nem "kiegyenesedik" ki), hanem tovább görbül, kijajlik. A rud instabil egyensúlyi állapotba kerül. Az F_{kr} erőt - amely a rudon indifferens egyensúlyi állapotot okoz - kritikus erőnek szokás nevezni. A rudon akkor



5.2 ábra

működik éppen kritikus erő, ha a rud egyensúlyi alakjának megzavartása után nem tér vissza eredeti helyzetébe, hanem új meggörbült helyzetében is nyugalomban marad. A kihajlás vizsgálatánál éppen ezt a kritikus erőt fogjuk keresni.

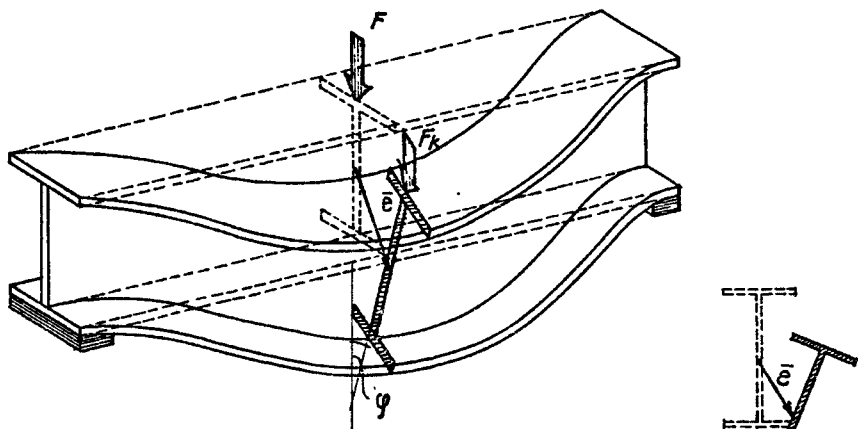
A rácsos tartó nyomott övének kihajlása közvetlenül kapcsolódik az egyetlen nyomott rud kihajlásához. Ez természetesen bonyolultabb feladat, mert amellett, hogy egy-egy rúdon a tartó síkjában vagy arra merőlegesen bekövetkezik a kihajlás, a magában álló nyomott övek egészét is meg kell vizsgálni a tartó síkjára merőleges kihajlás szempontjából.

A ívhidak nyomott ívének kihajlása a főtartó síkjában és arra merőlegesen egyaránt bekövetkezhethet.

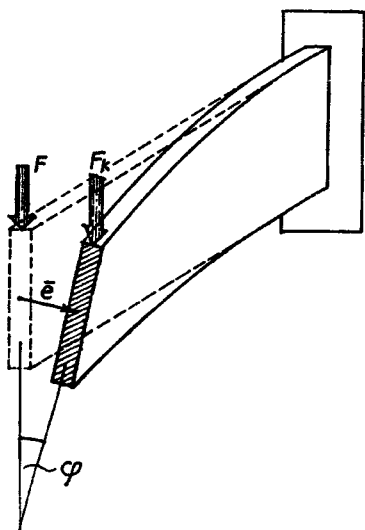
A hajlított tartók kifordulása (kibicsaklása) már más jellegű stabilitási probléma. Ha egy önmagában álló vékony tartó nyomott öve nem elég merev, akkor a tartó kifordulhat. Az 5.3 ábrán látható I tartó felső öve keskeny (azaz nem elég merev). Ilyenkor a függőleges lehajláson kívül igen nagy oldalirányú eltolódás is bekövetkezik, miközben a keresztmetszetek el is fordulnak. A tartó a kifordulás következtében elveszti ellenállását és leszakad. Amennyiben a tartó nyomott övét kellő szélességűre alakítjuk ki, akkor elkerülhető a kifordulás, a keresztmetszet függőlegesen eltolódik, de nem fordul el a rúdtengely körül. Ugyanez a jelenség egy vékony magas négyzög keresztmetszetű tartó esetében is előfordulhat (5.4 ábra).

A nyomásra igénybe vett tárcsák stabilitás veszítése a horpadás. Az 5.5 ábrán egy vékony lemezekből álló nyomott rudat láthatunk. Ennek alkotó elemezei $\sigma < \sigma_k$ esetében síkok maradnak, $\sigma = \sigma_k$ esetben a vékony lemez behorpad: lemezhorpadásról van szó.

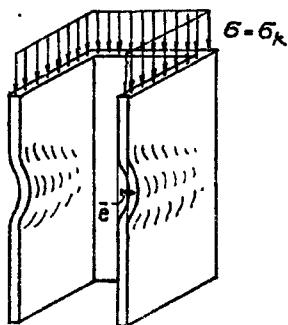
A gerinclemezes tartónál a gerinclemez horpadása következhet be, ha a gerinclemezt nem merevítjük. A horpadás során a lemez síkjából kilépve kipuposodik (5.6 ábra). Először a tartóvéget kell merevíteni, ahol a nagy reakcióerőt kell "bevezetni" a tartóba. Ezenkívül további függőleges



5.3 ábra

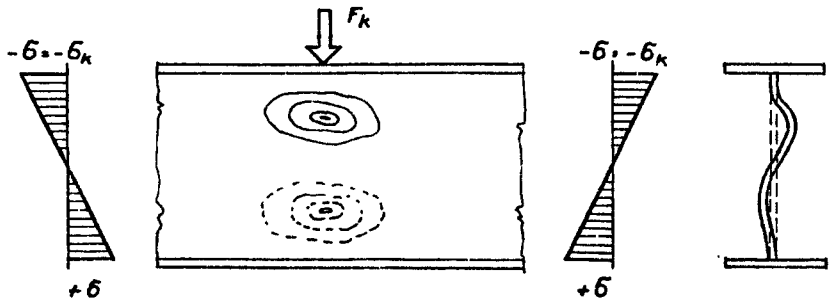


5.4 ábra

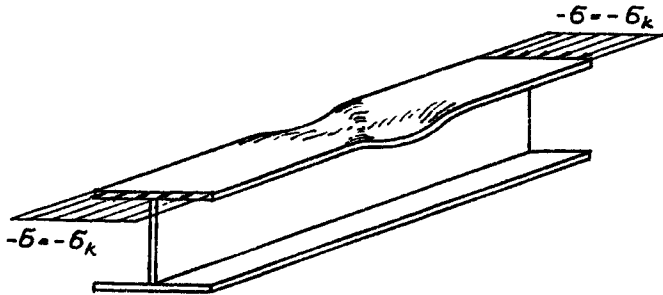


5.5 ábra

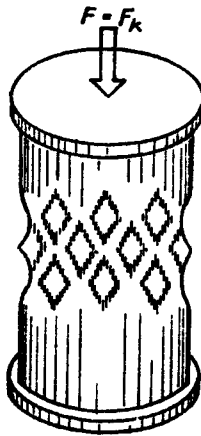
merevítésekkel a gerinclemez bizonyos nagyságu mezőkre kell osztani, hogy a gerinclemez horpadását megelőzzük. A gerinclemez tartónál a nyomott ívlemez horpadása is előfordulhat (5.7 ábra).



5.6 ábra



5.7 ábra



5.8 ábra

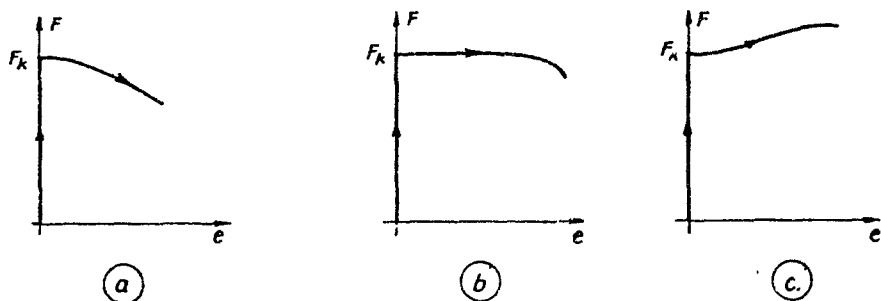
A lemezhorpadáshoz hasonló jelenséget mutat be 5.8 ábrán bemutatott körhengerhøj, ez a jelenség a højhorpadás.

Bonyolultabb szerkezetek esetében gyakran nem elegendő csupán az egyes szerkezeti részek (rudak, lemezek) egymástól függetlenül bekövetkező stabilitásvesztésével számolni, hanem a teljes szerkezet stabilitásvizsgálatát is el kell végezni. Ez különösen bonyolult számításokra vezet.

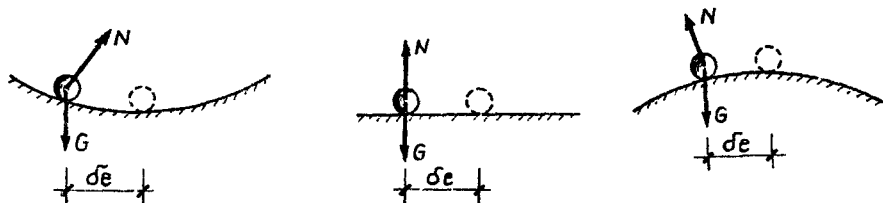
Az említett példák mellett egyéb stabilitási problémák is előfordulnak az építőmérnöki gyakorlatban. Ezeknek mind az a közös vonásuk, hogy - az anyagminőségen kívül - a szerkezet méreteitől, méretarányaitól nagymértékben függ az a feszültség, amely mellett a szerkezet elveszti stabilitását, és labilissá válik, tönkremegy. A stabilitási probléma főképpen a karcu nyomott szerkezeteknél merül fel. Minél karcusabb a szerkezet, illetve minél kisebb a merevsége, annál jelentősebb a stabilitás elvesztésének veszélye.

A stabilitási határállapot felderítése mellett elemeznünk kell azt is, milyen szerepet tölt be a határállapot a teherbírás megítélése szempontjából. Ezért - legalábbis elvileg - tudnunk kell arról, milyen viselkedés várható a stabilitásvesztést követő stádiumban. E vizsgálat igen bonyolult, általában csak harmadrendű elmélettel végezhető. Elvileg három lehetőségre kell gondolni. Az 5.9 ábrán szereplő erő - elmozdulás diagram - a stabilitásvesztés utáni viselkedésre utal. Az 5.9.a ábra szerinti eset a teherbírás lecsökkenése miatt különösen veszélyes teherbírasi határállapotnak minősül (ez egy egynevezetű közepes karcuságu rud kihajlásánál fordul elő). Az 5.9.b ábra szerinti esetben (ami egy nagy karcu rud kihajlására jellemző) a teherbírás esése csak tekintélyes eitolódás után jön létre. Végül az 5.9.c ábrán látható esetben (ez egy négyoldali megtámasztott lemez horpadásának felel meg) a stabilitásvesztés után teherbírasi tartalék is van. A stabilitásvesztést követő nagy alakváltozások miatt a stabilitási határállapotot a legtöbb esetben gyakorlatilag a teherbírás felső határaként kezeljük, de veszélyességét a stabilitásvesztés utáni viselkedés elemzésével ítéljük meg. Az egyensulyi állapot vizsgálati módszerei a kinetikai, az energia és a statikai módszer. Mi egyedül a statikai módszer lényegére mutatunk rá. A statikai módszer csak az indifferens egyensulyi állapot vizsgálatára alkalmas. Az indifferens egyensulyi állapotnak az a jellemzője, hogy a szerkezetre (testre) ható erők a szerkezet (test) két vagy több, egymáshoz végtelen közel fekvő helyzetében is egyensulyban vannak. Ennek megfelelően a statikai módszernek az a lényege, hogy a szerkezetet egyensulyi állapotából kis elmozdulással kimozdítjuk, s megvizsgáljuk, hogy a kimozdított helyzetben is lehetséges-e az egyensuly. Ha igen, akkor az egyensulyi állapot indifferens.

Az 5.10 ábrán a stabilis, indifferens, illetve labilis egyensulyi állapotban levő golyót kimozdítottuk, és tökéletesen sima (surlódásmentes) felületet feltételezve felrajzoltuk a rá ható (aktív és passzív) erőket. Látható, hogy ezek csak az indifferens állapotból kimozdított golyónál lehetnek egyensulyban.



5.9 ábra



5.10 ábra

A mérnöki gyakorlatban azonban éppen az indifferens egyensúlyi állapotot a leglényegesebb. Egyes szerkezetek ugyanis a rájuk ható kisebb terhek hatására stabilis egyensúlyban vannak, de a terheket növelve előbb indifferens, majd labilis egyensúlyi állapotba kerülnek. Ha tehát ismerjük azt a teherintenzitást, amelynek megfelelő teher indifferens egyensúlyi állapotot idéz elő, akkor azt is meg tudjuk mondani, hogy mekkora az a megengedett teher, amelyet a szerkezet a stabilitás elvesztése szempontjából még biztonságosan tud hordani. A tehernek, illetve a feszültségeknek azt az értékét, amelynél a szerkezet egyensúlyi állapotának stabilitása megszűnik, tehát amelynél indifferens egyensúlyi állapotba kerül, kritikus tehernek, illetve kritikus feszültségnek nevezzük.

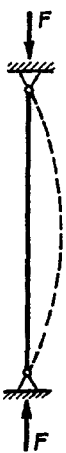
Mielőtt konkrét stabilitási feladat megoldásához kezdenénk hozzá, tisztáznunk kell azt a kérdést, hogyan vesszük figyelembe az elmozdulásokat az egyensúlyi egyenletek felírásánál. Eddigi tanulmányaink során a megmerevítés elvét alkalmaztuk, vagyis az egyensúlyi egyenleteket a tartó alakváltozások és elmozdulások nélküli alakjára írtuk fel. Ezt elsőrendű elméletnek nevezik, itt az egyensúlyi egyenletekben nem szerepelnek az elmozdulások. Ilyen alapon a stabilitási kérdések vizsgálata nem lehetséges, a kritikus terhet nem lehet meghatározni. Másodrendű elmélet esetén az egyensúlyi egyenleteket a tartó elmozdulásainak és alakváltozásainak figyelembevételével írjuk fel. Az elmozdulások tehát szerepelnek az egyensúlyi egyenletekben, de feltételezzük, hogy ezek az elmozdulások kicsik, és így lineáris egyenletekkel fejezhetők ki. Így például a ψ elfordulásra érvényesek a következő közelítések: $\sin \psi = \psi$, $\cos \psi = 1$; a ψ elfordu-

lás és az általa okozott eltolódás között lineáris összefüggés van: $k \cdot \delta = e$. A harmadrendű elmélet esetén is szerepelnek az elmozdulások az egyensúlyi egyenletekben, de az elmozdulásokra nézve nem teszünk semmiféle közelítést, vagyis tetszőlegesen nagy elmozdulásokkal számolunk. A stabilitás vizsgálatok elvégzéséhez általában elegendő a másodrendű elmélet alkalmazása. A harmadrendű elméletet olyankor alkalmazzuk, amikor a szerkezetnek a stabilitás elvesztését követő ún. posztkritikus állapotát vizsgáljuk, vagy ha olyan jellegű a szerkezet, amely a megengedett terhek hatására is nagy alakváltozásokat végez (kötél, kötélháló).

5.2 A nyomott rudak kihajlása

5.2.1 A kihajlás jelensége

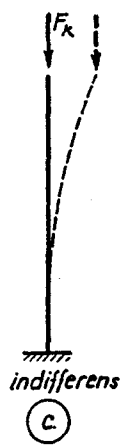
A nyomott rudaknál megfigyelhető az a stabilitásvesztési mód, hogy bizonyos nagyságu nyomóerő hatására a rudak meggörbülnek, "kihajolnak" (5.11 ábra). A leginkább különös ebben a jelenségben az, hogy az azonos anyagból készült rudak is különböző, egymástól nagyon eltérő $\sigma = F/A$ átlagos feszültségeknél mennek tönkre. Míg a húzás, hajlítás, nyírás, nyírás, csavarás esetén meg lehet adni a σ_{eng} megengedett feszültséget, amely csak az anyag minőségétől függ, addig nyomott rudaknál az ilyen egyszerűen nem lehetséges. A nyomott rudat tönkretévő feszültség ugyanis nemcsak a rud anyagminőségétől függ, hanem a rud viszonylagos méreteitől is, pontosabban - mint majd látni fogjuk - a rud karcsúságától.



5.11 ábra



5.12 ábra

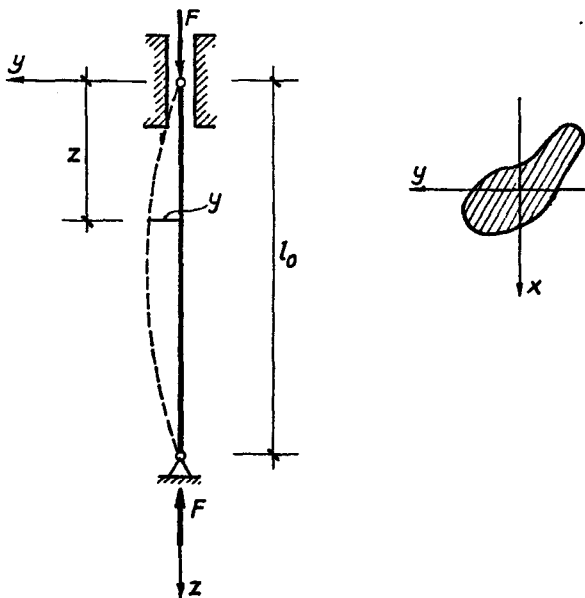


A nyomott rudaknál is háromféle egyensúlyi helyzet lehetséges (5.12 ábra). Ha az F_1 erő viszonylag kicsiny, akkor a rud stabilis egyensúlyi állapotban van (5.12.a ábra), ami annyit jelent, hogy ha a rudat valamilyen módon eredeti egyenes helyzetéből kimozdítjuk és ott magára hagyjuk, akkor visszatér eredeti egyenes helyzetébe (természetesen ez alatt az F_1 erő állandóan rajta van).

