

**SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
KÖZLEKEDÉSÉPÍTÉSI INTÉZET**

Göde Ferenc – Szécsi László

**MECHANIKA PÉLDATÁR
II.**

KÉZIRAT

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Lektorálta:

Dr. Klatsmányi Tíbor
főiskolai tanár

Az ábrákat rajzolta:

Pataky Emőke
technikus

1. BEVEZETÉS

A példatár az elméleti jegyzet kiegészítéséül szolgál, ahhoz szorosan kapcsolódik. A példatárban a példák sorrendje az előadói jegyzet szerint következik azonos fejezetszámozással.

Az egyes témák anyagát a szükséges összefüggések összefoglalása előzi meg, ezt kidolgozott példák követik, végül a gyakorló feladatok fejezik be.

A megoldások a jegyzet második felében szerepelnek, a kidolgozott példákhoz részletes megoldást találunk, a gyakorló feladatoknak csak az eredményét közöljük.

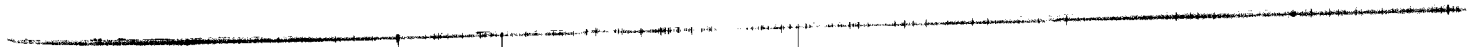
Nagyon fontos a példatár használatánál, hogy a megoldást csak akkor nézzük meg, ha a feladatot már megoldottuk. Ne azt ellenőrizzük magunkon, hogy a megoldott feladatot megértjük-e, hanem szerezzünk gyakorlatot a példák önálló megoldásához.

Célszerű az egyes fejezetek példáit sorra venni a tanulásnál, mert azok nehézségi sorrendben követik egymást.

A szóbeli magyarázatot semmiféle jegyzet nem pótolja, ezért felhívjuk a hallgatók figyelmét, hogy az előadásokat és gyakorlatokat feltétlenül látogassák.

Amennyiben ezzel a jegyzettel sikerült megkönnyíteni a Közlekedésépítési Intézetnél tanuló nappali és levelező hallgatók számára a szilárdságtan elszámítását, a jegyzet elérte célját.

Felhívjuk a figyelmet, hogy az ábraszám megegyezik a feladatszámmal.



2. AZ ELEMI SZILÁRDSÁGTAN

2.1. A síkidomok jellemző mennyiségei

2.1.1. A súlypont és a síkidomok elsőrendű nyomatékai

A súlypont koordinátáinak számítására alkalmas képletek.

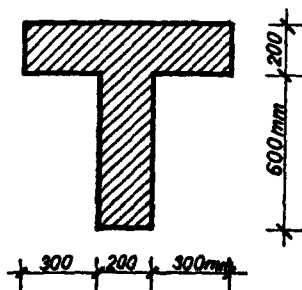
$$x_s = \frac{\int x \, dA}{A}; \quad y_s = \frac{\int y \, dA}{A}.$$

ahol $A = \int dA$ az egész síkidom területe. A számlálóban a megfelelő statikai nyomatékok szerepelnek.

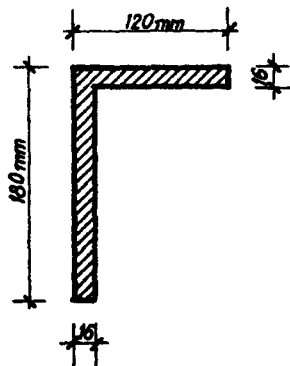
Amennyiben a síkidomot ismert súlypontú részekből állítjuk elő (egészítjük ki!) a határozott integrál elvégzése elkerülhető.

2.1.1.1. Határozzuk meg a síkidom súlypontját!

2.1.1.2. Határozzuk meg a síkidom súlypontját számítással és szerkesztéssel!



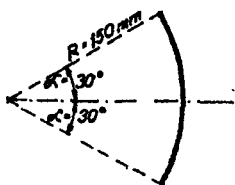
2.1.1.1. ábra



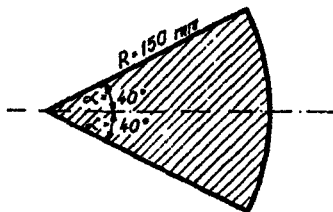
2.1.1.2. ábra

2.1.1.3. Határozzuk meg a $2\alpha = 60^\circ$ központi szögű $R = 150$ mm sugarú körív súlypontját! (ábra a 6. oldalon)

2.1.1.4. Határozzuk meg a $2\alpha = 80^\circ$ központi szögű $R = 150$ mm sugarú körívek súlypontját!



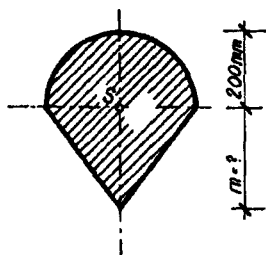
2.1.1.3. ábra



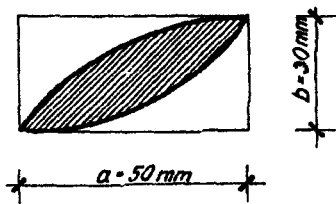
2.1.1.4. ábra

2.1.1.5. Határozzuk meg az m magasságot úgy, hogy az idom súlypontja a kör középpontjába essék!

2.1.1.6. Határozzuk meg az ábrák látható másodfokú parabolákkal határolt síkidom súlypontját!



2.1.1.5. ábra



2.1.1.6. ábra

2.1.1.7. Határozzuk meg a trapéz súlypontját számítással és szerkesztéssel!

2.1.1.8. Határozzuk meg a síkidom súlypontját!

2.1.1.9. Határozzuk meg a síkidom súlypontját!

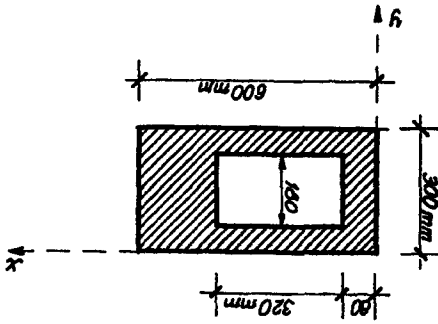
2.1.1.10. Határozzuk meg a sátor alaku homogén rakomány súlypontját!

2.1.1.11-28. Határozzuk meg a 2.1.1.11-28. ábrákon vázolt síkidomok súlypontjának helyét az ábrákon feltüntetett koordinátarendszerben!

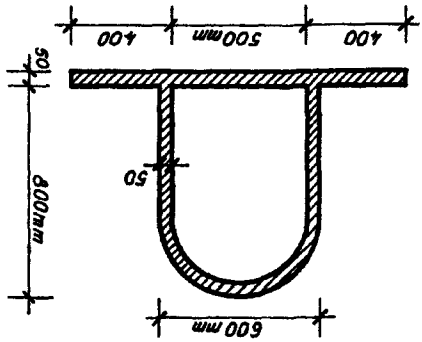
A súlypont helyének számítására további példák találhatók a következő fejezetben is.

A feladathoz tartozó ábrák a következő oldalakon találhatók.

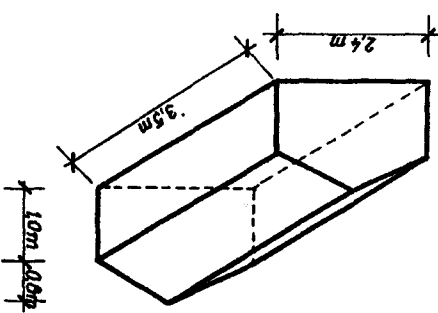
2.1.1.11. ábra



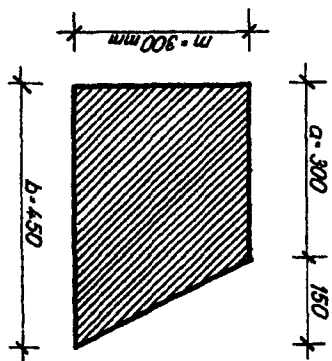
2.1.1.9. ábra



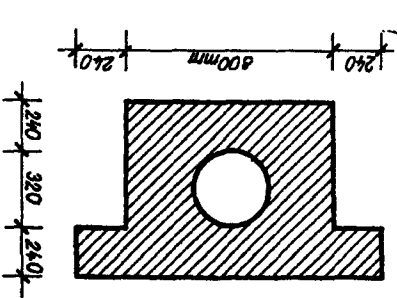
2.1.1.10. ábra

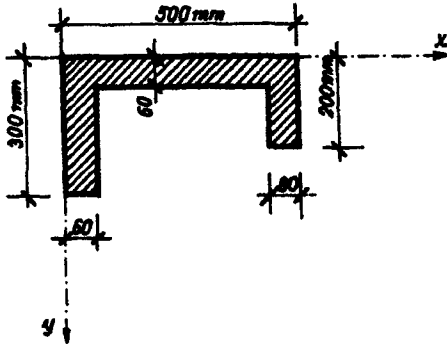


2.1.1.7. ábra

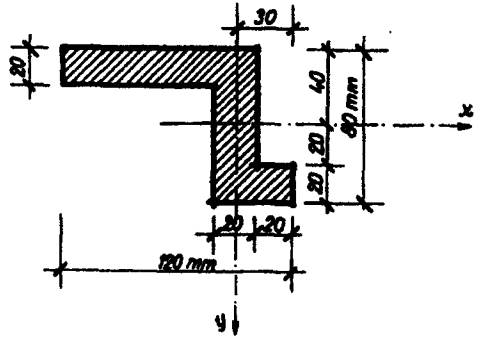


2.1.1.8. ábra

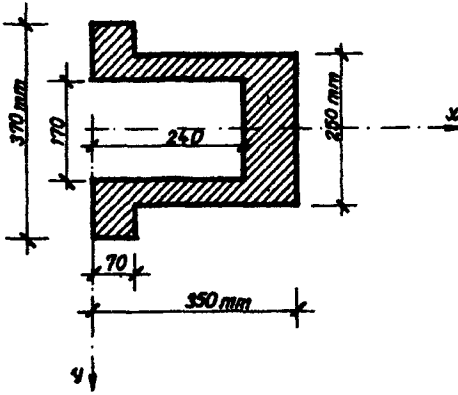




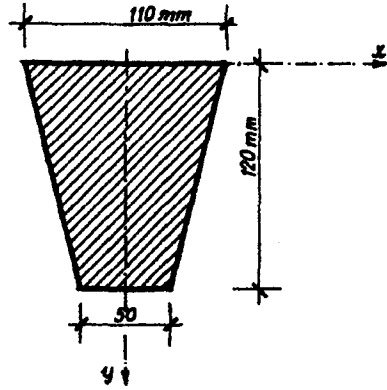
2.1.2.12. ábra



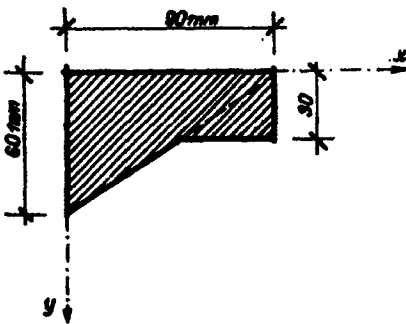
2.1.1.13. ábra



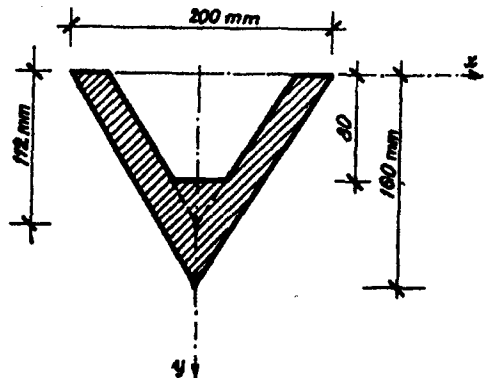
2.1.1.14. ábra



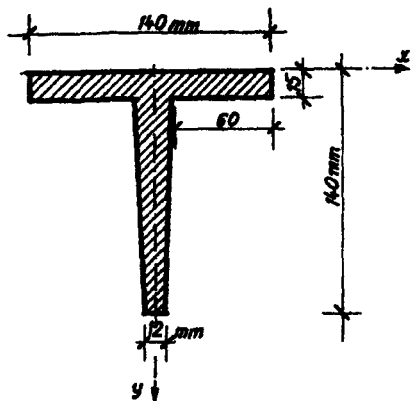
2.1.1.15. ábra



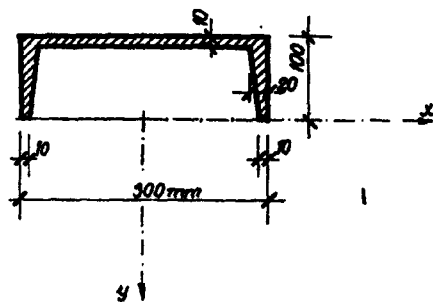
2.1.1.16. ábra



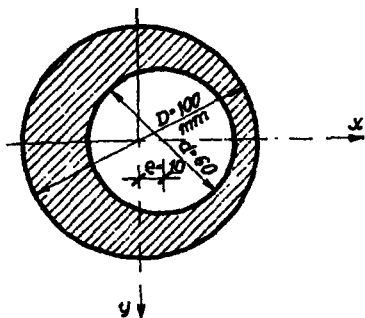
2.1.1.17. ábra



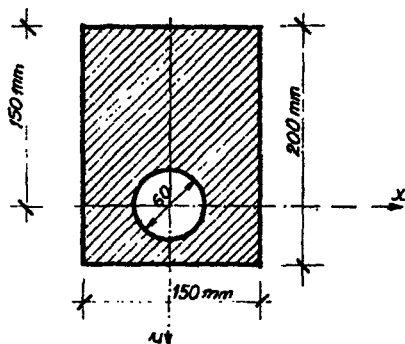
2.1.1.18. ábra



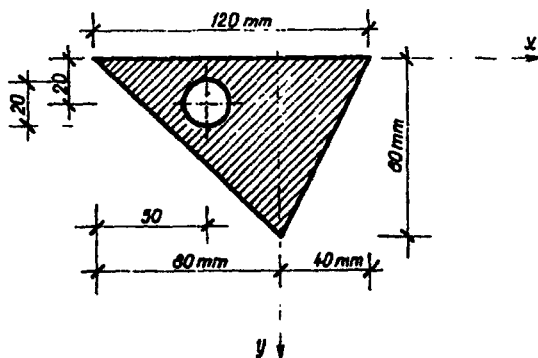
2.1.1.19. ábra



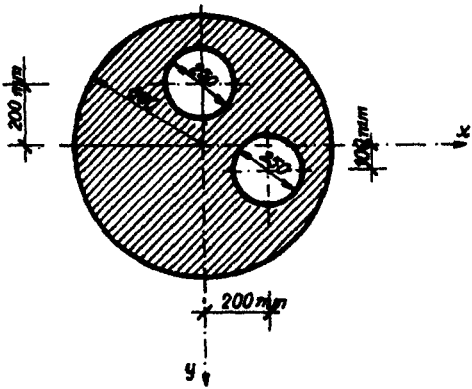
2.1.1.20. ábra



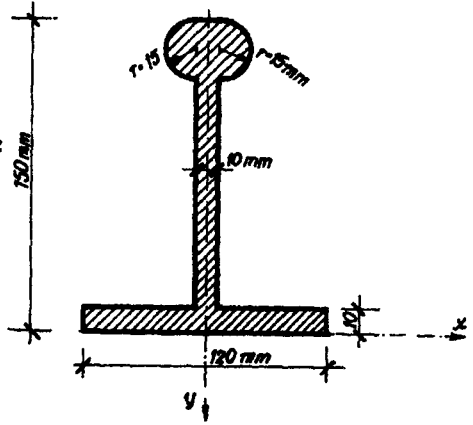
2.1.1.21. ábra



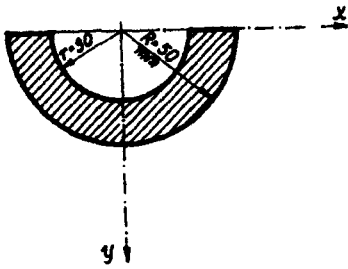
2.1.1.22. ábra



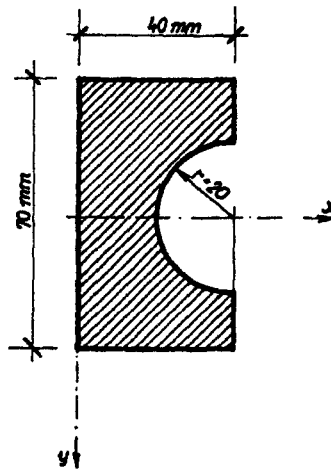
2.1.1.23. ábra



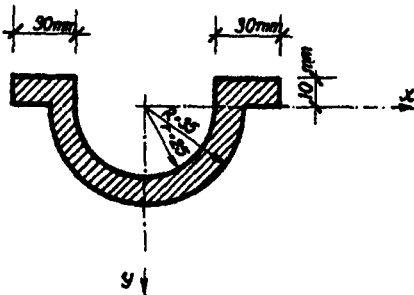
2.1.1.24. ábra



2.1.1.25. ábra



2.1.1.26. ábra



2.1.1.27. ábra

2.1.2. A síkidomok másodrendű nyomatékai

A tehetetlenségi nyomatékok számítására alkalmas képletek.

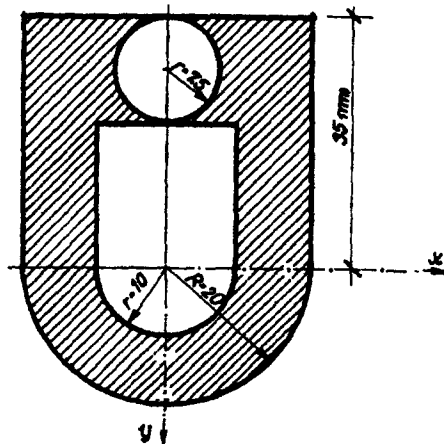
Tengelyre vonatkoztatva

$$J_x = \int_{(A)} y^2 dA$$

$$J_y = \int_{(A)} x^2 dA,$$

pontra vonatkoztatva

$$J_o = \int_{(A)} r^2 dA.$$



2.1.1.28. ábra.

Az x, y koordináta-rendszerre vonatkozó centrifugális nyomaték

$$C_{xy} = \int_{(A)} x \cdot y dA \quad (\text{ha } x \text{ vagy } y \text{ szimmetria tengely } C_{xy} = 0.)$$

A főtehetetlenségi nyomatékok

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2}$$

$$J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2}$$

Az ① irány és az ② tengely által bezárt szög számítása (lásd 2.1.2.0/1 ábra)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 C_{xy}}{J_x - J_y} \text{ képlettel történik.}$$

A gyakorlatban előforduló keresztmetszetek másodrendű nyomatékainak számításánál a határozott integrál elvégzése elkerülhető, ugyanis a részidomok saját tengelyre (x) vett inercianyomatékát ismerve (J_x) bármely párhuzamos tengelyre (x') az inercia megállapítható a Steiner-tétel alkalmazásával.

$$J'_x = J_x + c^2 A$$

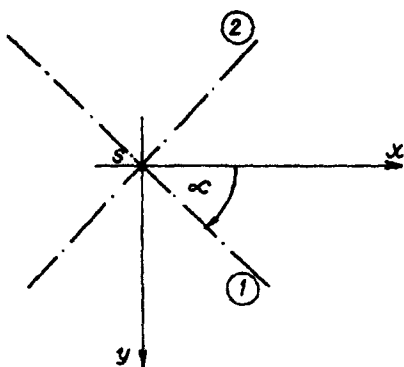
c - a két tengely távolsága

A - a síkidom felülete

illetve

$$C_{x'y'} = C_{xy} + c_x c_y A$$

Az inerciaszámításnál érvényes a részekre bontás és a kiegészítés tétele.



2.1.2.0./1. ábra

Egyes részek tengellyel párhuzamos eltolása az adott tengelyre számított inercianyomatékokat nem változtatja.

Amennyiben a súlyponti koordinátarendszerhez tartozó másodrendű nyomatékokat meghatározuk, bármely súlyponti koordinátarendszerhez tartozó értéket is kiszámíthatjuk.

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - C_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$J_{\eta} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + C_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

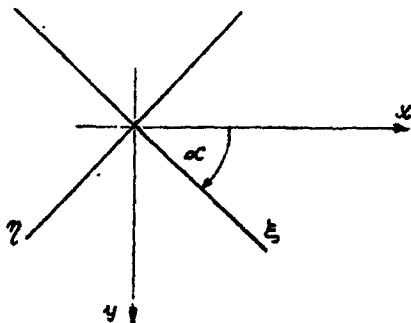
$$C_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + C_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

A 2.1.2.0/3. ábrán feltüntetjük azokat a síkidomokat, melyek jellemzőinek ismerete elengedhetetlen a további számításhoz.

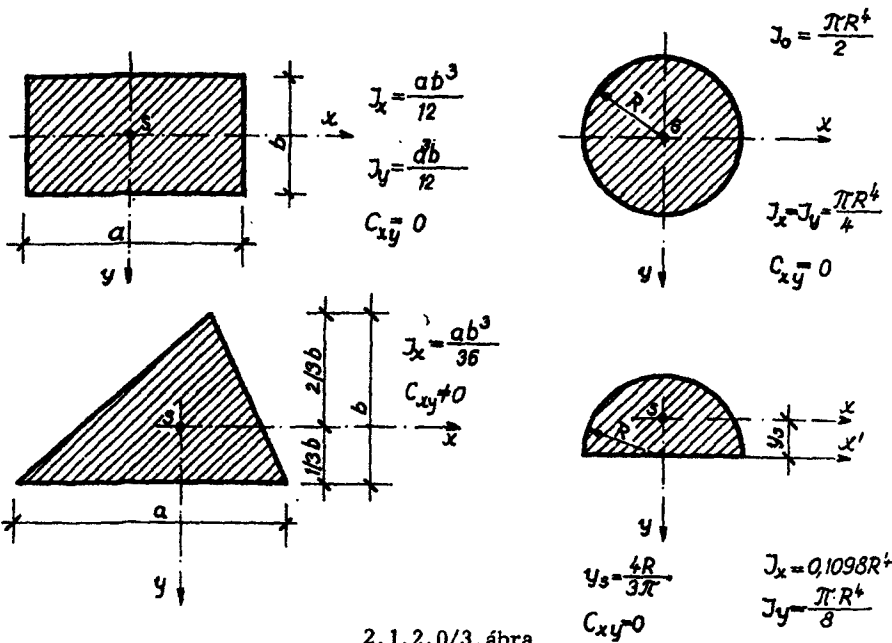
2.1.2.1. Határozzuk meg a síkidom súlyponti x , y tengelyeikre vonatkozó másodrendű nyomatékokat!

2.1.2.2. Határozzuk meg súlyponti x , y tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékokat, a tehetetlenségi főirányokat és a főtehetetlenségi nyomatékokat!

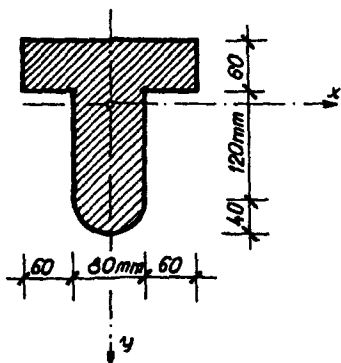
2.1.2.3. Határozzuk meg a síkidom súlyponti x , y koordináta



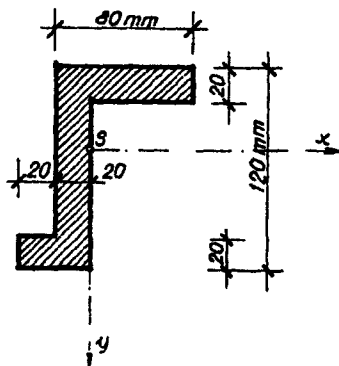
2.1.2.0./2. ábra



2.1.2.0/3. ábra



2.1.2.2. ábra

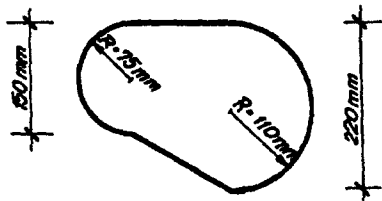


2.1.2.3. ábra

tengelyeire vonatkozó másodrendű nyomatékokat és tehetetlenségi főirányokat és a főtehetetlenségi nyomatékokat!

2.1.2.4-17. Határozzuk meg a 2.1.1.11-18, 20, 21, 24, 25, 26, 27. ábrákon vázolt síkidomok x, y koordinátarendszerére és a párhuzamos súlyponti koordinátarendszerre (ξ, η) vonatkozó másodrendű nyomatékokat.

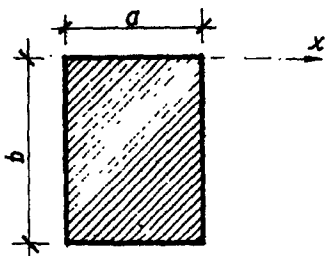
2.1.2.18-19-20. Határozzuk meg a 2.1.1.12, 13, 16. ábrákon feltüntetett síkidomok tehetetlenségi főirányait és a főtehetetlenségi nyomatékokat. Igazoljuk a megoldást szerkesztéssel is.



120 mm

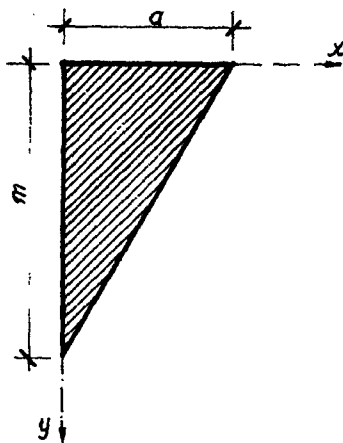
2.1.2.3. ábra

2.1.2.21-28. Határozzuk meg a 2.1.21-28. ábrákon megadott síkidomok x , y és súlypont ξ , η koordinátarendszerre vonatkozó másodrendű nyomatékait.

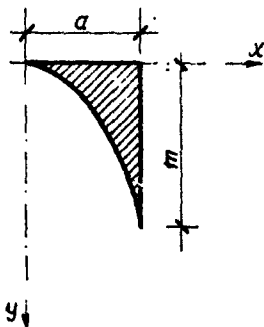


y

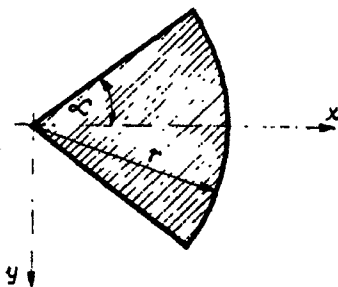
2.1.2.21. ábra



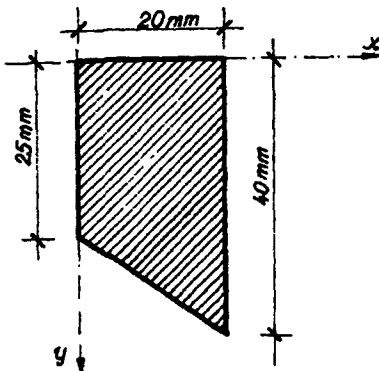
2.1.2.22. ábra



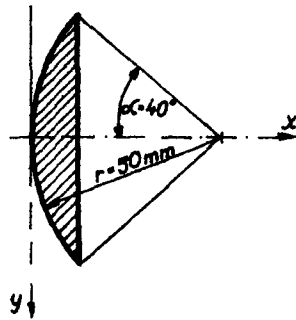
2.1.2.23. ábra



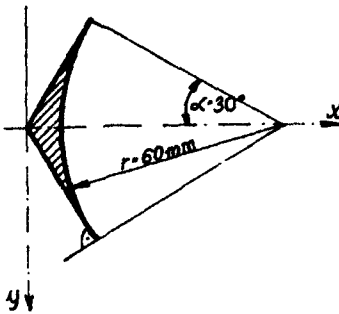
2.1.2.24. ábra



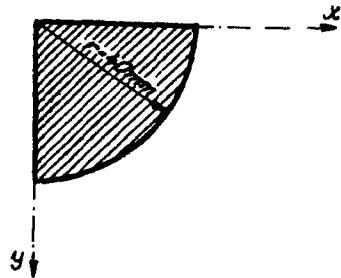
2.1.2.25. ábra



2.1.2.26. ábra



2.1.2.27. ábra



2.1.2.28. ábra

2.2. A feszültségek meghatározása egyszerű igénybevételek esetén

2.2.1. A tiszta húzás és nyomás

A húzó-nyomófeszültség számítása

$$\sigma = \frac{F}{A} \text{ képlettel történik.}$$

Az l hosszúságu rud hosszváltozása

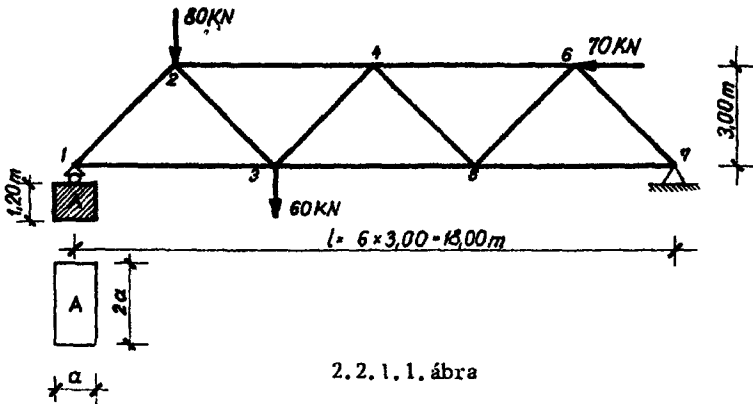
$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

A fajlagos hosszváltozás

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

2.2.1.1. a) Ellenőrizzük a rácsos tartó 3-4 jelű rudját!
A rud keresztmetszete kör, átmérője 16 mm.

$$\sigma_e = 160 \text{ N/mm}^2$$



b) Határozzuk meg a rud megnyúlását!