Bizonyos $F_2 > F_1$ erő nagyságnál (5.12.b ábra) a rud egyenes állapotában még egyensúlyban tud maradni, azonban kis kimozdítás után, kissé meggörbülve már nem képes hordani az F_2 terhet és tönkremegy. Egyenes állapotban tehát labilis egyensúlyi állapotban volt.

Az eddigi két eset közötti átmenetet idézi elő az $F_1 < F_k < F_2$ nagyságu, ugynevezett F_k kritikus erő, amely a rudon indifferens egyensúlyi állapotot okoz (5.12.c ábra). A rudon akkor működik éppen a kritikus erő, ha azt egyenes helyzetéből kimozdítva és magára hagyva, az se vissza nem tér, se tönkre nem megy, hanem új, meggörbült helyzetében is nyugalomban marad. A kihajlás vizsgálatánál éppen ezt a kritikus erőt fogjuk keresni.

Vizsgáljunk egy olyan l_0 hosszúságu egyenestengelyű, prizmatikus rudat, amelyet központos (a keresztmetszet súlypontjában támadó) nyomóerő terhel (5.13 ábra). Egyelőre azzal az egyszerű esettel foglalkozunk,



5.13 ábra

amikor a rud mindkét vége egy-egy térbeli csuklóhoz kapcsolódik, amelyek közül az egyik a rudtengely irányába eső eltolódást is lehetővé teszi. A rud keresztmetszete tetszőleges lehet, anyagáról pedig feltételezzük, hogy ideálisan rugalmas - képlékeny, vagyis egy bizonyos feszültség, a σ_A arányossági határ eléréséig lineárisan rugalmasan viselkedik (érvényes a Hooke-törvény), ezt meghaladva viszont képlékeny alakváltozásokat szenved. Az A keresztmetszetű területű rudban az F központos nyomóerő hatására $\sigma = F/A$ feszültség ébred. Ez az egyszerű képlet határesetben a kritikus erőre is alkalmazható és megadja a kihajlás kezdeti pillanatában létrejövő kritikus feszültség nagyságát:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A}$$

Attól függően, hogy a kritikus feszültség kisebb-e, illetve nagyobb-e mint az arányossági határ, rugalmas illetőleg képlékeny kihajlásról beszélünk. A kétféle esetnek megfelelő kritikus erő illetőleg feszültség kiszámítása különböző módon történik.

5.2.2 A rugalmas kihajlás (az Euler-féle kritikus erő)

A központosan nyomott, egyenestengelyű rud rugalmas kihajlásának vizsgálata Eulertől származik. Tegyük fel, hogy a vizsgálat tárgyát képező rudra működő nyomóerő éppen eléri a kritikus értéket. Ekkor az indifferens állapot definíciója szerint a rud nemcsak egyenes helyzetben van nyugalomban, hanem a legkisebb oldalirányú zavarás hatására kigörbül (kihajlik) és ilyen állapotában is nyugalomban marad. A kritikus erő nagyságán kívül a kihajlás síkja és a rugalmas vonal alakja egyelőre ismeretlen. Meghatározásuk céljából vegyük fel a z tengelyt a rud egyenes tengelyével egybeesőnek, az y tengelyt pedig az alakváltozás síkjában a z tengelyre merőlegesen. A rugalmas vonal egyenletét jelölje a y(z) függvény (5.13 ábra).

Kihajlott állapotban a rud valamely tetszőleges z koordinátával jellemzett keresztmetszetének súlypontja egy y értékkel oldalirányban kimozdul és ennek következtében a nyomóerő a keresztmetszetet nemcsak központos nyomásra, hanem hajlításra is igénybe veszi. Éppen ez az $M = F_k y$ nagyságú hajlítónyomaték biztosítja azt, hogy az F_k megfelelő értéke mellett a rud ilyen kigörbült állapotban is nyugalomban maradjon. Amint azt az elemi szilárdságtanban láttuk a hajlított tartó rugalmas vonala és a hajlítónyomaték között

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \frac{M}{EJ} x$$

alaku összefüggés áll fenn. Az általános esetet, vagyis ferde hajlítást feltételezve, ebben az egyenletben M_x az egyelőre ismeretlen helyzetű x semleges tengelyre vonatkozó nyomatékot jelöli, ami - tekintettel arra, hogy az y eltolódás az x tengelyre merőleges - megegyezik $M_x = F_k y$ -nak. Így tehát a differenciálegyenlet

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \frac{F_k y}{EJ_x}$$

alakot ölt. Bevezetve az:

$$\alpha^2 = \frac{F_k}{EJ_x}$$

jelölést:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \alpha^2 y = 0.$$

Ez a központosan nyomott rud rugalmas kihajlásának differenciálegyenlete. Ez a differenciálegyenlet tartalmazza a rudon felírható egyensúlyi és geometriai feltételeket, valamint az anyagegyenletet. Ha a differenciálegyenletet megoldjuk, megkapjuk azt az F_k erőt, amelynél tetszőleges $y(z)$

eltolódások esetén is nyugalomban van a rud. Ez tehát az indifferens egyensúlyi állapot vizsgálata az előző pontban ismertetett statikai módszerrel. Nyilvánvaló, hogy a differenciálegyenletet a másodrendű elmélet alapján irtuk fel, hiszen a statikai összefüggésben, vagyis a hajlítónyomaték meghatározására szolgáló $M_x = F_k y$ egyenletben az y kis elmozdulás szerepel.

Ennek a másodrendű homogén differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$y = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z$$

alaku, ahol A és B ismeretlen állandókat jelölnek. Állításunk helyességét az bizonyítja, hogy ez a függvény kielégíti a differenciálegyenletet. Ellenőrzésképpen differenciáljuk kétszer egymás után e függvényt.

$$\frac{dy}{dz} = A \alpha \cos \alpha z - B \alpha \sin \alpha z$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - A \alpha^2 \sin \alpha z - B \alpha^2 \cos \alpha z =$$

$$= -\alpha^2 (A \sin \alpha z + B \cos \alpha z) = -\alpha^2 y$$

Megkaptuk az eredeti differenciálegyenletet, eszerint a felvett általános megoldás kielégíti a differenciálegyenletet.

Az általános megoldás A , B állandóit a kerületi feltételekből határozhatjuk meg. A rud két végének vízszintes eltolódása zérussal egyenlő, tehát a geometriai kerületi feltételek a következők:

$$a \quad z = 0 \quad \text{helyen} \quad y = 0$$

$$a \quad z = \ell_0 \quad \text{helyen} \quad y = 0.$$

Ha az első feltételt behelyettesítjük az általános megoldásba $B = 0$ adódik, így az általános megoldás egyszerűsödik az

$$y = A \sin \alpha z$$

alakra. A második feltétel szerint

$$0 = A \sin \alpha \ell_0$$

egyenletre jutunk. Ennek két megoldása is lehetséges:

$$A = 0$$

illetőleg

$$\sin \alpha \ell_0 = 0.$$

Az első megoldás szerint $y = 0$, ami triviális, mert azt eredményezi, hogy a rud egyenes tengelyű marad. Ez az eset a feladat elsőrendű elmélettel történő megoldásának felel meg. A második megoldás akkor egyenlő zérussal, ha

$$\alpha \ell_0 = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ tetszőleges}$$

egész számot jelent. Innen α^2 -et kifejezve:

$$\alpha^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\ell_0^2}$$

Helyettesítsük vissza α^2 képletét:

$$\alpha^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\ell_0^2} = \frac{F_k}{EJ_x}.$$

Ebből:

$$F_k = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EJ_x$$

Ez a képlet n és J_x értékétől függően F_k -ra végtelen sok megoldást eredményez. A mérnöki gyakorlat szempontjából ezek közül nyilvánvalóan a legkisebb a mértékadó, hiszen a teher fokozatos növelése során a rud már ennél az erőnél indifferens egyensúlyi állapotba kerül és így a többi megoldásnak csak elméleti jelentősége van. F_k legkisebb értékét akkor kapjuk meg, ha n és J_x egyaránt a lehető legkisebb értéket vesz fel. Az $n = 0$ eset $F_k = 0$ triviális megoldásra vezet, tehát a legkisebb kritikus erőt az $n = 1$ érték adja. J_x viszont akkor lesz a lehető legkisebb, ha az x tengely egybeesik a második tehetetlenségi főiránnyal és így $J_x = J_2$. Vagyis a rud kihajlása a 2. tehetetlenségi főtengelyre merőleges síkban következik be. Ez az eredmény egyébként kézenfekvő, hiszen ha az elmozdulások nincsenek egyik irányban sem gátolva, akkor a rud nyilvánvalóan abban a síkban hajlik ki, amelyben a legkisebb ellenállásra talál, vagyis amelyre nézve az EJ_x hajlítási merevség a legkisebb. Ennek megfelelően az ún. Euler-féle kritikus erő:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ_2}{l^2}$$

A képletet kissé átalakítva a kritikus feszültség képletét kapjuk. Bevezetjük az inercia sugár fogalmát, amelyet az alábbi képlet definiál:

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} \quad \text{mm, cm, m.}$$

Az inerciasugár az inercianyomaték és a keresztmetszeti terület hányadosának gyöke.

Alkalmazva ezt J_2 -re

$$i_2^2 = \frac{J_2}{A}$$

Vezessük be még a karcsúsági tényező fogalmát, amely szintén geometriai jellegű:

$$\lambda_0 = \frac{l_0}{i_2},$$

amely az l_0 kihajlási hossz, és az inercia sugár hányadosa, dimenzió nélküli viszonyyszám.

A kritikus feszültség képletét a kritikus erő képletéből i_2 és λ kifejezéseinek felhasználásával vezetjük be:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \frac{J_2}{A} = \frac{\pi^2 E i_2^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

azaz

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Térjünk még vissza röviden a rugalmas vonal alakjának vizsgálatára, amely az

$$\alpha = \frac{\pi}{l_0}$$

összefüggés ismeretében

$$y = A \sin \frac{\pi}{l_0} z$$

alaku. A rud meggörbült alakja tehát a csuklókon keresztülmennő fél sinus hullám. A félhullám hosszát, amely jelen esetben megegyezik a rud l_0 hosszával kihajlási hosszának nevezzük. Az A állandó a rud legnagyobb oldalirányú kitérését jelenti. Ez tetszőleges nagyságu lehet, hiszen az F_k erő működésekor a rud bármilyen mértékű - de l_0 hosszhoz képest még kicsinynek tekinthető - oldalirányú kitérés esetén nyugalomban marad, mivel egyensúlyi állapota indifferens.

5.2.3 A képlékeny kihajlás

Az előző fejezet levezetésének alapját a Hooke-törvény segítségével felállított rugalmas vonal differenciálegyenlete képezte. Így eredményei csak akkor érvényesek, ha a kihajlás az arányossági határnál kisebb feszültségnél következik be, tehát

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_A$$

Ebből a képletből utólag ellenőrizni tudjuk, hogy valóban rugalmas kihajlásról van-e szó, vagy pedig a képlékeny kihajlás esete áll-e fenn. Ezt a körülményt a rud méreteinek ismeretében előre is el tudjuk dönteni, ha az egyenlőtlenségből a karcsusági tényezőt kifejezzük

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}}$$

és bevezetjük

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}}$$

un. határkarcsusági tényező fogalmát. Ekkor ugyanis az utóbbi két képlet összevetése alapján kimondhatjuk, hogy olyan esetben van rugalmas kihajlásról szó és így akkor érvényes az Euler-féle kritikus erő, illetőleg feszültség képlete, ha a rud karcsusági tényezője meghaladja a határkarcsusági tényezőt, azaz $\lambda \geq \lambda_0$. A rugalmas kihajlás elmélete tehát az un. karcsu rudaknál alkalmazható. A λ_0 értéke néhány fontosabb esetben a következő:

acél:	$\lambda_0 = 105,$
nagyszilárdságú acél:	$\lambda_0 = 92,$
öntöttvas:	$\lambda_0 = 80,$
fa:	$\lambda_0 = 100.$

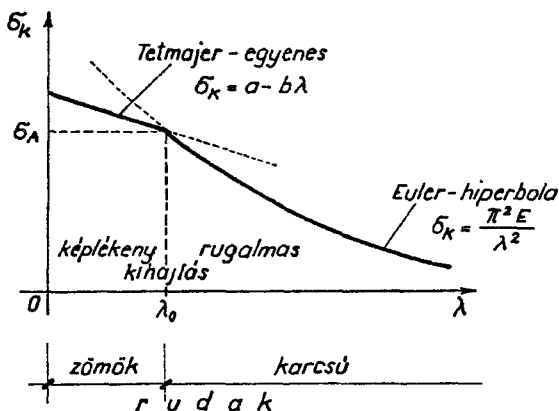
A $\lambda < \lambda_0$ esetben a rud kihajlása az arányossági határnál nagyobb feszültség hatására következik be, tehát képlékeny kihajlásról van szó. E kérdés vizsgálatára sokféle elméletet dolgoztunk ki és nagyszámu kísérletet is végeztünk. Ezeknek még vázlatos ismertetése is meghaladja a tanulmány keretét, ezért az alábbiakban csak a legegyszerűbbeket ismertetjük, amikor a képlékeny állapotnak megfelelő $\sigma_k(\lambda)$ összefüggés lineáris. Ilyen javaslatot tett kísérletek alapján a magyar származású Tetmajer:

$$\sigma_k = a - b \lambda$$

Itt a és b állandókat jelöl, dimenziójuk N/mm^2 és nagyságukat az alábbi értékekre vehetjük fel:

acél:	$a = 310$	$b = 1,14$
nagyszilárdságú acél:	$a = 335$	$b = 0,62$
fa:	$a = 29,3$	$b = 0,194$

Amennyiben a karcsusági tényező kisebb a határkarcsuságnál $\lambda \leq \lambda_0$, akkor zömök rudról van szó. Ebben a tartományban Euler összefüggése tehát ezért nem érvényes, mert a kiindulási feltételek egyike, az anyag rugalmas viselkedéséről szóló feltevés nem teljesülhet. Zömök rud esetében ugyanis a kritikus erő elérésekor már olyan nagy feszültségek is felépnek a rudban, amelyek meghaladják az arányossági határt, vagyis itt a Hooke-törvény már nem érvényes. Ebben a tartományban a rudban már képlékeny alakváltozások is bekövetkeznek az indifferens egyensúlyi állapotot előidéző teher hatására. Azt is mondhatjuk, hogy a zömök rudak kritikus ereje olyan nagy, hogy ez már a rugalmas határnál nagyobb feszültségeket ébreszt, és így képlékeny deformációkat okoz. Ezért azt mondjuk, hogy a zömök rudaknál képlékeny kihajlás lép fel.



5.14 ábra

A rugalmas és a képlékeny kihajlás eredményeit az 5.14 ábrán foglaltuk össze. Az itt látható diagram a σ_k és λ összefüggését szemlélteti. Ha $\lambda \geq \lambda_0$, vagyis karcsú rudakról van szó, akkor a kritikus feszültséget a

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

alaku Euler-féle hiperbola ábrázolja. Ez a hiperbola kis karcsuságoknál irreálisan nagy feszültséget ad (ha $\lambda \rightarrow 0$, akkor $\sigma_k \rightarrow \infty$). Logikailag is megállapíthatjuk, hogy kis karcsuságoknál az Euler-féle hiperbola nem lehet érvényes.

Ha viszont $\lambda \leq \lambda_0$, azaz zömök rudak esetén, akkor a kritikus feszültséget Tetmajer javaslata alapján a

$$\sigma_k = a - b \lambda$$

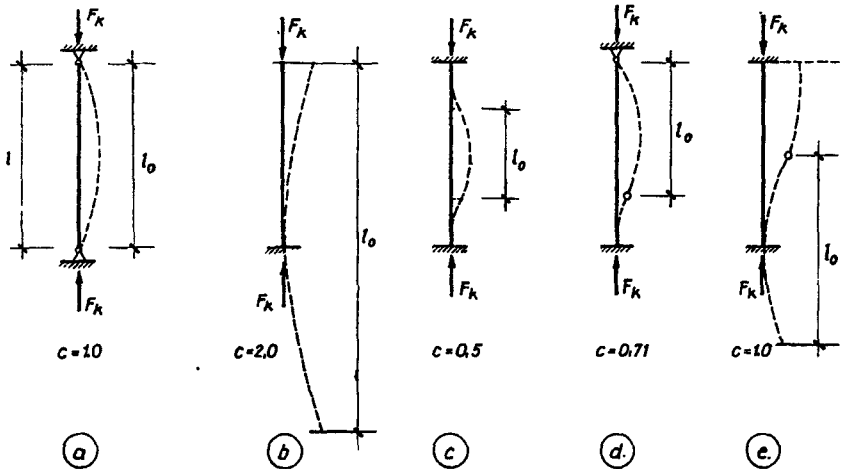
egyenletű egyenes jellemzi.

5.2.4 Különféle megtámasztású rudak kihajlása

Euler vizsgálata a két végén csuklós megtámasztású rudra vonatkozik. Ezt tekinthetjük alapesetnek. A tárgyalásból az is kiderült, hogy a rud kihajlási alakja ebben az esetben egy sinus félhullám. Ezt a félhullámhosszat neveztük kihajlási hosszúnak, amelyik ott egyenlő volt a rud hosszával

$$\ell_0 = \ell.$$

Amennyiben a rud megtámasztási viszonyai eltérnek az alapesettől, akkor a következőképpen kell eljárni. Meg kell vizsgálni, milyen lesz a kihajlási alak (5.15 ábra), és meg kell állapítani, hogy milyen hosszú ebben egy sinus félhullám. Az így megállapított ℓ_0 kihajlási hosszal szorozva Euler és Tetmajer képletei minden további nélkül alkalmazhatók.



5.15 ábra

A rud más megtámasztási viszonyok között is sinusvonal alakban hajlik ki, a fél sinus-hullám hossza azonban nem egyezik meg a rud ℓ hosszával. Általában megállapíthatjuk, hogy a kihajlási hullámhossz az

$$\ell_0 = c \ell$$

képletből számítható, ahol l a rud tényleges hossza, c pedig a rud végénél alkalmazott kényszerektől függő tényező. Nevezetesen a két végén csuklós rudnál (5.15.a ábra) $c = 1$, az egyik végén befogott rudnál (5.15.b ábra) $c = 2,0$, két végén mereven befogott rudnál (5.15.c ábra) $c = 0,50$, egyik végén csuklós, másik végén befogott rudnál (5.15.d ábra) $c = 0,71$, mindkét végén befogott rudnál, amelynek végei egymáshoz képest a rud-tengelyre merőleges irányban eltolódhatnak (5.15.e ábra) $c = 1,0$.

5.2.5 Méretezés és ellenőrzés kihajlása

A kritikus feszültség minden esetben kisebb, mint az anyag nyomószilárdsága, ezért a nyomott rudak ellenőrzését, illetve méretezését mindenkor a kihajlás alapján levezetett kritikus erő, illetőleg feszültség alapulvételével kell elvégezni. Jelölje n a kihajlással szemben megkívánt biztonságot, F_k a kritikus erőt. Ezekkel az adatokkal értelmezhetjük a kihajlásra megengedett erőt

$$F_{ke} = \frac{F_k}{n}$$

Hasonlóképpen a kihajlásra megengedett feszültséget

$$\sigma_{ke} = \frac{\sigma_k}{n}$$

A rudban ébredő tényleges nyomófeszültséget - központos nyomásról lévén szó - a

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

képlet adja meg. E képletek birtokában az ellenőrzés, illetőleg a méretezés alapját most is az

$$F \leq F_{ke} \quad \text{illetőleg} \quad \sigma \leq \sigma_{ke}$$

feltétel képezi.

Ezzel tehát a nyomott rudak vizsgálatát formailag visszavezettük a tiszta húzásnál illetőleg a tiszta nyomásnál bemutatott képletre. Alapvető különbséget jelent azonban, hogy amíg tiszta húzás illetőleg nyomás esetében a megengedett feszültség állandó értékű, addig a kihajlás figyelembevételében a rud karcsúságától, tehát geometriai méreteitől függően változik. Ez a körülmény az ellenőrzést, különösen pedig a méretezést lényegesen megnehezíti. Ismételten hangsúlyoznunk kell azonban, hogy a kihajlás csak formailag tűnik szilárdságtani problémának, valójában azon-

ban stabilitás vizsgálat, amelynek helyes elvégzése biztosítja, hogy a nyomott rudnak az indifferens egyensúlyi állapot bekövetkezésével szemben kellő biztonsága legyen.

A kihajlás szempontjából megengedett feszültséget összefüggésbe szokták hozni az anyagra jellemző tiszta nyomásra (kihajlás nélkül) megengedett σ_e feszültséggel. A

$$\sigma_{k e} = \varphi(\lambda) \sigma_e,$$

kifejezésben a karcsusági tényezőtől függő φ tényező a kihajlás most tárgyalt módszerére nézve a Tetmajer-egyenest és az Euler-hiperbolát foglalja magába. A tartószerkezeti szabályzatok ezt a függvényt táblázatosan vagy diagramok segítségével adják meg, számos, a fentiekben nem említett hatás figyelembevétel alapján.

5.2.5.1 Ellenőrzés

A nyomott rud ellenőrzésekor az alábbi adatok vannak megadva:

a rud hossza (l) és a végénél alkalmazott kényszerek (c),

a keresztmetszeti síkidom (A , J_2),

a rud anyaga (E , a , b),

a nyomóerő (F),

a biztonsági tényező (n).

Ezen adatok birtokában az ellenőrzés a következő lépésekben történik.

1. Kiszámítjuk a keresztmetszeti síkidom A területét, J_2 inercianyomatékát és az I_2 inercia sugarat.

2. Az alkalmazott kényszereknek megfelelően meghatározzuk az $l_0 = cl$ kihajlósi hullámhosszat és a

$$\lambda = \frac{l_0}{I_2}$$

karcsusági tényezőt.

3. Kiszámítjuk a kritikus feszültséget. Ezt a számítást

$$\lambda \leq \lambda_0 \text{ esetben a } \sigma_k = a - b \lambda,$$

$$\lambda > \lambda_0 \text{ esetben a } \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

képlet alapján lehet elvégezni. σ_k ismeretében a megengedett feszültség

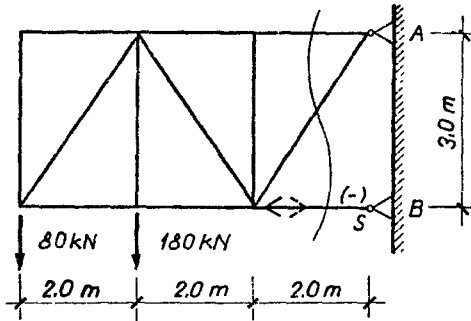
$$\sigma_{ke} = \frac{\sigma_k}{n}$$

4. A rud akkor megfelelő, ha teljesül a

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{ke}$$

feltétel.

Ellenőrizzük az 5.16 ábrán látható rácsos tartó megjelölt rudját. A rud szelvénye szabványos egyenlőszárú szögacél L. 140 140 17.



5.16 ábra

Adottak az anyagminőségre jellemző kihajlási képletek:

$$\lambda \geq 110 \quad \sigma_{ke} = \frac{808\,000}{\lambda^2} \text{ MN/m}^2,$$

$$\lambda \leq 110 \quad \sigma_{ke} = 140 - 0,666 \cdot \lambda \text{ MN/m}^2.$$

A ruderő hármasszeggél, az A támaszra felírt főponti nyomatéki egyenletből számítható ki:

$$\sum M_i^{(A)} = -4,180 - 6,80 - 3S = 0$$

$$S = -\frac{1}{3} (4,180 + 6,80) = -400 \text{ kN} = -0,4 \text{ MN}$$

A keresztmetszeti adatok táblázatból:

$$A = 45,0 \text{ cm}^2, \quad i_2 = 2,72 \text{ cm}.$$

A kihajlási hossz (két végén csuklós rud):

$$l_0 = l = 200 \text{ cm}$$

A karcúsági tényező:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \frac{200}{2,72} = 73,5 < \lambda_0 = 110$$

A Tetmajer-képletet kell használnunk:

$$\sigma_{ke} = 140 - 0,666 \lambda = 140 - 0,666 \cdot 73,5 = 91,05 \text{ MN/m}^2$$

A tényleges feszültség:

$$\sigma = \frac{0,4}{0,45 \cdot 10^{-2}} = 88,89 \text{ MN/m}^2 < \sigma_{ke} = 91,05 \text{ MN/m}^2$$

Ez a szelvény megfelel.

5.2.5.2 Méretezés

A nyomott rudak méretezése a tervezői gyakorlat meglehetősen bonyolult feladata, amely direkt úton rendszerint nem végezhető el. A szabványok a kritikus feszültséget táblázatok vagy diagramok segítségével adják meg. Ugyanakkor acélszerkezetek esetében bengerelt szelvényeket vagy hengereelt szelvényekből összeállított összetett keresztmetszeteket alkalmaznak, amelyet geometriai jellemzői (J, F) ugyancsak nem fejezhető ki analitikus formában. A gyakorlatban ezért a méretezést próbálgatásból áll, amelynek során a felvett illetőleg a számítás során nyert keresztmetszetet ismételtelen ellenőrizzük. Az alábbiakban a méretezésnek csupán azt az egyszerű ideális esetét mutatjuk be, amikor csak a keresztmetszet egy jellegzetes mérete ismeretlen. A számítás során természetesen a kritikus feszültség előzőekben ismertetett egyszerű képleteit alkalmazzuk. Feladatunk a keresztmetszet hiányzó méretének meghatározása.

A feladat megoldását nehezíti az a körülmény, hogy a rud karcúságát, amely a keresett keresztmetszeti méret függvénye, előre számszerűen nem tudjuk meghatározni és így azt sem tudjuk előre eldönteni, hogy a rugalmas vagy a képlékeny kihajlás képletét kell-e használnunk. Így a mé-

tezést általában nem tudjuk közvetlen úton elvégezni, csupán úgy, hogy becslés alapján felvesszük a keresztmetszet ismeretlen méretét, majd ellenőrizzük, hogy a felvétel helyes volt-e. Ha a kiszámított tényleges feszültség a megengedett feszültségtől akár felfelé, akár lefelé lényegesen eltér, akkor a keresett méret megfelelő megváltoztatásával a számítást megismételjük. Rendszerint néhány próbálgatás után megkapjuk a gyakorlat szempontjából kielégítő pontosságú eredményt. Ha a keresztmetszet alakja aránylag egyszerű, akkor a vizsgálatot az alábbi lépésekben is elvégezhetjük:

1. Kiszámítjuk az ismeretlen méret függvényében a keresztmetszeti síkidom A területét, J_2 inercianyomatékát és i_2 inerciasugarát.

2. Megállapítjuk az alkalmazott kényszerektől függően az $l_0 = c \cdot l$ kihajlási hullámhosszat és a

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2}$$

karcusági tényezőt.

3. Kiszámítjuk a kritikus feszültséget. Adott esetben azonban ugyancsak az ismeretlen méret függvénye, ezért nem tudjuk előre eldönteni, hogy a rugalmas vagy a képlékeny kihajlás esete áll-e fenn. Hogy a számítást mégis folytathassuk, feltételezzük az egyik esetet, például azt, hogy

$$\lambda > \lambda_0$$

és így

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Ezek után a megengedett feszültség

$$\sigma_{ke} = \frac{\sigma_k}{n},$$

amelyben az ismeretlen méret természetesen ugyancsak szerepel.

4. A tényleges feszültség meghatározásánál az ismeretlen méret is szerepel:

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

A rud akkor van helyesen méretezve, ha

$$\sigma \leq \sigma_{ke}$$

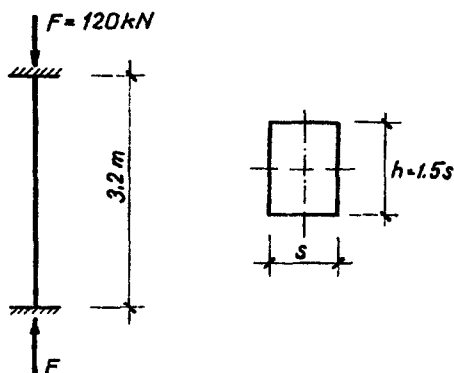
Ezen összefüggés mindkét oldala tartalmazza az ismeretlen méretet, tehát az megfelelő átalakítás után kiszámítható.

5. Ezzel szemben a méretezés még nem fejeződött be, hiszen az így nyert eredmény csak abban az esetben érvényes, ha a 3. alatti feltételezéssel összhangban áll, tehát például adott esetben $\lambda \cong \lambda_0$. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a 3. lépéstől kezdve a számítást a $\lambda \leq \lambda_0$ esetnek megfelelő

$$\sigma_k = a - b \lambda$$

képlet alapján meg kell ismételni, és az így nyert eredmény adja meg helyesen a keresztmetszet ismeretlen méretét.

6. A méretezés befejező lépése mindig az ellenőrzés.



5.17 ábra

Tervezzük meg az 5.17 ábra szerinti nyomott rud keresztmetszetét adott (1:1,5) oldaltrányu téglalap formára. Az anyagjellemzők:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$$

$$a = 310 \text{ MN/m}^2$$

$$b = 1,162 \text{ MN/m}^2$$

$$\lambda_0 = 105$$

$$n = 3 \text{ biztonsági tényező.}$$

A keresztmetszet geometriai jellemzői s függvényében:

$$A = 1,5 s^2 \quad \text{m}^2$$

$$J_2 = \frac{1,5 s^4}{12} \quad \text{m}^4$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{1,5 s^4}{12 \cdot 1,5 s^2}} = \frac{s}{\sqrt{12}} \quad \text{m}.$$

A kihajlási hossz (két végén befogott rud):

$$l_0 = 0,5 l = \frac{3,20}{2} = 1,60 \quad \text{m},$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \frac{1,60}{\frac{s}{\sqrt{12}}}.$$

Tételezzük fel, hogy a rud karcsu $\lambda \geq \lambda_0$, és így érvényes az Euler-képlet:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{1,60^2} \frac{s^2}{12} = 67468 s^2 \quad \text{MN/m}^2$$

$$\sigma_{ke} = \frac{\sigma_k}{n} = \frac{67468 s^2}{3} = 22489 s^2 \quad \text{MN/m}^2$$

A tényleges feszültség:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{0,12}{1,5 s^2} = \frac{0,08}{s^2} \quad \text{MN/m}^2$$

A rud megfelel, ha

$$\sigma \leq \sigma_{ke},$$

$$\frac{0,08}{s^2} \leq 22489 s^2 \quad \text{ebből}$$

$$s = 0,0433 \quad \text{m} = 43,3 \quad \text{mm} \approx 44 \quad \text{mm}$$

$$k = 1,5 s = 66 \quad \text{mm}$$

A méretezést $F \leq F_{kre}$ alapján is elvégezhetjük volna, azaz

$$F_{kre} = \frac{\pi^2 E J_2}{\ell_o^2 \cdot n} \geq F$$

$$\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \text{ s}^4}{12,1,6^2 \cdot 3} \geq 0,12$$

$$s \geq 0,0434 \text{ m}$$

ami azonos a fenti eredménnyel.

Ezután következik a keresztmetszet ellenőrzése a kiszámított méretekkel, amelynek során megállapíthatjuk, helyes volt-e a $\lambda \geq \lambda_o$ feltevés.

$s = 44 \text{ mm}$ és $k = 66 \text{ mm}$ ismeretében a keresztmetszet jellemző mennyiségei:

$$A = 44 \cdot 66 = 2904 \text{ mm}^2$$

$$J_2 = \frac{66 \cdot 44^3}{12} = 468\,512 \text{ mm}^4$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{468512}{2904}} = 12,70 \text{ mm}$$

A karcsusági tényező:

$$\lambda = \frac{\ell_o}{i_2} = \frac{1600}{12,70} = 126 > \lambda_o = 110,$$

tehát az Euler-képletet jogosan használtuk. Ha ez nem igazolódott volna be, akkor a tervezést előlről kellene kezdeni a Tetmajer-egyenes felhasználásával.

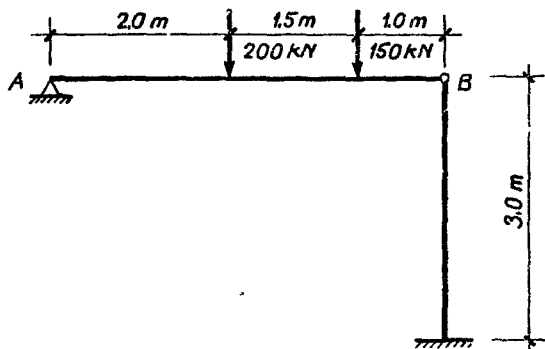
A megengedett kritikus feszültség:

$$\sigma_{ke} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 n} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{126^2 \cdot 3} = 43,52 \text{ MN/m}^2$$

A tényleges feszültség:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{0,12}{2,904 \cdot 10^{-3}} = 41,32 \text{ MN/m}^2 < \sigma_{ke} = 43,52 \text{ MN/m}^2$$

A tervezett nyomott rud megfelel.



5.18 ábra

Az 5.18 ábra kéttámaszu tartónak tekinthető vízszintes gerendát mutat, amelynek egyik támasza csuklóval kapcsolódik egy befogott nyomott rudhoz. Ez a rud I szelvényű acélrud legyen, így $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$. A biztonsági tényező $n = 4$. További anyagjellemzők $a = 310 \text{ MN/m}^2$, $b = 1,14 \text{ MN/m}^2$ és $\lambda_0 = 105$.