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

c) Méretezzük az A jelű alaptestet. A talajra megengedett feszültség

$$\sigma_e = 0,12 \text{ N/mm}^2$$

Az alaptest fajsúlya

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$$

2.2.1.2. a) Ellenőrizzük a rácsos tartó jelzett rudját! A rud keresztmetszete kör, átmérője 20 mm.

$$\sigma_e = 140 \text{ N/mm}^2$$

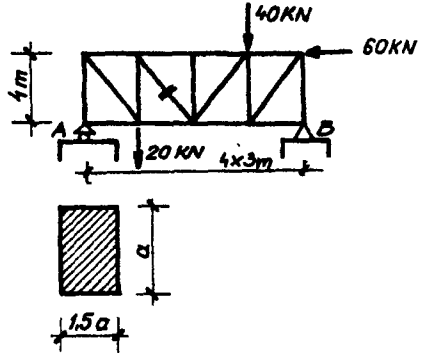
b) Határozzuk meg a rud megnyúlását!

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

c) Méretezzük az A jelű alaptestet! A talajra megengedett feszültség

$$\sigma_e = 0,15 \text{ N/mm}^2$$

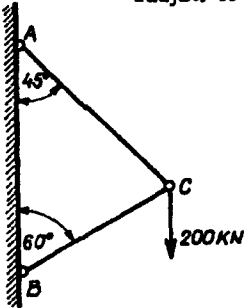
Az alaptest saját súlyát elhanyagolhatjuk.



2.2.1.2. ábra

2.2.1.3. a) Méretezzük a tartó A-C

rudját. A rud keresztjtszete négyzet legyen. $\sigma_e = 160 \text{ N/mm}^2$



4,00m

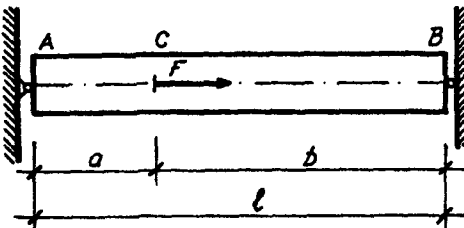
2.2.1.3. ábra

b) Határozzuk meg a B-C rudban ébredő feszültséget, valamint a rud összenyomódását! A rud kör keresztmetszetű, átmérője 40 mm. $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

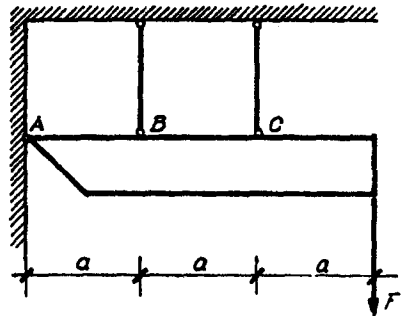
2.2.1.4. A mindkét végén fix csuklóval megtámasztott acél rud hőmérsékletét 40 C°-kal emeljük. Mekkora feszültség ébred benne?

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad \alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{C}^\circ}$$

2.2.1.5. A mindkét végén fix csuklóval megtámasztott rudat a C keresztmetszetben, a rud tengelyével párhuzamos F erővel terheljük. Mekkora lesz az A és B támaszerő és a C pont vízszintes elmozdulása? A rud hossza l



2.2.1.5. ábra



2.2.1.6. ábra

2.2.1.6. Az ábrán jelölt merev test két ruddal és egy csuklóval van rögzítve. Határozzuk meg a ruderőket az F erő hatására! A rudak egyenlő hosszúságúak keresztmetszetük és anyaguk is azonos.

2.2.2. A tiszta nyírás

A nyírófeszültség számítása

$$\tau = \frac{T}{A} \quad \text{képlettel történik.}$$

A szegecsszámítás képletei

Egyszer nyírt kapcsolatnál nyírásra

$$\tau = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq \tau_e$$

palástnyomásra

$$\sigma_{p1} = \frac{F}{v_1 \cdot d} \leq \sigma_{pe}$$

Készernyírt kapcsolatnál nyírásra

$$\tau = \frac{F}{\frac{2 \pi d^2}{4}} \leq \tau_e$$

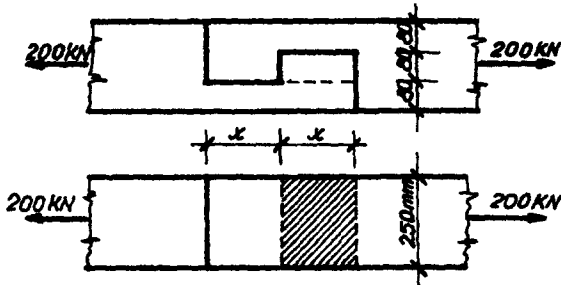
Palástnyomásra

$$\sigma_{p1} = \frac{F}{2 v_1 d} \leq \sigma_{pe}$$

$$\sigma_{p2} = \frac{F}{v_2 d} \leq \sigma_{pe}$$

2.2.2.1. Méretezzük a vázolt kapcsolat x méretét! A nyírófeszültség megengedett értéke

$$\tau_e = 5,2 \text{ N/mm}^2,$$



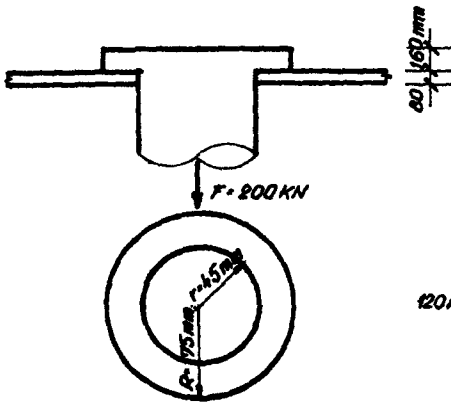
2.2.2.1. ábra

2.2.2.2. Ellenőrizzük a vázolt kapcsolat méreteit! A húzásra megengedett feszültség 40 N/mm^2 , nyírásra $\tau_e = 6 \text{ N/mm}^2$.

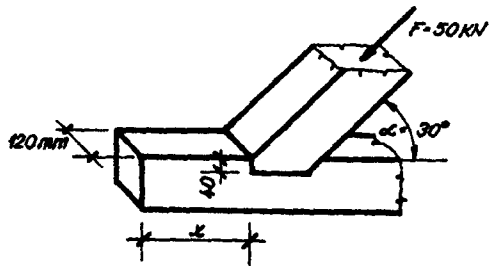
2.2.2.3. a) Határozzuk meg az ábrán feltüntetett fakötés x méretét!
 $\tau_e = 0,8 \text{ N/mm}^2$.

b) Ellenőrizzük a szerkezet 40 mm -es méretét, ha a nyomásra megengedett feszültség

$$\sigma_e = 10 \text{ N/mm}^2$$

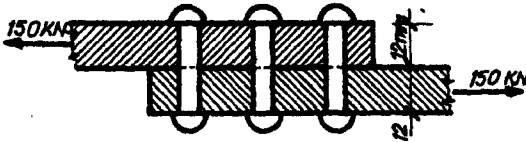


2.2.2.2. ábra

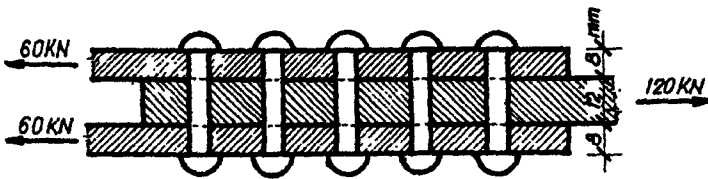


2.2.2.3. ábra

- 2.2.2.4. Határozzuk meg a két lemez összekapcsolásához szükséges szögecsvek számát! A szögecsorsó átmérője 20 mm.
A nyírásra megengedett feszültség $\tau_e = 110 \text{ N/mm}^2$, palástnyomásra $\sigma_{pe} = 240 \text{ N/mm}^2$.
- 2.2.2.5. Határozzuk meg a szükséges szögecsorsó átmérőt! A szögecsvek száma $n = 5$. Nyírásra megengedett feszültség $\tau_e = 90 \text{ N/mm}^2$, palástnyomásra $\sigma_{pe} = 380 \text{ N/mm}^2$.



2.2.2.4. ábra



2.2.2.5. ábra

2.2.3. Az egyszerű egyenes hajlítás

A feszültség számítása

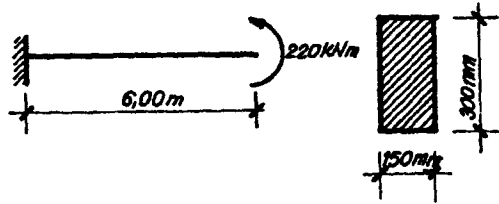
$$\sigma = \frac{M}{J_x} \text{ y képlettel történik.}$$

A ϱ görbületi sugár számítható

$$a \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ_x} \text{ képlettel.}$$

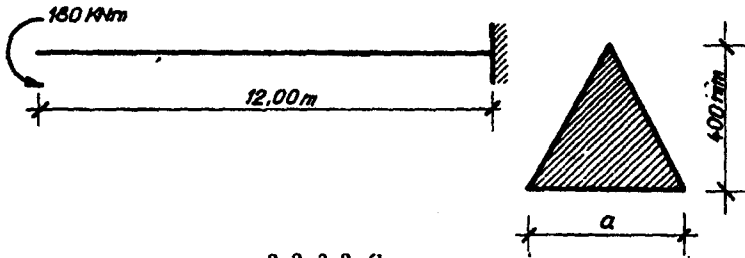
- 2.2.3.1. Határozzuk meg a szélső szálakban ébredő feszültségeket, valamint a rugalmas vonal görbületi sugarát! A tartó anyagának rugalmassági modulusa

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2.$$



2.2.3.1. ábra

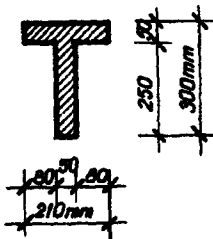
2.2.3.2. Határozzuk meg a tartó "a" méretét! A megengedett feszültség $\sigma_e = 160 \text{ N/mm}^2$.



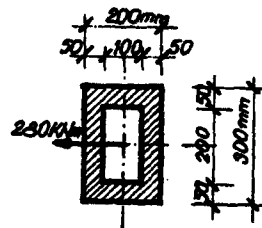
2.2.3.2. ábra

2.2.3.3. Mekkora a megengedett nyomaték az ábra szerinti keresztmetszetre? $\sigma_e = 180 \text{ N/mm}^2$.

2.2.3.4. Határozzuk meg a feszültségi diagram jellegzetes értékeit, valamint a rugalmas vonal görbületi sugarát! $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.



2.2.3.3. ábra



2.2.3.4. ábra

2.2.4. A tiszta csavarás

A nyírófeszültség számítására alkalmas képlet kör, vagy körgyűrű alaku keresztmetszet esetén

$$\tau = \frac{M}{J_o} r$$

Vékonyfalú cső alakú rudak esetében a Bredt képletet használhatjuk.

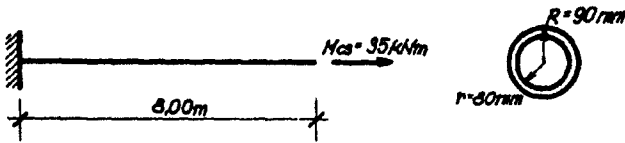
$$\tau = \frac{M}{2A_k v}$$

ahol - A_k a falvastagság középvonala által behatárolt terület.

- v a falvastagság

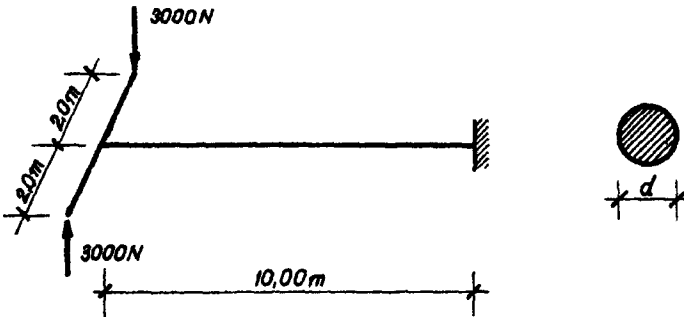
2.2.4.1. Ellenőrzendő a tartó keresztmetszete, ha

$$\tau_e = 135 \text{ N/mm}^2.$$



2.2.4.1. ábra

2.2.4.2. Határozzuk meg a "d" méretet, ha $\tau_e = 150 \text{ N/mm}^2$ az axometriába felütnetett feladatnál



2.2.4.2. ábra

2.3. A feszültségek meghatározása összetett igénybevételek esetén

2.3.1. A ferde hajlítás

A σ feszültség számítására alkalmas képlet:

$$\sigma = \frac{M_u}{J_u} v$$

ahol M_u a nyomaték vetülete az u tengelyen

J_u inercianyomaték az u tengelyre

v száltávolság az u tengelytől

Az "u" tengely a terhelési sík nyomvonalának (ξ) súlyponti konjugáltja.

Az u tengely helyének megállapítása

$$\cotg \omega = \frac{C \xi_D}{J_{\xi}} \quad \text{képlettel történik.}$$

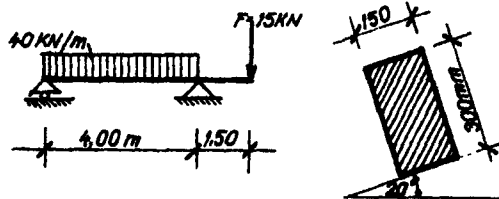
ω - ξ és u tengelyek által bezárt szög.

A feladat megoldható két egyenes hajlítás egymásra halmozásával is.

$$\sigma = \pm \frac{M_1}{J_1} y \pm \frac{M_2}{J_2} x.$$

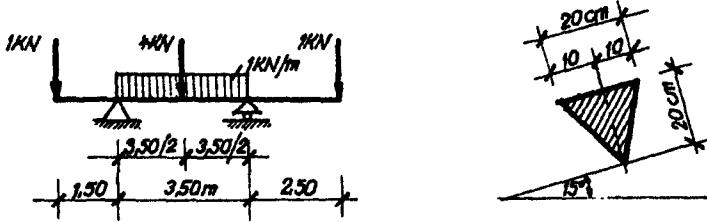
Az M nyomatékvektort a keresztmetszet tehetetlenségi főirányába eső komponensekre bontjuk.

2.3.1.1. Határozzuk meg az ábrán feltüntetett gerendatartónál a maximális feszültséget mind a ferde hajlítás, mind a két egyenes hajlítás szuperponálásának módszerével!



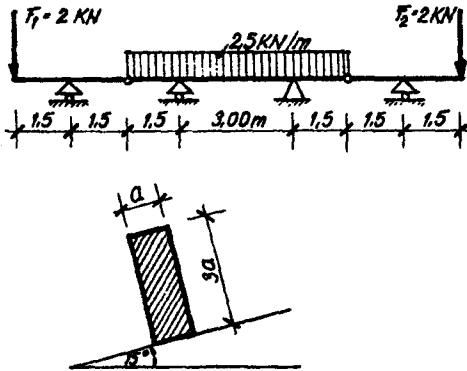
2.3.1.1. ábra

2.3.1.2. Határozzuk meg a szélső szálaban működő feszültségeket! Megfelelő-e, ha a szerkezet fából készült és a fa határ feszültsége $\sigma_H = 10 \text{ N/mm}^2$. A keresztmetszeti méreteket cm-ben adjuk meg.



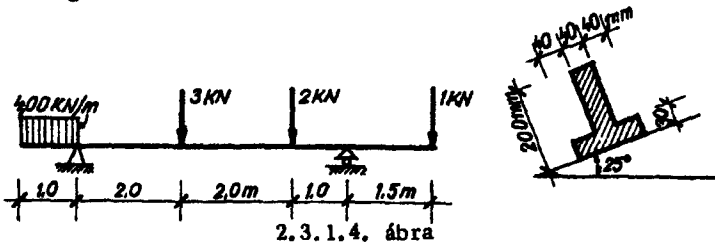
2.3.1.2. ábra

2.3.1.3. Méretezzük az ábrán feltüntetett Gerber-tartót, ha $\sigma_e = 205,0 \text{ N/mm}^2$



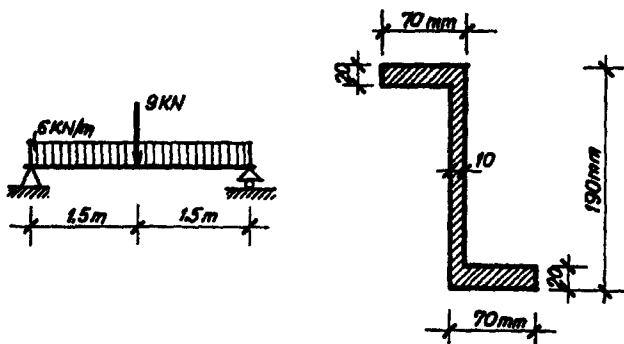
2.3.1.3. ábra

2.3.1.4. Határozzuk meg a maximális nyomaték helyén a szélső szálfeszültségeket!



2.3.1.4. ábra

2.3.1.5. Határozzuk meg a maximális nyomaték helyén a szélső szálfeszültségeket!



2.3.1.5. ábra

2.3.2. A központos húzás és nyomás

A σ feszültség meghatározására szolgáló képlet egy központos nyomás és két egyenes hajlítás egymásra halmozásával.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{J_1} y + \frac{M_2}{J_2} x$$

ahol M_1 , M_2 az N erőnek a tehetetlenségi főirányokra vonatkozó nyomatéka.

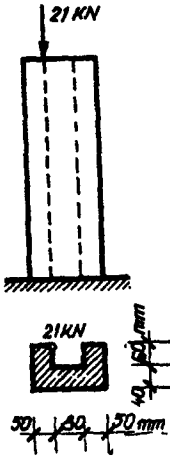
- 2.3.2.1. Határozzuk meg az oszlop alsó keresztmetszetében keletkező szélső szálfeszültségeket! Az oszlop sulya elhanyagolható.
- 2.3.2.2. Határozzuk meg az oszlop alsó keresztmetszetében keletkező szélső szálfeszültségeket! Az oszlop sulya elhanyagolható.
- 2.3.2.3. Határozzuk meg az oszlop alsó keresztmetszetében keletkező szélső szálfeszültségeket! Az oszlop sulya elhanyagolható.
- 2.3.2.4. Határozzuk meg a gerendában a szélső szálfeszültségeket a p megoszló teherrel és anélkül is! Az önsúly elhanyagolható.
- 2.3.2.5. Mekkora feszültségek ébrednek a sarokpontokban az A és B metszetekben?

$$\sigma_{\text{beton } e} = - 70 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{\text{talaj } e} = 0,2 \text{ N/mm}^2$$

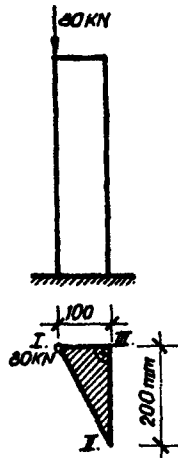
$$\sigma_{\text{beton } e} = + 1,2 \text{ N/mm}^2$$

Az önsúly elhanyagolható.

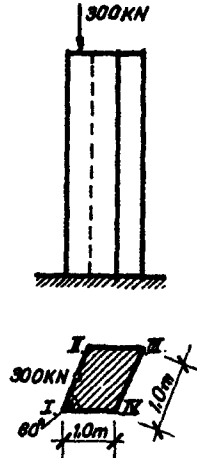
A feladatokhoz tartozó ábrák a következő oldalakon.



2.3.2.1. ábra

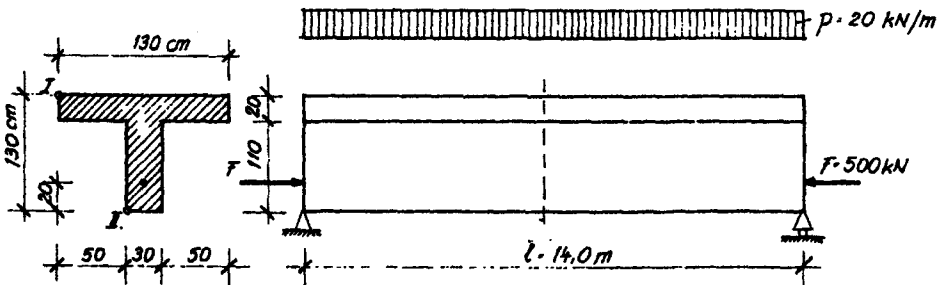


2.3.2.2. ábra



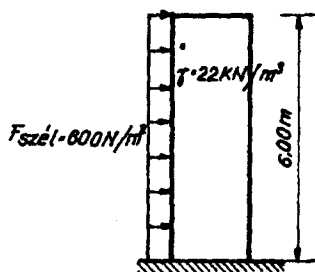
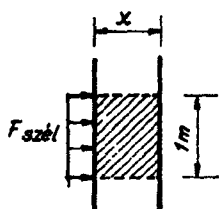
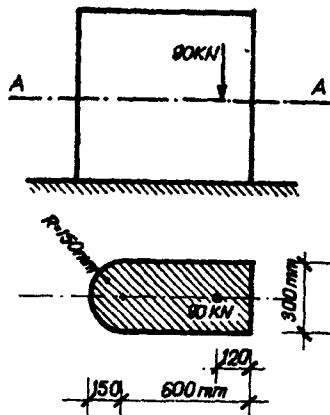
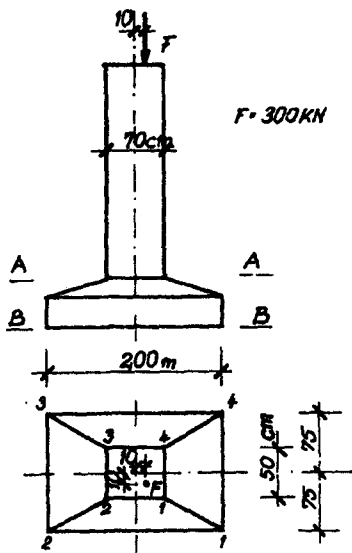
2.3.2.3. ábra

2.3.2.6. Az ábrán vázolt falra $p = 600 \text{ N/m}^2$ nagyságú szélnyomás hat. A fal anyagának fajsúlya 22 kN/m^3 . Milyen széles legyen a fal, hogy az alsó keresztmetszetben ne legyen húzás? A fal 1 m hosszú sávját vizsgáljuk.



2.3.2.4. ábra

2.3.2.7. Egy pillér A-A keresztmetszetében a fölttte lévő erők eredője 90 kN függőleges erő, az ábrán megadott helyen. Számítsuk ki a szélső szálfeszültségeket!
 1. feltételezve, hogy az anyag csak nyomásnak áll ellen,
 2. feltételezve, hogy az anyag húzásnak is ellenáll.



2.3.3. A hajlított és egyidejűleg nyírt tartó

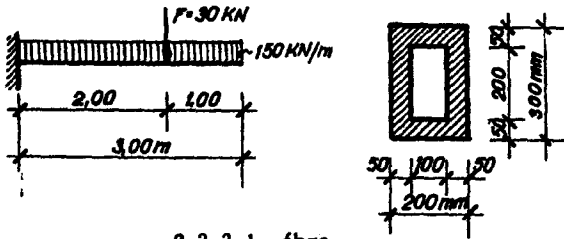
A feszültséggel számításra alkalmas képletek egyenes hajlításnál

$$\sigma_z = \frac{M}{J_x} y$$

$$\tau_{zy} = -\frac{TS'_x}{J_x}$$

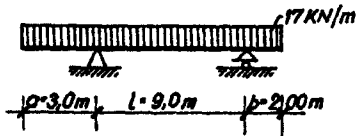
$$\tau_{zx} = + \frac{T \cdot S'}{I_x \cdot s} \cdot \frac{x}{t} = - \tau_{zy} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

2.3.3.1. Rajzoljuk meg az adott tartó igénybevételi ábráit! Határozzuk meg a legnagyobb nyomaték helyén a σ és τ feszültségi diagramokat!



2.3.3.1. ábra

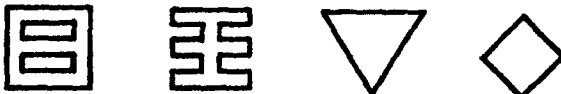
2.3.3.2. Méretezzük a tartót körkeresztmetszetű gerendából, ha $\sigma_e = 150 \text{ N/mm}^2$ Ellenőrizzük a keresztmetszetet nyírófeszültség szempontjából ha $\tau_e = 1,5 \text{ N/mm}^2$!



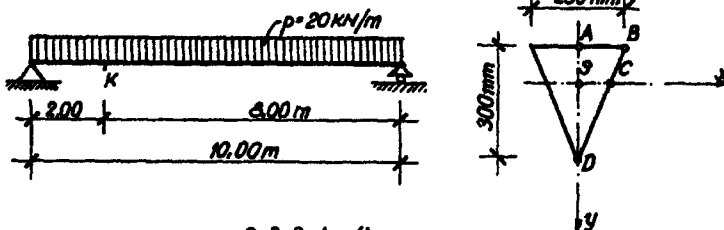
2.3.3.2. ábra

2.3.3.3. Rajzoljuk meg alakhelyesen a hajlításból eredő nyírófeszültségek eloszlási ábráját a függőleges tengely mentén az adott keresztmetszetekben!

2.3.3.4. Határozzuk meg a tartó "K" keresztmetszetének A, B, C pontjában ébredő feszültségeket!



2.3.3.3. ábra



2.3.3.4. ábra

2.4. A főfeszültségek meghatározása

2.4.1. A síkbeli feszültségállapot

A főfeszültségek meghatározására alkalmas képletek síkbeli feszültség állapotban.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

A feszültségi főirány számítása

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{képlettel történik.}$$

Az n normális felülelemhez tartozó feszültség komponensek:

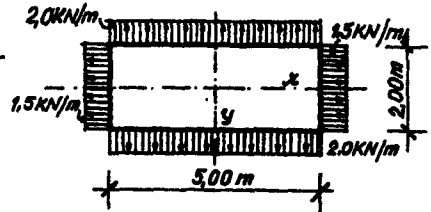
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

ahol α az x normáltól az n normálsig terjedő szög.

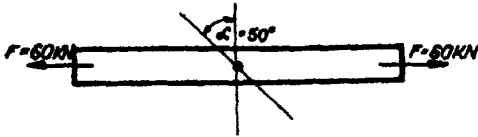
2.4.1.1. Az ábrán vázolt egységnyi vastag síklemezt kétirányú húzásra vesszük igénybe. Számítsuk ki és szerkesszük meg az átlók mentén a feszültség komponenseket!

2.4.1.2. A $D = 20$ mm átmérőjű vasrudat $F = 60$ kN húzóerő terheli. Határozzuk meg az $\alpha = 50^\circ$ hajlásszögű ferde metszeten fellépő σ és τ feszültségeket számítás-sal és szerkesztéssel!



2.4.1.1. ábra

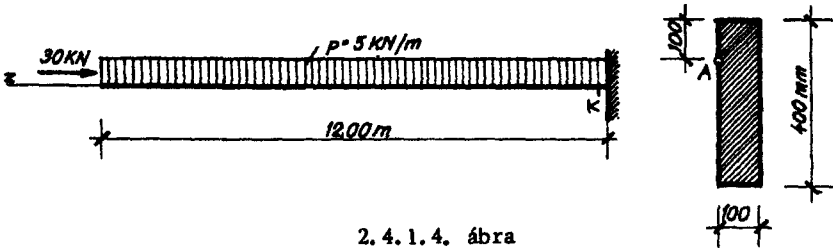
2.4.1.3. Határozzuk meg a 2.3.3.4. ábrán adott tartó A, B, C, S pontjainak feszültségállapotát!



2. 4. 1. 2. ábra

2. 4. 1. 4. Határozzuk meg a tartó K keresztmetszetében az "A" pont feszültség-állapotát és tüntessük fel az oldalnézeten a fő feszültségi trajektoriák "A" pontbeli érintőjét!

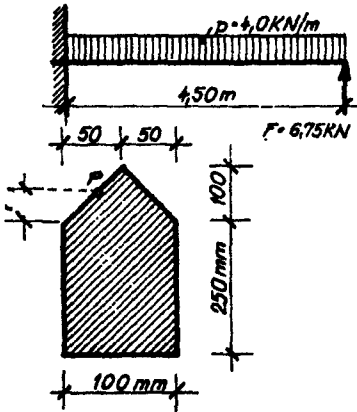
2. 4. 1. 5. Az vázolt tartó állandó keresztmetszetű. Számítsuk ki a keresztmetszet P pontján fellépő nyírófeszültséget a legnagyobb pozitív és a legnagyobb negatív nyomaték helyén!