A kéttámaszu tartó B reakciója:

$$B = \frac{2 \cdot 200 + 3,5 \cdot 150}{4,5} = 205,55 \text{ kN} = 0,2055 \text{ MN}$$

A kihajlási hossz:

$$\ell_0 = 0,71 \ell = 0,71 \cdot 3 = 2,13 \text{ m.}$$

A méretezést az $F < F_{kre}$ egyenlőtlenség alapján célszerű elvégezni

$$F_{kre} = \frac{\pi^2 E J_2}{\ell_0^2 n} \geq F$$

$$\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 J_2}{2,13^2 \cdot 4} \geq 0,2055$$

$$J_2 \geq 1,80 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 = 180 \text{ cm}^4$$

Táblázatból a legközelebbi érték az I 240-es szelvény, melynél

$$A = 46,1 \text{ cm}^2, \quad J_2 = 221 \text{ cm}^4 \quad \text{és} \quad i_2 = 2,20 \text{ cm}.$$

Ezután ellenőrizzük a felvett szelvényt. A karcsúsági tényező

$$\lambda = \frac{213}{2,20} = 96,82 < 105.$$

Euler-képlet nem érvényes. Azonban $J_2 = 180 \text{ cm}^4$ helyett kerekítés-ként a hozzá legközelebbi $J_2 = 221 \text{ cm}^4$ értéket voltunk kénytelenek választani, tehát lehetséges, hogy ez is megfelel. Valóban:

$$\sigma_k = 310 - 1,14 \lambda = 310 - 1,14 \cdot 96,82 = 199,6 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{ke} = \frac{199,6}{4} = 49,9 \text{ MN/m}^2.$$

$$\sigma = \frac{0,2055}{46,1 \cdot 10^{-4}} = 44,58 \text{ MN/m}^2 < \sigma_{kre} = 49,9 \text{ MN/m}^2.$$

Tehát a 240 mm magas I szelvény megfelelő.

6. A MEREV TESTEK MOZGÁSA

A mechanika jegyzet első fejezetében már foglalkoztunk a mechanika felosztásával és a legfontosabb alapfogalmakkal, az anyag, a tér és az idő fogalmával.

Az anyag fogalmával kapcsolatosan leszögezhetjük, hogy ebben a fejezetben ismét az un. merev testekkel foglalkozunk.

A tér és az idő fogalma kitüntetett szerepet kap a mechanika e fejezetének tárgyalásában.

A felosztással kapcsolatosan ismerjük, hogy a mechanikának azt a részét, amely pusztán a mozgások leírásával foglalkozik kinematikának nevezzük.

Ugy is mondhatjuk, hogy ez a mozgások geometriája, amely nemcsak a háromdimenziós térben, hanem az időben is vizsgálja a jelenségeket. A dinamika foglalkozik a mozgások okával, továbbá az ok és az okozat összefüggéseivel. A dinamikanak azt a részét, amely a viszonylagos nyugalmi helyzettel foglalkozik, statikának, a tényleges mozgásokkal foglalkozó részét pedig kinematikának nevezzük.

Tárgyalásaink során az egyszerűből az összetett felé haladva ismerjük meg a mozgásokat, majd az ok és okozat összefüggéseit is vizsgálva a kinetikát.

6.1 Kinematika

A kinematika a fizikának az a része, amely a mechanikai mozgások leírásával és általános törvényszerűségeivel foglalkozik. A mechanikai mozgások közül nem foglalkozunk a testek méret illetve alakváltozásaival, mozgáson a helyzetváltoztatást értjük.

A mozgás relatív fogalom, mivel egy test mozgását egy másik testhez viszonyítjuk. Ha más és más testekhez viszonyítjuk a mozgást, akkor az általában különbözőnek mutatkozik, így pl. a robogó vonat fülkájében ülő utas a vonathoz képest nyugalomban van, de a földhöz képest mozog. A következőkben a testek mozgását rendszerint a földhöz viszonyítjuk, tehát ha egyszerűen mozgásról beszélünk, azon a földhöz viszonyított mozgást kell érteni.

A test mozgása bonyolult jelenség, mert a test különböző pontjai általában különbözőképpen mozognak, ezért célszerű először az anyagi pont mozgásával foglalkozni. Az anyagi ponton olyan testet értünk, amelynek méretei elenyészően kicsinyek a tárgyalásunkban szereplő távolságokhoz képest, a test kiterjedését figyelmen kívül hagyhatjuk, és egy geometriai ponttal ábrázolhatjuk.

A véges kiterjedési test mozgását jellemezhetjük egyetlen pont mozgásával abban a speciális esetben, amikor a test minden pontja egyformán mozog, mert akkor bármely pont mozgása meghatározza az egész test mozgását.

6.1.1 A anyagi pont kinematikája

A mozgás térben és időben játszódik le. A newtoni mechanikában a háromdimenziós euklideszi tér minden irányban homogén és izotrop kontinuumnak tekinthető. Két pont egymáshoz viszonyított helyzetének meghatározására a hosszúság fogalma szükséges. A hosszúság mértékegysége a méter (jele m). A hosszúság mértékegységének alapja a Franciaországban Sevresben őrzött platina-irídium rud hossza. Mivel ez az adat nem reprodukálható pontosan, ezért hullámhossz mérésére vezetnek vissza a m-t. Az 1 m a 86-os tömegszámú kriptonatom 2_{p10} és 5_{d5} energiaszintjei közötti átmenetnek megfelelő sugárzás vákuumban mért hullámhosszúságának 1650763,73-szorosa.

Az idő mértékegysége a másodperc vagy secundum (jele: s), melynek egysége az 1900 január 1-i 12 óra efemer időhöz tartozó tropikus év 31 556 925,9747-ed része.

Az idő és a tér fogalmával kapcsolatos megállapítások a tapasztalat mindíg megegyeznek, míg a testek mozgásának sebessége a fénysebességhez viszonyítva kicsiny. Mi tanulmányainkban csak ilyen sebességekkel foglalkozunk.

6.1.1.1 A mozgás leírása térbeli koordináta-rendszerben

A mozgásjelenség leírása matematikailag legegyszerűbben egy, a földhöz kapcsolt koordináta-rendszerben történhet. Egy térbeli mozgást végző P jelű pont helyzete a koordináta-rendszer 0 pontjához képest megadható az $OP = r$ helyzetvektorral, vagy

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

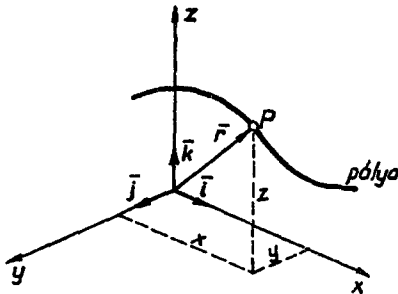
alakban is (6.1 ábra).

Amennyiben megoldjuk a helyzetvektort az idő függvényében a mozgást egyértelműen leírtuk.

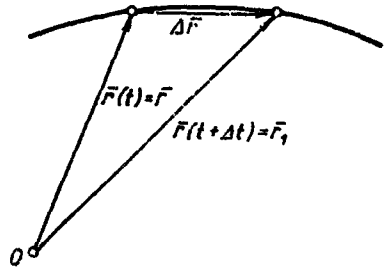
$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}.$$

A pont mozgása a fentieknek megfelelően három egymástól független koordinátatengely irányú mozgással adható meg, tehát az anyagi pont térbeli mozgása három szabadságfoku.

A pont pályájának nevezzük a helyzetvektor végpontja által leírt görbét.



6.1 ábra



6.2 ábra

A 6.2 ábrán értelmezzük a sebesség fogalmát. Jelölje a pont t időbeli helyzetét az $\bar{\mathbf{r}}$, a $t + \Delta t$ időbeni helyzetét az $\bar{\mathbf{r}}_1$ helyzetvektor.

A pont elmozdulása a két helyzetvektor különbsége $\Delta \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}$.

A Δt időközre eső helyzetváltozás fajlagos értéke amit átlagos sebességnek nevezünk, a következő vektorral kapható meg:

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{átl}} = \frac{\Delta \bar{\mathbf{r}}}{\Delta t},$$

melynek iránya megegyezik a $\Delta \bar{\mathbf{r}}$ irányával.

A $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel kapjuk meg a t időponthoz tartozó sebességvektort:

$$\bar{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt},$$

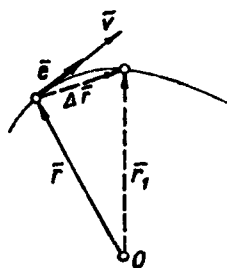
Vagyis a sebességvektor egy adott időpontban a helyzetvektor idő szerinti első differenciálhányadosa. A sebességvektor koordinátás alakja:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

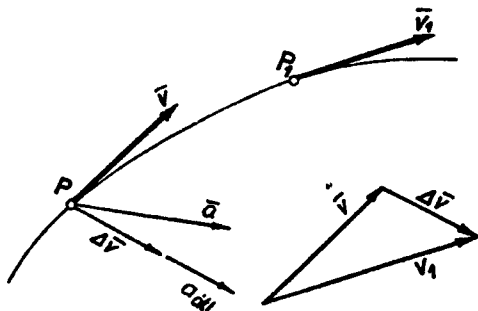
$$\bar{\mathbf{v}} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}.$$

A határfátmenettel az átlagos sebesség pályahur irányába eső vektora a pont pályájának a t időponthoz tartozó érintőjébe megy át (6.3 ábra). A sebesség mértékegysége:

$$[v] = \frac{[r]}{[t]} = \frac{m}{s} = ms^{-1}.$$



6.3 ábra



6.4 ábra

A 6.4 ábrán láthatjuk a t időpontnak megfelelő P pontban a \bar{v} sebességvektort és a $t + \Delta t$ időpontnak megfelelő P_1 pontban a \bar{v}_1 sebességvektort. A sebességvektor megváltozását a $\Delta \bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}$ különbségvektor adja, amelyet az ábrán külön is felrajzoltunk. A Δt időszaknak megfelelő és a két sebességvektor síkjában fekvő átlagos gyorsulásvektor:

$$\bar{a}_{\text{átl}} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

A t időpontbeli gyorsulásvektor:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$$

valamely t időpontbeli értéke a sebességvektor idő szerinti első differenciálhányadosa, illetve a helyzetvektor idő szerinti második differenciálhányadosa.

A gyorsulásvektor vektorális alakja;

$$\bar{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}$$

$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt} \bar{i} + \frac{dv_y}{dt} \bar{j} + \frac{dv_z}{dt} \bar{k}$$

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}.$$

A gyorsulás mértékegysége:

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = m \cdot s^{-2}$$

6.1.1.2 Az anyagi pont egyenesvonalu mozgása

Az egyenesvonalu mozgás az általános térbeli mozgások egyik speciális esete, melynek tárgyalását leegyszerűsíti az r helyzetvektor egyenesébe x tengely felvétele:

$$\bar{r}(t) = x(t) \bar{i}.$$

A mozgás leírásához egy koordináta elégséges, ezért a mozgás egy szabadságfoku. A sebesség és gyorsulásvektor a helyzetvektor idő szerinti differenciálásából megkapható:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{i} = v_x \bar{i}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \bar{i} = a_x \bar{i}$$

Az összefüggésekből látható, hogy a vektorok állása azonos, így a vektorális jelöléstől eltekinthetünk.

Valamennyi ut-, sebesség- és gyorsulásfüggvény az idő egyváltozós függvénye, így ezek síkbeli ábrázolása egyszerűen lehetséges.

A t időt független változónak tekintve, ábrázolhatjuk a mozgás-, sebesség- és gyorsulás függvényeket, ezeket kinematikai diagramoknak nevezzük.

Példaként írjuk fel a fizikában tanult egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás ut-, sebesség- és gyorsulás függvényét, valamint rajzoljuk fel a kinematikai diagramokat.

A mozgás egyenletességét az jelenti, hogy a gyorsulás állandó $a = \text{const.}$, és vektora, mivel a mozgás egyenesvonalú, a pálya egyenesébe esik.

A szabadesés egy jellegzetes egyenesvonalú egyenletes mozgás, melynek gyorsulásvektora függőlegesen lefelé mutató és nagysága $a = g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$.

Az állandó gyorsulás esetén a sebesség függvény integrálással igen egyszerűen kapható.

$$v = \int a \, dt = a \int dt = at + v_0.$$

Itt v_0 integrálási állandóként adódik, jelentése: kezdeti sebesség. Az utfüggvény a sebességfüggvény integrálásával állítható elő:

$$x = \int v \, dt = \int (at + v_0) \, dt = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

Az x_0 ugyancsak integrálási állandó, azt a helyet jelöli, ahol a pont a $t = 0$ időpillanatban van és ahol a sebesség v_0 .

A mozgás kinematikai diagramjait a 6.5 ábrán rajzoltuk meg.

A mozgás iránya az x tengely. A pont a $t = 0$ időpillanatban az x_0 ordinátájú helyről indul v_0 kezdősebességgel. A t időponthoz tartozó, a , v , x mennyiségek a kinematikai diagramokról leolvashatók.

Gyakorlásképpen oldjunk meg egy szám példát, az egyenesvonalú mozgásra.

Egy 30 m magas toronyból 20 m/s kezdősebességgel kavicsot dobunk felfelé. Mekkora a kavics sebessége és az elhajítás helyétől mért távolsága $t_1 = 1 \text{ s}$ és $t_2 = 5 \text{ s}$ múlva? Milyen magasra emelkedik a kavics, és ezalatt mekkora idő telik el?

A gyorsulás vektor $a = g \cong 10 \text{ m/s}^2$ a föld felé irányul.

A sebességfüggvény:

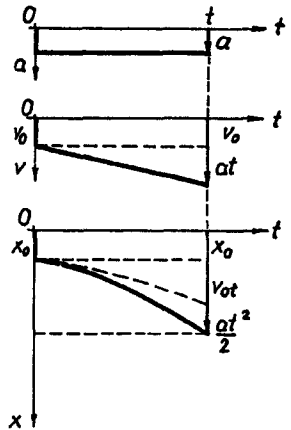
$$v = v_0 - g t.$$

Az utfüggvény $x = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$

$t_1 = 1 \text{ s}$ időpillanatban:

$$v_1 = 20 - 1 \cdot 10 = 10 \text{ m/s} \quad x_1 = 20 \cdot 1 - \frac{10}{2} \cdot 1 = 15 \text{ m}$$

$t_2 = 5 \text{ s}$ időpillanatban:



6.5 ábra

$$v_2 = 20 - 5 \cdot 10 = -30 \text{ m/s} \quad s_2 = 20 \cdot 5 - \frac{10}{2} \cdot 5^2 = -25 \text{ m.}$$

A fölfelé hajtott test sebessége csökken és a tetőpontban $v = 0$.

$$v = 0 = v_0 - gt$$

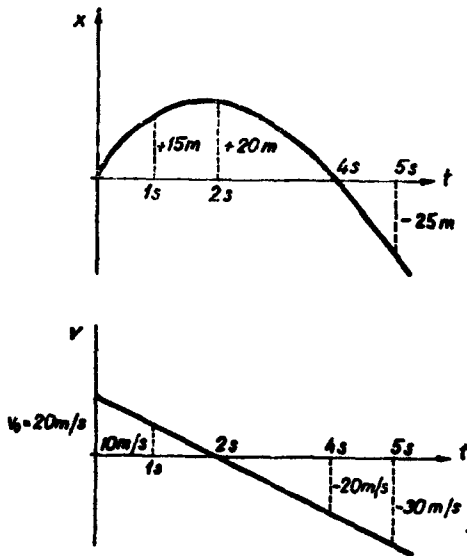
ebből az emelkedés ideje

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{10} = 2 \text{ s.}$$

Az emelkedés magasságát úgy kapjuk meg, hogy az utfüggvényben behelyettesítjük az emelkedés idejét:

$$x = v_0 t - g \frac{t^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - g \frac{v_0^2}{2g^2} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{20^2}{2 \cdot 10} = 20 \text{ m.}$$

A 6.6 ábrán felrajzoltuk az ut és sebesség diagramokat is. A gyorsulás diagramja $g = \text{konstans}$.



6.6 ábra

6.1.1.3 Az anyagi pont síkmozgása

A mozgást megadhatjuk derékszögű koordináta-rendszerben úgy megválasztva a koordinátatengelyeket, hogy a mozgás az x , y síkban legyen ($z = 0$). Ekkor a függvények:

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

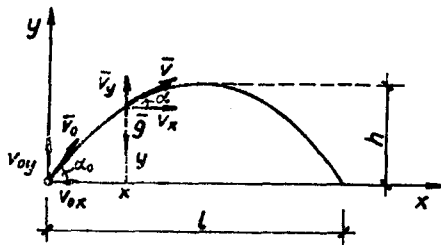
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

Példaként vizsgáljuk meg a középiskolai fizikában már tanult ferde hajtás mozgásfüggvényeit.

Az anyagi pont gyorsulása egyenlő a nehézségi gyorsulással:

$$\vec{a} = g = 0 \vec{i} - g \vec{j}$$

A kezdeti feltételek a 6.7 ábra alapján a következőképpen alakulnak:



6.7 ábra

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha_0) \vec{i} + (v_0 \sin \alpha_0) \vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = 0 \vec{i} + 0 \vec{j}.$$

A kezdeti feltételek figyelembevételével a gyorsulásvektor idő szerinti integrálja megadja a sebességvektort:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \int_0^t \vec{a} dt = g \int_0^t dt = gt + \vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha) \vec{i} + \\ &+ (-gt + v_0 \sin \alpha) \vec{j}. \end{aligned}$$

További integrálással megkapjuk a mozgás helyzetvektorát a t függvényében:

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{v} dt + \vec{r}_0 = (v_0 t \cos \alpha) \vec{i} + (-\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha) \vec{j}.$$

A számítást igen leegyszerűsíthetjük, ha a mozgást felbontjuk x és y irányu vetületeire.

Mint azt már a mozgásfüggvényekről leolvashattuk, a vetületmozgás vízszintes irányban egyenesvonalu egyenletes mozgás, függőleges irányban egyenesvonalu egyenletesen változó mozgás.

Igy külön-külön is számíthatjuk a sebesség x és y irányu vetületeit:

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_{oy} - gt = v_0 \sin \alpha - gt,$$

Külön számíthatók a helyzetvektor x és y irányu vetületei is.

$$x = v_{ox} t = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_{oy} t - g \frac{t^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}.$$

Számítsuk ki a röppálya jellemző adatait. Az emelkedés idejét abból számítjuk ki, hogy a tetőpontban a sebességvektor vízszintes, tehát $v_y = 0$

$$v_y = v_{oy} - g t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

A röppálya magassága a t_1 idő y függvényébe való behelyettesítésével kapható:

$$y_1 = h = v_{oy} \frac{v_{oy}}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_{oy}^2}{g^2} = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

A teljes röpdő az emelkedési idő kétszerese

$$t_2 = \frac{2 v_{0y}}{g},$$

ami a parabolapálya szimmetriájából következtethető.

Az l röptávolságot az x függvényből kapjuk meg a t_2 idő behelyettesítésével:

$$x_2 = l = v_{0x} \frac{2 v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \alpha.$$

6.1.1.4 Mozgás ismert pályán

Az anyagi pont mozgásának vizsgálatakor gyakran találkozunk olyan esettel, amikor a mozgás pályája ismert. Megvizsgáljuk az ilyen mozgás kinematikai jellemzőit is.

A mozgó pont pályáját jelöljük s -sel, a pálya s pontjában az érintőirányú egységvektort jelöljük $\bar{e}(s)$ -sel, az erre merőleges és a görbületi középpont felé mutató egységvektort pedig \bar{n} -nel.

A 6.8 ábrán nézzük meg azt a Δs hosszúságú szakaszt, amelyet az anyagi pont Δt idő alatt tesz meg a $P(t)$ és $P(t + \Delta t)$ pontok között. Így felírható a mozgás sebessége:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \frac{ds}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

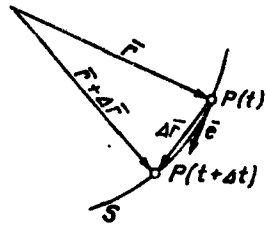
Az ábrából látható, hogy a $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ határértéke az \bar{e} egységvektor, mely a görbét a $P(t)$ pontban érinti. A sebesség tehát

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{e} = v \bar{e}$$

Az anyagi pont sebességvektora pályájának egy adott pontjában mindig a ponthoz tartozó érintővel párhuzamos.

A mozgás gyorsulását a sebességvektor idő szerinti deriválásával nyerjük:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \bar{e} + v \frac{d\bar{e}}{dt}$$



6.8 ábra

Nyilvánvaló, hogy az első tag érintő irányu gyorsulásvektort képvisel. Meg kell azonban vizsgálni, hogy a második tagban jelentkező $\frac{d\bar{e}}{dt}$ értéknek mi a jelentése.

Differenciáljuk tehát a láncszabály alkalmazásával:

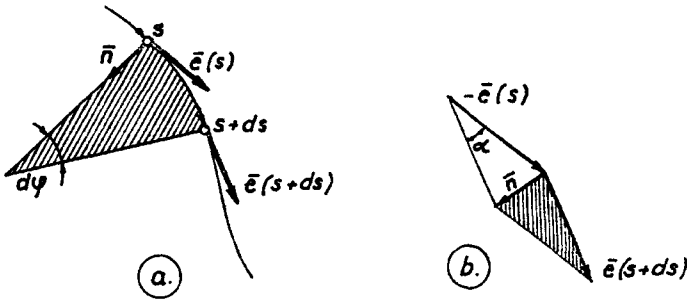
$$\frac{d\bar{e}}{dt} = \frac{d\bar{e}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\bar{e}}{ds}.$$

Ezek után tekintsünk meg a pont pályájánál egy ds elemi hosszúságu szakaszt, melynek a görbületi sugara állandónak (ρ) tekinthető. Az érintő irányu egységvektor változása az elemi szakaszon a 6.9 ábrának megfelelően:

$$d\bar{e} = \bar{e}(s + ds) - \bar{e}(s)$$

lesz.

Az elemi $d\bar{e}$ iránya az ábra alapján merőleges lesz az \bar{e} vektorra. Az \bar{e} vektorra merőleges irányt az \bar{n} egységvektor jelöli ki, így $d\bar{e}$ iránya megegyezik az \bar{n} irányával.



6.9 ábra

A 6.9.a és b ábrából kitétnik, hogy a sraffozott síkidomok - melyek egyébként elemi háromszögek tekinthetők - hasonlóak, tehát fel lehet írni, hogy

$$\frac{d\bar{e}}{\bar{e}} = \frac{ds}{\rho}$$

melyből következik, hogy

$$\frac{d\bar{e}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n},$$

mert $d\bar{e}$ nyílja megegyezik az \bar{n} nyíllalval.

A $\frac{d\vec{o}}{ds}$ értéket behelyettesítve az eredetileg felírt gyorsulás függvénybe, az

$$\vec{a} = \frac{dv}{ds} \vec{e} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

függvényt kapjuk.

A gyorsulásnak tehát egy érintő és egy normálirányú összetevője van. $\vec{a}_e = v \vec{e}$ és $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$. Összefoglalva a kapott eredményeket, az ismert pályán mozgó anyagi pont egy adott pontbeli gyorsulására az alábbi megállapításokat tehetjük:

- A gyorsulásvektor érintő irányú összetevője függ a sebesség változásától, de független a sebességvektor irányától.

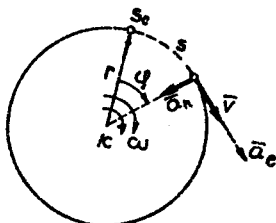
- A gyorsulásvektor érintőre merőleges összetevője, amely mindig a görbületi középpont felé mutat, csak a sebesség négyzetétől és a görbületi sugártól függ, de független a sebesség változásától.

Példaként vizsgáljuk meg a középiskolai fizikában tanult körmozgás összefüggéseit.

A mozgás pályája adott r sugarú kör. $s = s(t)$, mivel $s = r\varphi$ ahol r állandó, a mozgás a $\varphi = \varphi(t)$ függvénnyel leírható (6.10 ábra).

A sebesség nagysága:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}$$



6.10 ábra

A poláris koordináta idő szerinti deriváltja a szögsebesség

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

A szögsebesség dimenziója s^{-1} . A pályamenti sebesség és az ω szögsebesség közötti összefüggés:

$$v = r \omega.$$

A gyorsulásnak lehet érintőirányú komponense:

$$a_2 = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

A szögsebesség idő szerinti differenciálhányadosát szöggyorsulásnak nevezzük:

$$\kappa = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

A szöggyorsulás dimenziója s^{-2}

A szöggyorsulás és az érintő irányu gyorsulásvektor közötti összefüggés: $\mathbf{a} = \mathbf{r} \cdot \kappa$

A normális irányu gyorsulást az általános képlet szerint felírhatjuk:

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$$

Egyenletes körmozgás esetén a szöggyorsulás illetve az érintő irányu gyorsulás egyenlő nullával.

$$\mathbf{a}_e = 0 \quad \kappa = 0.$$

A normálirányu gyorsulás $\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$ nem egyenlő zérussal.

A sebesség integrálásával nyerjük a mozgás függvényét:

$$s = s_0 + v_0 t \quad \text{ill.} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \text{ha a } t = 0$$

időpillanathoz a pont az s_0 illetve φ_0 helyen van.

Az egyenletes körmozgással kapcsolatos fogalom a fordulatszám.

Az N másodpercenkénti fordulatszám dimenziója s^{-1} azt mutatja meg, hogy másodpercenként hány fordulatot tesz meg a pont. Az egyenletes körmozgásnál a fordulatszám természetesen állandó. Egy fordulat alatt a sugár által leírt szög 2π , így a másodpercenként surolt szög $2\pi N$.

Egyenletes körmozgásnál ω állandó és

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \text{-vel, jelen esetben } \omega = \frac{2\pi N}{1}.$$

A képletből a fordulatszám meghatározható

$$N = \frac{\omega}{2\pi}.$$

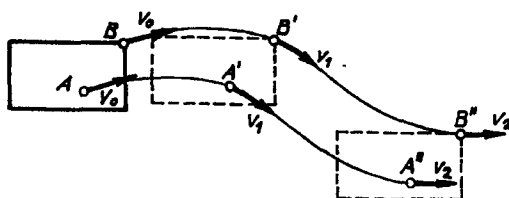
6.1.2 A merev testek kinematikája

A merev testek kinematikája a merev testek térben és időben lejátszódó helyzetváltozását tárgyalja. A merev testek mozgása általában térben játszódik le, de e tananyagban csak arra van módunk, hogy a merev testek síkmozgásának témeköréből ismerkedjünk meg néhány alapfogalommal.

Síkmozgást akkor végez a test, ha pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak.

A mozgás kétféle egyszerű mozgásra bontható, a haladó és forgó mozgásra.

Haladó mozgást akkor végez a merev test, ha valamennyi pontjának egy-egy időpillanatban ugyanakkora a sebességvektora. A haladó mozgás során a test egyes pontjai eltérő helyzetű, de teljesen egybevágó görbében mozognak. A merev test haladó mozgása megadható egyetlen pontjának mozgásfüggvényével. A síkbeli haladó mozgásnál a pálya természetesen sík görbe, mint az a 6.11 ábrán látható.



6.11 ábra

A merev testről akkor mondjuk, hogy fix tengely körüli forgó mozgást végez, ha két pontjának térbeli helyzete a mozgás időtartama alatt nem változik. Síkbeli mozgás esetén ez a tengely merőleges a mozgás síkjára.

Könnyen belátható, hogy a testnek a forgástengelyen kívül fekvő valamely P pontja olyan körmozgást végez, melynek síkja merőleges a forgástengelyre, a kör középpontja a forgástengelyen van. Ebből az következik, hogy amennyiben ismeretes valamely test egy pontjának mozgástörvénye és forgástengelye, valamennyi pontjának mozgásjellemzőit meg tudjuk határozni. Tehát a test mozgása jellemezhető a $\varphi(t) = \varphi(t) \bar{e}$ vektorral.

A test szögsebessége és szöggyorsulása már differenciálással meghatározható:

$$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \bar{e}$$

$$\bar{\chi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \bar{e} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \bar{e} .$$

A test valamely pontjának sebességvektora a középpálya adott pontbeli érintőjének irányába esik, és nagysága:

$$v = R \omega, \text{ ahol } R \text{ a körpálya sugara.}$$

A test valamely pontjának gyorsulásvektora két részből áll, egyrészt az érintő irányu gyorsulásból

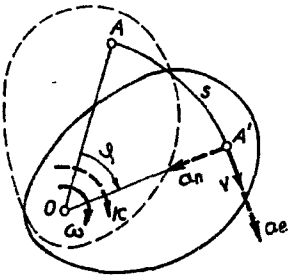
$$\bar{a}_e = R \kappa$$

másrészt a sugár irányu gyorsulásból

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R \omega^2.$$

A pont teljes gyorsulásának nagysága:

$$a = R \sqrt{\kappa^2 + \omega^2}.$$



6.12 ábra

Az értelmezését a 6.12 ábráról leolvashatjuk.

Az általános síkbeli mozgást végző test mozgásállapota egy bizonyos időpontra vonatkozik és akkor mondjuk ismertnek, ha az időpontban ismerjük a test valamennyi pontjának sebességét és gyorsulását.

Ha ismerjük egy P pont sebességét (v), gyorsulását (a), szögsebességét (ω), és szöggyorsulását (κ) - az utóbbi kettő

vektora merőleges a mozgás síkjára - meg tudjuk határozni az A pont mozgásjellemzőit is.

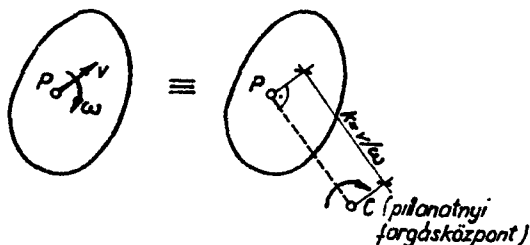
Az A pont sebességét a : $\bar{v}_A = \bar{v} + \bar{\omega} \cdot \rho_A$ képletből kapjuk, ahol ρ_A a két pont távolsága.

Az a pont gyorsulását az:

$$\bar{a}_A = \bar{a} + \bar{\kappa} \cdot \rho_A + \bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \cdot \rho_A)$$

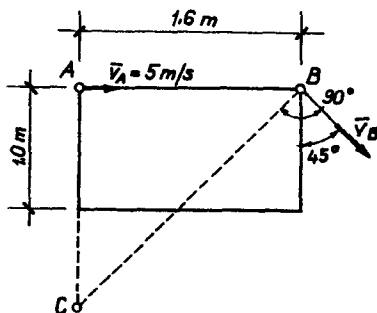
képlet adja, ahol a második tag a két pontot összekötő egyenesre merőleges vektort jelent a mozgás síkjában, míg a harmadik tag olyan vektor, mely az A pontból a P felé mutat és nagysága; $\rho \omega^2$.

A síkmozgásnál \bar{v} merőleges $\bar{\omega}$ -ra, így a kettő összetehető egyetlen ω -val egyező nagyságu és értelmű szögsebességgé (ω_R), amelyet a v -re merőleges irányban a ponttól $k = v/\omega$ távolságban kell felvenni. Ezt a pontot pillanatnyi forgásközpontra nevezzük. Szemléletesen látható a 6.13 ábrán.



6.13 ábra

Példa: A 6.14 ábrán levő téglalap alakú test A pontja $v_A = 5 \text{ m/s}$ sebességgel mozog, mekkora a B pont sebessége, ha v_B vektora 45° -os szöget zár be v_A vektorával?



6.14 ábra

$$\overline{AB} = \overline{AC} = 1,6 \text{ m.}$$

Igy

$$\omega_R = \frac{v_A}{\overline{AC}} = \frac{5}{1,6} = 3,12 \text{ s}^{-1}$$

A B pont sebessége

$$v_B = \omega_R \overline{CB} = 3,12 \cdot 2,26 = 7,06 \text{ m s}^{-1}.$$

Példa: Vizsgáljuk meg egy r sugaru kerék tiszta gördülő mozgását. A kerék S súlypontja a járművel azonos sebességgel halad, legyen a sebessége v_S .

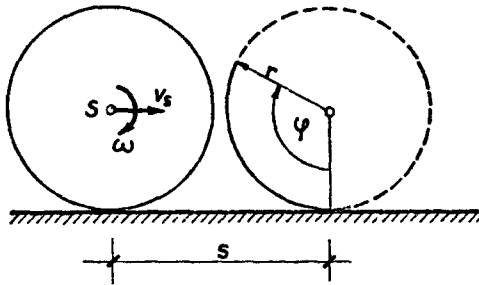
A gördülés olyan összetett mozgásnak tekinthető, amely a súlypont v_S haladó, illetve a súlypont körüli ω szögsebességtű forgó mozgásából tevődik össze.

A szögsebesség meghatározható, ha figyelembe vesszük, hogy csúszásmentes gördülés esetén a súlypont által megtett ut azonos a 6.15 ábra alapján az az $r\varphi$ ívhosszal: $s = r\varphi$. Egyenletes sebességnél ebből:

$$\frac{s}{t} = r \frac{\varphi}{t}, \quad v_S = r\omega,$$

és a szögsebesség

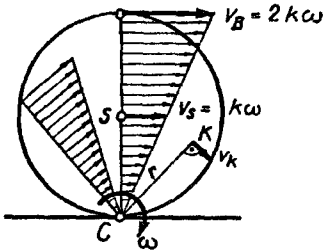
$$\omega = \frac{v_S}{r}.$$



6.15 ábra

Természetesen a gördülésnek is megkereshető a pillanatnyi forgáspontja. Mivel a kerék a pályával érintkező pontja körül fordul el ez a pillanatnyi forgáspont, melynek a távolsága:

$$k = \frac{v}{\omega} = r.$$



6.16 ábra

A 6.16 ábra alapján a kerék bármely pontjának pillanatnyi sebessége meghatározható.

6.2 Kinematika

A kinetika a merev test mozgásállapot változásának okait kutatja, és az anyagi testek mozgásait a rájuk ható erőkkel együttesen tárgyalja.