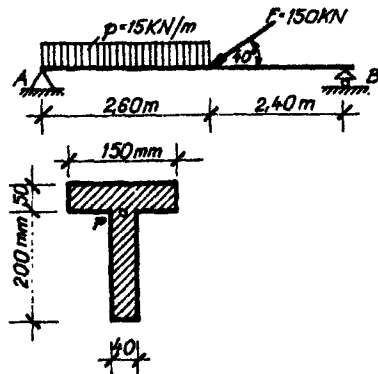
2. 4. 1. 4. ábra

Rajzoljuk fel mindkét esetben a feszültségállapot Mohr-körét is!

2. 4. 1. 6. Határozzuk meg az adott T keresztmetszetű tartó "A" támaszának P pontjában fellépő feszültségeket! Számítsuk ki a főfeszültségeket és ábrázoljuk a feszültségállapot Mohr körét!



2. 4. 1. 5. ábra



2. 4. 1. 6. ábra

3. A TARTÓK ALAKVÁLTOZÁSA

3.1. A síkbeli tartók alakváltozása

3.1.1. A kis elmozdulások elmélete, láncolatok

A feladatok megoldásánál előnyösen felhasználható az az analógia, amely az elfordulás - erő eltolódás - nyomaték viszonyában található.

Zárt vonal mentén az elmozdulás rendszer nullaértékűségét biztosítani kell.

$$(\vartheta_1 \dots \vartheta_n, u_1 \dots u_n) = 0$$

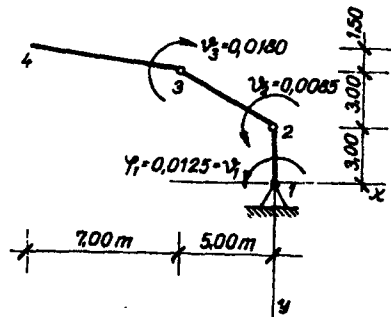
A zárt vonal menti haladási irány, ha az igénybevételi ábrák előjeleit tartani akarjuk az igénybevételi ábra szerkesztésénél használt haladási irányval ellentétes.

3.1.1.1. Határozzuk meg az ábrán vázolt láncolat 4-es pontjának elmozdulását (eltolódását és elfordulását)!

Rajzoljuk meg az eltolódások vetületének ábráit!

3.1.1.2. Határozzuk meg 6-os pont elmozdulás rendszerét, valamint a láncolat eltolódási ábráit!

3.1.1.3. Határozzuk meg az 1-es és 4-es pontok abszolút mozgásait!

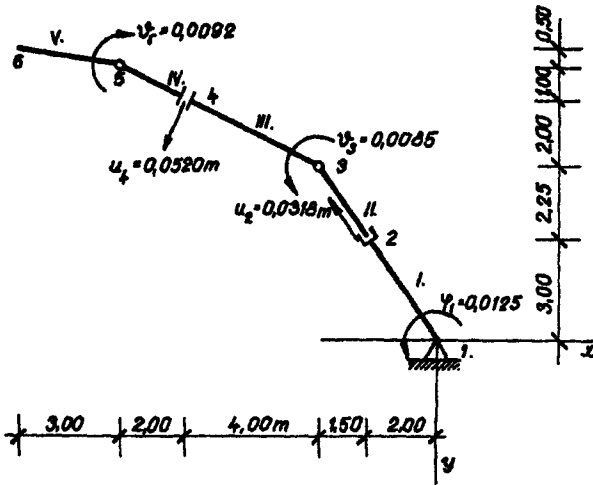


3.1.1.1. ábra

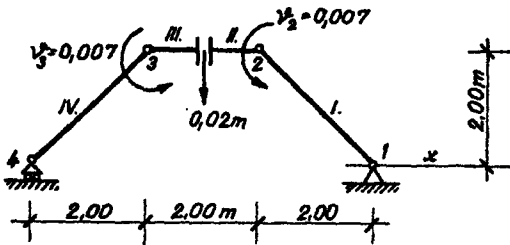
3.1.2. A tartó alakváltozásának meghatározása kis elmozdulások elméletével

A fajlagos alakváltozások a következők:

$$\xi = \frac{N}{EA}; \quad \gamma = \vartheta \frac{T}{GA}; \quad k = \frac{M}{EJ}.$$

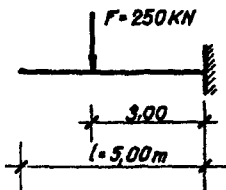


3.1.1.2. ábra



3.1.1.3. ábra

A fajlagos alakváltozásokat összegezve a helyettesítő rudlanc relatív alakváltozásait kapjuk. A nyírőerő hatása általában elhanyagolható.



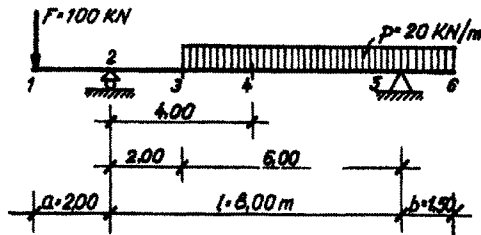
3.1.2.1. ábra

3.1.2.1. Határozzuk meg az ábrán látható konzol végpontjának abszolút eltolódását és elfordulását! Írjuk fel a tartó rugalmas vonalának egyenletét és rajzoljuk fel a rugalmas vonalat.

$$EJ = 10^5 \text{ kN m}^2$$

3.1.2.1. ábra

3.1.2.2. Határozzuk meg az 1-es, 3-as és 6-os pont függőleges eltolódását, valamint abszolút elfordulását! Rajzoljuk meg a tartó rugalmas vonalát!



3.1.2.2. ábra

$$EJ = 3,5 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

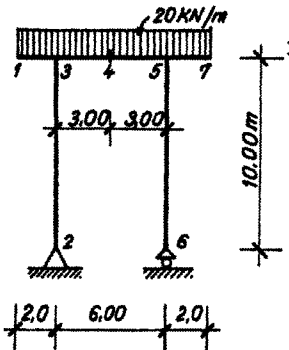
3.1.2.3. Mekkora az 1-es, 4-es és 7-es függőleges eltolódása, valamint pontok abszolút elfordulása?

Rajzoljuk meg a tartó rugalmas vonalát!

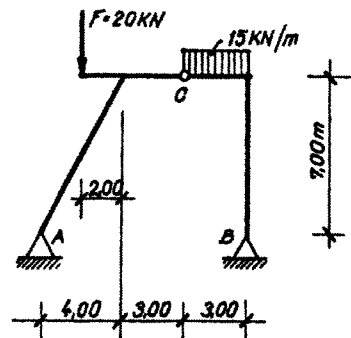
$$EJ = 1,5 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2, \quad EA = 2,0 \cdot 10^5 \text{ kN.}$$

3.1.2.4. Számoljuk ki a csukló eltolódását! Rajzoljuk meg a tartó rugalmas vonalát!

$$EJ = 3,0 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2, \quad EA = 2 \cdot 10^4 \text{ kN.}$$



3.1.2.3. ábra

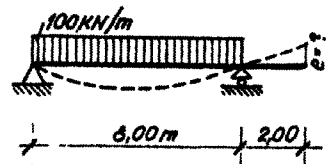


3.1.2.4. ábra

3.1.2.5. Számítsuk ki a konzolvég felemelkedését!

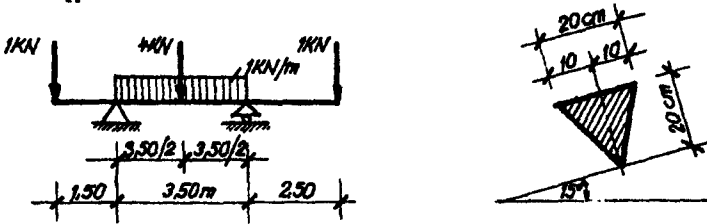
$$EJ = 10^6 \text{ kNm}^2.$$

3.1.2.6. Számítsuk ki a B támasz vízszintes irányú eltolódását! EJ adott.



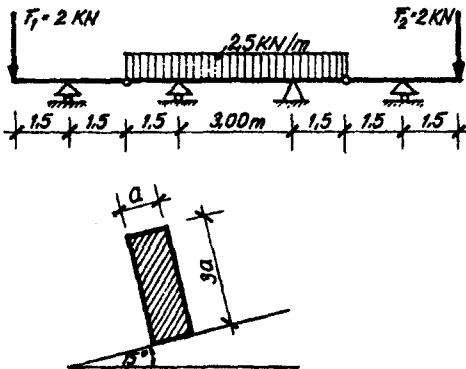
3.1.2.5. ábra

2.3.1.2. Határozzuk meg a szélső szálban működő feszültségeket! Megfelelő-e, ha a szerkezet fából készül és a fa határ feszültsége $\sigma_H = 10 \text{ N/mm}^2$. A keresztmetszeti méreteket cm-ben adjuk meg.



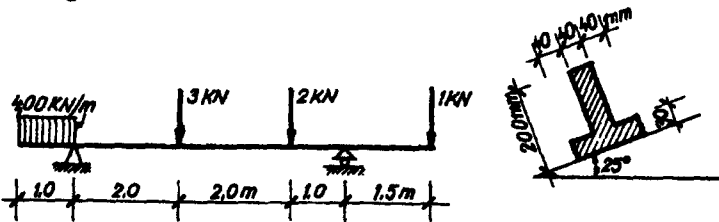
2.3.1.2. ábra

2.3.1.3. Méretezzük az ábrán feltüntetett Gerber-tartót, ha $\sigma_e = 205,0 \text{ N/mm}^2$!



2.3.1.3. ábra

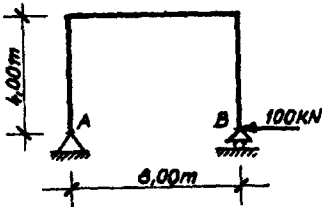
2.3.1.4. Határozzuk meg a maximális nyomaték helyén a szélső szálfeszültségeket!



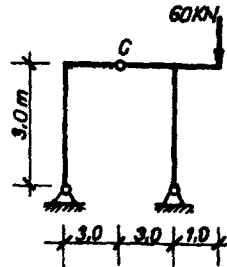
2.3.1.4. ábra

3.1.3.4. Számítsuk ki a C csuklónál keletkező relatív szögelfordulást!

$$EJ = 10^4 \text{ kNm}^2.$$



3.1.3.3. ábra



3.1.3.4. ábra

3.1.3.5. Számítsuk ki az ábrán látható konzol jelölt pontjainak függőleges eltolódását!

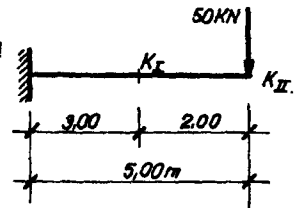
$$EJ = 6,13 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2.$$

3.1.3.6. Határozzuk meg a támaszponti keresztmetszetek elfordulását, valamint a csukló relatív elfordulását! A tartó jellemzői $A = 48,0 \text{ cm}^2$.

$$J = 1850 \text{ cm}^4, \quad E = 21000 \text{ kN/cm}^2.$$

3.1.3.7. Határozzuk meg a Gerber tartó C csuklójának lehajlását és relatív elfordulását!

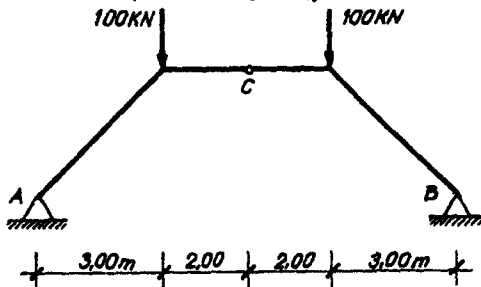
$$EJ = 10^5 \text{ kNm}^2.$$



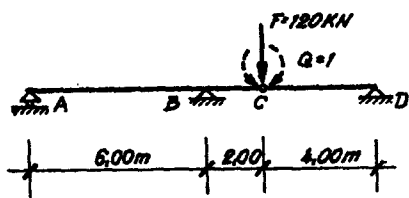
3.1.3.5. ábra

3.1.3.8. Határozzuk meg a keret, C, D pontjainak relatív eltolódását!

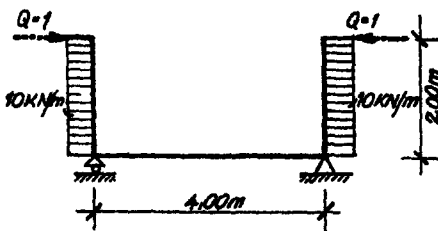
$$EJ = 10^5 \text{ kNm}^2, \quad EA = 10^3 \text{ kN}.$$



3.1.3.6. ábra



3.1.3.7. ábra



3.1.3.8. ábra

3.1.4. A rácsos tartók alakváltozásainak meghatározása munkatétellel

A belső erők munkája rácsos tartóknál egyszerűsödik, mivel csak normál-erő van.

1. Külső-belső saját munka egyenlősége:

$$\frac{1}{2} \sum F_e + \frac{1}{2} \sum M \varphi = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 s}{EA}$$

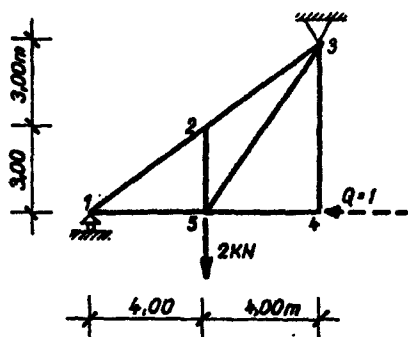
2. Külső-belső idegen munkák egyenlősége:

$$\sum F \cdot e_{FQ} + \sum M \cdot \varphi_{FQ} = \sum \frac{S_F \cdot S_Q s}{EA}$$

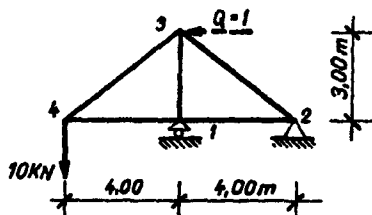
3.1.4.1. Határozzuk meg a rácsos tartó 4 pontjának x irányú eltolódását!

$$EA = 10^4 \text{ KN.}$$

3.1.4.2. Határozzuk meg a rácsos tartó e_{4y} és e_{3x} eltolódásait $EA = 10^5 \text{ kN.}$



3.1.4.1. ábra



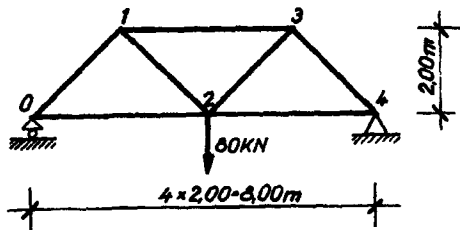
3.1.4.2. ábra

3.1.4.3. Határozzuk meg a 2-es pont függőleges eltolódását!

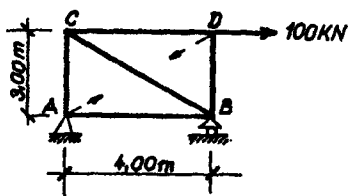
$$EA = 1,29 \cdot 10^5 \text{ kN.}$$

3.1.4.4. Mennyi lesz az A és D csomópontok eltávolodása egymástól?

$$EA = 10^5 \text{ kN.}$$



3.1.4.3. ábra



3.1.4.4. ábra

4. A STATIKAILAG HATÁROZATLAN TARTÓK

4.1. A statikailag határozatlan tartók megoldásának képletei

Egyensúlyi feltételi egyenletrendszer:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{10} = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{20} = 0$$

⋮
⋮
⋮

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n0} = 0$$

Az egységtevézők meghatározása tömör tartóknál munkatétellel

$$l_K a_{K1} = \int \frac{M_K M_1}{EI} dz,$$

és rácsos tartóknál:

$$l_K a_{K1} = \sum \frac{S_K S_1}{EA} s.$$

A terhelési tényező meghatározása tömör tartóknál

$$l_i a_{i10} = \int \frac{M_0 M_1}{EJ} dz,$$

és rácsos tartóknál

$$l_i a_{i10} = \sum \frac{S_i S_0}{EA} s.$$

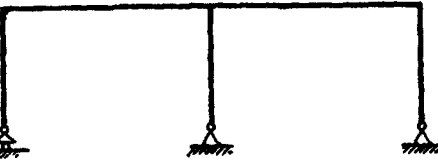
4.2. A statikai határozatlanság fokának meghatározása

A statikai határozatlanság foka:

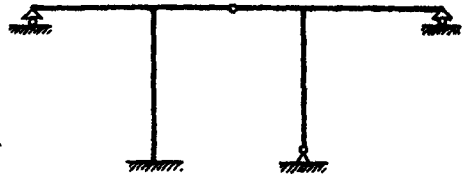
$$n = i - e,$$

ahol i = ismeretlenek száma egyenlő az átvágások számával, és e az egyenletek száma $e = 3(k-1)$, ahol k = a testek száma.

4.2.1. Határozzuk meg a 4.2.1. ábrán adott tartó határozatlanságának fokát!



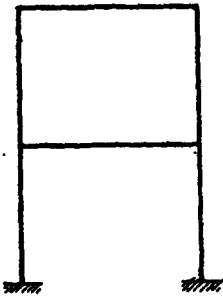
4.2.1. ábra



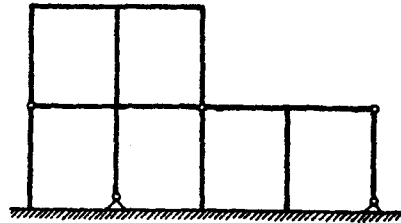
4.2.2. ábra

4.2.3. Hányszorosan határozatlan a 4.2.3. ábrán látható kerettartó?

4.2.4. Határozzuk meg a 4.2.4. ábrán adott összetett tartó határozatlanságának fokát!

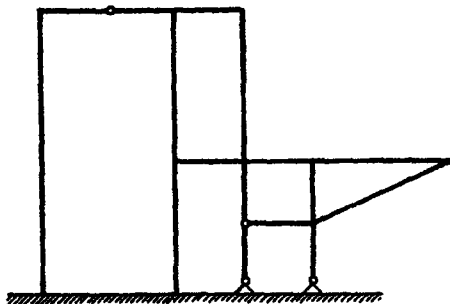


4.2.3. ábra



4.2.4. ábra

4.2.5. Hányszorosan határozatlan a 4.2.5. ábrán látható összetett keretszer-
vezet?



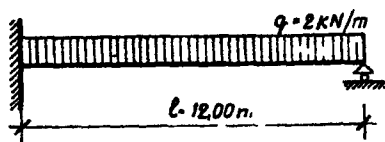
4. 2. 5. ábra

4.3. A statikailag határozatlan tömör tartók megoldása erőmódszerrel

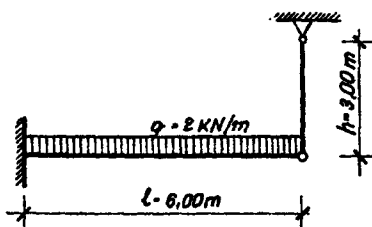
4.3.1. Határozzuk meg az ábrán adott egyszeresen határozatlan gerendatartó igénybevételi ábráit, ha EJ állandó!

4.3.2. Határozzuk meg az ábrán adott tartó igénybevételi ábráit!

Figyelembe kell venni, hogy a rud nyulása számottevő. A gerenda hajlítómerevsége: $EJ = 10^4 \text{ m}^2\text{kN}$. Az oszlop nyomómerevsége: $EA = 5 \cdot 10^2 \text{ kN}$.



4. 3. 1. ábra



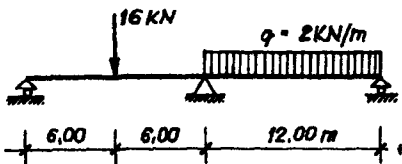
4. 3. 2. ábra

4.3.3. Határozzuk meg a háromtámaszu gerendatartó nyomatéki ábráját! EJ állandó.

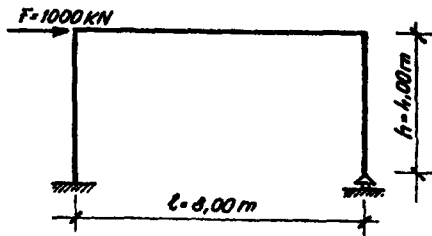
4.3.4. Rajzoljuk meg a határozatlan keret igénybevételi ábráit! EJ állandó.

4.3.5. Rajzoljuk meg a feszítőművel erősített gerenda nyomatéki ábráját! E állandó.

AB gerenda	$J = 935 \text{ cm}^4$
CD rud	$A = 7,94 \text{ cm}^2$
ABD huzal	$A = 3,8 \text{ cm}^2$



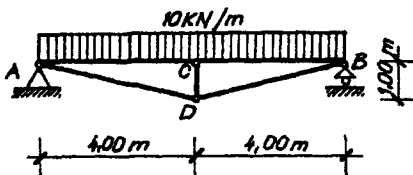
4.3.3. ábra



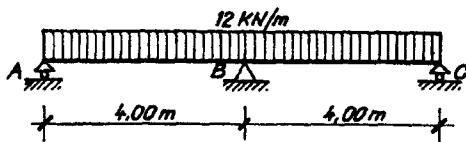
4.3.4. ábra

- 4.3.6. Rajzoljuk a háromtámaszu tartó nyomatéki ábráját, a középső támasz 1 cm-es süllyedéséből!

$$EJ = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 = 3,05 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$$



4.3.5. ábra



4.3.6. ábra

- 4.3.7. Határozzuk meg az ábrán adott statikailag határozatlan szerkezet rud-erőit!

A rudak keresztmetszeti területe:

$$A_1 = 0,785 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 0,503 \text{ cm}^2$$

- 4.3.8. Rajzoljuk meg a vázolt szerkezet nyomatéki ábráját, ha a rud megnyulása számottevő!

Gerenda: $J = 573 \text{ cm}^4$

A rud keresztmetszete: $A = 0,785 \text{ cm}^2$.

- 4.3.9. Rajzoljuk fel az ábrán adott kétszuklós keret igénybevételi ábráit!

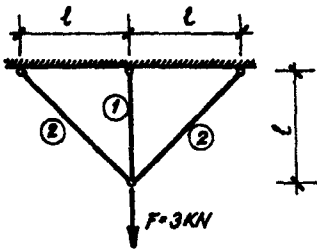
- 4.3.10. Határozzuk meg a tartó T és M ábráját, ha EJ állandó!

- 4.3.11. Rajzoljuk meg a kerettartó igénybevételi ábráit, ha EJ állandó!

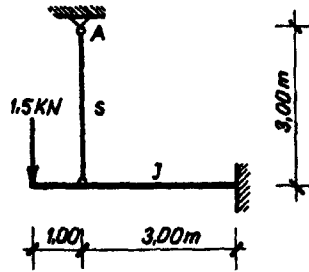
- 4.3.12. Oldjuk meg az ábrán látható kétszeresen határozatlan tartót! A gerenda és az oszlopok inercianyomatéka azonos.

- 4.3.13. Határozzuk meg a kétszeresen határozatlan tartó reakcióerőit, és rajzoljuk fel az igénybevételi ábráit!

A feladathoz tartozó ábrákat lásd a következő oldalakon



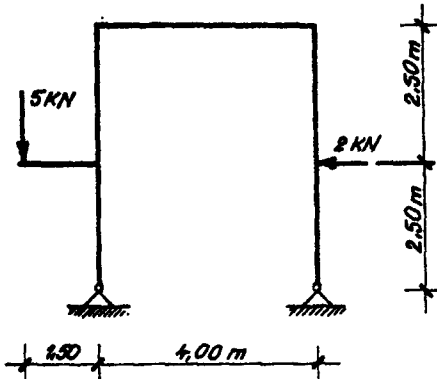
4.3.7. ábra



4.3.8. ábra

A három rud keresztmetszeti területe egyenlő, a gerenda inercianyom-
tékához való viszonya:

$$\frac{I}{A} = 0,9 \text{ m}^2$$



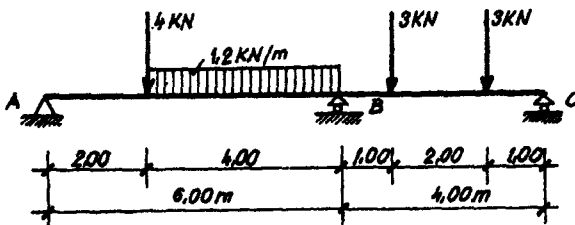
4.3.9. ábra

4.3.14. Rajzoljuk meg a kétszeresen
határozatlan tartó nyomatéki
ábráját!

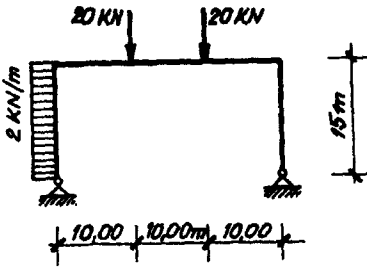
A rudak keresztmetszeti terü-
lete egyenlő: $A = 0,783 \text{ cm}^2$
A gerenda inercia nyomaté-
ka: $J = 573 \text{ cm}^4$

4.3.15. Rajzoljuk meg a két végén
befogott gerendatartó igénybe-
vételi ábráját!

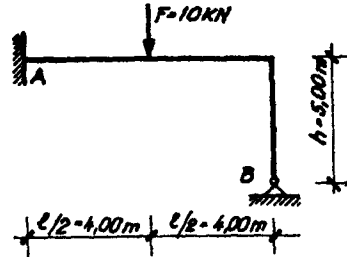
4.3.16. Rajzoljuk meg a folytonlagos
töbttámaszu tartó igénybevé-
teli ábráját!



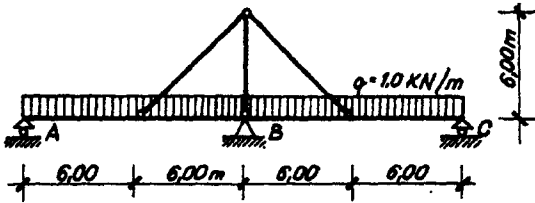
4.3.10. ábra



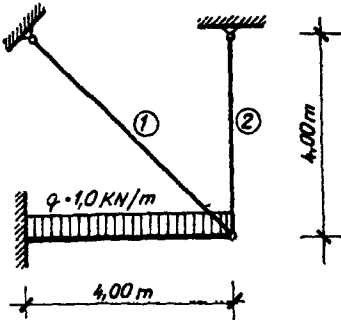
4.3.11. ábra



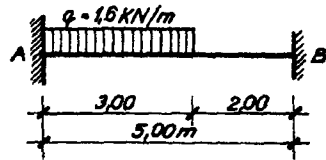
4.3.12. ábra



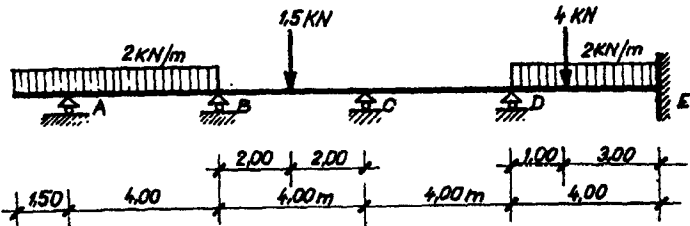
4.3.13. ábra



4.3.14. ábra

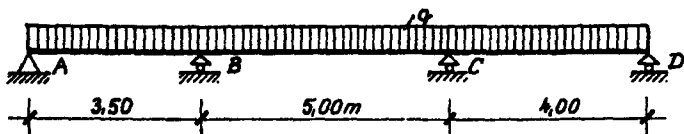


4.3.15. ábra



4.3.16. ábra

- 4.3.17. Mekkora lehet a tartón a q megoszló teher intenzitása, hogy a tartón fellépő legnagyobb nyomaték ne haladja meg a 3 kNm értéket?



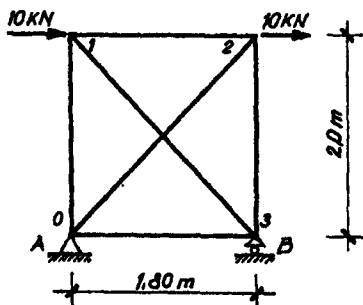
4.3.17. ábra

4.4. A statikailag határozatlan rácsos tartók megoldása erőmódszerrel

- 4.4.1. Az ábrán látható andrás-kereszt felső csomópontjain egy-egy vízszintes 10 kN nagyságú erő hat. A tartó (belsőleg) statikailag egyszerűen határozatlan. Határozzuk meg a rudereket!

A rudkeresztmetszetek viszonzyszámai:

$$\lambda_{01} = \lambda_{23} = 1 \quad \lambda_{0-2} = \lambda_{1-3} = 0,8 \quad \lambda_{03} = \lambda_{1-2} = 0,5.$$



4.4.1. ábra

- 4.4.2. Határozzuk meg az ábrán adott statikailag (külsőleg) egyszerűen határozatlan rácsos tartó rudereit! A rudak keresztmetszeti területe azonos.