Vizsgálatainkat először anyagi pontra korlátozzuk, tehát olyan testre, amelynek véges tömege, de végtelenül kicsi méretei vannak. Ilyen testek a valóságban nem léteznek, azonban az anyagi pont mozgására kapott összefüggések a véges kiterjedésű testekre is alkalmazhatók bizonyos esetekben.

Az anyagi pont kinematikájának ismerete alapján röviden tárgyaljuk a merev testek kinetikájának néhány alapvető összefüggését, azokat, amelyekre a későbbi tanulmányaink során szükségünk lesz.

6.2.1 Az anyagi pont kinematikája

Az anyagi pont kinetikai törvényszerűségeinek meghatározása Newton axiómáinak alapján történik. Így tárgyalásainkat az alaptételek ismertetésével kezdjük.

6.2.1.1 A kinetika Newton féle alaptörvényei

Newton az 1868-ban megjelent "A természettudomány matematikai alapjai" című munkájában három törvényt mondott ki, melyek eredeti fogalmazásban így hangzanak:

1. törvény:

Minden test megtartja nyugalmi, vagy egyenesvonalu egyenletes mozgási állapotát, hacsak a rá ható erők ennek megváltoztatására nem kényszerítik.

2. törvény:

Az anyagi pont mozgásának megváltozása arányos a mozgató erő hatásával, és ugyanannak az egyenes vonalnak az irányába esik, mint amelyben az erő működik.

3. törvény:

A hatás egyenlő az ellenhatással, vagyis két test egymásra kifejtett hatása mindig egyenlő nagyságu és ellentétes irányu.

Newton törvényei axiómák, melyeket megfigyelésekből szűrt le, elméletileg nem, de kísérletileg bármikor igazolhatók.

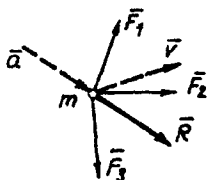
Az első axiómát tehetetlenségi törvénynek is nevezzük. Ennek első megfogalmazását Galilei adta. Ha m -mel jelöljük a test tömegét és v -vel a sebességét, akkor az mv szorzatot mozgásmennyiségnek nevezzük. Az első axióma megfogalmazható úgy is, hogy az anyagi pont mozgásmennyisége csak külső erő hatására változik meg.

A második axióma a kinetika alaptörvénye. A törvény képletszerűen:

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

ahol \vec{F} az erő, \vec{a} a gyorsulás, m skaláris mennyiség, amely a test mozgásváltozásával szembeni tehetetlenségét fejezi ki és tömegnek nevezük. A test tömege a klasszikus mechanikában független az időtől, tehát vizsgálatainkban állandónak tekinthető. A mechanika legújabb kutatásai során a fénysebességet megközelítő sebességek esetén a Newton törvény nem pontos, mert úgy tűnik, mintha a tömeg ilyen esetekben növekedne. A műszaki mechanikában azonban ilyen sebességek nem fordulnak elő, tehát a Newton törvényt helytállónak tekintjük.

A mozgató erővel kapcsolatosan kimutatható, hogy az lehet több erő eredője. Ily módon a Newton törvény általánosítható. Ha $(F_1, F_2, F_3) \in R$



6.17 ábra

erőrendszer működik egy v sebességgel mozgó tömegpontra, akkor az R eredő irányába gyorsulás keletkezik, mely az eredő erővel arányos (6.17 ábra).

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m}.$$

6.2.1.2 A tömeg és az erő mértékegysége

A kinematikai alapfogalmak tárgyalása során már foglalkoztunk a hosszúság és az idő fogalmával, valamint ezek mértékegységeivel. A kinetikában újabb fogalmakkal találkozunk, a tömeggel és az erővel.

A tömeg mértékegysége a kilogramm (jele: kg). A kilogramm a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban (Sèvres-ben) őrzött platina iridium henger tömege.

A fizikai mértékrendszerekben, a CGS, az MKS és az SI rendszerben a tömeg az idővel és a hosszúsággal együtt alaplmenység. Az SI (Système International d' Unités) mértékrendszer az egész fizikát felölelő nemzetközileg elfogadott egységes mértékrendszer, melyet hazánkban az MSZ 4900/3-78 szabvány ír elő a mechanika számára.

Ebben az erő levezetett mértékegység, neve newton (jele: N), tehát $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$.

A műszaki gyakorlatban 1979. június 1-ig az ugynevezett technikai mértékrendszer volt használatos. A technikai mértékrendszerben az erő egységét választották meg úgy, hogy az 1 kg tömeg súlyával legyen egyenlő. Az így megválasztott egység a kilopond (jele: kp). Mivel a nehézségi gyorsulás a föld felszínének különböző pontjaiban kis mértékben változik, az említett 1 kg tömegű platina iridium henger súlyát minősítették 1 kp-nak, ott ahol a nehézségi gyorsulás értéke $9,80665 \text{ m s}^{-2}$. (A mérnöki gyakorlatban $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ értékkel szokás számolni.)

Átszámítás a két rendszer között:

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$$

$$1 \text{ N} = 0,102 \text{ kp}.$$

Annak ellenére, hogy a technikai rendszer ma már nem használható, az átszámítások ismeretére szükségünk van, mert a szakirodalom legnagyobb része még ebben a technikai mértékrendszerben íródott.

Példa a mértékegységek átszámítására:

Egy anyagi pont tömege $m = 600 \text{ kg}$, mekkora erő hoz létre

$a = 2,3 \text{ ms}^{-2}$ nagyságu gyorsulást?

SI rendszerben:

$$F = m \cdot a = 600 \text{ kg} \cdot 2,3 \text{ ms}^{-2} = 1380 \text{ N.}$$

Átszámítás technikai rendszerre:

$$F = \frac{1380}{9,81} = 141 \text{ kp.}$$

Technikai rendszerben:

$$F = m a = \frac{600}{9,81} \cdot 2,3 = 141 \text{ kp}$$

Átszámítva SI rendszerre:

$$F = 141 \cdot 9,81 = 1380 \text{ N}$$

6.2.1.3 A Newton törvény alkalmazása példákon

A 6.18 ábra szerinti elrendezésben egy 20 és egy 10 kg tömegű testet akasztunk a csigán átvett kötélre. A kötélt és a csiga tömege elhanyagolhatóan kicsi, a csiga csapágyazását surlódásmentesnek tekintjük. A rendszer magára hagyva a súlyosabb oldal felé gyorsuló mozgásba kezd.

A rendszer gyorsulása a Newton törvényből számítható.

Az eredő $R = (20-10) \cdot 9,81 = 98,1 \text{ N.}$

A tömeg $m = 10 + 20 = 30 \text{ kg.}$

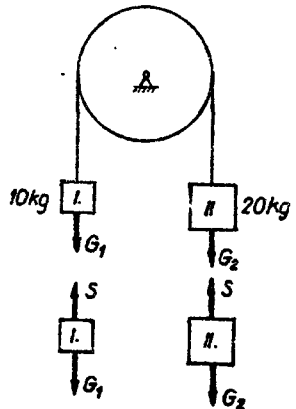
A gyorsulás: $a = \frac{9,81}{30} = 3,27 \text{ ms}^{-2}.$

A gyorsulás ismeretében már meghatározható a kötélen keletkező erő. Vizsgáljuk az I. jelű testre ható erőket. Lefelé mutat a test súlyereje, felfelé a kötélerő, és a test felfelé gyorsul $a = 3,27 \text{ ms}^{-2}$ gyorsulással. Felírva a kinetika alaptörvényét:

$$S - G_1 = m_1 a$$

$$S - 10 \cdot 9,81 = 10 \cdot 3,27$$

$$S = 130,8 \text{ N.}$$



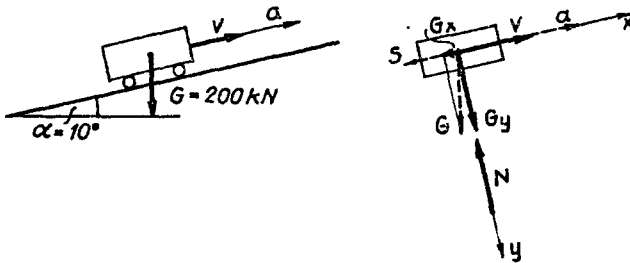
6.18 ábra

Mivel feltételeztük, hogy a csiga tömege és a surlódás elhanyagolható, a II. jelű testre ható kötőerő is $S = 130,8 \text{ N}$ erővel lesz egyenlő. Ellenőrzésként felírható az alaptörvény a II. jelű testre is:

$$20 \cdot 9,81 - 130,8 = 20 \cdot 3,27$$

$$65,4 = 65,4$$

Vontatási feladat. A 6.19 ábrán látható járművet milyen F erővel kell felfelé huzni, hogy a gyorsulás fölfelé $a = 1 \text{ ms}^{-2}$ legyen?



6.19 ábra

A jármű fajlagos menetellenállása $\mu = 4 \text{ N/kN}$. A fajlagos menetellenállás csak a jármű súlyától függ és független a sebességtől. A légellenállás miatt a menetellenállás a sebesség négyzetével arányosan nő, ezért a μ értékkel csak kis sebességek esetén számolhatunk.

Rajzoljuk fel a járműre ható erőket.

A súlyerőt két összetevőre bonthatjuk, melyeknek nagysága:

$$G_x = G \sin 10^\circ = 200 \cdot 0,1736 = 34,7 \text{ kN}$$

$$G_y = G \cos 10^\circ = 200 \cdot 0,9848 = 197,0 \text{ kN.}$$

A lejtőről az N normális reakció működik a kocsihoz és ebből számítható az $S = \mu N$ lejtő irányú visszatartó erő.

$$S = 197,0 \cdot 4 = 787,8 \text{ N.}$$

Az y irányban az erők $G_y = N$ egyensúlyban vannak, ebben az irányban nem lehet gyorsulás.

Az x irányban a következő képletből számítható a gyorsulás:

$$F - G_x - S = m a.$$

Behelyettesítve a képletbe a számszerű adatokat, a vonóerő számítható:

$$F = 34,7 - 0,7878 = 1 \cdot \frac{200}{9,81}$$

$$F = 55,88 \text{ kN.}$$

A példa megoldásánál arra kell vigyázni, hogy az erőket azonos mértékegységekben helyettesítsük be, itt minden értéke kN-ban számoltunk.

A vontatási feladatoknál általában egyszerűbben lehet számolni, mert a vasúti és a közúti pályák általában kis meredekségű, illetve vízszintes szakaszokból állnak. A lejtők meredekségét a vasutnál ezrelékben, a közútnál százalékban szokás megadni.

Az 5‰ azt jelenti, hogy a pálya 1000 méterenként 5 métert emelkedik. Felírhatjuk a következő összefüggést

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} = \frac{5}{1000} = 0,005,$$

tehát az emelkedő hajlásszögének tangense az e ezrelékben kifejezett értéke.

Mivel a szögek általában kis értékűek, megengedhetők a következő közelítések:

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \alpha \cong \sin \alpha$$

$$\cos \alpha \cong 1.$$

Igy a súlyerő lejtő irányú összetevője: $G_x = G \sin \alpha \cong G \operatorname{tg} \alpha = G e$

és a lejtőre merőleges összetevője: $G_y = G \cos \alpha \cong G$.

Vigyázni kell a nagyságrendre:

$$G_x = G \cdot e$$

$$[N] = [KN] [\%o]$$

A menetellenállást az:

$$F = G \mu \quad \text{képlet szerint számoljuk.}$$

$$[N] = [KN] [N/KN]$$

A lejtős pályán a lejtő irányú erőkomponens tehát a következő képletel számítható:

$$F = G (e \pm \mu).$$

$$[N][KN] [\%] [N/KN]$$

A menetellenállás emelkedő irányú mozgásnál pozitív, lejtő irányú mozgásnál negatív előjellel kerül a képletbe.

6.2.1.4 A d' Alembert elv

A Newton törvényét kifejező $\bar{R} = m \bar{a}$ egyenletet d' Alembert egyensúlyi egyenlet alakjában írta fel.

$$\bar{R} + (-m \bar{a}) = 0.$$

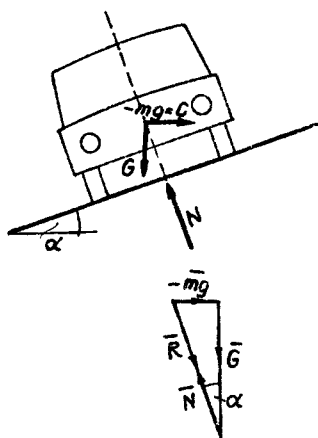
Ez nem egyszerűen algebrai átrendezés, hanem komoly értelme van.

Az $m \bar{a}$ mennyiség a mozgásjellemzőket tartalmazó oldalról az erő oldalra kerül át, tehát megváltozott a jellege. Ezt az $m \bar{a}$ értéket d' Alembert tehetetlenségi erőnek nevezte. Így tehát a mozgó testre ható erők a tehetetlenségi erővel egyensúlyban vannak. Ezt kinetikai egyensúlyi állapotnak nevezzük.

Példaként vizsgáljuk meg a köríven túl-emelt pályán haladó gépkocsira ható erőket a 6.20 ábrán.

A közlekedés biztonsága érdekében a vasúti és a közúti pályát az ívekben túlemlik, vagyis keresztirányban α szöggel a görbületi középpont felé megdöntik. A túlemlést úgy kell megállapítani, hogy adott sebességnél az erők eredője a pályára merőleges legyen.

A járművekre ható erők - d' Alembert elve szerint - a súlyerő és a tehetetlenségi erő. Ezeknek az eredője tart egyensúlyt az N pályareakcióval. Az r sugarú íven a v



6.20 ábra

sebességgel haladó járműre

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

gyorsulás hat. Ebből a tehetetlenségi erő:

$$-m a = -m \frac{v^2}{r}.$$

Ilyen gyorsulással reptülne ki a jármű az ivről, ha nem lenne surlódás, illetve menetellenállás.

A súlyerő $G = m \cdot g$, ahol $g = 9,81$, a nehézségi gyorsulás.

A 6.20 ábra szerint a hajlásszög tangense a vektorháromszög alapján felírható:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{G} = \frac{m a_n}{mg} = \frac{a_n}{g} = \frac{v^2}{rg}.$$

6.2.1.5 A kinetikai fogalmak

Az eddig tanult fogalmakat kibővítjük még néhány eddig még nem tárgyalt kinetikai fogalommal.

6.2.1.5.1 A mozgásmennyiség

Az anyagi pont mozgásmennyiségén a sebességvektor és tömeg szorzatát értjük. A mozgásmennyiség az anyagi ponthoz rendelt vektormennyiség, mely a pálya érintőjének irányába esik. Matematikailag úgy tekinthető, mint az m skalárral megnyujtott sebességvektor.

Mértékegysége $[\text{kg m s}^{-1}]$ a tömeg és a sebesség mértékegységeinek szorzataként nyerhető.

6.2.1.5.2 A perdület

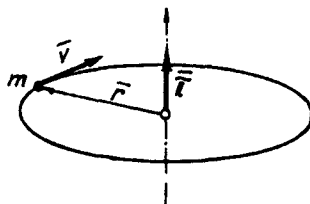
Az anyagi pont perdülete a tér egy pontjára, helyzetvektorának és mozgásmennyiségének vektoriális szorzata.

$$\vec{\pi} = \vec{r} \times m \vec{v}.$$

Értelmezhető úgy is, mint a mozgásmennyiség nyomatéka az "O" pontra. A vektoriális szorzás értelmében a perdületvektor merőleges az \vec{r} és \vec{v} vektorok által meghatározott síkra.

Mértékegysége: $[\text{m} \cdot \text{kg m s}^{-1}] = [\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}]$.

A 6.21 ábrán a perdület meghatározásának azt a speciális esetét mutatjuk be, amikor a tömegpont körpályán halad. Ebben az esetben a $\vec{\pi}$ vektor a kör síkjára merőleges, és nagysága a $\vec{\pi} = \vec{r} \times m \vec{v}$ skalárszorzattal meghatározható.



6.21 ábra

6.2.1.5.3 A mozgási energia

Az m tömegű, v sebességgel mozgó anyagi pont mozgási energiáját a következő képlet szerint kapjuk:

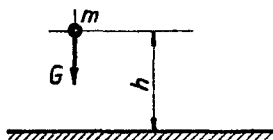
$$E = \frac{m v^2}{2} .$$

Ez skaláris mennyiség, mert a sebesség vektor négyzete egyenlő a skalárértékének négyzetével.

Mértékegysége joule (jele: J), melyet az alapegységekkel kifejezve a $[\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$ kifejezést kapjuk.

6.2.1.5.4 A helyzeti energia

Az m tömegű anyagi pont helyzeti (potenciális) energiáját a nehézségi erőter olyan tartományában, amelyben a g nehézségi gyorsulás állandó nagyságúnak tekinthető, a következő képlettel kapjuk meg:



6.22 ábra

$$E_p = m g h .$$

$mg = G$ a súlyerő, azért mondhatjuk, hogy a potenciális energia a nehézségi erő munkavégző képességét fejezi ki.

A mértékegysége $[\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}] = [\text{Nm}]$, ez utóbbi azonban nem alapegységekkel kifejezett dimenzió.