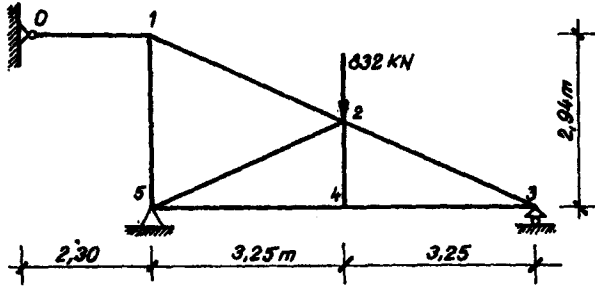
- 4.4.3. Az ábrán adott statikailag egyszerűen határozatlan szerkezet rudereit határozzuk meg!

$$\lambda_{01} = \lambda_{12} = 2,0$$

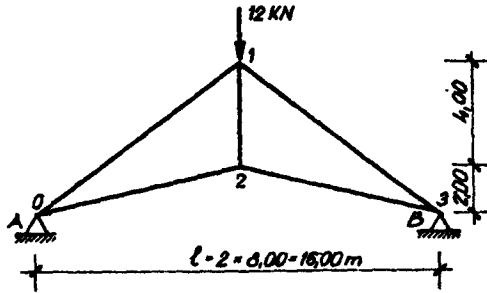
$$\lambda_{02} = \lambda_{23} = 1,2$$

$$\lambda_{12} = 0,8.$$

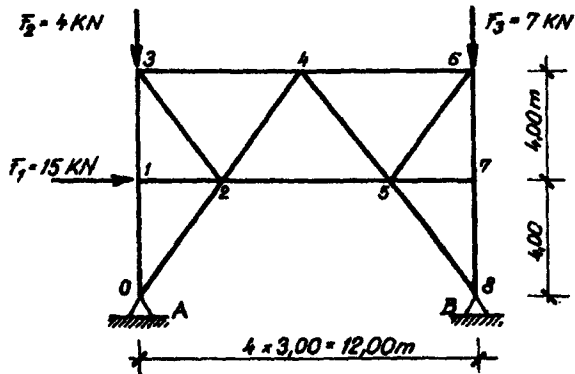
- 4.4.4. Határozzuk meg az ábrán adott egyszerűen határozatlan rácsos tartó rudereit! A rudak keresztmetszeti területe azonos.



4.4.2. ábra



4.4.3. ábra

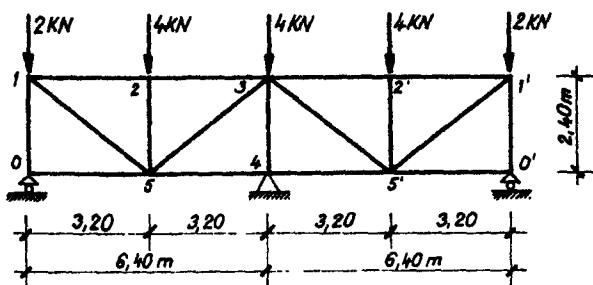


4.4.4. ábra

4.4.5. Határozzuk meg az ábrán adott egyszerűen határozatlan rácsos tartó ruderőit!

A keresztmetszetek területe: $A_{12}=A_{23}=A_{34}=13,82 \text{ cm}^2$

$A_{01}=A_{05}=A_{15}=A_{25}=A_{45}=A_{35}=9,6 \text{ cm}^2$.



4.4.5. ábra

5. A KIHAJLÁS

Euler-féle kritikus erő:

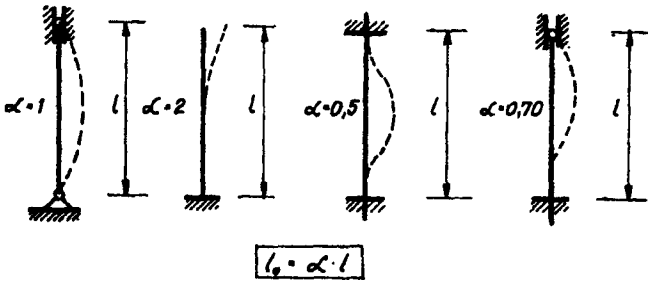
$$F_K = \frac{\pi^2 EJ_2}{l_0^2}$$

Karcsusági tényező:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2}$$

A kihajlási hossz értelmezése az 5.2.5.0. ábra szerint

$$l_0 = l \alpha .$$



5.2.5.0. ábra

A legkisebb inercia sugár:

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

Euler-féle kritikus feszültség:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Tetmajer képlet:

$$\sigma_K = a - b \lambda$$

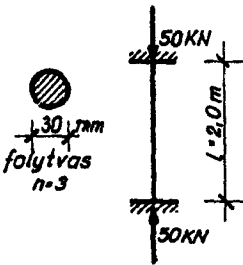
5.2.5.1. Ellenőrizzük az ábrán feltüntetett körkeresztmetszetű rudat:

$$\pi^2 \cdot E = 2122 \text{ kN/mm}^2$$

$$\lambda_0 = 105$$

$$a = 0,31 \text{ kN/mm}^2$$

$$b = 0,00114 \text{ kN/mm}^2$$



5.2.5.1. ábra

5.2.5.2. Az ábrán megadott tartót az ismeretlen F erő terheli. A BC rud keresztmetszete az ábrán feltüntetett téglalap. Mekkora legyen F erő, hogy a BC rud megte-
leljen?

5.2.5.3. Méretezzük az a) ábrán feltüntetett rácsos tartó 3-5-ös jelű rudját a b) ábra szerinti szelvényből

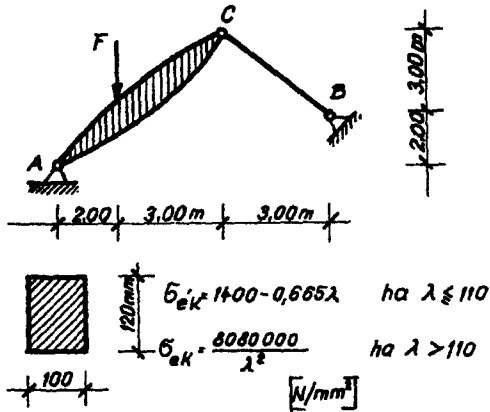
$$\lambda_0 = 100 \quad a = 335 \text{ N/mm}^2 \quad b = 6,2 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

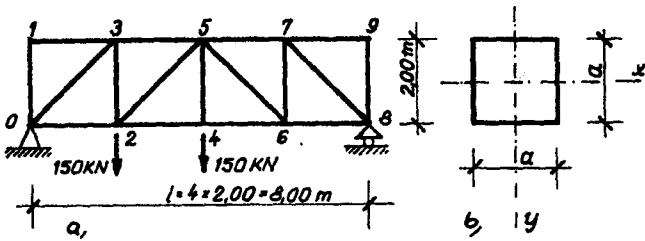
A kihajlási hossz a rudhossznak 0,8-szo-
rosa.

5.2.5.4. Méretezzük a rácsos tartó 1-2-es jelű rudját körkeresztmetszetű szelvényből, ha a biztonsági tényező $n = 3$.

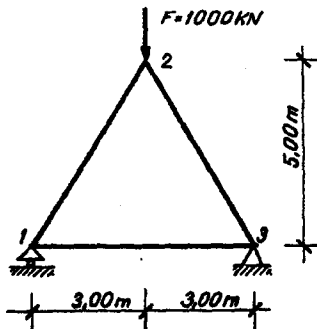
Anyaga acél. A kihajlási hossz a rudhossznak 0,8-szorosa.



5.2.5.2. ábra



5.2.5.3. ábra



5.2.5.4. ábra

6. A MECHANIKAI MOZGÁSOK

6.1. Az anyagi pont kinetikája

Kinetikai függvények

Egyenesvonalú mozgás

$$\text{Útfüggvény: } s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$\text{Gyorsulásfüggvény: } a = \frac{dv}{dt} = \frac{ds^2}{dt^2} \quad (\text{ms}^{-2})$$

$$\text{Sebességfüggvény: } v = v_0 + at \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (\text{ms}^{-1})$$

Térbeli mozgás a koordináta rendszerben

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Térbeli mozgás kötött pályán.

$$s = s(t)$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{e}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{e} + \frac{v^2}{r} \vec{n}$$

Körmozgás

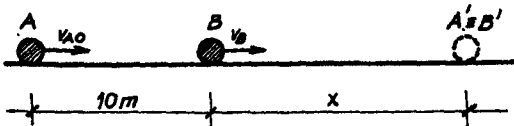
$$s = r\varphi$$

$$v = r\omega = r \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_e = r\kappa = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

- 6.1.1. Két kerékpáros egyszerre indul el $t = 0$ időpontban A ill. B pontból, egymással szemben. Mindkettő egyenletes sebességgel halad. Az A pontból induló $v_1 = 30$ km/h, a B pontból induló $v_2 = 20$ km/h sebességgel mozog. Az AB távolság 60 km. Mikor és hol találkoznak?
- 6.1.2. Az A pontból keleti irányban indul egy gépkocsi $v_1 = 30$ km/h sebességgel. 15 perc múlva elindul ugyanonnan déli irányba egy gépkocsi $v_2 = 20$ km/h sebességgel.
Mikor lesz a két gépkocsi közötti távolság 20 km?
- 6.1.3. Két falu egymástól 15 km távolságban van. Az egyik faluból elindul egy kerékpáros az egyenes országúton $v_1 = 10$ km/h sebességgel a másik felé. Ugyanakkor a másik faluból is elindul egy gyalogos az uton $v_2 = 5$ km/h sebességgel.
Mikor és hol találkoznak, ha:
- a gyalogos a kerékpár felé indul el?
- a gyalogos is abba az irányba indul, amerre a kerékpáros?
- 6.1.4. A gépkocsi sebessége 5 s alatt 15 m/s-ról egyenletesen 25 m/s-ra növekszik.
Mennyi a gyorsulása?
- 6.1.5. Egy pontszerű test egyenes pályán egyenletesen gyorsulva mozog, és nyugalmi helyzetéből indulva az első másodperc alatt 0,2 m utat tesz meg.
- Milyen nagy utat fut be 8. sec alatt?
- Mennyi idő alatt növekszik a sebessége 24 ms^{-1} -re?
- Mekkora utat tesz meg 5 perc alatt?
- 6.1.6. Az A és B pontszerű test ugyanabban az időpontban indul el. A B pont és A pont távolsága 10 m. Az A pont kezdősebessége $v_{A0} = 10 \text{ ms}^{-1}$ és gyorsulása $a = -2 \text{ ms}^{-2}$, haladás iránya az A-B irány. A B pont egyenletes sebességgel mozog $v_B = 3 \text{ m/s}$, haladási iránya az AB egyenesen van és az A-tól távolodik.
Mikor és hol találkoznak a pontok?
- 6.1.7. Meghatározandó egy 20 m magas toronyból függőlegesen 15 ms^{-1} kezdősebességgel felfelé hajtott golyó



6.1.6. ábra

- sebessége és magassága 1 s múlva,
- legnagyobb magassága és a tetőpont eléréséhez szükséges idő,
- a talajra érkezés időpontja és a becsapódás sebessége.

6.1.8. Az A helyről két pontszerű testet hajtunk függőlegesen felfelé $v_0 = 40 \text{ ms}^{-1}$ kezdősebességgel, az első $t_0 = 0$ időpillanatban, a másikat 2 s-mal később.

- Az indítás pillanatától számítva mennyi idő eltelte után találkozik a két tömegpont?
- Hol találkoznak?
- Mekkora és milyen értelmű a találkozás pillanatában a két tömegpont sebessége?

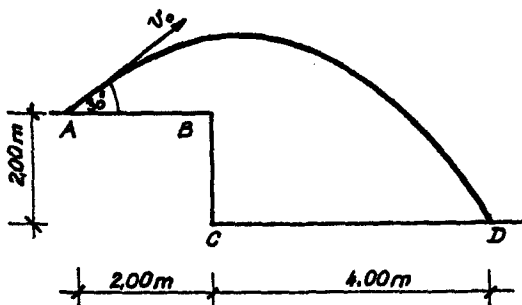
Mekkora v_{02} kezdősebességgel kell indítani a második tömegpontot, hogy akkor találkozzanak, amikor az első tömegpont sebessége nulla. A gyorsulás $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$.

6.1.9. A h magasságban lévő A pontból egy b vízszintes távolságra lévő B pontba kívánunk valamely tömegpontot elhajtani.

Mekkora legyen a kezdősebessége, és mekkora lesz a becsapódási sebessége?

6.1.10. A pontszerű testet a 6.1.10. ábrán az A-val jelölt helyről 30° -os szög alatt elhajtjuk v_0 kezdősebességgel.

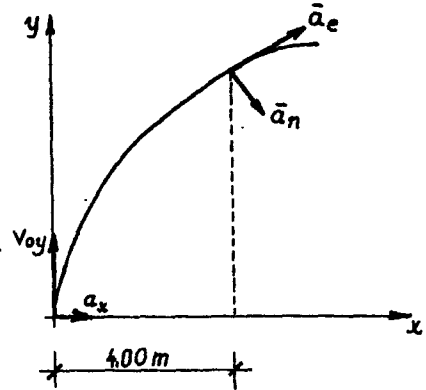
Határozzuk meg a kezdősebesség értékét úgy, hogy a pontszerű test a D helyen érje el az alsó vízszintes síkot!



6.1.10. ábra

6.1.11. Az A tömegpont a 0 pontból y irányu $v_0 = 4 \text{ ms}^{-1}$ kezdősebességgel indul és mozgása alatt a gyorsulás x irányu. A gyorsulás nagysága $a_x = 2 \text{ ms}^{-2}$.

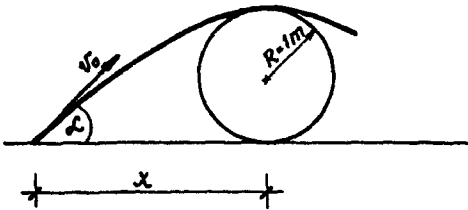
- Határozzuk meg a pálya egyenletét az x, y koordináta-rendszerben!
- Határozzuk meg az x = 4 m helyen a pont normális és tangenciális gyorsulásának nagyságát!



6.1.11. ábra

6.1.12. A 200 m magasságban 360 km/h sebességgel haladó repülőgépről a cél előtt milyen távolságban kell kioldani a segélycsomagot ahhoz, hogy a célba csapódjék, ha nem lenne légellenállás? Mekkora a segélycsomag sebessége a becsapódás pillanatában, ha $g = 10 \text{ ms}^{-2}$?

6.1.13. A vízszintes sík mely helyéről, milyen sebességgel, és mekkora szög alatt kell az anyagi pontot elhajítani, hogy pályája az $r = 1 \text{ m}$ sugaru kör tetőpontján haladjon át, és a pálya görbületi sugara a tetőpontban $r = 1 \text{ m}$ legyen?
 $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$
 Lásd a 6.1.13. ábrát!



6.1.13. ábra

6.1.14. Egy anyagi pont 2,5 m sugaru körön mozog percenként $n = 40$ fordulatszámmal. Mekkora a szögsebesség, kerületi sebesség, normális gyorsulás?

6.1.15. A forgó kerék két ugyanazon sugáron lévő pontjainak sebessége $v_1 = 13$

ms^{-1} , illetve $v_2 = 7 \text{ ms}^{-1}$.

Mekkora a kerék szögsebessége, ha a két pont egymástól való l távolsága 0,3 m?

6.1.16. A teherautó kerekének átmérője 0,8 m. Mekkora fordulatszámot kell elérni, hogy 36 km/h sebességgel haladjon?

- 6.1.17. Egy elektromotor fordulatszáma $n = 1500 \frac{1}{\text{perc}}$. Az áram kikapcsolása után 5 s múlva megáll. Mekkora a szögassulás?
- 6.1.18. Az óra mutatói éppen 3 órát mutatnak. Mennyi idő után találkoznak először?
- 6.1.19. Az $R = 1$ m sugaru körpályán a $t_0 = 0$ időpillanatban $v_0 = 0$ kezdősebességgel, állandó szöggyorsulással kezdi az A pont a mozgását. $t = 3$ s-ban a gyorsulásvektor normálkomponense $a_n = 36 \text{ ms}^{-2}$. Mekkora a szöggyorsulás, és mekkora a $t = 3$ s pillanatban a sebesség és az érintőirányú gyorsulás?

6.2. A merev testek kinetikája

Síkmozgásnál:

$$a_e = R\kappa$$

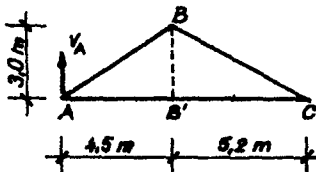
$$a_n = r\omega^2$$

$$a = R\sqrt{\kappa^2 + \omega^4}$$

Gördülő mozgásnál

$$\omega = \frac{v_s}{R}$$

- 6.2.1. Az ábrán látható háromszög B' pont körül forgó mozgást végez. Adott az A pont sebessége $v_A = 7,2 \text{ ms}^{-1}$.



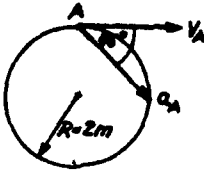
(6.2.1. ábra)

Határozzuk meg a B és C pontok sebességét, valamint az A, B, C pontban fellépő gyorsulást!

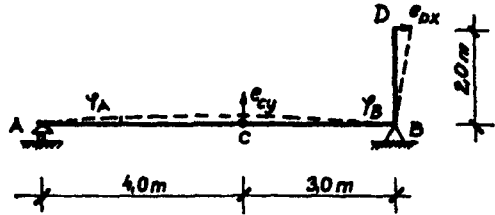
- 6.2.2. Az ábrán adott körlap síkjára merőleges tengely körül forog. Adott az A pontjának sebessége és gyorsulása: $v_A = 2,15 \text{ ms}^{-1}$, $a_A = 2,81 \text{ ms}^{-2}$.

Határozzuk meg a forgástengely helyét, a szögsebességet, és a szöggyorsulást!

- 6.2.3. Az ábrán látható merev rudakból álló szerkezet D pontjának vízszintes elmozdulása $e_{Dx} = 16 \text{ mm}$. Mekkora a B és az A támasznál keletkező szögforgás, és a C pont y irányú eltolódása?

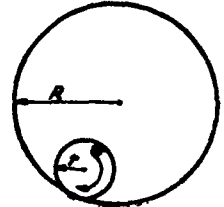


6.2.2. ábra



6.2.3. ábra

- 6.2.4. Az ábrán látható köralaku síklap egy körpályán csuszás nélkül gördül. Egy teljes körbefordulás ideje $T = 6$ s. A körpálya sugara $R = 80$ mm, a síklap sugara $r = 20$ mm. Mekkora a középpont sebességvektorának nagysága? Hány kör-fordulatra ér vissza a kis körlap a kiindulási helyére? Mekkora a kis körlap szögsebessége a középpont körül?



6.2.4. ábra

6.3. Az anyagi pont kinetikája

Newton-féle alaptörvény:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

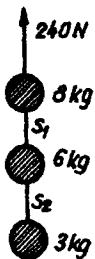
Impulzus tétel:

$$mv_1 - mv_0 = \int_t^1 R dt$$

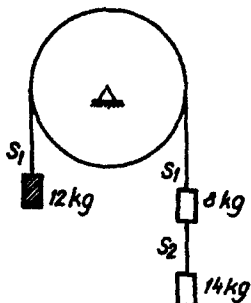
Munkatétel:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_s^1 R ds$$

- 6.3.1. Három tömeget súlytalan kötéllel kötünk össze, a 6.3.1. ábra szerint. Az összekapcsolt rendszert 240 N erővel húzzuk felfelé. Mekkora a rendszer gyorsulása, és mekkorák a kötélerők?
- 6.3.2. Elhanyagolható tömegű ideális csigára az ábra szerinti három súlyt függesztünk. Mekkorák a kötélerők és mekkora a rendszer gyorsulása?



6.3.1. ábra



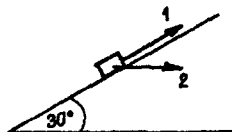
6.3.2. ábra

- 6.3.3. Egy 30° hajlásszögű lejtőre fel akarunk húzni egyenletes sebességgel egy 400 N súlyu testet. Mekkora erőt kell alkalmazni,
- ha az erő párhuzamos a lejtővel?
 - ha vízszintes a húzóerő?

A surlódás elhanyagolható.

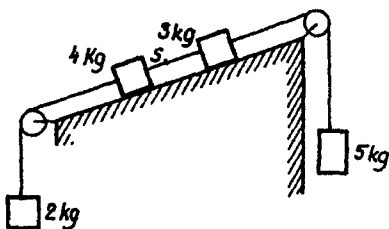
- 6.3.4. Mekkora erőre kell méretezni a felvonó kötelét, ha a legnagyobb gyorsulás $a = 3,27 \text{ ms}^{-2}$? A 800 N-os teher mekkora maximális erővel nyomja a felvonó fenekét? A liftszelekrény súlya 1200 N.

- 6.3.5. Négy anyagi pontnak tekinthető test egy súlytalan kötéltre van erősítve a 6.3.5. ábra szerinti elrendezésben. A surlódás a csigákon és a lejtő felületén elhanyagolható. Kérdés, mekkora az S kötélerő?



6.3.3. ábra

- 6.3.6. Mekkora állandó erővel kell tolni az ábrán látható m tömegű kocsi, hogy az m_1 és m_2 tömegű testek a kocsihoz viszonyítva ne mozogjanak? A fonál és a csiga tömege elhanyagolható, a fonál nem nyúlik meg; a tengely nem surlódik; a közegellenállás és a levegő felhajtó ereje elhanyagolható.



6.3.5. ábra

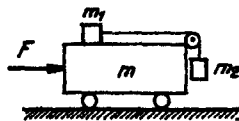
- 6.3.7. Mekkora sebességet ér el a nyugalmi helyzetből induló 2 kg tömegű test 4 Joule munka árán?

- 6.3.8. A légcsaváros szán $v_1 = 6 \text{ ms}^{-1}$ sebességgel halad a kis hajlásszögű lejtőn felfelé. Ugyanezen a lejtőn lefelé $v_2 = 8 \text{ ms}^{-1}$ a

sebessége, változatlan teljesítmény mellett.

Mekkora lesz a sebessége az ugyanolyan surlódási együtthatóú uton, ha motorjának teljesítménye továbbra is változatlan?

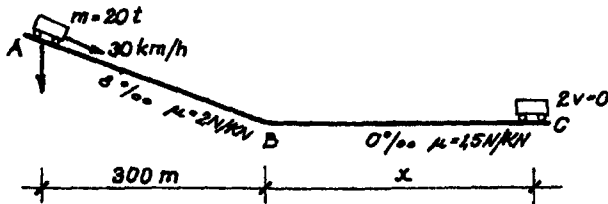
- 6.3.9. A vízszintes érdes síkon fekvő 20 kg tömegű hasábot a hozzáerősített vízszintes irányban húzott fonállal akarjuk mozgásba hozni. A hasáb és a síklap között a surlódási tényező $\mu = 0,2$. A fo-



6.3.6. ábra

nálban legfeljebb $F_{\max} = 60 \text{ N}$ erőt engedhetünk meg. Mekkora lehet a legnagyobb gyorsulás, melyet a fonal húzóereje kifejthet?

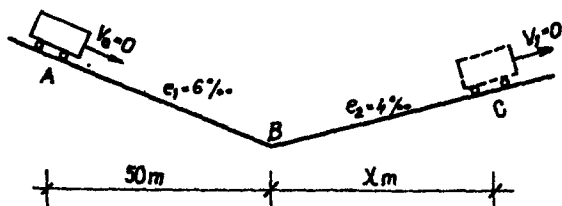
- 6.3.10. Az $R = 600 \text{ m}$ sugaru ívben mekkora tuelelemelést kell alkalmazni, ha a kiépitési sebesség $v = 90 \text{ km/h}$?
- 6.3.11. Mekkora állandó nagyságú F erő kell ahhoz, hogy egy 20 t tömegű kocsit $v = 72 \text{ km/h}$ sebességre gyorsítson fel 25 perc alatt? A menetellenállás a súlyerő $1,2\%$ -a.
- 6.3.12. Egy kocsit $v = 8 \text{ km/h}$ kezdősebességgel indítunk az emelkedőn felfelé. Az emelkedés $\epsilon = 12 \text{ ‰}$, a menetellenállás 4 N/kN . Milyen hosszú ut megtétele után áll meg a kocsi? A kocsi tömege 20 t .
- 6.3.13. Az ábrán vázolt 300 m hosszú 8 ‰ -es lejtő tetejéről 30 km/h kezdősebességgel indítunk egy vasuti kocsit, melynek tömege 20 t . A



6.3.13. ábra

kocsi a lejtő aljára érve vízszintes pályán jut tovább. Mennyi idő múlva áll meg, és milyen messzire jut a lejtő aljától. A menetellenállás a lejtőn 2 N/kN , a vízszintes szakaszon $1,5 \text{ N/kN}$.

- 6.3.14. A 25 t tömegű vasuti kocsit nyugalmi állapotából egy $F = 7 \text{ kN}$ erővel a lokomotív kimozdítja. A lokomotív a kocsit x hosszúságú vízszintes pályán tolja, majd magára hagyja. A kocsi a lendülettől továbbhalad, és a kezdőhelytől 840 m távolságban áll meg. A menetellenállás $\mu = 8 \text{ N/kN}$, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$
- Mekkora kell lenni az x tolatási hosszúnak?
 - Mennyi ideig mozog a kocsi?
- 6.3.15. Az ábrán látható lejtőn elindítunk $v_0 = 0$ kezdősebességgel egy 20 t tömegű kocsit. A lejtő 6 ‰ -es és 50 m hosszú. A kocsi rátér egy 4 ‰ -es emelkedőre. Milyen messzire jut el a kocsi, ha a menetellenállás $\mu = 2 \text{ N/kN}$? Mekkora a kocsi sebessége, mikor először ér a lejtő aljára, és mekkora mikor másodszor ér el ugyanabbe a pontba? (Az ábra az 58. oldalon van.)
- 6.3.16. Mekkora a jármű menetellenállása, ha vízszintes pályán magára hagyva 72 s múlva áll meg, és ez alatt 146 m utat tesz meg?



6.3.15. ábra

6.3.17. Milyen legyen a tervezett hullámvasut h magasságkülönbsége, ha azt akarjuk, hogy az ábrán jelzett B pontban a kocsi ne hagyja el a pályát?



6.3.17. ábra

6.3.18. Az anyagi pont függőleges siku körpályán mozoghat a súlyerő hatására. A pont a körpálya tetőpontjáról indul $v = 0$ sebességgel. Hol hagyja el a pont a pályát?



6.3.18. ábra

6.3.19. Egy teherautón levő láda és a kocsipadló közötti súrlódási együttható $f = 0,1$. Mekkora maximális sebességgel haladhat a gépkocsi egy 100 m sugaru ívben, hogy a láda ne csusszon meg. Feltételezzük, hogy az ívben a pálya vízszintes. ($g = 10 \text{ ms}^{-2}$)

6.3.20. A vasuti kocsi $R = 650 \text{ m}$ sugaru ívben halad.
- Mekkora legyen a külső sinszálra túlemelése, hogy a két sinszállra gyakorolt nyomás egyenlő legyen?

A nyomtáv 1,5 m, a szerelvény sebessége $v = 30 \text{ km/h}$. A kocsi súlypontja a sín felső éle felett, 1,6 m magasságban van.

Túlemeléssel elérhető-e, hogy a külső keréknyomás a belsőnek kétszerese legyen?

6.4 A merev testek kinetikája

A tehetetlenségi nyomatéknál felhasznált összefüggések:

$$I_{\xi} = \int x^2 dm, \quad I_{\eta} = \int y^2 dm, \quad I_{\zeta} = \int z^2 dm,$$

$$I_x = \int y^2 dm + \int z^2 dm, \quad I_y = \int x^2 dm + \int z^2 dm, \quad I_z = \int x^2 dm + \int y^2 dm,$$

$$2 I_o = I_x + I_y + I_z.$$

Súlypont tétel: $\Sigma \vec{F}_i = m \vec{a}_s.$

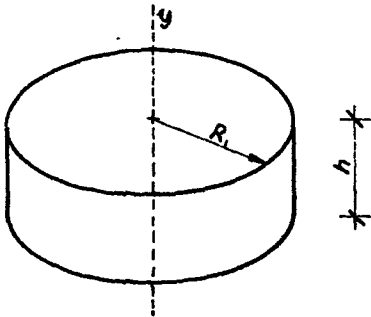
Speciális perdület tétel: $M = IK.$

Merev test mozgási energiája gördülés esetén:

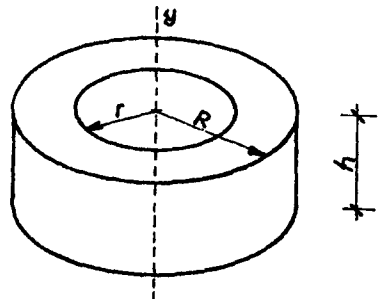
$$E = \frac{mv_o^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$$

6.4.1. Határozzuk meg a korong tehetetlenségi nyomatékát az y tengelyre! A sűrűség ρ , a magasság h

6.4.2. Határozzuk meg az ábrán adott ρ sűrűségű, v vastagságú körgyűrű alapterületű korong y tengelyre vett tehetetlenségi nyomatékát!

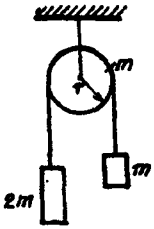


6.4.1. ábra



6.4.2. ábra

6.4.3. Mekkora az ábrán vázolt rendszerben a fonálon lógó hasábok gyorsulása, és mekkora erő hat a mennyezetre? A fonál nem nyúlik, tömege elhanyagolható, és a csigán nem csuszik meg. (Ábra a 60. oldalon.)

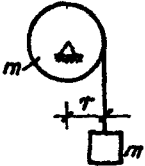


6.4.3. ábra

6.4.4. Az r sugaru, m tömegű, tömör henger surlódásmentes csapágyban vízszintes tengely körül foroghat. A hengerre elhanyagolható tömegű fonalat csavarunk, melynek szabad végére m tömegű testet függesztünk. Mekkora a henger szöggyorsulása?

6.4.5. Az ábrán látható elrendezésben az m_1 tömegű henger és a sík között olyan nagy a tapadási surlódás, hogy a henger tisztán gördül. A csiga és a kötélt elhanyagolható tömegű. Határozzuk meg a hasáb és a henger súlypontjának gyorsulását, és a kötelet feszítő erőt!

6.4.6. Egy m tömegű korongra zsinórt csavarunk fel, melynek végét rögzítjük. A korongot elengedjük lefelé, hogy a mozgás közben a fonal letekeredjen.

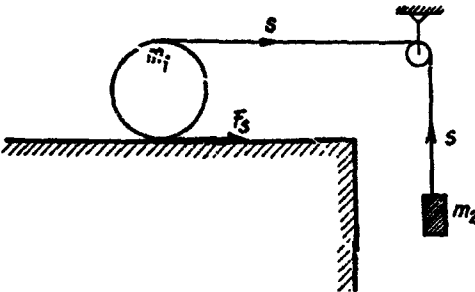


6.4.4. ábra

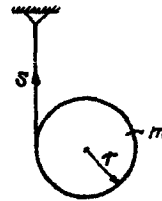
- Milyen nagy kitérő keletkezik a mozgás kezdetén?
- Milyen nagy a súlypont gyorsulása?

6.4.7. Az R sugaru henger alakú vályuban az $\alpha = 60^\circ$ -os helyzetből elindul egy $r/4$ sugaru tömör henger, és csuszás nélkül gördül. Mekkora lesz súlypontjának sebessége a vályu aljában?

6.4.8. Egy korong és egy karika v_0 kezdősebességgel az α hajlásszögű lejtőn legördül. Mindkettő tömege és r_0 sugara azonos: m , és r . Határozzuk meg mindkét test sebességét az u ut megtétele után. Mekkora lesz a gyorsulás?



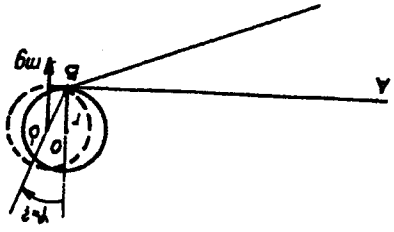
6.4.5. ábra



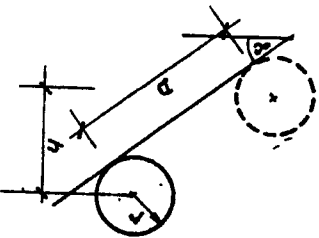
6.4.6. ábra

6.4.9. Az ábrán látható $r = 14$ cm sugaru henger a csúcspan végződés érdes AB vízszintes sík B pontjában éppen egyensúlyban van. A hengert egyensúlyi helyzetéből kibillentve $v_0 = 0$ kezdősebességgel elindítjuk. Mekkora szöveget zár be az OB a függőlegessel, amikor a henger elvált a csúcstól. Mozgás közben tiszta gördülés van, csuszás nem keletkezik.

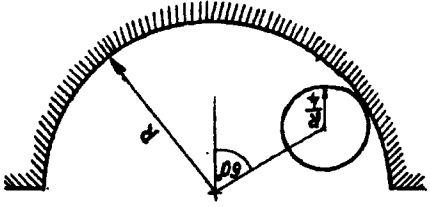
6.4.9. Әбіра



6.4.8. Әбіра



6.4.7. Әбіра





MEGOLDÁSOK

2. AZ ELEMI SZILÁRDSÁGTAN

2.1. A síkidomok jellemző mennyiségei

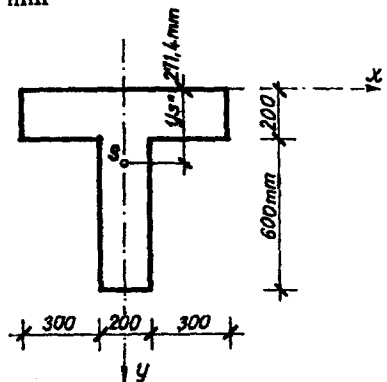
2.1.1. A súlypont és a síkidomok elsőrendű nyomatékai

2.1.1.1. A szimmetria miatt a súlypont rajta van az y tengelyen.

$$S_x = 200 \cdot 800 \cdot 100 + 600 \cdot 200 \cdot 500 = 76,0 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$A = 200 \cdot 800 + 600 \cdot 200 = 28,0 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$y_s = \frac{S_x}{A} = \frac{76,0 \cdot 10^6}{28,0 \cdot 10^4} = 271,4 \text{ mm}$$

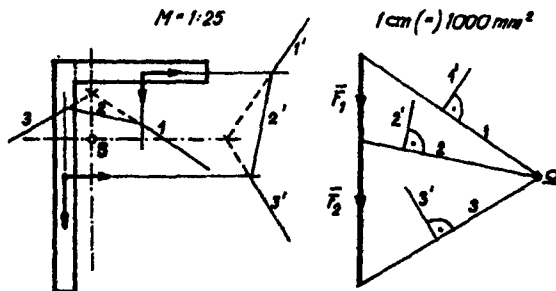


M. 2.1.1.1. ábra

2.1.1.2. Megoldás szerkesztéssel

A részterületek súlypontjában a részterületekkel arányos nagyságu párhuzamos erőket képzelünk, melyeket először x , másodszer y tengely irányával párhuzamosan veszünk fel.

A két erőrendszer eredőinek metszéspontja a súlypont. Nem kell két vektorsokszöget rajzolni, ha a második esetben a kötélfoldalakra állított merőlegessekkel dolgozunk.

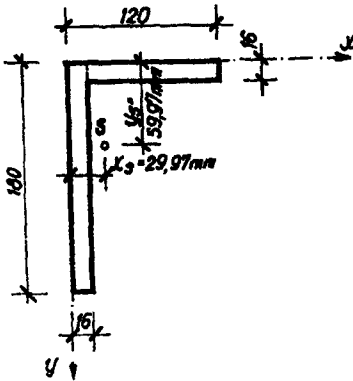


M. 2.1.1.2 1. ábra

Megoldás számítással

$$S_x = 16 \cdot 104 \cdot 8 + 180 \cdot 16 \cdot 90 = 2,725 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$S_y = 16 \cdot 104 \cdot (16 + 52) + 180 \cdot 16 \cdot 8 = 1,3619 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$



$$A = 16 \cdot 104 + 180 \cdot 16 = 4,544 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$x_s = \frac{S_y}{A} = \frac{1,3619 \cdot 10^5}{4,544 \cdot 10^3} = 29,97 \text{ mm}$$

$$y_s = \frac{S_x}{A} = \frac{2,725 \cdot 10^5}{4,544 \cdot 10^3} = 59,97 \text{ mm}$$

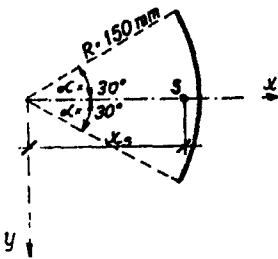
$$2.1.1.3. \quad x_s = \frac{\sin \alpha}{\alpha} R = \frac{\sin 30^\circ}{0,5236} 150 =$$

$$= 143 \text{ mm}$$

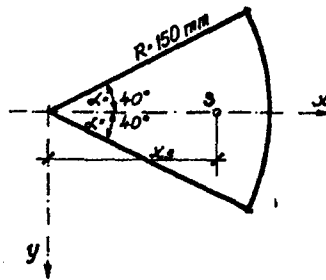
M. 2.1.1.2/2. ábra

$$2.1.1.4. \quad x_s = \frac{2 \sin \alpha}{3 \alpha} R = \frac{2 \sin 40^\circ}{3 \cdot 0,6982} \cdot 150 = \frac{2 \cdot 0,6428}{3 \cdot 0,6982} 150 =$$

$$= 92,06 \text{ mm}$$



M.2.1.1.3. ábra



M. 2.1.1.4. ábra

2.1.1.5. Írjunk statikai nyomatékokat az ismert súlyponton átmenő x' tengelyre. Mivel ez súlyponti tengely, ezért a reá felírt statikai nyomaték zérus.

$$S_{x'} = 0$$

$$S_x = -\frac{200^2 \pi}{2} \cdot \frac{4 \cdot 200}{3 \pi} + \frac{400 \cdot m}{2} \cdot \frac{m}{3} = 0$$

$$m = \sqrt{80000} = 282 \text{ mm.}$$

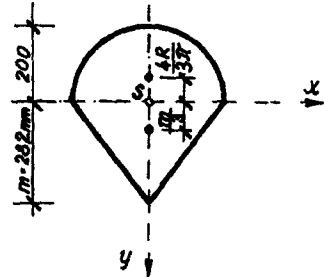
2.1.1.6. $x_s = \frac{a}{2}$, $y_s = \frac{b}{2}$ a szimmetria miatt, de számítással is igazoljuk.

Az idomot két ismert súlypontú részből állíthatjuk össze.

$$A = \frac{2}{3} ab - \frac{1}{3} ab = \frac{ab}{3}$$

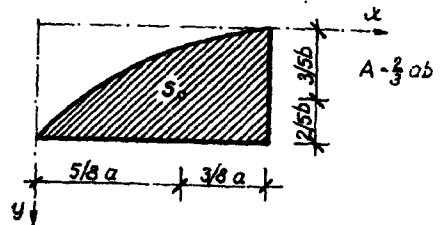
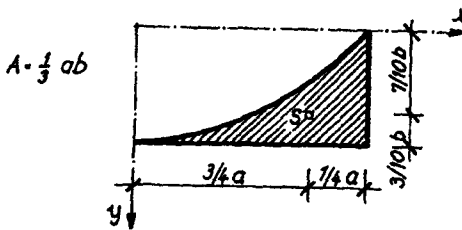
$$S_x = \frac{2}{3} ab \cdot \frac{3}{5} b - \frac{1}{3} ab \cdot \frac{7}{10} b =$$

$$= ab^2 \frac{12-7}{30} = \frac{ab^2}{6}$$



M. 2.1.1.5. ábra

$$S_y = \frac{2}{3} ab \frac{5}{8} a - \frac{1}{3} ab \frac{3}{4} a = a^2 b \frac{10-6}{24} = \frac{a^2 b}{6}$$



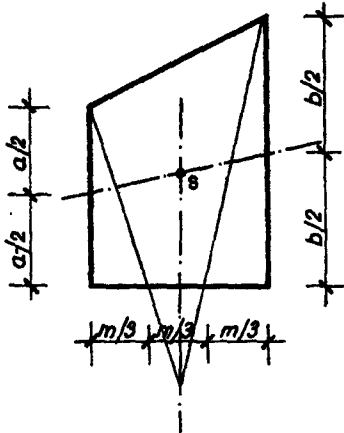
M. 2.1.1.6. ábra

$$x_s = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{a^2 b}{6}}{\frac{ab}{3}} = \frac{a^2 b}{6 ab} \cdot 3 = \frac{a}{2} = 25 \text{ mm}$$

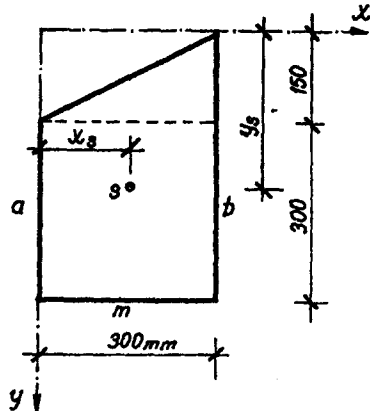
$$y_s = \frac{S_x}{A} = \frac{ab^2 \cdot 3}{6 ab} = \frac{b}{2} = 15 \text{ mm}$$

2.1.1.7. Megoldás szerkesztéssel

Az egyik nem párhuzamos oldalt harmadoljuk. A harmadpontokat a szemközti csúcspontokkal összekötjük és metszéspontjukból a párhuzamos oldalakkal párhuzamos vonalakat húzunk. Ez egy súlyvonal. Másik súlyvonalat a párhuzamos oldalak felezési pontjainak összeköttetésével kapjuk. A két súlyvonal metszéspontja a súlypont.



M. 2.1.1.7/1. ábra



M. 2.1.1.7/2. ábra

Megoldás számítással

x_s - az ismert képlettel számítható

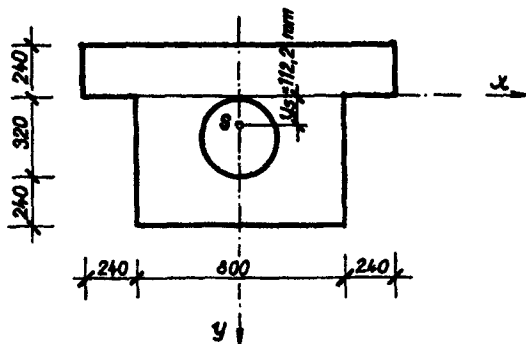
$$x_s = \frac{m}{3} \frac{a + 2b}{a + b} = \frac{300}{3} \frac{300 + 2 \cdot 450}{300 + 450} = 160 \text{ mm}$$

y_s - számításához a területet részekre bontjuk.

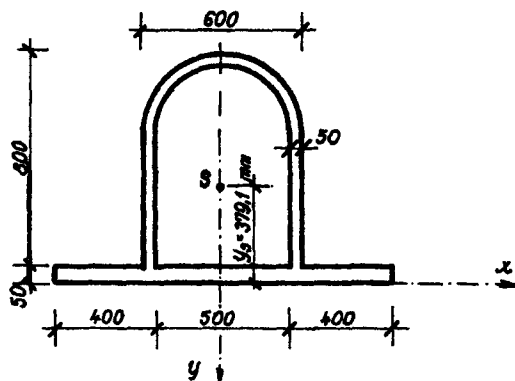
$$y_s = \frac{\frac{150 \cdot 300}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 150 + 300 \cdot 300 \cdot 300}{\frac{150 \cdot 300}{2} + 300 \cdot 300} = \frac{29\,250\,000}{112\,500} = 260 \text{ mm.}$$

2.1.1.8. $y_s = 112,2 \text{ mm}$

2.1.1.9. $y_s = 379,1 \text{ mm}$



M. 2.1.1.8. ábra



M. 2.1.1.9. ábra

2.1.1.10. Az idomnak két szimmetriásíkja van. A súlypont a szimmetriási-
kok metszésvonalán a felső éltől $z_s = 1,082$ m-re van.

- | | |
|-----------------------------|-------------------|
| 2.1.1.11. $x_s = 328,2$ mm, | $y_s = + 150$ mm |
| 2.1.1.12. $x_s = 225,0$ mm | $y_s = + 86,8$ mm |
| 2.1.1.13. $x_s = -20,0$ mm | $y_s = - 10,0$ mm |
| 2.1.1.14. $x_s = 192$ mm | $y_s = 0$ |
| 2.1.1.15. $x_s = 0$ | $y_s = + 52,5$ mm |
| 2.1.1.16. $x_s = 39,0$ mm | $y_s = + 20,0$ mm |
| 2.1.1.17. $x_s = 0$ | $y_s = + 70,2$ mm |

2.1.1.18.	$x_s = 0$	$y_s = + 37,2 \text{ mm}$
2.1.1.19.	$x_s = 0$	$y_s = - 73,7 \text{ mm}$
2.1.1.20.	$x_s = - 5,625 \text{ mm}$	$y_s = 0$
2.1.1.21.	$x_s = 0$	$y_s = - 55,2 \text{ mm}$
2.1.1.22.	$x_s = -12,2 \text{ mm}$	$y_s = + 27,1 \text{ mm}$
2.1.1.23.	$x_s = -35,71 \text{ mm}$	$y_s = - 53,57 \text{ mm}$
2.1.1.24.	$x_s = 0$	$y_s = - 64,5 \text{ mm}$
2.1.1.25.	$x_s = 0$	$y_s = + 26 \text{ mm}$
2.1.1.26.	$x_s = 16,8 \text{ mm}$	$y_s = 0$
2.1.1.27.	$x_s = 0$	$y_s = + 9,85 \text{ mm}$
2.1.1.28.	$x_s = 0$	$y_s = - 8,5 \text{ mm}$

2.1.2. A síkidomok másodrendű nyomatékai

2.1.2.1. A súlypont helyének meghatározása

$$S'_x = 60 \cdot 200 \cdot 30 + 120 \cdot 80 \left(60 + \frac{120}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{80^2 \cdot \pi}{4} 60 +$$

$$+ 120 + \frac{4 \cdot 40}{3 \cdot \pi} = 2,006 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$A = 60 \cdot 200 + 120 \cdot 80 + \frac{1}{2} \frac{80^2}{4} = 2,41 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$y = \frac{2,006}{24,1} = 83 \text{ mm}$$

Inerciák számítása Steiner-tétel alkalmazásával.

$$J_x = \frac{200 \cdot 60^3}{12} + (83-30)^2 \cdot 200 \cdot 60 + \frac{80 \cdot 120^3}{12} +$$

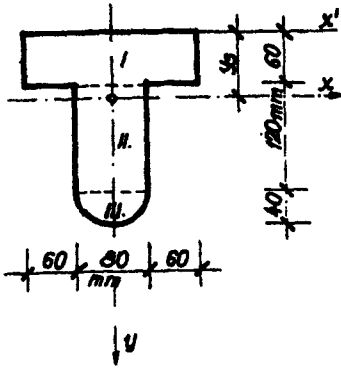
$$+ (60 + 60 - 83)^2 \cdot 80 \cdot 120 + \frac{1}{2} \frac{\pi \cdot 40^2}{4} - \left(\frac{4 \cdot 40}{3 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{80^2 \cdot \pi}{4} +$$

$$+ (60+120 + \frac{4 \cdot 40}{3\pi} - 83)^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{80^2 \cdot \pi}{4} = 9,312 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

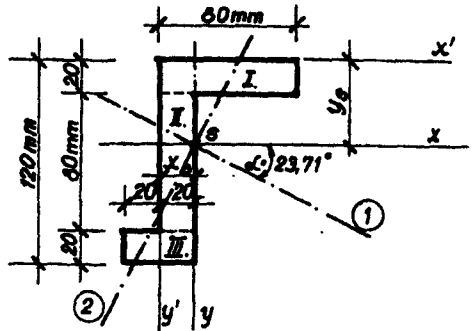
$$J_y = \frac{60 \cdot 200^3}{12} + \frac{120 \cdot 80^3}{12} + \frac{1}{2} \frac{\pi \cdot 40^4}{4} = 4,612 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$C_{xy} = 0$ mivel y szimmetriatengely.

2.1.2.2. A súlypont helyének meghatározása



M.2.1.2.1. ábra



M.2.1.2.2. ábra

$$A = 20 \cdot 80 + 80 \cdot 20 + 40 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2$$

$$S'_x = 20 \cdot 80 \cdot 10 + 80 \cdot 20(20+40) + 40 \cdot 20(20+80+10) = 200\,000 \text{ mm}^3$$

$$S'_y = 20 \cdot 80 \cdot 40 + 80 \cdot 20 \cdot 10 = 80\,000 \text{ mm}^3$$

$$y_s = \frac{200\,000}{4\,000} = 50 \text{ mm}$$

$$x_s = \frac{80\,000}{4\,000} = 20 \text{ mm}$$

A másodrendű nyomatékok

$$J_x = \frac{80 \cdot 20^3}{12} + (50-10)^2 \cdot 20 \cdot 80 + \frac{20 \cdot 80^3}{12} + (20+40+50)^2 \cdot 20 \cdot 80 + \frac{40 \cdot 20^3}{12} + (20+80+10-50)^2 \cdot 40 \cdot 20 = 6,53 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{20 \cdot 60^3}{3} + \frac{100 \cdot 20^3}{3} + \frac{20 \cdot 40^3}{3} = 2,13 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$C_{xy} = 80 \cdot 20(-50+10)(40-20) + 80 \cdot 20(20+40-50)(-20+10) + 40 \cdot 20(20+80+10-50)(-20) = -2,40 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

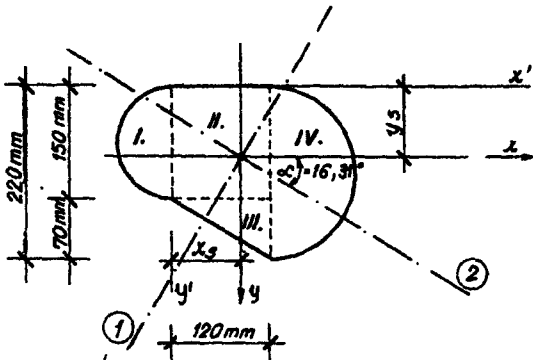
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 C_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{-2 \cdot (-2,40 \cdot 10^6)}{6,53 \cdot 10^6 - 2,13 \cdot 10^6} = 1,091$$

$$\alpha = 23,71^\circ$$

A fő tehetetlenségi nyomatékok

$$J_1 = \frac{6,53 \cdot 10^6 + 2,13 \cdot 10^6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6,53 \cdot 10^6 - 2,13 \cdot 10^6}{2}\right)^2 + (-2,40 \cdot 10^6)^2} = 8,33 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = \frac{6,53 \cdot 10^6 + 2,13 \cdot 10^6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6,53 \cdot 10^6 - 2,13 \cdot 10^6}{2}\right)^2 + (-2,40 \cdot 10^6)^2} = 3,33 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$



M. 2.1.2.3/1. ábra

2.1.2.3. Az idomot részekre bontjuk.

A számítást táblázatosan végezzük el!

Jel	A	A_i	Y_i	$S_{xi} = A_i y_i$	$C_i = y_i - y_s$	$C_i^2 A_i$	J_i	J_i
	mm	mm ²	mm	mm ³	mm	mm ⁴	mm ⁴	mm ³
I.	$\frac{150^2}{4 \cdot 2}$	8836	75	$6,627 \cdot 10^5$	21,5	$4,084 \cdot 10^6$	$\frac{75^4 \cdot \pi}{8}$	$12,42 \cdot 10^6$
II.	120x150	18000	75	$13,50 \cdot 10^6$	21,5	$8,320 \cdot 10^6$	$\frac{120 \cdot 150^3}{12}$	$33,75 \cdot 10^6$
III.	$\frac{120 \times 70}{2}$	4200	173	$7,266 \cdot 10^5$	76,5	$24,579 \cdot 10^6$	$\frac{120 \cdot 70^3}{36}$	$1,143 \cdot 10^6$
IV.	$\frac{220^2}{4 \cdot 2}$	19009	110	$20,91 \cdot 10^5$	13,5	$3,464 \cdot 10^6$	$\frac{110^4 \cdot \pi}{8}$	57,50
Σ		50045		$48,303 \cdot 10^5$		$40,447 \cdot 10^6$		$104,81 \cdot 10^6$

$$y_s = \frac{\Sigma S_{xi}}{\Sigma A_i} = \frac{48,303 \cdot 10^5}{0,5045 \cdot 10^5} = 96,5 \text{ mm}$$

$$J_x = \Sigma c_i^2 A_i + \Sigma J_i = 40,447 \cdot 10^6 + 104,81 \cdot 10^6 = 145,287 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

y irányban

Jel	A_1	x'_1	$S'_y = A_1 x'_1$	$c_1 = x_1 - x_s$	$c_1^2 A_1$	J_1	J_1
	mm^2	mm	$\text{mm}(10^5)$	mm	$\text{mm}(10^6)$	mm^4	$(10^6)\text{mm}^4$
I.	8836	-31,8	-2,81	117,8	122,61	$0,1098 R^4$	3,47
II.	18000	60,0	10,80	26,0	12,17	$\frac{150 \cdot 120^3}{12}$	21,60
III.	4200	80,0	3,36	6,0	0,15	$\frac{70 \cdot 120^3}{36}$	3,36
IV.	19009	166,7	31,69	80,7	123,79	$0,1098 \cdot 110^4$	16,08
Σ			43,04		258,72		44,51

$$x_1^I = -\frac{4R}{3\pi} = -\frac{4 \cdot 75,0}{3 \cdot \pi} = -31,8 \text{ mm}$$

$$x^{\text{IV}} = 120 + \frac{4 \cdot 110}{3 \cdot \pi} = 166,7 \text{ mm} \quad J_y = \Sigma c_1^2 A_1 + \Sigma J_1 = 258,72 \cdot 10^6 + 44,51 \cdot 10^6 = 302,23 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$x_s = \frac{\Sigma S_{y1}}{\Sigma A_1} = \frac{43,04 \cdot 10^5}{0,50045 \cdot 10^5} = 86,00 \text{ mm}$$

C_{xy} számítása

Jel	A_i	$x'_i - x_s$	$y'_i - y_s$	$A_i(x'_i - x_s)(y'_i - y_s)$	C_{xyi}	C_{xyi}
	mm^2	mm	mm	$\text{mm}^4 (10^6)$	mm^4	$\text{mm}^4 (10^6)$
I.	8836	-117,8	-21,5	+ 22,38	0	0
II.	18000	- 26,0	-21,5	+ 10,06	0	0
III.	4200	- 6,0	+76,5	- 1,93	$\frac{-a^2b^2}{72}$	$\frac{-70^2 \cdot 120^2}{72}$
IV.	19009	+ 80,7	+13,5	+ 20,70	0	0
Σ				+ 51,21		-0,98

$$C_{xy} = \Sigma A_i(x'_i - x_s)(y'_i - y_s) + \Sigma C_{xyi} = 51,21 \cdot 10^6 - 0,98 \cdot 10^6 = 50,23 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

A tehetetlenségi főirányok

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 C_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot 50,23 \cdot 10^6}{145,287 \cdot 10^6 - 302,23 \cdot 10^6} = 0,6401$$

$$2\alpha = 32,62^\circ$$

A fő tehetetlenségi nyomatékok

$$J_1 = 10^6 \left[\frac{145,287 + 302,23}{2} + \sqrt{\left(\frac{145,287 - 302,23}{2} \right)^2 + 50,23^2} \right] =$$
$$= 317,0 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = 10^6 \left[\frac{145,287 + 302,23}{2} - \sqrt{\left(\frac{145,287 - 302,23}{2} \right)^2 + 50,23^2} \right] =$$
$$= 130,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

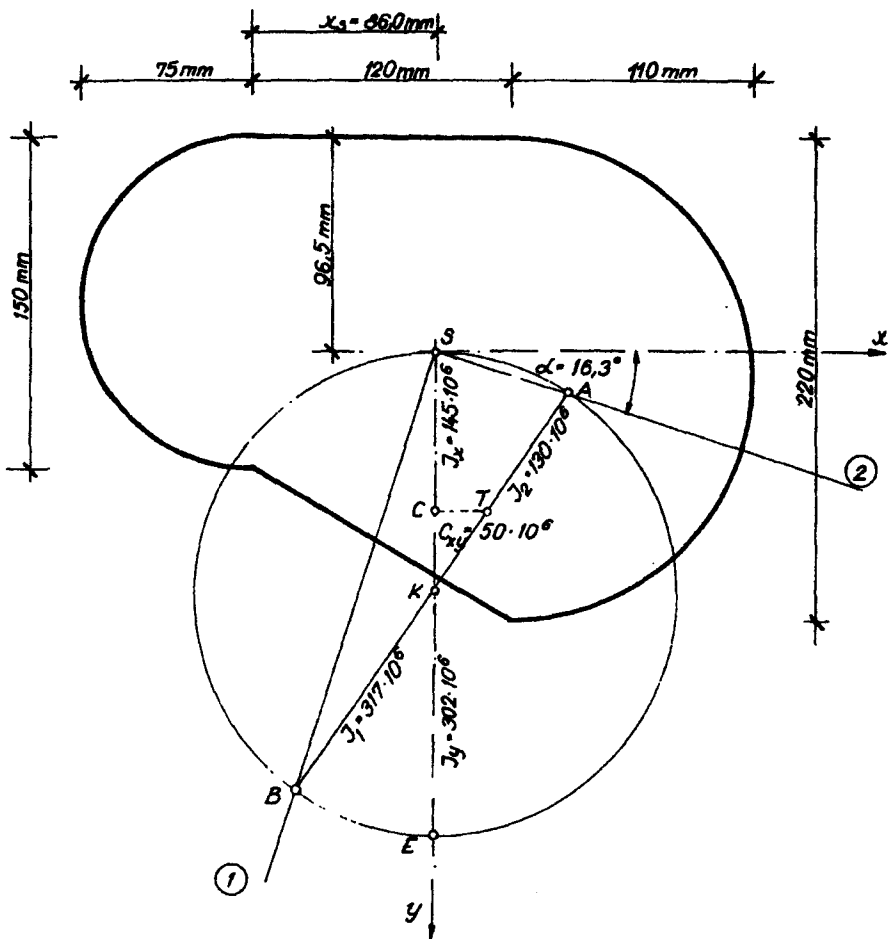
A fő tehetetlenségi nyomatékot és a főirányokat szerkesztéssel is meghatározhatjuk.