6.2.1.5.5 Az erő impulzusa

Az impulzus, vagy ahogyan a középiskolai fizikakönyvben nevezték, az erőlöketés, az erő mozgásállapotváltozását kifejező fogalom.

Az erőnek egy dt elemien kicsi idő intervallumra eső impulzusán a $d\bar{I} = \bar{F} dt$ szorzatot értjük. Ez az erővektor is a skalár idő mozzanata.

Az F erőnek valamely t_0 és t_1 időpontok közötti intervallumba eső impulzusát a következő integrállal kaphatjuk:

$$\bar{I} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F} dt .$$

Mértékegysége: $[\text{kg m s}^{-2}] \cdot [\text{s}] = [\text{kg m s}^{-1}]$.

6.2.1.5.6 A nyomaték impulzusa

Az erőimpulzushoz hasonlóan a nyomatékimpulzus is integrállal értelmezhető:

$$\bar{I} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{M} dt .$$

Ez is vektormennyiség, melynek iránya megegyezik a nyomatékvektor irányával.

Mértékegysége: $[\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}]$.

6.2.1.5.7 A munka

Az erő hatására mozgó tömegpont munkát végez, amelynek nagyságát a

$$W = \int_{r_0}^{r_1} F dr \text{ szozatintegrál adja, ahol a tö-}$$

megpont pályája az $r_0 - r_1$ szakaszra esik. Értelmezését lásd a 6.23 ábrán.

Mértékegysége: joule = J, amely 1 N erő 1 m hosszan végzett munkája. Alapegységekkel kifejezve a dimenziót, a $[\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$ képletet kapjuk.

A munka és az energia mértékegysége megegyik.

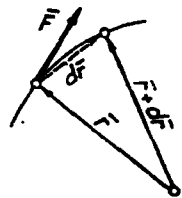
Az erőpár is végezhet munkát egy szögelfordulás mentén. A munka az előbbivel analóg módon a következő integrálból kapható:

$$W = \int_{q_0}^{q_1} \bar{M} dq .$$

6.2.1.5.8 A teljesítmény

A teljesítmény a munka idő szerinti első differenciálhányadosa:

$$P = \frac{dW}{dt} .$$



6.23. ábra

Ha figyelembe vesszük, hogy a munka az erő és az eltolódás szorzata, akkor a teljesítményt az alábbiak szerint fejezhetjük ki:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{Fdr}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v},$$

és nyomaték esetén:

$$P = \frac{Md\varphi}{dt} = \bar{M} \cdot \bar{\omega}.$$

Mértékegysége a Watt (jele W).

$$W = m N s^{-1} = kg m^2 s^{-3}.$$

A régi technikai mértékrendszerben használatos volt a $m kp s^{-1}$ és a lóerő.

$$1 LE = 75 m kp s^{-1} = 75 \cdot 9,81 = 736 W.$$

6.2.1.6 A kinetika tételei

Három tételt fogunk megismerni, melyek a Newton törvényre vezethetők vissza, és bizonyos feladatoknál előnyösen alkalmazhatók. A tételek alkalmazását számpéldákon is bemutatjuk.

6.2.1.6.1 A mozgásmennyiség vagy impulzus tételei

A Newton törvényből vezethetjük le az impulzus tételt.

$$\bar{R} = m \cdot \bar{a}$$

$$\bar{R} = m \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

A változók szétválasztásával, majd a t_0 és t_1 időpontok közötti integrálással kapjuk a tételt.

$$m \int_{v_0}^{v_1} d\bar{v} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{R} dt$$

$$m v_1 - m v_0 = \int_{t_0}^{t_1} R dt.$$

Ha ismerjük az $R(t)$ függvényt, az integrálás végrehajtható. A tétel szavakban azt mondja ki, hogy a mozgásmennyiség megváltozása egyenlő az erőimpulzusokkal.

Példaként nézzük meg a következő feladatot. A vízszintes pályán $v = 36 \text{ km/h}$ sebességgel mozgó 10 t tömegű kocsit meennyi idő múlva áll meg, ha a menetellenállás $\mu = 8 \text{ N/kN}$?

A tétel:

$$m v_1 - m v_0 = \int_{t_0}^{t_1} R dt.$$

A kezdő sebesség $v_0 = 36 \text{ km/h} = \frac{36}{3,6} = 10 \text{ m s}^{-1}$, a végsebesség $v_1 = 0$.

A pálya egyenesvonalú, az eredő egyenlő a fékező erővel
 $R = -F = -10 \cdot 9,81 \cdot 8 = -784,8 \text{ N}$.

A számértékek behelyettesítése után:

$$-1000 \cdot 10 = -784,8 t$$

$$t = \frac{10 \cdot 1000}{784,8} = 12,74 \text{ s}$$

Tehát azokban a feladatokban, amikor az idő a keresett mennyiség, az impulzustétel nagyon célszerűen felhasználható.

6.2.1.6.2 A mozgási energia - vagy munkatétel

Valamely görbe pályán mozgó tömegpont gyorsulása a két összetevőre, egy a_e érintőirányú és egy a_n normálirányúra bontható. Ennek megfelelően felbonthatjuk az anyagi pontra ható erők eredőjét is érintőirányú R_e és normálirányú R_n összetevőre.

Az érintő irányú komponensekre felírható a Newton törvény.

$$R_e = m a_e = m \frac{dv}{dt},$$

alkalmazva a differenciális lánc szabályát

$$R_e = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}$$

mivel $\frac{ds}{dt} = v$ $R_e = m \cdot v \frac{dv}{ds}$.

A változók szétválasztásával:

$$m v dv = R_e ds .$$

Az egyenlet két oldalának integrálásával:

$$m \int_{v_0}^{v_1} v dv = \int_{s_0}^{s_1} R_e ds .$$

Az integrálás határai az s_0 hely, ahol a sebesség v_0 , illetve az s_1 hely, ahol a sebesség v_1 .

Az integrálást végrehajtva kapjuk a tételt.

$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s_1} R_e ds .$$

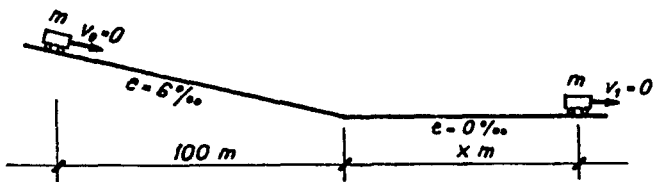
A tétel szavakban úgy fejezhető ki, hogy valamely pályaszakaszon a mozgási energia megváltozása egyenlő az eredő erő munkájával.

Példaként határozzuk meg, hogy a 100 m hosszú 6 ezrelékes lejtőről legördülő m tömegű kocsia a csatlakozó vízszintes pályán hol áll meg. A kocsi kezdősebessége $v_0 = 0$.

A példa a 6.24 ábrán látható.

A menetellenállás $\mu = 4$ N/kN.

Mivel a kezdő és végsebesség egyaránt nullával egyenlő, a tétel bal oldalán szereplő mennyiségek összege zérus. A jobb oldalon levő munkát két részre kell bontani. A 100 m hosszú lejtőn csak a gyorsító erő végez munkát, majd az x hosszú szakaszon a fékező erő is. Ezek összege egyenlő nullával.



6.24 ábra

$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s_1} R ds$$

$$0 = 100 \cdot m g (6-4) - m g (4) \cdot x$$

Az egyenletből az ismeretlen ut már meghatározható

$$x = \frac{200}{4} = 50 \text{ m.}$$

Látható, hogy azoknál a példánál, ahol a mozgó test utja a keresett mennyiség, a munkatétel igen előnyösen felhasználható.

6.2.1.6.3 A mechanikai energia megmaradásának tétele

Mechanikai energián a helyzeti és a mozgási energiát értjük. A mechanikai energia megmaradásának törvénye kimondja, hogy egy potenciális térben levő anyagi pont mozgási és helyzeti energiájának összege a pont helyzetétől független, állandó.

A mozgási energia

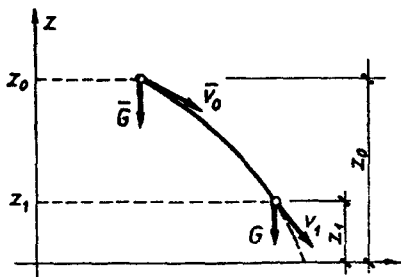
$$E_0 = \frac{m v_0^2}{2},$$

a helyzeti energia

$$E_{p0} = m g z_0,$$

majd egy bizonyos ut megtétele után

$$E_1 = \frac{m v_1^2}{2}, \text{ illetve } E_{p1} = m g z_1.$$



6.25 ábra

$$E = \frac{m v_0^2}{2} = 0, \text{ mivel } v_0 = 0,$$

és a helyzeti energia:

$$E_p = m g h = 2 \cdot 9,81 \cdot 1 = 19,62 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}.$$

Az alsó pontban a mozgási energia:

$$E = \frac{m v_1^2}{2} = \frac{2 \cdot v_1^2}{2} = v_1^2,$$

a helyzeti energia $E_p = 0$.

Az energia megmaradásának tétele:

$$19,62 + 0 = 0 + v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{19,62} = 4,43 \text{ m s}^{-1}.$$

A tétel alapján

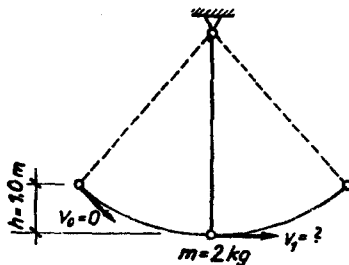
$$\frac{m v_0^2}{2} + m g z_0 = \frac{m v_1^2}{2} + m g z_1.$$

(Lásd: a 6.25 ábrát.)

Példaként határozzuk meg a 6.26 ábrán látható fonálinga sebességét a legalsó pontban, ha az ingát $h = 1 \text{ m}$ magasról indítjuk $v = 0$ sebességgel.

A pont tömege $m = 2 \text{ kg}$.

Az induló helyen a mozgási energia:



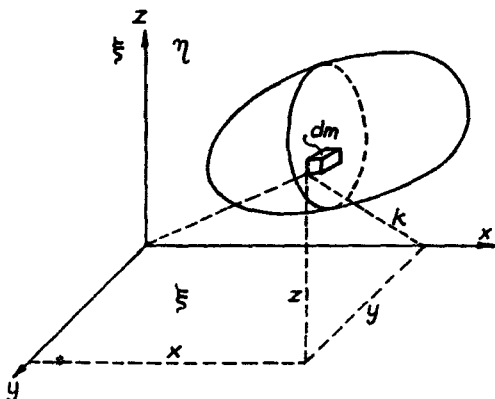
6.26 ábra

6.2.2 A merev testek kinematikája

6.2.2.1 A testek másodrendű nyomatékai

A testek másodrendű nyomatékait hasonlóképpen értelmezzük, mint a szilárdságtanban a felületek másodrendű nyomatékait.

A 6.27 ábrán látható testből kivágva egy dm elemi kis tömeget, annak inercianyomatéka felírható, pontra, tengelyre és síkra egyaránt. Az elemi részek inercianyomatékát integrálva az egész test tömegére kapjuk a keresett másodrendű nyomatékokat.



6.27 ábra

Síkra vonatkozó inercianyomatékok:

$$\text{az } y, z \text{ síkra} \quad I_{\xi} = \int x^2 dm,$$

$$\text{az } x, z \text{ síkra} \quad I_{\eta} = \int y^2 dm,$$

$$\text{az } x, y \text{ síkra} \quad I_{\zeta} = \int z^2 dm.$$

A tengelyre vonatkozó inercianyomaték természetesen a tengelytől mért távolság segítségével számítható.

$$\text{Az } x \text{ tengelyre} \quad I_x = \int k^2 dm \quad \text{mivel}$$

$$k^2 = y^2 + z^2 \quad \text{így} \quad I_x = \int (y^2 + z^2) dm = \int y^2 dm + \int z^2 dm.$$

A tengelyre vett inercianyomaték tehát a tengelyt meghatározó két merőleges síkra vett tehetetlenségi nyomaték összege:

$$I_x = I_\eta + I_\zeta$$

$$I_y = I_\xi + I_\zeta$$

$$I_z = I_\xi + I_\eta$$

A pontra vett poláris inercianyomaték természetesen az elemi tömeg ponttól mért távolsága segítségével számítható:

$$I_o = \int r^2 dm,$$

mivel $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ezért

$$I_o = I_\xi + I_\eta + I_\zeta.$$

Mivel $I_x = I_\eta + I_\zeta$, $I_y = I_\xi + I_\zeta$ és

$I_z = I_\xi + I_\eta$, a három tengelyre vett inercianyomaték összege:

$$I_x + I_y + I_z = 2 I_\xi + 2 I_\eta + 2 I_\zeta.$$

Ez viszont a poláris inercianyomaték kétszerese:

$$2 I_o = I_x + I_y + I_z.$$

Természetesen a centrifugális, vagy deviációs nyomatékok is értelmezhetők két-két egymásra merőleges síkra:

$$C_{xy} = \int xy dm \quad \text{a } \xi\eta \text{ síkra,}$$

$$C_{yz} = \int yz dm \quad \text{az } \eta\xi \text{ síkra és}$$

$$C_{zx} = \int zx dm \quad \text{a } \xi\xi \text{ síkra.}$$

A másodrendű nyomaték dimenziója: tömeg szorozva távolság négyzettel: kg m^2 .

Határozzuk meg példaként az R sugaru, h magasságu és ρ sűrűségű körhenger z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát (6.28 ábra).

$$I_z = \int r^2 dm.$$

Az integrál egy körhengerre kiterjesztett térfogatintegrál. A dm alkalmas megválasztásával egyszeres integrálás elegendő. A dm az r sugaru dr vastagságú h magasságú körgyűrűhenger tömege.

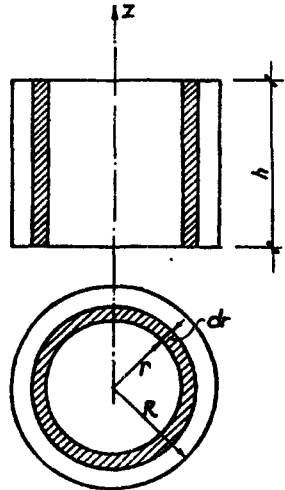
$$dm = \rho h 2 \pi r dr .$$

$$I_z = \int_0^R r^2 \rho h 2 \pi r dr = 2 \pi h \rho \int_0^R r^3 dr =$$

$$= 2 \pi \rho h \frac{R^4}{4}$$

A henger tömege $m = \rho V = \rho h \pi R^2$
ezt kiemelve az

$$I_z = \frac{m R^2}{2}$$



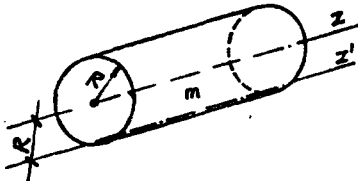
6.28 ábra

képletet kapjuk a körhenger saját tengelyre vonatkozó inercianyomatékára. A szilárdságtanban már tanultuk a Steiner féle eltolási tételt, ez a tétel itt is érvényes.

Példaként nevezzük meg a körhenger egyik alkotójára számított tehetetlenségi nyomatékát (lásd a 6.29 ábrát).

A forgástengelyre vett inercianyomaték

$$I_z = \frac{m R^2}{2}$$



6.29 ábra

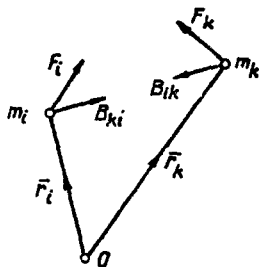
A test tömege: m , a távolság két tengely között: R .
Steiner tétele alapján a z' tengelyre vett inercianyomaték:

$$I'_{z'} = \frac{m R^2}{2} + m R^2 = \frac{3}{2} R^2 m .$$

6.2.2.2 A súlypont tétel

A merev testet pontrendszernek feltételezve felírhatjuk a Newton törvényt.

Tételezzük fel, hogy az egyes pontokra külső hatásokra külső erők, a pontok közötti hatásokra belső erők működnek (6.30 ábra).



6.30 ábra

A külső erőket $F_1, F_2 \dots F_i \dots F_k \dots F_n$ betűvel, a belső erőket $V_{12}, \dots B_{ik} \dots B_{ki} \dots B_{n-1}, B_n$ betűvel jelöljük. A belső erőkről tudjuk, hogy azok Newton harmadik törvényének értelmében egyensúlyban vannak, tehát:

$$(B_{ik}, B_{ki}) \doteq 0$$

Ezek az erők párjával egyenlő nagyságú, azonos hatásvonalúak és ellentett értelműek.

Az egyensúlyban levő erőrendszer nyomatéka a tér bármely pontjára nullával egyenlő. Így az előbbi egyensúlyi kijelentésből következik az, hogy:

$$\bar{r}_i \cdot \bar{B}_{ki} + \bar{v}_k \cdot \bar{B}_{ik} = 0.$$

Alkalmazzuk a Newton törvényt az i -edik pontra:

$$\bar{F}_i + \sum_{k=1}^n \bar{B}_{ki} = m_i \bar{a}_i.$$

A test valamennyi pontjára felírt egyenleteket összegezzük:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{B}_{ki} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i.$$

A belső erők kölcsönös egyensúlya következtében:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{B}_{ki} = 0,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i,$$

miután

$$\bar{a}_i = \frac{d \bar{v}_i}{dt} = \frac{d^2 \bar{v}_i}{dt^2}$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \frac{d}{dt} (\sum m_i \bar{v}_i) = \frac{d^2}{dt^2} (\sum m_i \bar{r}_i).$$

Az i -edik pont helyzetvektora a 0 pontra vonatkozóan a 6.31 ábra szerint $\bar{r}_i = \bar{r}_s + \bar{\rho}_i$.