A szerkesztés menete

Az S pontból kiindulva az y tengely pozitív félegyenesére felmérjük az J_x , majd az J_y értéke. Az $J_x + J_y$ hosszúság K felező pontjából rajzolunk egy $J_x + J_y$ átmérőjű kört.

Az J_x és J_y találkozási pontjából x tengellyel párhuzamosan felmérjük C_{xy} értéket, mivel ez most pozitív, a pozitív x tengely oldalára kerül. Így kapjuk a T pontot, amely a tehetetlenségi főtengely.

A T ponton átmenő átmérő végpontjai az A és B pontok. A \overline{TB} szakasz hossza J_1 , a \overline{TA} szakasz hossza J_2 -vel arányos. Az \overline{SA} és \overline{SB} szakaszok kijelölik a főirányokat és az α szög leolvasható.



M. 2.1.2.3/2. ábra

2.1.2.4. 2.1.1.11. ábrához; súlypontszámítás 2.1.1.11. feladatnál

$$J_x = 119\,448\text{ cm}^4 \quad J_y = 1\,779\,072\text{ cm}^4 \quad C_{xy} = C_{\xi\eta} = 0$$

$$J_{\xi} = J_x \quad J_{\eta} = 460\,397\text{ cm}^4$$

2.1.2.5. 2.1.1.12. ábrához; súlypontszámítás 2.1.1.12. feladatnál

$$J_x = 72\,736\text{ cm}^4 \quad J_y = 437\,536\text{ cm}^4 \quad C_{xy} = +81\,600\text{ cm}^4$$

$$J_{\xi} = 32\,940\text{ cm}^4 \quad J_{\eta} = 170\,236\text{ cm}^4 \quad C_{\xi\eta} = -21\,518\text{ cm}^4$$

2.1.2.6. 2.1.1.13. ábrához; súlypontszámítás 2.1.1.13. feladatnál

$$\begin{array}{lll} J_x = 560 \text{ cm}^4 & J_y = 2\,128 \text{ cm}^4 & C_{xy} = +948 \text{ cm}^4 \\ J_{\xi} = 236 \text{ cm}^4 & J_{\eta} = 364 \text{ cm}^4 & C_{\xi\eta} = +192 \text{ cm}^4 \end{array}$$

2.1.2.7. 2.1.1.14. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.14. feladatnál

$$\begin{array}{lll} J_x = 56\,180 \text{ cm}^4 & J_y = 280\,328 \text{ cm}^4 & C_{xy} = 0 \\ J_{\xi} = J_x & J_{\eta} = 72\,270 \text{ cm}^4 & C_{\xi\eta} = 0 \end{array}$$

2.1.2.8. 2.1.1.15. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.15. feladatnál

$$\begin{array}{lll} J_x = 3744 \text{ cm}^4 & J_y = 710 \text{ cm}^4 & C_{xy} = 0 \\ J_{\xi} = 1098 \text{ cm}^4 & J_{\eta} = J_y & C_{\xi\eta} = 0 \end{array}$$

2.1.2.9. 2.1.1.16. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.16. feladatnál

$$\begin{array}{lll} J_x = 192,4 \text{ cm}^4 & J_y = 751,8 \text{ cm}^4 & C_{xy} = +228,8 \text{ cm}^4 \\ J_{\xi} = 47,38 \text{ cm}^4 & J_{\eta} = 238,4 \text{ cm}^4 & C_{\xi\eta} = -40,5 \text{ cm}^4 \end{array}$$

2.1.2.10. 2.1.1.17. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.17. feladatnál

$$\begin{array}{lll} J_x = 5\,717,33 \text{ cm}^4 & J_y = 2\,030,66 \text{ cm}^4 & C_{xy} = 0 \\ J_{\xi} = 1\,368,3 \text{ cm}^4 & J_{\eta} = J_y & C_{\xi\eta} = 0 \end{array}$$

2.1.2.11. 2.1.1.18. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.18. feladatnál

$$\begin{array}{lll} J_x = 1\,184,2 \text{ cm}^4 & J_y = 346,9 \text{ cm}^4 & C_{xy} = 0 \\ J_{\xi} = 634 \text{ cm}^4 & J_{\eta} = J_y & C_{\xi\eta} = 0 \end{array}$$

2.1.2.12. 2.1.1.20. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.20. feladatnál

$$\begin{array}{lll} J_x = 426,4 \text{ cm}^4 & J_y = 398,2 \text{ cm}^4 & C_{xy} = 0 \\ J_{\xi} = J_x & J_{\eta} = 382,3 \text{ cm}^4 & C_{\xi\eta} = 0 \end{array}$$

2.1.2.13. 2.1.1.21. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.21. feladatnál

$$\begin{array}{lll} J_x = 9\,156,4 \text{ cm}^4 & J_y = 5\,561,4 \text{ cm}^4 & C_{xy} = 0 \\ J_{\xi} = 876,5 \text{ cm}^4 & J_{\eta} = J_y & C_{\xi\eta} = 0 \end{array}$$

2.1.2.14. 2.1.1.24. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.24. feladatnál

$$\begin{aligned} J_x &= 2\,418,6 \text{ cm}^4 & J_y &= 156,16 \text{ cm}^4 & C_{xy} &= 0 \\ J_{\xi} &= 1\,016,6 \text{ cm}^4 & J_{\eta} &= J_y & C_{\xi\eta} &= 0 \end{aligned}$$

2.1.2.15. 2.1.1.25. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.25. feladatnál

$$\begin{aligned} J_x &= 213,5 \text{ cm}^4 & J_y &= J_x & C_{xy} &= 0 \\ J_{\xi} &= 189,15 \text{ cm}^4 & J_{\eta} &= J_x & C_{\xi\eta} &= 0 \end{aligned}$$

2.1.2.16. 2.1.1.26. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.26. feladatnál

$$\begin{aligned} J_x &= 108,05 \text{ cm}^4 & J_y &= 87,33 \text{ cm}^4 & C_{xy} &= 0 \\ J_{\xi} &= J_x & J_{\eta} &= 26,05 \text{ cm}^4 & C_{\xi\eta} &= 0 \end{aligned}$$

2.1.2.17. 2.1.1.27. ábrához; súlypontszámítás a 2.1.1.27. feladatnál

$$\begin{aligned} J_x &= 45,57 \text{ cm}^4 & J_y &= 198 \text{ cm}^4 & C_{xy} &= 0 \\ J_{\xi} &= 30,61 \text{ cm}^4 & J_{\eta} &= J_y & C_{\xi\eta} &= 0 \end{aligned}$$

2.1.2.18. 2.1.1.12 ábrához

$$\begin{aligned} \alpha &= 90^\circ - 8,7^\circ = 81,3^\circ & I_1 &= 173\,525 \text{ cm}^4 \\ I_2 &= 29\,651 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

2.1.2.19. 2.1.1.13. ábrához

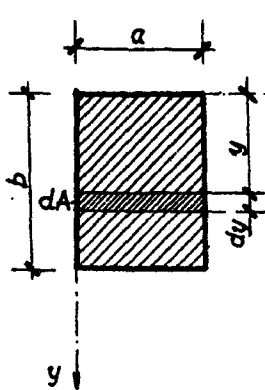
$$\alpha = 125,78^\circ \quad I_1 = 502,38 \text{ cm}^4 \quad I_2 = 97,62 \text{ cm}^4$$

2.1.2.20. 2.1.1.16. ábrához

$$\alpha = 78,5^\circ \quad I_1 = 246,63 \text{ cm}^4 \quad I_2 = 39,15 \text{ cm}^4$$

2.1.2.21. Az M.2.1.2.21. ábra szerint

$$J_x = \int_A y^2 dA = a \int_0^b y^2 dy = \frac{ab^3}{3}$$



$$J_y = \int_A x^2 dA = b \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3 b}{3}$$

$$C_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^a \int_0^b xy dx dy = \frac{a^2 b^2}{4}$$

$$J_{\xi} = J_x - y_s^2 A = \frac{ab^3}{12}$$

$$J_{\eta} = J_y - x_s^2 A = \frac{a^3 b}{12}$$

M. 2.1.2.21. ábra

$$C_{\xi\eta} = J_{xy} - x_s y_s \cdot A = 0 \text{ a tengelyek fő tengelyek}$$

2.1.2.22. $dA = (1 - \frac{x}{a})m dx$

$$J_y = \int y^2 dA = m \int_0^a x^2 (1 - \frac{x}{a}) dx = m \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a} \right]_0^a = \frac{ma^3}{12}$$

$$J_x = \frac{am^3}{12} \text{ mint előbb}$$

$$C_{xy} = \int_0^a \int_0^{a - \frac{m}{a}x + m} xy dy dx = \int_0^a \frac{x}{2} \left(-\frac{m}{a}x + m \right)^2 dx =$$

$$= \int_0^a \left(\left(\frac{m}{a} \right)^2 \frac{x^3}{2} - \frac{m^2}{a} x^2 + \frac{m^2 x}{2} \right) dx = \frac{m^2 a^2}{8} - \frac{m^2 a^2}{3} + \frac{m^2 a^2}{4} = \frac{m^2 a^2}{24}$$

$$J_{\xi} = \frac{am^3}{36}$$

$$J_{\eta} = \frac{a^3 m}{36}$$

$$C_{\xi\eta} = -\frac{a^2 m^2}{72}$$

2.1.2.23. $J_x = \frac{am^3}{21};$

$$J_y = \frac{a^3 m}{5}$$

$$C_{xy} = \frac{a^2 m^2}{12}$$

$$J_{\xi} = \frac{37 \text{ am}^3}{2100}; \quad J_{\eta} = \frac{3 \text{ m}^3}{80}; \quad C_{\xi\eta} = \frac{2 \text{ m}^3}{120}$$

$$2.1.2.24. J_{\xi} = J_x = \left(d - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \frac{r^4}{4}$$

$$J_{\eta} = \left(18d + 0 \sin 2\alpha - \frac{32 \cdot \sin^2 \alpha}{\alpha} \right) \frac{r^4}{72}$$

$$2.1.2.25. J_x = 24,10 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 12,33 \text{ cm}^4$$

$$C_{xy} = 12,375 \text{ cm}^4$$

$$J_{\xi} = 8,46 \text{ cm}^4$$

$$J_{\eta} = 4,793 \text{ cm}^4$$

$$C_{\xi\eta} = 0,798 \text{ cm}^4$$

$$2.1.2.26. J_x = 11,01 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 3,52 \text{ cm}^4$$

$$C_{xy} = 0$$

$$J_{\xi} = J_x$$

$$J_{\eta} = 1,006 \text{ cm}^4$$

$$C_{\xi\eta} = 0$$

$$2.1.2.27. J_x = 2,01 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 32,98 \text{ cm}^4$$

$$C_{xy} = 0$$

$$J_{\xi} = 2,01 \text{ cm}^4$$

$$J_{\eta} = 31,852 \text{ cm}^4$$

$$C_{\xi\eta} = 0$$

$$2.1.2.28. J_x = J_y = \frac{R^4}{16} = 50,27 \text{ cm}^4$$

$$C_{xy} = \frac{R^4}{8} = 32 \text{ cm}^4$$

$$J_{\xi} = J_{\eta} = 14,03 \text{ cm}^4$$

$$C_{\xi\eta} = -4,21 \text{ cm}^4$$

2.2. A feszültségek meghatározása egyszerű igénybevétel esetén

2.2.1. A tiszta húzás és nyomás

2.2.1.1. A reakcióerő a nyomatéki egyenletből

$$M_B = -80,0 \cdot 5 \cdot 3,0 - 60 \cdot 4 \cdot 3,0 - 70 \cdot 3 + A \cdot 6 \cdot 3,0 = 0$$

$$A = 118,33 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iy} = +118,33 - 80,0 - 60,0 + S_{3-4} \sin 43^\circ = 0$$

$$S_{3-4} = + 30,56 \text{ kN} \quad \text{huzás}$$

a) A rudban a húzófeszültség

$$\sigma = \frac{30,56 \cdot 10^3}{\frac{16^2 \pi}{4}} = 152,8 \text{ N/mm}^2 < 160 \text{ N/mm}^2 = \sigma_e$$

A keresztmetszet megfelel

b) A rud megnyúlása

A rud hossza

$$S_{3-4} = \sqrt{3,0^2 + 3,0^2} = 4,251 \text{ m}$$

$$\Delta l_{3-4} = \frac{30,56 \cdot 10 \cdot 4,251 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{16^2 \pi}{4}} = 3,1 \text{ mm}$$

c) Az alaptest méretezése

A talajra működő erő

$$F = 118,33 + 1,2 \cdot a \cdot 2a \cdot 24 = 118,33 + 57,6 a^2$$

$$A = a2a = 2a^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{(118,33 + 57,6a^2)}{2a^2} \frac{10^3}{10^6} = \left(\frac{59,165}{a^2} + 28,8 \right) \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma = \sigma_e$$

$$10^{-3} \left(\frac{59,165}{a^2} + 28,8 \right) = 0,12$$

$$a^2 = 0,6487$$

$$a = 0,805 \text{ m}$$

felfelé kerekítve $a_{\text{alk}} = 0,90 \text{ m}$

Ellenőrzés

$$\sigma = \frac{118,33 \cdot 10^3 + 1,2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,9^2 \cdot 24 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,9^2} \frac{1}{10^6} = 0,102 \text{ N/mm}^2 < 0,12 \text{ N/mm}^2$$

$$a_{\text{alk}} = 0,9 \text{ m tehát megfelel}$$

2.2.1.2. Megoldás menete mint előbb

$$A = 45 \text{ kN}$$

$$S = 31,2 \text{ kN}$$

$$\text{a) } \sigma = 99,4 \text{ N/mm}^2 < 140 \text{ N/mm}^2 \quad \text{megfelel}$$

$$\text{b) } \Delta l = 2,36 \text{ mm}$$

$$\text{c) } a = 142 \text{ mm}$$

$$2.2.1.3. S_{A-C} = + 179,5 \text{ kN}$$

$$S_{B-C} = - 146,5 \text{ kN}$$

$$\text{a) } a = 33,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{AC} = \frac{179,5 \cdot 10^3}{33,5^2} = 159,94 < 160,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{b) } \sigma_{BC} = - 117,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta l_{B-C} = 2,56 \text{ mm}$$

$$2.2.1.4. \Delta l = l \cdot d \cdot \Delta t$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \sigma \frac{l}{E}$$

$$l \cdot d \cdot \Delta t = \sigma \frac{l}{E}$$

$$\sigma = E d \cdot \Delta t = 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 40 = 100,8 \text{ N/mm}^2$$

2.2.1.5. Abból az elgondolásból indulunk ki, hogy ha a jobboldali csuklót felszabadítjuk, a B pont elmozdulása F hatására egyenlő lesz ugyan-ezen pont elmozdulásával a csuklóban ható erő hatására.

$$e_B = \frac{F a}{EA} = \frac{B l}{EA} \rightarrow B = \frac{F a}{l} \quad \text{hasonlóan} \quad A = \frac{F b}{l}$$

A C pont elmozdulása

$$e_C = \frac{F \cdot a}{EA} - \frac{B \cdot a}{EA} = \frac{F a b}{EA \cdot l}$$

2.2.1.6. A geometriai viszonyokból kapjuk, hogy

$$\Delta l_c = 2 \Delta l_B \quad \text{ebből következik}$$

$$\frac{C l}{EA} = 2 \frac{B l}{EA}$$

$$C = 2 B$$

Nyomatéki egyenletbe behelyettesítve

$$\sum M_i^{(A)} = F \cdot 3a - C \cdot 2a - Ba = 0$$

$$AC + B = 3 F$$

$$C = 1,2 F; \quad B = 0,6 F$$

2.2.2. A tiszta nyírás

2.2.2.1. Az erő hatására a kapcsolat a satírozott felület elnyíródása miatt mehet tönkre. (2.2.2.1. ábra)

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{200,0 \cdot 10^3}{x \cdot 250} = \tau_e = 5,2 \text{ N/mm}^2$$

$$x = 153,8 \text{ mm}$$

$$x_{\text{alk}} = 160 \text{ mm}$$

Ellenőrzés

$$\tau = \frac{F}{A_{\text{alk}}} = \frac{200,0 \cdot 10^3}{160 \cdot 250} = 5 \text{ N/mm}^2 < 5,2 \text{ N/mm}^2 \quad \text{megfelel.}$$

$$2.2.2.2. \quad \sigma = \frac{F}{r^2 \pi} = \frac{200,0 \cdot 10^3}{45^2 \cdot 3,14} = 31,45 \text{ N/mm}^2 < 40 \text{ N/mm}^2 \quad \text{húzásra megfelel.}$$

Nyírás ellenőrzése az ① hengerpalást felületen.

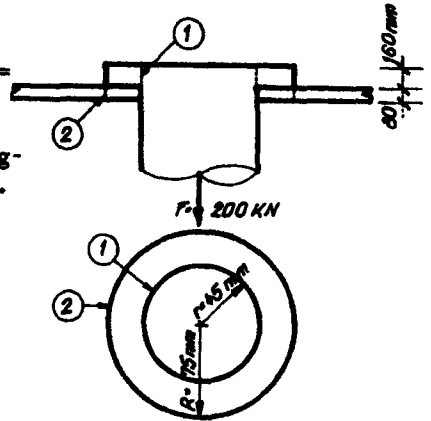
$$\tau = \frac{F}{2 \cdot r \cdot v_1 \pi} = \frac{200,0 \cdot 10^3}{2 \cdot 45 \cdot 160 \cdot 3,14} = 4,42 \text{ N/mm}^2 < 6 \text{ N/mm}^2 =$$

$$= \tau_e \text{ megfelel}$$

② hengerpalást felületen

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot R \cdot v_2^2} = \frac{200 \cdot 0,10^3}{2 \cdot 75 \cdot 80 \cdot 3,14} =$$

$$= 5,31 \text{ N/mm}^2 < 6 \text{ N/mm}^2 \text{ megfelel.}$$



2.2.2.3. a) $T = F \cdot \cos \alpha =$
 $= 50 \cdot 0,866 = 43,3 \text{ N}$

$$\frac{T}{120 \cdot x} = \tau_e$$

$$x = \frac{T}{120 \cdot \tau_e} =$$

$$= \frac{43,3 \cdot 10^3}{120 \cdot 0,8} = 451 \text{ mm}$$

ellenőrzés

$$\tau = \frac{43,3 \cdot 10^3}{120 \cdot 451} = 0,8 = \tau_e$$

b) $\sigma = \frac{T}{A} = \frac{43,3 \cdot 10^3}{120 \cdot 40} = 9,02 < \sigma_e = 10 \text{ N/mm}^2 \text{ megfelel.}$

2.2.2.4. A nyíróerők felvételére alkalmas szögecszám

$$\tau = \frac{150 \cdot 10^3}{n \cdot \frac{20^3 \cdot 3,14}{4}} = 110 \text{ N/mm}^2 = \tau_e$$

$$n = 4,33$$

Palástnyomás szempontjából szükséges szegecszám

$$\sigma_p = \frac{150 \cdot 10^3}{n \cdot 20 \cdot 12} = 240 \text{ N/mm}^2 = \sigma_e$$

$$n = 2,61$$

M. 2.2.2.2. ábra

Alkalmazzuk a két szükséges szögecs szám közül a nagyobbikat felfelé kerekítve.

$$n_{\text{alk}} = 5.$$

Ellenőrzés

$$F_{I\tau_e} = 110 \cdot \frac{20 \cdot 3,14}{4} = 34,54 \text{ kN}$$

$$F_{I,pe} = 240 \cdot 20 \cdot 120 = 57\,600 \text{ N} = 57,6 \text{ kN}$$

a kisebbik

$$F_e = 34,54 \text{ kN}$$

Egy szögecsre jutó terhelés

$$F = \frac{150,0 \text{ kN}}{5} = 30,0 \text{ kN} < 34,54 \text{ kN} = F_e$$

A kapcsolat megfelelő.

2.2.2.5. Egy szegecsre jutó terhelés

$$F_I = \frac{120 \cdot 10^3}{5} = 24 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Az elnyíródás megakadályozására szükséges szögecsorsó átmérő

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{24 \cdot 10^3}{2 \cdot \frac{3,14 \cdot d^2}{4}} = 90 \text{ N/mm}^2 = \tau_e$$

$$d = 13 \text{ mm.}$$

A palástnyomás szempontjából szükséges átmérő

$$\sigma_p = \frac{F}{\pi \cdot d} = \frac{24 \cdot 10^3}{12 \cdot d} = 380 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{pe}$$

$$d = 5,3 \text{ mm.}$$

Alkalmazzuk a két átmérő közül a nagyobbikat felfelé kerekítve

$$d_{\text{alk}} = 14 \text{ mm.}$$

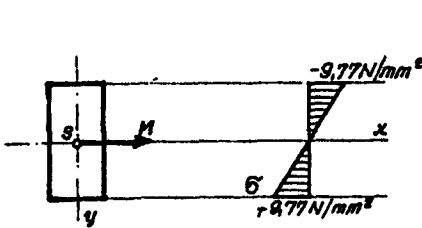
Ellenőrzés

$$\tau = \frac{F}{2 \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{24 \cdot 10^3}{2 \frac{3,14 \cdot 14^2}{4}} = 78 \text{ N/mm}^2 < 90 \text{ N/mm}^2 \quad \text{megfelel.}$$

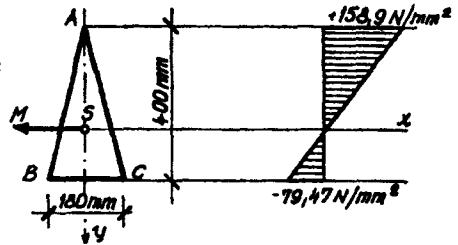
$$\sigma_p = \frac{F}{v_1 d} = \frac{24 \cdot 10^3}{12 \cdot 14} = 143 \text{ N/mm}^2 < 380 \text{ N/mm}^2 \quad \text{megfelel.}$$

2.2.3. Az egyszerű egyenes hajlítás

$$2.2.3.1. \quad J_x = \frac{ab^3}{12} = \frac{150 \cdot 300^3}{12} = 3,375 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$



M.2.2.3.1. ábra



M.2.2.3.2. ábra

$$K = \frac{J_x}{y} = \frac{ab^3}{12} \cdot \frac{2}{b} = \frac{ab^2}{6} = \frac{150 \cdot 300^2}{6} = 2,25 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\sigma = \frac{M}{K} = \frac{220 \cdot 10^6}{2,25 \cdot 10^6} = 97,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\rho = \frac{EJ}{M} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 3,375 \cdot 10^8}{220 \cdot 10^6} = 322 \cdot 10^3 \text{ mm} = 322 \text{ mm}$$

$$2.2.3.2. \quad J_x = \frac{a \cdot 400^3}{36} = 1,777 \cdot 10^6 a$$

$$\sigma = \frac{180 \cdot 10^6}{1,777 \cdot 10^6 \cdot a} \cdot \frac{2}{3} \cdot 400 = 160 \text{ N/mm}^2 = \sigma_e$$

$$a = 170 \text{ mm.}$$

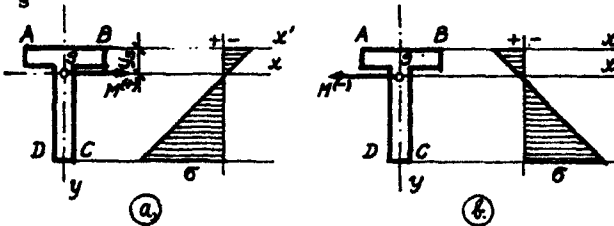
Ellenőrzés

$$J_x = 1,777 \cdot 10^6 \cdot 170 = 3,02 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_A = \frac{180 \cdot 10^6}{3,02 \cdot 10^8} \cdot \frac{2}{3} \cdot 400 = 158,9 < 160 \text{ N/mm}^2 \text{ megfelel.}$$

$$\sigma_B = \frac{180 \cdot 10^6}{3,02 \cdot 10^8} \cdot \frac{400}{3} = 79,47 < 160 \text{ N/mm}^2 \text{ megfelel.}$$

$$2.2.3.3. \quad Y_s = 106,5 \text{ mm}$$



M 2.2.3.3. ábra

$$J_x = 1,98 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$Y = 300 - 106,5 = 193,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_e = \frac{M}{J_x} y$$

$$M_e = \frac{\sigma_e}{y} J_x = \frac{180}{193,5} \cdot 1,98 \cdot 10^8 = 184 \cdot 10^6 \text{ Nm} = 184 \text{ kNm}$$

A keresztmetszetre megengedett érték kerekítve

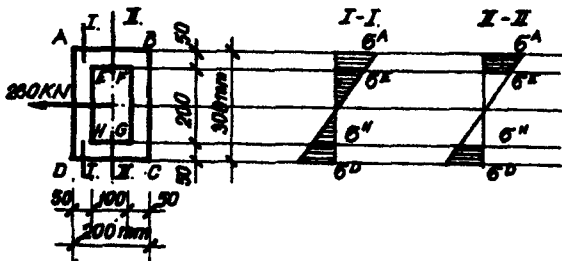
$$M_e = \pm 180 \text{ kNm}$$

Ellenőrzés

$$\sigma^A = \sigma^B = \frac{180 \cdot 10^6}{1,98 \cdot 10^8} \cdot 106,5 = 96,8 \text{ N/mm}^2 < 180 \text{ N/mm}^2 = \sigma_e$$

$$\sigma^C = \sigma^D = \frac{180 \cdot 10^6}{1,98 \cdot 10^8} \cdot 193,5 = 175,9 \text{ N/mm}^2 < 180 \text{ N/mm}^2 \text{ megfelel}$$

$$2.2.3.4. \sigma^A = \sigma^B = \sigma^C = \sigma^D = 109,6 \text{ N/mm}^2$$



M. 2.2.3.4. ábra

$$\sigma^E = \sigma^F = \sigma^G = \sigma^H = 73,05 \text{ N/mm}^2$$

$$\dot{\varphi} = 28,75 \text{ m}$$

2.2.4. A tiszta csavarás

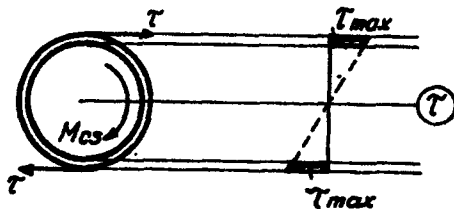
$$2.2.4.1. J_o = \frac{R^4 \pi}{2} - \frac{r^4 \pi}{2} = \frac{10^4 \pi}{2} (9^4 - 8^4) = 3,87 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{J_o} r = \frac{35 \cdot 10^6}{3,87 \cdot 10^7} \cdot 90 = 81,4 \text{ N/mm}^2 < 135 \text{ N/mm}^2 \text{ megfelel.}$$

$$2.2.4.2. M_{cs} = 3000 \cdot 4 = 12\,000 \text{ mN}$$

$$J_o = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4 \pi}{2} = \frac{d^4 \pi}{32}$$

$$K_o = \frac{J_o}{d^3} = \frac{d^3 \pi}{16}$$



M. 2.2.4.1. ábra

$$K_o \text{ szükséges} = \frac{M_{cs}}{\tau_e} = \frac{12\,000 \cdot 10^3}{150} = 8,0 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$\frac{d^3 \pi}{16} = 8,0 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$d = 74,4 \text{ mm}$$

$$d_{alk} = 80 \text{ mm}$$

$$K = \frac{d^3 \pi}{16} = \frac{80^3 \cdot 3,14}{16} = 1,00 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{12 \cdot 10^6}{1,00 \cdot 10^5} = 120 \text{ N/mm}^2 < 150 \text{ N/mm}^2 = \tau_e \text{ megfelel}$$

2.3. A feszültségek meghatározása összetett igénybevétel esetén

2.3.1. A ferde hajlítás

2.3.1.1. A legnagyobb feszültséget a legnagyobb igénybevétel helyén kapjuk. Ehhez szükség van az igénybevételi ábrákra.

$$x = \frac{74,375}{40,0} = 1,8594 \text{ m}$$

A ferde hajlítás képletébe szükséges mennyiségek számítással, de szerkesztéssel is meghatározható. A szerkesztés menete y tengelyre felmérjük J_x -t majd folytatólag J_y -t, C_{xy} -t az J_x és J_y szakaszok találkozási pontjától (most $C_{xy} = 0$). Ez a T pont a tehetetlenségi főpont.

Az $J_x + J_y$ szakasz felezőpontjából (K) $\frac{J_x + J_y}{2}$ sugaru kört rajzolunk. Ahol a hajlítás tengelye metszi a kört, ott kapjuk az A pontot. AT szakaszt a körig meghosszabbítva kapjuk a B pontot, amelyet "0" ponttal összekötve kapjuk az "u" konjugált tengely irányát.

A BK szakaszra T-ből állított merőleges talppontja C. C és a B távolsága

$$\overline{CB} = J_u \quad \text{A szerkesztés a 91. oldalon van.}$$

v - az ábrán kiszervezhető
 M_u is mérhető az u tengelyen.

2.3.1.1. a) Ferde hajlítás módszerével

A semleges tengely, az "u" tengely helyét

$\cotg \omega = \frac{C_{\xi\eta}}{J_{\xi}}$ képlettel határozhatjuk meg. ξ a hajlítás síkja.

$C_{\xi\eta}$ -t és J_{ξ} -t az J_x és J_y -ből határozhatjuk meg.

$$J_x = \frac{150 \cdot 300^3}{12} = 3,37 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{300 \cdot 150^3}{12} = 0,84 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha =$$

$$= 2,105 \cdot 10^8 - 1,265 \cdot 0,766 \cdot 10^8 =$$

$$= 1,136 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$C_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha =$$

$$= 1,265 \cdot 10^8 \cdot 0,6428 = 0,813 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

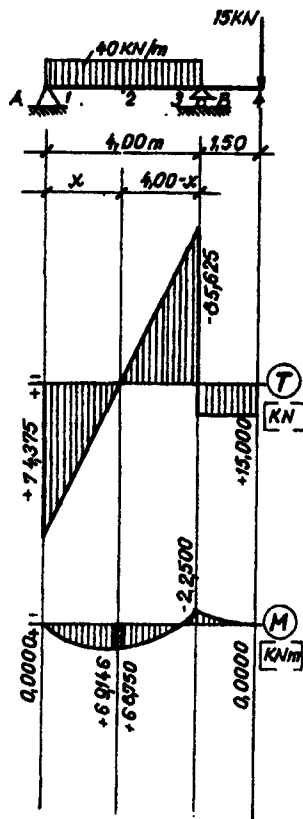
$$\cotg \omega = \frac{0,813 \cdot 10^8}{1,136 \cdot 10^8} = 0,7156$$

$$\omega = 54,4^\circ$$

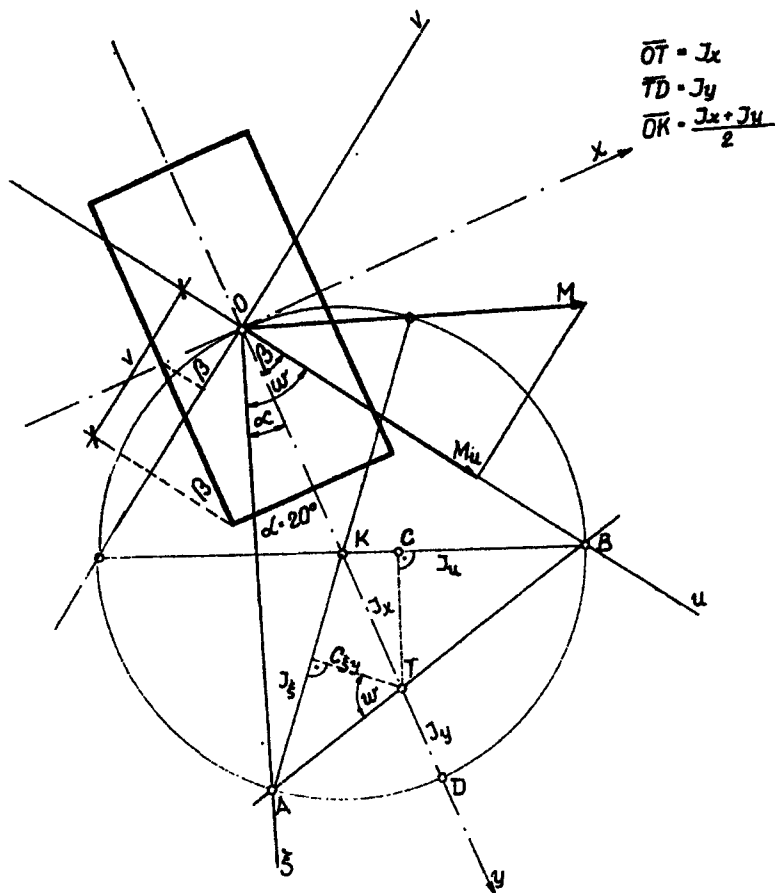
Az "u" és "x" tengely által bezárt szög

$$\beta = \omega - \alpha = 54,4 - 20 = 34,4^\circ$$

így



M. 2.3.1.1/1. ábra



M. 2.3.1.1./2. ábra

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\beta = 2,105 \cdot 10^8 - 1,265 \cdot 10^8 \cdot 0,3616 = 1,65 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$v = \frac{b}{2} \sin \beta + \frac{a}{2} \cos \beta = \frac{300}{2} \cdot 0,5650 + \frac{150}{2} \cdot 0,8251 =$$

$$v = 84,75 + 61,88 = 146,6 \text{ mm.}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot \cos(90^\circ - \omega)}{J_u} \cdot v = \frac{69,14 \cdot 10^6 \cos(90^\circ - 54,4^\circ)}{165 \cdot 10^8}$$

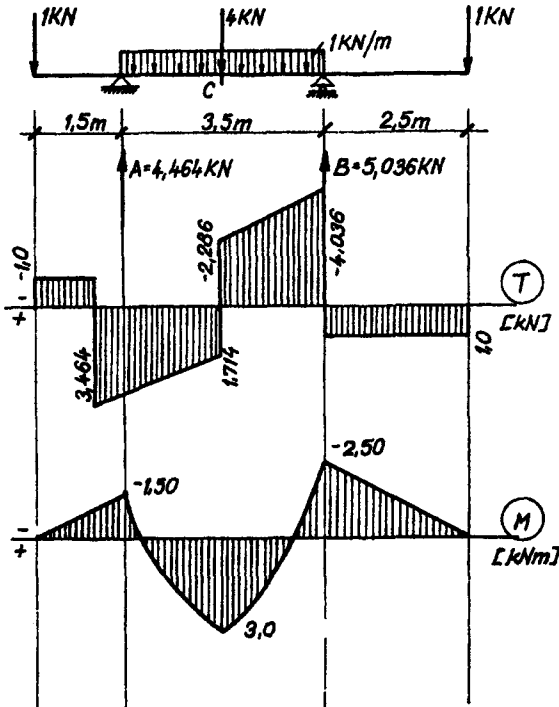
$$146,6 = 49,95 \text{ N/mm}^2$$

b) Két egyenes hajlítás egymásra halmozásával.

$$\sigma = \frac{M \cdot \cos \alpha}{J_x} y + \frac{M \cdot \sin \alpha}{J_y} \cdot x = \frac{69,14 \cdot 10^6 \cdot \cos 20^\circ \cdot 150}{3,37 \cdot 10^8} +$$

$$+ \frac{69,14 \cdot 10^6 \cdot \sin 20^\circ}{0,84 \cdot 10^8} \cdot 75 = 28,92 + 21,11 = 50,03 \text{ N/mm}^2$$

2.3.1.2. Első lépésként meghatározzuk az igénybevételi ábrákat



M. 2.3.1.2. /1. ábra

Majd a keresztmetszeti jellemzőket

$$J_x = \frac{20 \cdot 30^3}{36} = 4450 \text{ cm}^4 = J_1$$

$$J_y = 2 \left[\frac{10^3 \cdot 20}{36} + \left(\frac{10}{3} \right)^2 \cdot \frac{10 \cdot 20}{2} \right] = 2 \cdot \frac{10^3 \cdot 20}{12} = 3300 \text{ cm}^4 = J_2$$

A nyomatékvektornak a főirányokba eső vetületei

$$M_1 = M \cdot \cos 15^\circ = 3,00 \cdot 10^6 \cdot 0,9659 = 2,898 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

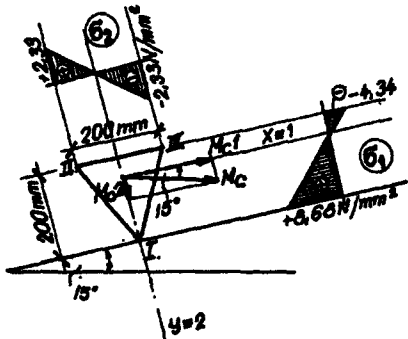
$$M_2 = M \cdot \sin 15^\circ = 3,00 \cdot 10^6 \cdot 0,2588 = 0,7764 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

illetve negatív nyomatékokra a támasz feletti keresztmetszetben

$$M_1 = 2,5 \cdot 0,9659 = 2,415 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_2 = 2,5 \cdot 0,2588 = 0,647 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Feszültségek egyenes hajlításból mezőben M_1 -ből



$$\sigma_I = \frac{M_1}{J_x} \cdot y = \frac{2,898 \cdot 10^6}{4450 \cdot 10^4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 200 =$$

$$= +8,68 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{M_1}{J_x} \cdot y =$$

$$- \frac{2,898 \cdot 10^6}{4450 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 200 = -4,34 \text{ N/mm}^2$$

M. 2.3.1.2./2. ábra

M_2 -ből

$$\sigma_{II} = \frac{M_2}{J_y} \cdot x = \frac{0,7764 \cdot 10^6}{3330 \cdot 10^4} \cdot 100 = +2,33 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{III} = -\sigma_{II} = -2,33 \text{ N/mm}^2$$

Összesítve:

$$\sigma_I = 8,68 \quad = +8,68 \text{ N/mm}^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_{II} &= -4,34 + 2,33 &= -2,01 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{III} &= -4,34 - 2,33 &= -6,67 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

A feszültségek egyenes hajlításból a támasz felett.

M_1 -ből

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \frac{M_1}{J_x} \cdot y = \frac{2,415 \cdot 10^6}{4\,450 \cdot 10^4} \frac{2}{3} 200 = \\ &= -7,24 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{M_1}{J_x} \cdot y =$$

$$= \frac{2,415 \cdot 10^6}{4\,450 \cdot 10^4} \frac{1}{3} 200 = +3,62 \text{ N/mm}^2$$

M_2 -ből

$$\sigma_{II} = \frac{M_2}{J_y} \cdot x = -\frac{0,647 \cdot 10^6}{3\,330 \cdot 10^4} \cdot 100 = -1,94 \text{ N/mm}^2$$

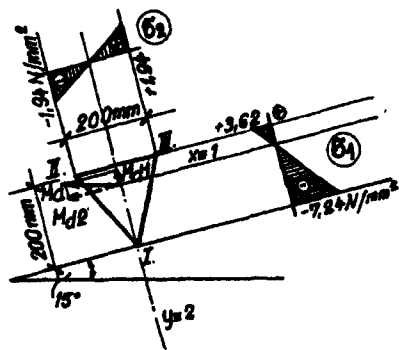
$$\sigma_{III} = \frac{M_2}{J_y} \cdot x = +\frac{0,647 \cdot 10^6}{3\,330 \cdot 10^4} \cdot 100 = 1,94 \text{ N/mm}^2$$

összesítve:

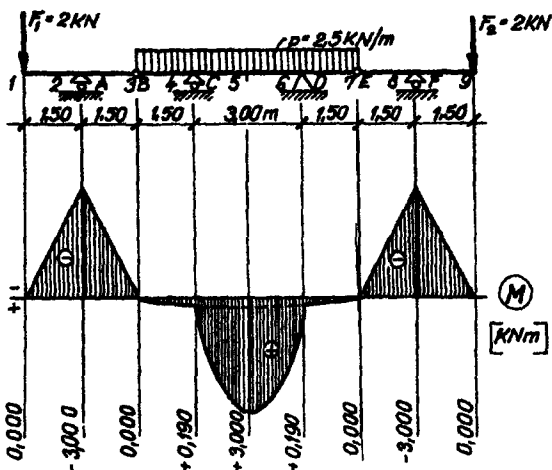
$$\begin{aligned}\sigma_{I.} &= -7,24 \text{ N/mm}^2 &= \frac{-7,24 \text{ N/mm}^2}{10 \text{ N/mm}^2} \\ \sigma_{II.} &= +3,62 - 1,94 &= +1,68 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{III.} &= +3,62 + 1,94 &= +5,56 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

A maximális húzófeszültség $8,68 \text{ N/mm}^2$ a C keresztmetszetben az I.jelű élben keletkezik. A maximális nyomófeszültség a B keresztmetszetben az I. jelű élben keletkezik.

2.3.1.3. $A = F = 4 \text{ kN}$
 $C = D = 5,5 \text{ kN}$



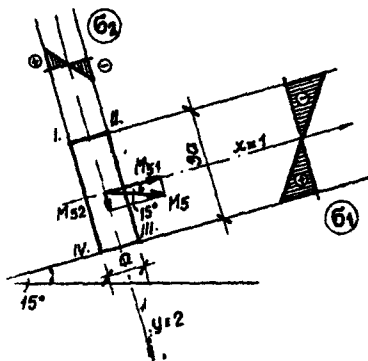
M. 2.3.1.2./3. ábra



M. 2.3.1.3. /1. ábra

Igénybevételi ábra látható az M. 2.3.1.3. /1. ábrán

A hajlításból származó feszültségek megoszlása az M. 2.3.1.3. /2. ábrán látható



M. 2.3.1.3. /2. ábra

$|\sigma_{II}| = \sigma_{IV}$ elegendő csak egy helyen számolni, ahol a feszültségek összegződnek.

$$\sigma_{IV} = \frac{M \cdot \cos \alpha}{J_x} y + \frac{M \cdot \sin \alpha}{J_y} x = \sigma_e$$

$$205 = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 0,9659}{(3a)^3 \cdot a} \frac{3}{2} a +$$

$$+ \frac{3,0 \cdot 10^6 \cdot 0,2588}{\frac{a \cdot 3a}{12}} \frac{a}{2}$$

$$205a^3 = 1,932 \cdot 10^6 + 1,5528 \cdot 10^6 = 3,4849 \cdot 10^6$$

$$a^3 = 16\,995 \text{ mm}^3, a = 25,7 \text{ mm}$$

$$a_{alk} = 30 \text{ mm.}$$

Ellenőrzés:

$$\sigma_{IV} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 0,9659}{90^3 \cdot 30} \cdot 45 + \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 0,2588}{30^3 \cdot 90} = 71,55 + 57,51 =$$

$$= 129,06 \text{ N/mm}^2 < 205 \text{ N/mm}^2 \text{ megfelel.}$$

2.3.1.4. Reakció

$$A = 6,3 \text{ kN}$$

$$M_{\max}^+ = 2,60 \text{ kNm}$$

$$B = 3,7 \text{ kN}$$

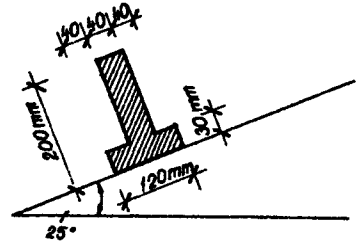
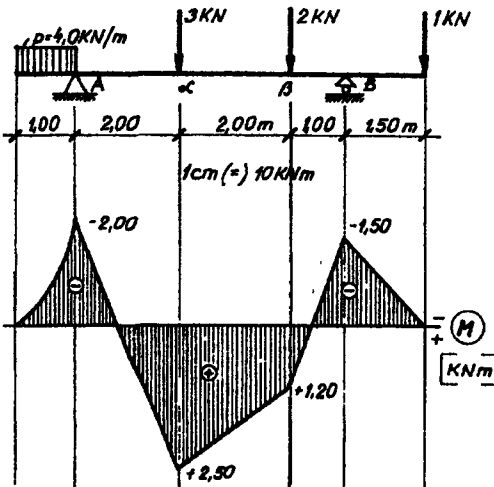
$$M_{\max}^- = 2,0 \text{ kNm}$$

$$Y_s = 8,04 \text{ cm}$$

$$\alpha = 25^\circ$$

$$J_x = 4020 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 522,6 \text{ cm}^4$$



M.2.3.1.4/1. ábra

α keresztmetszetben

$$\sigma_A = \frac{M_{\max}^+ \cdot \cos \alpha}{J_x} y + \frac{M_{\max}^+ \cdot \sin \alpha}{J_y} \cdot x$$

$$\sigma_A = \frac{2,6 \cdot 10^6 \cdot 0,9063}{4020 \cdot 10^4} 80,4 + \frac{2,6 \cdot 10^6 \cdot 0,4226}{522,6 \cdot 10^4} 60,0 = 4,71 +$$

$$+ 12,61 = 17,32 \text{ N/mm}^2$$

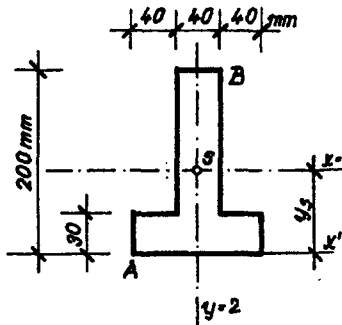
$$\sigma_B = - \frac{2,6 \cdot 10^6 \cdot 0,9063}{4020 \cdot 10^4} \cdot 119,6 - \frac{2,6 \cdot 10^6 \cdot 0,4226}{522,6 \cdot 10^4} 20 =$$

$$= - 7,01 - 4,20 = -11,21 \text{ N/mm}^2$$

A keresztmetszetben

$$\sigma_A = - \frac{2,0 \cdot 10^6 \cdot 0,9063}{4020 \cdot 10^4} 80,4 - \frac{2,0 \cdot 10^6 \cdot 0,4226}{522,6 \cdot 10^4} 60,0 =$$

$$= - 3,61 - 9,7 = - 13,31 \text{ N/mm}^2$$



$$\sigma_B = + \frac{2,0 \cdot 10^6 \cdot 0,9063}{4020 \cdot 10^4} 119,6 +$$

$$+ \frac{2,0 \cdot 10^6 \cdot 0,4226}{522,6 \cdot 10^4} \cdot 20 = 5,39 + 3,23 =$$

$$= + 8,62 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\max}^+ = + 17,32 \text{ N/mm}^2 \text{ "d" keresztmetszetben,}$$

M. 2.3.1.4./2. ábra

$$\sigma_{\max}^- = - 13,31 \text{ N/mm}^2 \text{ "A" keresztmetszetben.}$$

$$2.3.1.5. J_x = 2323 \text{ cm}^4$$

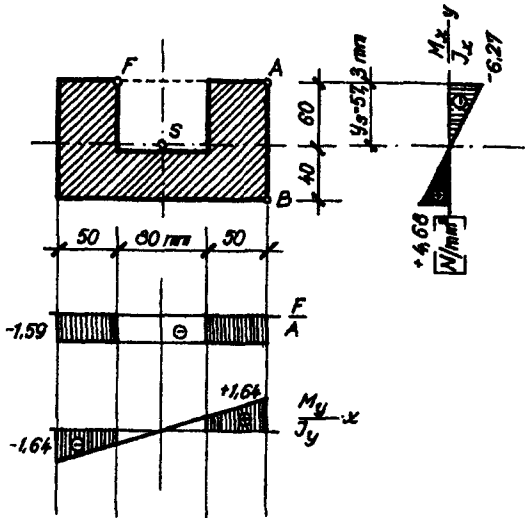
$$J_y = 368 \text{ cm}^4$$

$$C_{xy} = + 714 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = \pm 154,3 \text{ N/mm}^2$$

2.3.2. A külpontos huzás és nyomás

2.3.2.1. Súlypont helye és az inerciák



M. 2.3.2.1. ábra

$$y'_s = 57,3 \text{ mm}$$

$$J_y = 4,60 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_x = 1,098 \cdot 10^7 \text{ mm}^4.$$

Feszültség az "A" pontban

$$\sigma_A = -\frac{F}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_A + \frac{M_y}{J_y} x_A = -\frac{21 \cdot 10^3}{13 \cdot 200} - \frac{21 \cdot 10^3 \cdot 57,3^2}{1,098 \cdot 10^7} +$$

$$+ \frac{21 \cdot 10^3 \cdot 40}{4,6 \cdot 10^7} 90 = -1,59 - 6,27 + 1,64 = -6,22 \text{ N/mm}^2$$

Feszültség a "B" pontban

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_B - \frac{M_y}{J_y} x_B = -1,59 - \frac{21 \cdot 10^3 \cdot 57,3}{1,098 \cdot 10^7} \cdot 4,27 - 1,64 =$$

$$= -1,59 + 4,68 + 1,64 = +4,73 \text{ N/mm}^2$$

Az egyéb pontok feszültségeit a feszültségi testek ordinátáinak összegezésével állíthatjuk elő.

$$2.3.2.2. \quad \sigma_{I.} = -71,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{II.} = \sigma_{III.} = 23,8 \text{ N/mm}^2$$

$$2.3.2.3. \quad \sigma' = \sigma'' = -1,384 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{III.} = \sigma_{IV.} = +0,692 \text{ N/mm}^2$$

$$2.3.2.4. \quad Y_g = 463,5 \text{ mm} \quad F = 5,9 \cdot 10^5 \text{ mm}^2$$

Megoszló teher nélkül

$$\sigma_{I.} = +0,69 \text{ N/mm}^2; \quad \sigma_{II.} = -3,63 \text{ N/mm}^2.$$

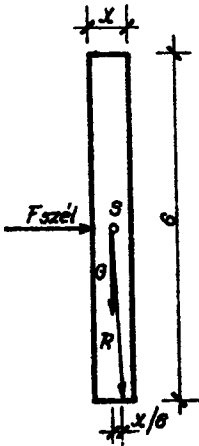
Megoszló teherrel

$$\sigma_{I.} = -1,68 \text{ N/mm}^2; \quad \sigma_{II.} = +0,65 \text{ N/mm}^2.$$

2.3.2.5. A síkban

$$\sigma_1 = -2,62 \text{ N/mm}^2; \quad \sigma_2 = -1,16 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_3 = +0,90 \text{ N/mm}^2; \quad \sigma_4 = -0,56 \text{ N/mm}^2.$$



2.3.2.6. Az alsó keresztmetszetben akkor nem lép fel húzás, ha az eredő az alap szélességének harmadán megy keresztül

$$X = 0,7 \text{ m}$$

$$\sigma_{\max} = 0,264 \text{ N/mm}^2.$$

$$2.3.2.7. \quad \sigma_{\max} = -1,67 \text{ N/mm}^2$$

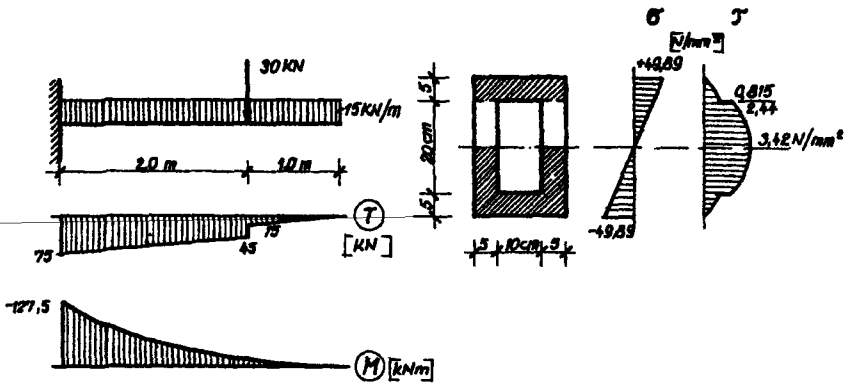
$$\sigma' = -1,25 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma'' = +0,48 \text{ N/mm}^2.$$

2.3.3. A hajlított és nyírt tartó

M. 2.3.2.6. ábra

$$2.5.3.1. \quad J_x = \frac{200 \cdot 300^3}{12} - \frac{100 \cdot 200^3}{12} = 3,833 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$



M.2.3.3.1. ábra

$$S_x^* \max = 1,75 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$S_x^* \text{ felül} = 1,250 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_z = \frac{M}{J_x} y = \frac{127,5 \cdot 10^6}{3,833 \cdot 10^8} \cdot 150 = 49,89 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot S_x^*}{J_x \cdot s} = \frac{75 \cdot 10^3 \cdot 1,75 \cdot 10^6}{3,833 \cdot 10^8 \cdot 100} = 3,42 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \frac{75 \cdot 10^3 \cdot 1,25 \cdot 10^6}{3,833 \cdot 10^8 \cdot 100} = 2,44 \text{ N/mm}^2$$

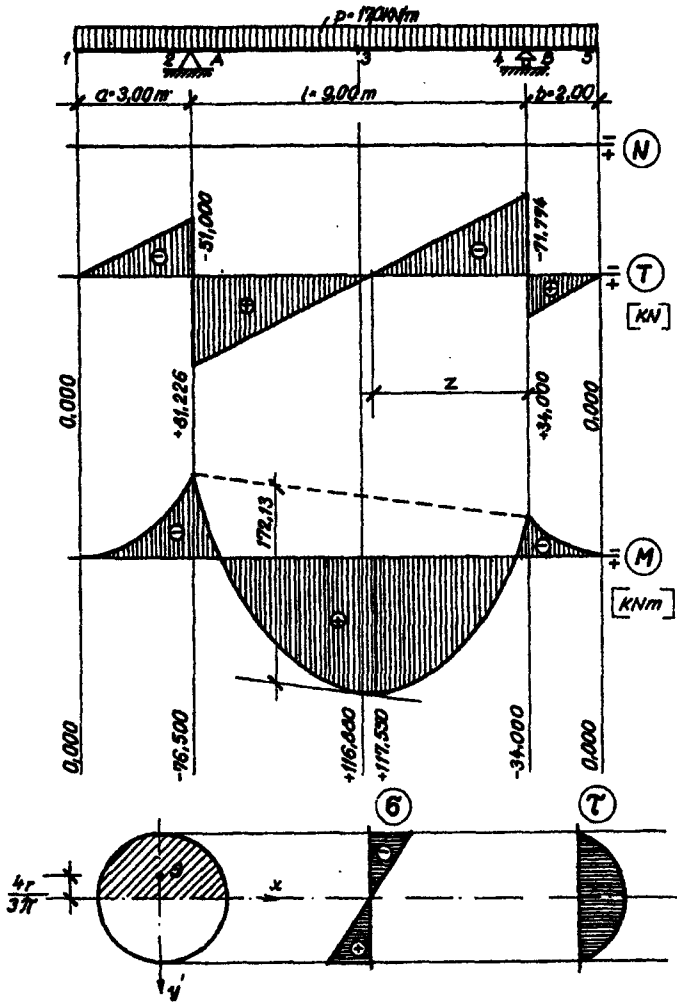
$$\tau = \frac{75 \cdot 10^3 \cdot 1,25 \cdot 10^6}{3,833 \cdot 10^8 \cdot 300} = 0,815 \text{ N/mm}^2$$

2.3.3.2. $J_x = \frac{r^2 \pi}{4}$

$$\sigma_e = \frac{M}{J_x} \cdot r = \frac{M}{\frac{r^4 \pi}{4}} r$$

$$r^3 = \frac{4M}{\sigma_e \pi} = \frac{4 \cdot 117,55 \cdot 10^6}{15 \cdot 3,14}$$

Az ábra a 100. oldalon.



M. 2. 3. 3. 2. ábra

$$r = 216 \text{ mm}$$

$$r_{\text{alk}} = 220 \text{ mm.}$$

Ellenőrzés normál feszültségre

$$\sigma = \frac{4M}{r^3 \pi} = \frac{4 \cdot 117,55 \cdot 10^6}{10,65 \cdot 10^6 \cdot 3,14} = 14,06 \text{ N/mm}^2 < 15 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \bar{\sigma}_{\text{te}}$$

$$\tau_{zy}^c = -\tau_{yz}^c = -\tau_{zy}^c = -\frac{2.300}{250} = -0,892 \text{ N/mm}^2$$

$$S_x^c = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 250 \cdot 200 \cdot \frac{1}{3} \cdot 200 = 1,111 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

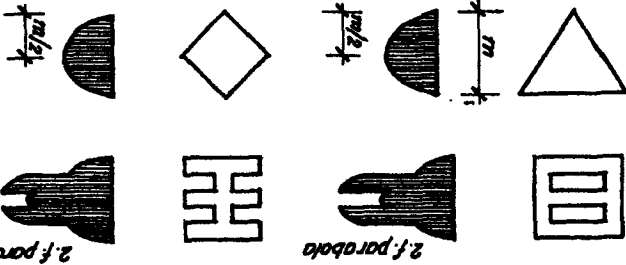
$$\tau_{zy}^c = T \cdot S_x^c = \frac{1,875 \cdot 10^8 \cdot 250 \cdot \frac{2}{3}}{60 \cdot 10^3 \cdot 1,111 \cdot 10^6} = 2,14 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{zy}^A = \tau_{zy}^B = 0$$

$$\sigma_C^2 = 0$$

2.3.3.3.4. $\sigma_A^z = \sigma_B^z = \frac{M}{I} \cdot y = \frac{160 \cdot 10^6}{1,875 \cdot 10^8} \cdot 100 = -85,3 \text{ N/mm}^2$

M. 2.3.3.3. ábra



2.3.3.3.