A 0 pontra vonatkozó statikai nyomaték:

$$\sum m_i \bar{r}_i = \sum m_i \bar{r}_s + \sum m_i \bar{\rho}_i.$$

Az egyenlet második tagja a súlypontra vonatkozó statikai nyomatékot jelent, ami a definíció szerint nullával egyenlő, tehát:

$$\sum m_i \bar{r}_i = \bar{r}_s \sum m_i = \bar{r}_s m.$$

A kapott eredményt visszahelyettesítjük az előzőleg levezetett képletbe:

$$\sum \bar{F}_i = \frac{d^2}{dt^2} (\sum m_i \bar{r}_i) = \frac{d^2}{dt^2} (m \bar{r}_s) = m \bar{a}_s,$$

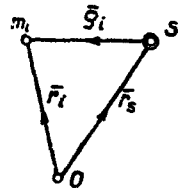
vagyis

$$\bar{F}_i = m \bar{a}_s.$$

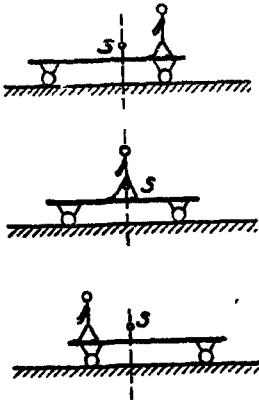
A tétel kimondja, hogy a súlypont gyorsulása akkora, mintha az anyagi pontrendszerre, illetve a merev testre működő összes erő eredőjének vektora a súlypontba koncentrált erőként működne.

A súlypont tételnek a testek mozgására az alábbi következményei vannak:

- A belső erők nincsenek hatással a súlypont mozgására.
- Az anyagi pontrendszer egyes pontjai között fellépő belső erőkkel egyes pontokat mozgathatunk, de a közös súlypont helyben marad.



6.31 ábra



6.32 ábra

Például az ideális menetellenállás nélküli kocsi elindul hátrafelé, ha a rajta álló ember előre halad (6.32 ábra).

6.2.2.3 A perdület tétel

A perdülettételeit nem vezetjük le, csak felírjuk általános alakban és csak egy egyszerű speciális esetre mutatjuk be alkalmazását.

A perdülettétel kimondja, hogy az anyagi pontrendszer, vagy merev test valamely pontra vett perdületének idő szerinti első deriváltja egyenlő a rendszerre működő erők ugyanazon pontra vett nyomatékának összegével.

$$\sum M_i = \frac{d\bar{\mathcal{K}}}{dt}.$$

Azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor a merev test a súlypontján átmenő szimmetria tengely körül fordul el.

A perdület fogalmával már találkoztunk, értéke a körpályán haladó tömegpont esetén a $\bar{\mathcal{K}}$ vektor skaláris szorzattal kapható és egyenese a körpálya síkjára merőleges:

$$\bar{\mathcal{K}} = \bar{r} \cdot m \bar{v}.$$

A tesre vonatkozó perdület az elemi pontra felírt perdületének integrálásával számítható:

$$\bar{\mathcal{K}} = \int \bar{r} \cdot \bar{v} dm.$$

Itt az r nem egy pontból, hanem egy forgó tengelytől mért helyzetvektor.

Vegyük a perdület idő szerinti első differenciálhányadosát:

$$\frac{d\bar{\mathcal{K}}}{dt} = \int \frac{d}{dt} (\bar{r} \cdot \bar{v}) dm = \int \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \bar{v} + \bar{r} \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} \right) dm$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} \quad \text{és} \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 0, \quad \text{valamint} \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a},$$

ezek alapján:

$$\frac{d\bar{\mathcal{K}}}{dt} = \int (\bar{r} \cdot \bar{a}) dm.$$

A kijelölt elemi rész gyorsulása felbontható érintő irányu \bar{a}_e és normálirányu \bar{a}_n összetevőire. Mivel $\bar{r} \times \bar{a}_n = 0$, a perdület deriváltja:

$$\frac{d\bar{\mathcal{K}}}{dt} = \int (\bar{r} \cdot \bar{a}_e) dm$$

$\omega = r \kappa$ ahol κ a szöggyorsulás.

$$\frac{d\omega}{dt} = r^2 \kappa \, dm = \kappa \int r^2 \, dm = \kappa I_z.$$

tétel értelmében a perdület idő szerinti első differenciáljára ható nyomatékösszeggel egyenlő, tehát

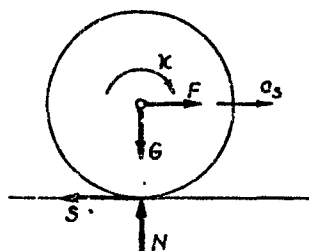
$$M = I_z \kappa.$$

test speciális perdülettétele szavakban:

test súlyponti fix tengely körüli forgó mozgásának szöggyors a testre ható erőrendszer e tengelyre vett nyomaté-

t törvény és a speciális perdülettételevel hengeres testek tenyésására vonatkozó példákat tu-

nézzük meg a 6.33 ábrán gú és R sugaru hengert, vel vontatunk és keressük sát. A surlódási tényező értül ellenállási tényező $\lambda = 0$. ra alkalmazzuk a súlypontt-ülettételt.



6.33 ábra

$$F - S = m a_s$$

$$RS = I_s \kappa$$

t gyorsulása a tiszta gördülés esetén:

$$a_s = R \kappa.$$

súlyponti tengelyre vett inercianyomatéka:

$$I_s = \frac{m R^2}{2}.$$

$$RS = \frac{m R^2}{2} \frac{a_s}{R}$$

$$S = \frac{m a_s}{2} .$$

Behelyettesítve a súlyponttételbe

$$F - \frac{a_s m}{2} = m a_s$$

$$F = \frac{3 m a_s}{2} .$$

Ebből a súlypont gyorsulása:

$$\underline{a_s = \frac{2}{3} m F .}$$

6.2.2.4 A merev test mozgási energiája

A merev test kinetikai energiája két részből tevődik össze, egyrészt a haladó, másrészt a forgó mozgáséból.

A merev test mozgási energiája képlettel:

$$E = \frac{m v_s^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2} .$$

A képleiben m a test tömege, v_s a súlypont sebessége, I_z a súlyponton átmenő és az ω szögsebességvektorral párhuzamos tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték.

Példaként oldjuk meg a 6.34 ábrán látható feladatot. Az emelkedő felfelé v_0 kezdősebességgel megindított henger alakú test tiszta gördülés-sel haladva, mekkora ut megtétele után áll meg?

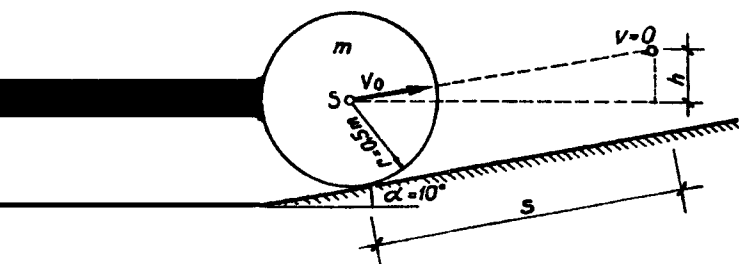
A test tömege: $m = 50 \text{ kg} ,$

A kezdő sebesség: $v_0 = 10 \text{ m/s} ,$

Az emelkedő hajlásszöge: $\alpha = 10^\circ .$

Felírjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét:

$$\frac{m v_0^2}{2} + \frac{I_z \omega_0^2}{2} = m g h$$



6.34 ábra

$$I_z = \frac{m r^2}{2}$$

$$\frac{m v_0^2}{2} + \frac{m r^2 \omega_0^2}{4} = m g h$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\frac{m v_0^2}{2} + \frac{m v_0^2 r^2}{4 r^2} = m g h.$$

ések után:

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{4} = g h,$$

magasság:

$$h = \frac{3 v_0^2}{4 g} = \frac{3 \cdot 100}{4 \cdot 9,81} = 7,65 \text{ m.}$$

a megtett út:

$$s = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{7,65}{0,1736} = 44,05 \text{ m.}$$

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	3
1. A szilárdságtannal kapcsolatos alapfogalmak	7
1.1 A feszültség fogalma	7
1.2 A feszültség összetevői	9
1.3 A fajlagos megnyulás fogalma. A Hooke törvény	10
1.4 Az anyag szilárdsági viselkedését befolyásoló egyéb tényezők	11
1.4.1 A terhelési folyamat időbeni változása	11
1.4.2 A hőmérséklet hatása a szilárdsági viselkedésre ..	12
1.4.3 A fizikai-kémiai átalakulások hatása a szilárdságra	12
1.4.4 A teher ismétlődésének hatása	12
2. Az elemi szilárdságtan	13
2.1 A keresztmetszeti síkidomok geometriai jellemzői	13
2.1.1 A súlypont	14
2.1.1.1 A síkidomok súlypontja	16
2.1.1.2 Példák a síkidomok súlypontjának meghatározására	19
2.1.1.3 A vonaldarabok súlypontja	21
2.1.2 A síkidomok másodrendű nyomatékai	22
2.1.2.1 A tehetetlenségi nyomaték	22
2.1.2.1.1 A tehetetlenségi nyomatékok meghatározása számítással	26
2.1.2.2 A centrifugális nyomaték	30
2.1.2.3 A közös metszéspontu egyenesekre vonatkozó másodrendű nyomatékok összefüggései	34
2.1.2.4 A tehetetlenségi főnyomatékok	36
2.2 A feszültségek meghatározása egyszerű igénybevételek esetén	43
2.2.1 A huzás és a nyomás	43
2.2.1.1 A normálfeszültségek számítása huzás vagy nyomás esetén	43
2.2.1.2 A huzott vagy nyomott rud alakváltozása ..	45
2.2.1.3 A feszültségek és a fajlagos nyulás összefüggése	47
2.2.1.4 A huzott rudak méretezése	50
2.2.2 A tiszta nyírás	52

2.1 A nyirőfeszültségek számítása tiszta nyírás esetén	53
2.2 A nyírási alakváltozás	54
2.3 A nyirőfeszültségek dualitásának tétele	54
2.4 Méretezési feladatok	56
2.5 Szögecsszámítás	59
tiszta egyenes hajlítás	64
3.1 A feszültségek és az alakváltozás meghatározása	64
3.2 A feszültségi diagram és a feszültségi test	70
3.3 Méretezés hajlításra	72
tiszta csavarás	77
4.1 A keresztmetszetekben keletkező feszültségek és az alakváltozás meghatározása körszimmetrikus keresztmetszetű rudak csavarásánál	77
4.2 Körszimmetrikus keresztmetszetű rudak méretezése csavarásra	82
4.3 Vékony falu cső alaku rudak csavarása	84
4.4 Vékony falu nyitott keresztmetszetű rudak csavarása	86
4.5 Derékszögű négyszögkeresztmetszet csavarása gátolt csavarás	88
Feszültségek meghatározása összetett igénybevételek	89
ferde hajlítás	89
külpontos húzás és nyomás	95
2.1 A feszültségek számítása	96
2.2 A belső mag	99
2.3 Csak nyomásnak ellenálló anyagu rudak	101
hajlított és nyírt tartó	104
3.1 Szimmetriájában terhelt hajlított és nyírt rúdelem	104
3.2 A hajlított és nyírt tartóban keletkező csuszató erők	112
3.3 Szimmetriájára merőlegesen terhelt vékony falu nyitott keresztmetszetű hajlított és nyírt rúdelem	115
3.4 A hajlított és nyírt tartó alakváltozása	120
hajlított, nyírt és csavart tartó	124
Feszültségek meghatározása	127
feszültségi állapot általános vizsgálata	128
síkbelli feszültségi állapot összefüggései	132
síkbelli feszültségi állapot főfeszültségei	136
feszültségi Mohr-kör	140
feszültségi állapot vizsgálata gerendatartók esetén	148
főfeszültségi trajektóriák	151

3. A tartók alakváltozása	154
3.1 A tartók alakváltozásának meghatározása a kis elmozdulások elméletével	154
3.1.1 A kis elmozdulások elmélete	154
3.1.1.1 A kis elmozdulások fogalma	154
3.1.1.2 A kis elmozdulások számítása	158
3.1.1.3 A láncolatok kialakítása	162
3.1.1.4 A láncolatok függőleges eltolódási ábrái	164
3.1.1.5 A láncolatok elmozdulásai	169
3.1.2 A kis elmozdulások elméletének alkalmazása a tartók alakváltozásának számítására	173
3.1.2.1 Fajlagos elmozdulások	174
3.1.2.2 Relatív elmozdulások	178
3.1.2.3 A hajlított tartó abszolút elmozdulása	183
3.1.2.4 Példák egyenestengelyű tartók alakváltozásának számítására	188
3.1.2.5 Példák törttengelyű tartók alakváltozásának számítására	197
3.2 A tartók alakváltozásának meghatározása munkatételek segítségével	204
3.2.1 A munkatételek	204
3.2.1.1 Az erő és az erőpár munkája	204
3.2.1.2 A külső erőrendszer idegen munkája	206
3.2.1.3 A külső erőrendszer saját munkája	208
3.2.1.4 A tömör tartók alakváltozási munkája	211
3.2.1.5 A rácsos tartók alakváltozási munkája	217
3.2.1.6 A szilárdságtan munkatételei	218
3.2.2 A tartók alakváltozásának számítása a munkatételekkel	220
3.2.2.1 Az elmozdulások számítása munkatétellel	220
3.2.2.2 Példák a munkatételek alkalmazására tartók alakváltozásának számításánál	227
3.3 A tartók alakváltozásának meghatározása a rugalmas vonal függvényével	236
4. A határozatlan tartók	242
4.1 Bevezetés	242
4.1.1 A statikailag határozatlan tartók hátrányai	242
4.1.2 A statikailag határozatlan tartók előnyei	243
4.1.3 A statikailag határozatlan tartók osztályozása	243
4.2 A statikai határozatlanság fokának meghatározása	245
4.3 Az erőmódszer	248
4.3.1 A törzstartó felvétele	250
4.3.2 Az egységtényezők meghatározása	251
4.3.3 A terhelési tényezők meghatározása	252
4.3.4 A feltételi egyenletrendszer felállítása és megoldása	254

z egyszeresen határozatlan tartó megoldása	255
kétszeresen határozatlan tartó megoldása	257
rudakkal erősített tartó megoldása	260
határozatlan rácsos tartó megoldása erőmódszerrel ..	263
határozatlan rendszerű, de határozott rácsosá- su tartó megoldása	264
határozott rendszerű határozatlan rácsosá- su tartó megoldása	266
.....	269
..... szerkezetek stabilitásáról általában.	269
..... ott rudak kihajlása	276
..... kihajlás jelensége	276
..... rugalmas kihajlás (az Euler-féle kritikus erő) ..	278
..... képlékeny kihajlás.	282
..... ülönféle megtámasztású rudak kihajlása	285
..... méretezés és ellenőrzés kihajlásra	286
..... 5.1 Ellenőrzés	287
..... 5.2 Méretezés	289
..... tek mozgása	296
..... fika	296
..... z anyagi pont kinematikája	297
..... 1.1 A mozgás leírása térbeli koordináta rend- szerben	297
..... 1.2 Az anyagi pont egyenesvonalu mozgása . . .	300
..... 1.3 Az anyagi pont síkmozgása	303
..... 1.4 Az ismert pályán való mozgás	305
..... merev testek kinematikája	309
..... z anyagi pont kinetikája	312
..... 1.1 A kinetika Newton féle alaptörvényel	313
..... 1.2 A tömeg és erő mértékegysége	314
..... 1.3 A Newton törvény alkalmazása példákön . .	315
..... 1.4 A d'Alembert elv	318
..... 1.5 A kinetikai fogalmak	319
..... 6.2.1.5.1 A mozgásmennyiség	319
..... 6.2.1.5.2 A perdület	319
..... 6.2.1.5.3 A mozgási energia	320
..... 6.2.1.5.4 A helyzeti energia	320
..... 6.2.1.5.5 Az erő impulzusa	320
..... 6.2.1.5.6 A nyomaték impulzusa	321
..... 6.2.1.5.7 A munka	321
..... 6.2.1.5.8 A teljesítmény	321
..... 1.6 A kinetika tételei	322
..... 6.2.1.6.1 A mozgásmennyiség vagy impulzus tétel	322

6.2.1.6.2 A mozgási energia vagy munkatétel .	323
6.2.1.6.3 A mechanikai energia megmaradásá- nak tétele	325
6.2.2 A merev testek kinetikája	327
6.2.2.1 A testek másodrendű nyomatékai	327
6.2.2.2 A súlyponttétel	330
6.2.2.3 A perdülettel	332
6.2.2.4 A merev testek mozgási energiája	334