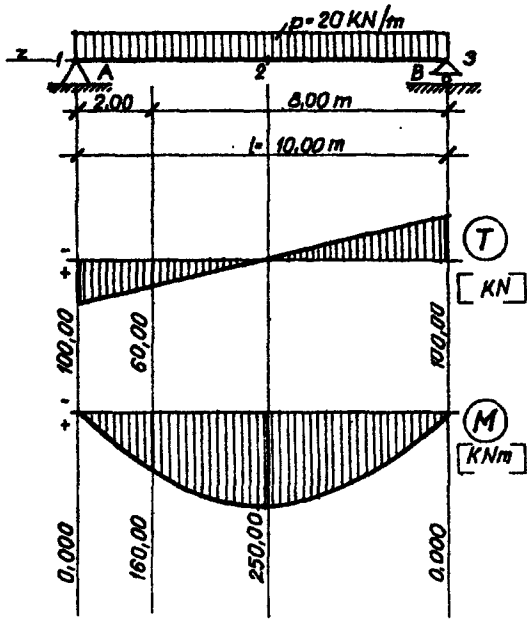
$$\tau = 0,713 \text{ N/mm}^2 < 1,5 \text{ N/mm}^2 = \tau_{\text{megfelel.}}$$

$$= 0,713 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \frac{I_x \cdot s}{T \cdot S_x} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r}{T \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r}{T \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{220 \cdot 3,14}{81,266 \cdot 10^3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

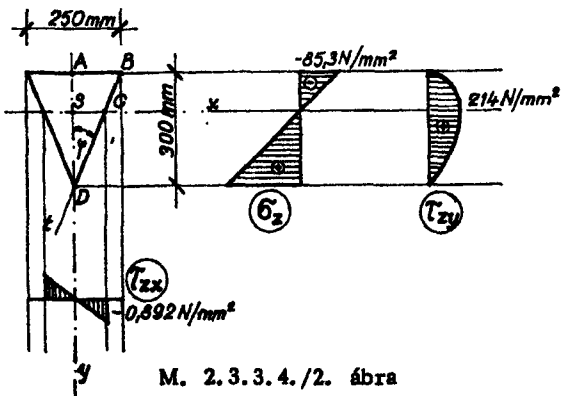
$$S_x^c = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot r^3 = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot r^3$$

Ellenőrzés nyírára



M. 2.3.3.4./1. ábra

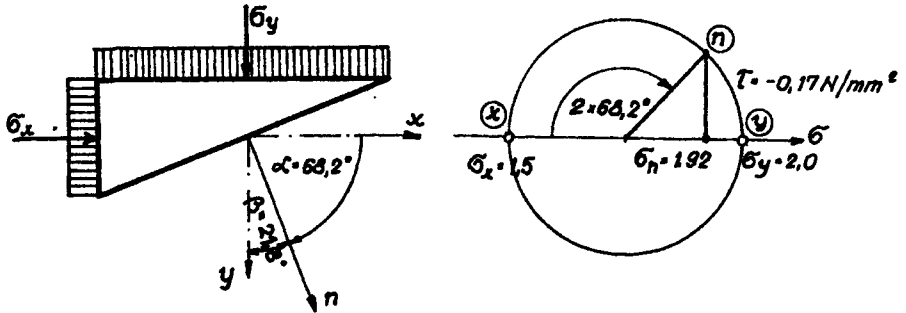
$$\tau_{zt}^C = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{2,14^2 + 0,892^2} = 2,31 \text{ N/mm}^2$$



M. 2.3.3.4./2. ábra

2.4. A főfeszültségek meghatározása

2.4.1. A síkbeli feszültségállapot



M. 2. 4. 1. 1. ábra

$$2.4.1.1. \quad \sigma_x = \frac{2 \cdot 1,5}{2 \cdot 1,0} = 1,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{5 \cdot 2,0}{5 \cdot 1,0} = 2,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5} = 0,4 \quad \beta = 21,8^\circ \quad \alpha = 90^\circ - \beta = 68,2^\circ$$

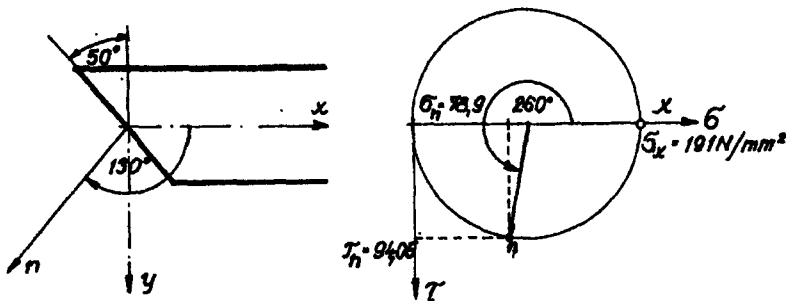
$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha = \frac{1,5 + 2,0}{2} + \\ &+ \frac{1,5 - 2,0}{2} \cdot 0,712 = 1,92 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1,5 - 2,0}{2} \cdot$$

$$\cdot (-0,6896) = -0,17 \text{ N/mm}^2$$

$$2.4.1.2. \quad \sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{60 \cdot 10^3}{\frac{20^2 \pi}{4}} = 191,0 \text{ N/mm}^2 \quad \alpha = 130^\circ$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha = \frac{191}{2}(1 - 0,1736) = +78,92 \text{ N/mm}^2$$



M. 2.4.1.2. ábra

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\alpha = -\frac{191}{2} (-0,9848) = +94,05 \text{ N/mm}^2.$$

2.4.1.3. A megoldás részletei 2,3,3.4. pontnál

A pont tiszta nyomás állapotában

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= \sigma_z = -85,36 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

B pont megegyezik A ponttal

S pont

$$\sigma_z = 0$$

tiszta nyírás síkja függőleges

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau = 2,14 \text{ N/mm}^2.$$

C pont

$$\sigma_z = 0$$

tiszta nyírás, a feszültségi állapot síkja a t tengellyel meghatározott.

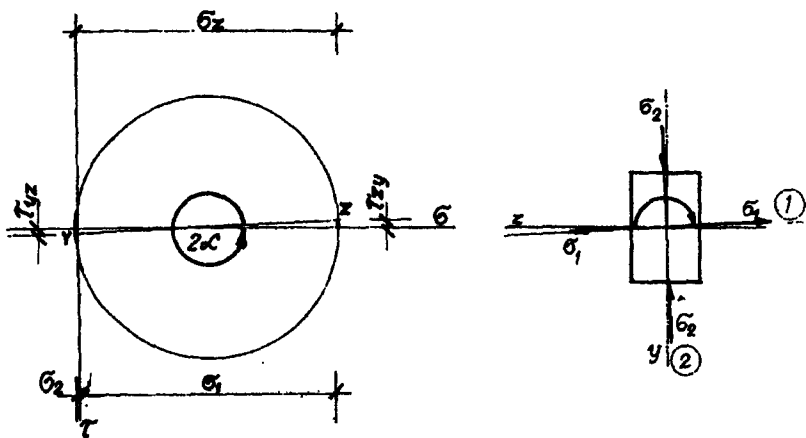
$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau = 2,31 \text{ N/mm}^2.$$

2.4.1.4. $N_k = -30 \text{ kN}$

$T_k = -60 \text{ kN}$

$M_k = -360 \text{ kNm}$

$$\sigma_z^{\text{hajl}} = +67,5 \text{ N/mm}^2$$

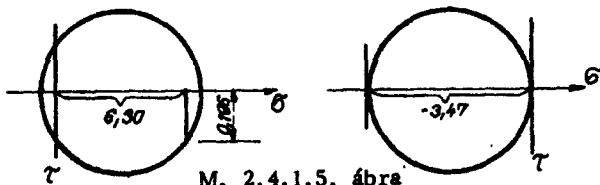


M. 2.4.1.4. ábra

$$\begin{aligned} \sigma_{zy} &= -0,75 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_z &= +66,75 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{zy} &= -1,68 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_1 &= 66,78 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 &= -0,4 \text{ N/mm}^2 \\ \alpha &= 179,27^\circ \end{aligned}$$

2.4.1.5. M_{\max}^- helyen

$$\tau_{zt} = 0,219 \text{ N/mm}^2$$



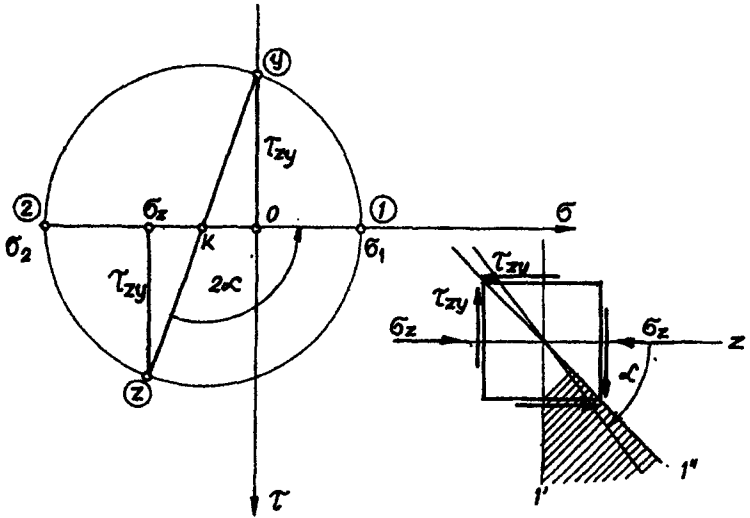
M. 2.4.1.5. ábra

$$\sigma_z = 6,3 \text{ N/mm}^2$$

M_{\max}^+ helyen

$$\tau = 0 \text{ mert } T = 0$$

$$\sigma_z = -3,47 \text{ N/mm}^2$$



M. 2.4.1.6. ábra

2.4.1.6. $T_{\max} = 75 \text{ kN}$

$\sigma_1 = + 7,34 \text{ N/mm}^2$

$N = 115 \text{ kN}$

$\sigma_2 = - 14,74 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_z = - 7,40 \text{ N/mm}^2$

$\tau_{zy} = 10,4 \text{ N/mm}^2$

$\alpha = 54,59^\circ$

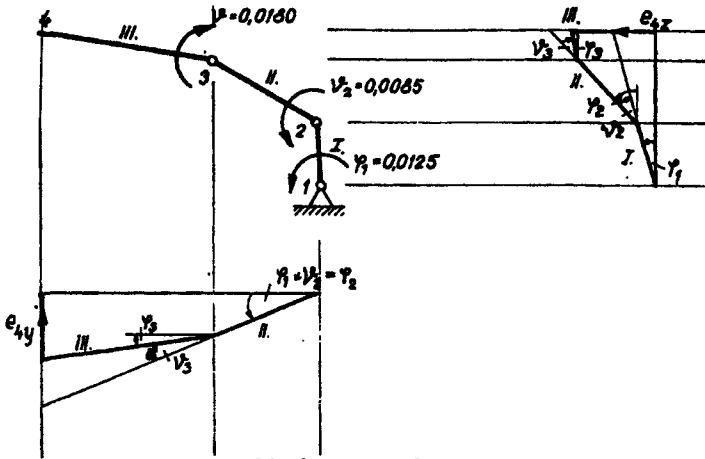
Az ábrán feltüntettük, hogy az egyszerű feszültségállapotok főirányai az eredője melyik tartományba eshet.

3. A TARTÓK ALAKVÁLTOZÁSA

3.1. A síkbeli tartók alakváltozása

3.1.1. A kis elmozdulások elmélete, láncolatok

3.1.1.1. $\vartheta_4 = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = -0,0125 - 0,0085 + 0,018 = -0,003$



M. 3.1.1.1. ábra

$$e_{4y} = \sum k_i \vartheta_i = +0,0125 \cdot 12,00 + 0,0085 \cdot 12,00 - 0,018 \cdot 7,00 = +0,1260 \text{ m}$$

$$e_{4x} = \sum k_i \vartheta_i = -0,0125 \cdot 7,50 - 0,0085 \cdot 4,5 + 0,018 \cdot 1,5 = -0,1050 \text{ m}$$

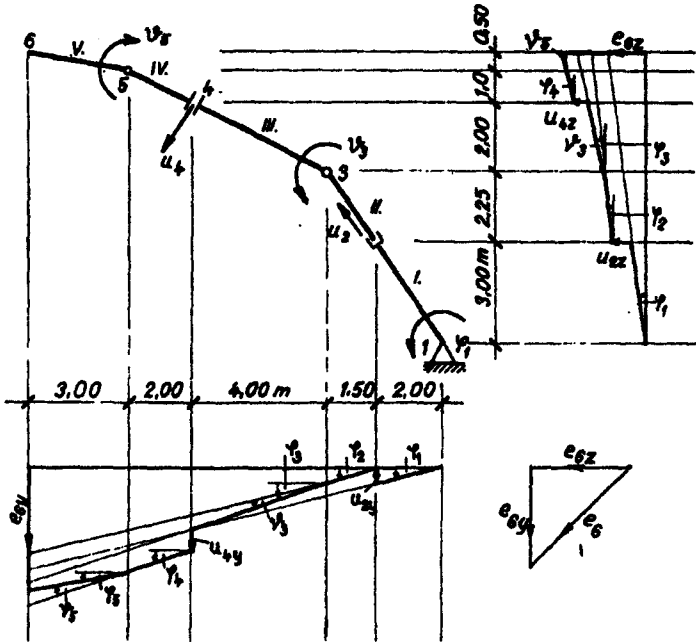
$$e_4 = \sqrt{0,1260^2 + 0,1050^2} = 0,164 \text{ m}$$

3.1.1.2. $e_{6y} = 0,2019 \text{ m}$

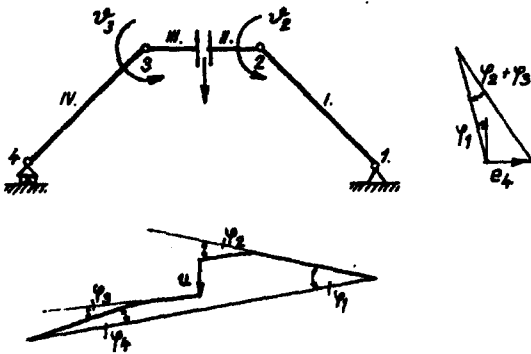
$$e_{6x} = -0,1466 \text{ m}$$

$$e_6 = 0,2493 \text{ m}$$

$$\varphi_6 = -0,0118$$



M. 3.1.1.2. ábra



M. 3.1.1.3. ábra

3.1.1.3. $\vartheta_1 = \vartheta_1 = + 0,01033$
 $\vartheta_4 = - \varphi_4 = - 0,00367$
 $u = 0,028 \text{ m.}$

3.1.2. A tartók alakváltozásának meghatározása kis elmozdulások elméletével

3.1.2.1. $\psi = - \frac{750,3}{2} = - 1125 \text{ kNm}^2$

$\varphi_1 = \varphi_3 + \psi = 0 - 1125 = 1,125 \cdot 10^3 \frac{1}{10^5} = 1,125 \cdot 10^{-2}$

rugalmas vonal egyenlete a 2-3 szakaszon

$$(e) = x(a - \frac{x}{2})F \cdot \frac{x}{3} \frac{(a-x) F + 2aF}{(a-x) F + aF} =$$

$$= \frac{F}{6} x^2 (3a - x)$$

e_2 -nél $x = 3,0 \text{ m}$ $a = 3,0 \text{ m}$

$e_2 = 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

a rugalmas vonal egyenlete az 1-2 szakaszon egyenes

$$(e) = \frac{F \cdot a^2}{2} \cdot (x - \frac{a}{3})$$

e_1 -nél $x = 5,0 \text{ m}$ $a = 3,0 \text{ m}$

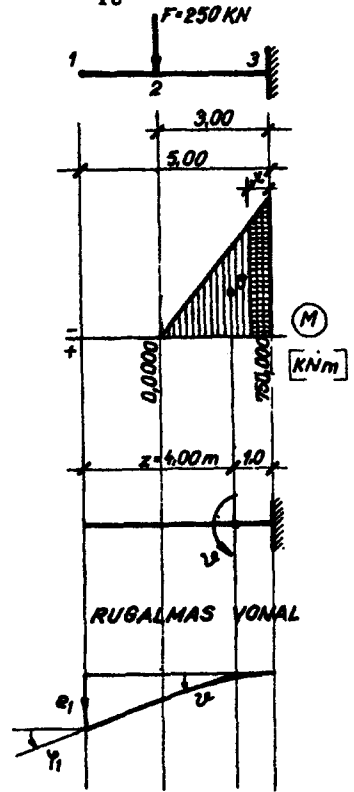
$e_1 = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

3.1.2.2. A feladatnál először a koncentrált erő hatására keletkező nyomtató ábrát, majd a megoszló teher hatására keletkező nyomtató ábrákat külön-külön határozzuk meg. Az ismert súlypontú részterületek súlypontjába koncentráljuk a fajlagos alakváltozásokat.

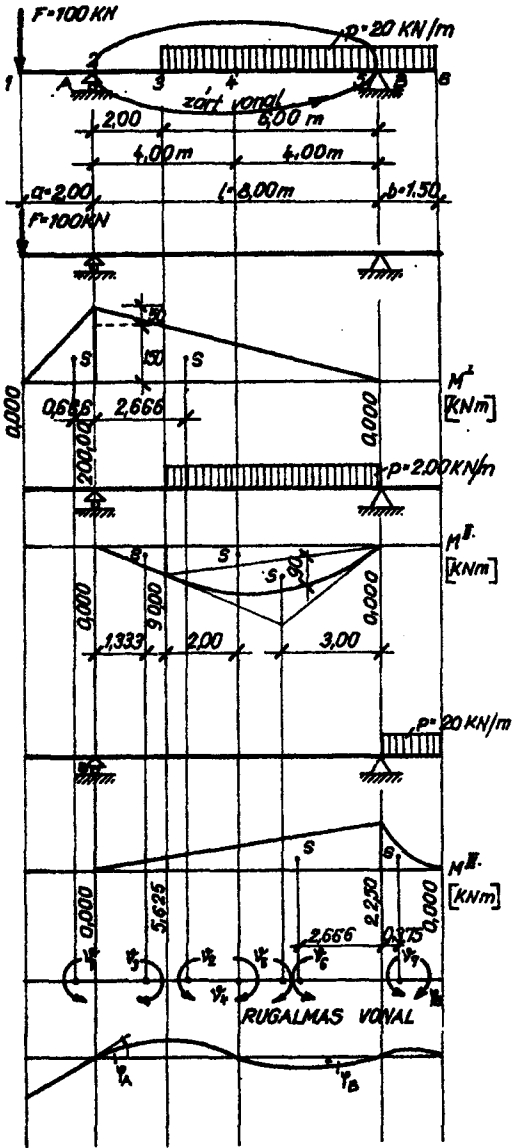
A nagyított értékek rendre

$(\psi_1) = - \frac{2,00 \cdot 200,0}{2} = - 200 \text{ kNm}^2$

$(\psi_2) = - \frac{8,00 \cdot 200,0}{2} = - 800 \text{ kNm}^2$



M. 3.1.2.1. ábra



M. 3.1.2.2. ábra

$$(\psi_3) = + \frac{90,0 \cdot 2,00}{2} = 90,0 \text{ kNm}^2$$

$$(\psi_4) = + \frac{90,0 \cdot 6,00}{2} = 270,0 \text{ kNm}^2$$

$$(\psi_5) = + \frac{2}{3} 90,0 \cdot 6,0 = 360,0 \text{ kNm}^2$$

$$(\psi_6) = - \frac{22,50 \cdot 8,0}{2} = - 90,00 \text{ kNm}^2$$

$$(\psi_7) = - \frac{22,50 \cdot 1,50}{3} = - 11,25 \text{ kNm}^2$$

A zárt vonal mentén lévő elfordulások az "A" támaszpontnál függőleges eltolódást nem okoznak.

$$(e_{Ay}) = \sum \varphi_i k_i = - (\varphi_3) 8,00 + 800,00 \cdot 2,666 - 90,00 \cdot 1,333 - 270,00 \cdot 4,00 - 360,00(8,00 - 30) + 90,00(8,00 - 2,666) = 0$$

A zárt vonalon az elfordulások összege zérus

$$\sum \psi_i = 0$$

$$-48,37 + 90,00 + 360,00 + 270,00 - 800,00 - 90,00 + \psi_A = 0$$

$$(\psi_A) = + 218,4$$

$$(\varphi_A) = - (\psi_A) = - 218,4 \text{ (°)}$$

$$\varphi_A = \frac{218,4}{3,5 \cdot 10^4} = 6,24 \cdot 10^{-3}$$

$$e_1 = \varphi_A \cdot 2 + \psi_1 \cdot 1,33 = 20,09 \text{ mm}$$

$$e_6 = -\varphi_B \cdot 1,5 + \psi_7 \cdot \frac{1,5}{4} \cdot 3 = 1,54 \text{ mm}$$

$$(e_3) = - 218,4 \cdot 2,0 - 150 \cdot 2,1 - \frac{50,2}{2} \cdot \frac{2,2}{2} + 90,0 \cdot 0,66 - \frac{56,25 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} = - 781$$

$$e_3 = - \frac{781}{3,5 \cdot 10^4} = 22,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 22,3 \text{ mm}$$

3.1.2.3. $\varphi_6 = 0,004$ (°)

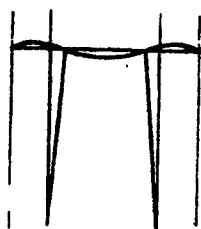
$\varphi_2 = 0,004$ (°)

$e_{1y} = e_{7y} = 0$ (S₅₋₆ összenyomódást is vegyük figyelembe)

$e_{4y} = 15,0$ mm

A rugalmas vonal az M. 3.1.2.3. ábrán látható

RUGALMAS VONAL



M. 3.1.2.3. ábra

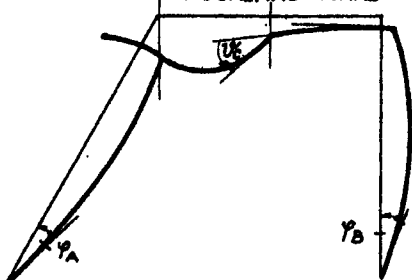
3.1.2.4. $e_{cy} = 24,0$ mm

A rugalmas vonal az M. 3.1.2.4. ábrán látható.

3.1.2.5. $e = 4,28$ mm

3.1.2.6. $e = \frac{P \cdot l^3 \cdot h}{12 EJ}$

RUGALMAS VONAL



M. 3.1.2.4. ábra

3.1.3. A tömör tartók alakváltozásának meghatározása munkatétellel

3.1.3.1. φ_B -t a saját külső-belső munka egyenlősége alapján határozzuk meg.

$$\frac{1}{2} 200 \varphi_B = \frac{1}{2} \int \frac{M_1}{EJ} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{200 \cdot 6}{2} \cdot \frac{200 \cdot 2}{3} \cdot 10^{-4} \quad \varphi_B = 0,04$$

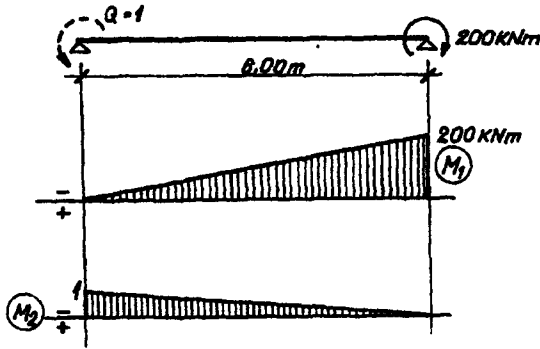
φ_A -t az idegen külső-belső munka egyenlősége alapján határozzuk meg.

$$1 \cdot \varphi_A = \int \frac{M_1 M_2}{EJ} ds = + \frac{1}{2} 200 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$$

$$\varphi_A = + 0,02$$

3.1.3.2. e -t az idegen külső-belső munka egyenlősége alapján határozzuk meg.

$$Q \cdot e = \int \frac{M_Q M_F}{EJ} ds = - \frac{1 \cdot 5 \cdot 6}{2} \cdot 90 \cdot 10^{-4} =$$



M. 3.1.3.1. ábra

$e = -4,05 \cdot 10^{-2}$ m negatív előjel azt jelenti hogy "e" iránya " erővel ellentétes.

3.1.3.3. $e = 17,1$ mm a saját munkák egyenlősége alapján

3.1.3.4. $\nu_c = -0,006$

3.1.3.5. $e_{KIy} = 10,8$ mm

$e_{KIIy} = 34$ mm

3.1.3.6. $\varphi_B = -2,067 \cdot 10^{-4}$

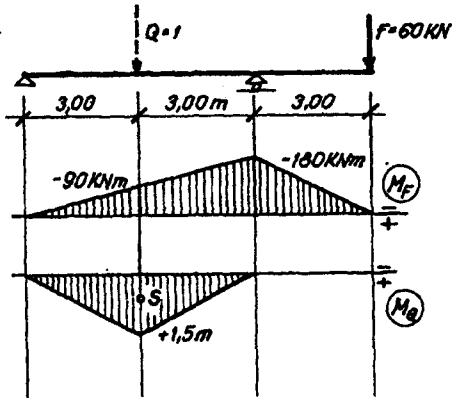
$\varphi_A = +2,067 \cdot 10^{-4}$

$\nu_c = -4,132 \cdot 10^{-3}$

3.1.3.7. $\nu_c = -1,039 \cdot 10^{-3}$

$e_{cy} = 1,28$ mm

3.1.3.8. $U_{CD} = 82$ mm

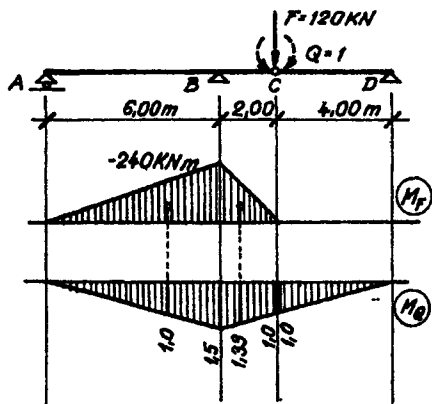


M. 3.1.3.2. ábra

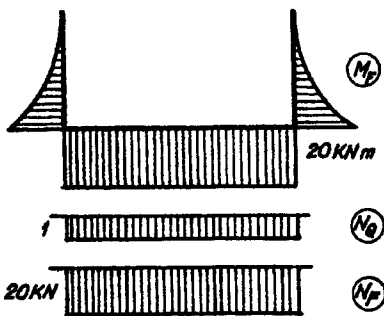
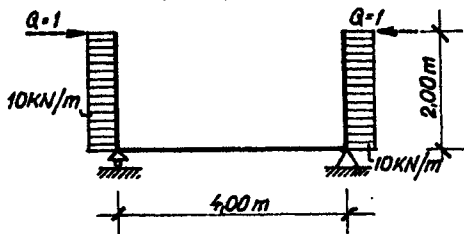
3.1.4. A rácsos tartók alakváltozásának meghatározása munkatétellel

3.1.4.1.

Jel	S_F	S_Q	s	$S_F \cdot S_Q s$
1-3	-1,66	+1,25	10	- 20,75
1-5	+1,35	-1,00	4	- 5,32
				- 26,07



M. 3.1.3.7. ábra



M. 3.1.3.8. ábra

$$Q \cdot e_{4x} = \sum \frac{S_F \cdot S_Q}{EA} = - \frac{26,07}{10^4} = -2,61 \text{ mm}$$

3.1.4.2. $e_{3x} = 1,45 \text{ mm}$

$$e_{4y} = 5,4 \text{ mm}$$

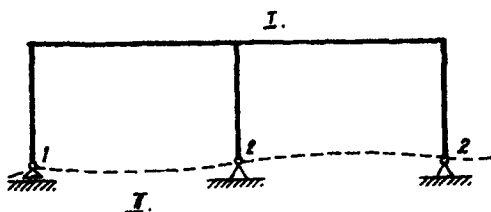
3.1.4.3. $e_{zy} = 7,166 \text{ mm}$

3.1.4.4. $e_{AD} = -14 \text{ mm}$

4. A STATIKAILAG HATÁROZATLAN TARTÓK

4.2. A statikai határozatlanság fokának meghatározása

4.2.1. A tartót 2 db másodfoku és 1 db elsőfoku kényszer átvágásával tudjuk a földtől elválasztani.



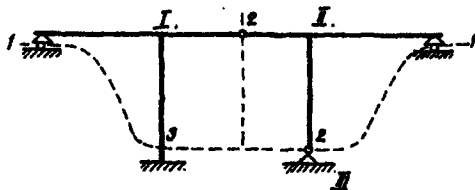
M. 4.2.1. ábra

$$i = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$e = 3(2-1) = 3$$

$$\text{A határozatlanság foka } n = 5 - 3 = 2$$

4.2.2. Az ábrán vázolt tartót a C csuklón át két merev testre bontjuk, így $k = 3$. Az átvágások száma: $i = 1 + 3 + 2 + 2 + 1 = 9$.



M. 4.2.2. ábra

$$e = 3(3-1) = 6$$

$$n = 9 - 6 = 3$$

4.2.3. A zárt keretet kétfelé vágjuk, így $k = 3$, az átvágások száma $e = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

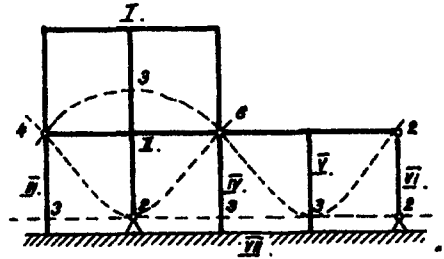
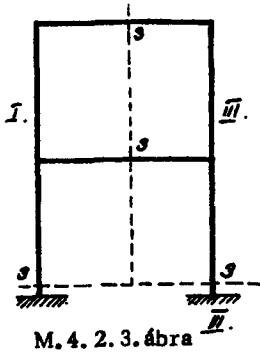
$$\text{A határozatlanság foka } n = 12 - 3(3-1) = 6.$$

4.2.4. Az ábrán adott keretszerkezetben többszörös csuklók is vannak. Az átvágások száma összetett csukló esetén $s = 2(t-1)$, ahol t a csuklóval összefogott tárcsák száma.

Ezek alapján: $i = 4 + 3 + 6 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 = 28$

$e = 3(7-1) = 18$

$n = 28 - 18 = 10$

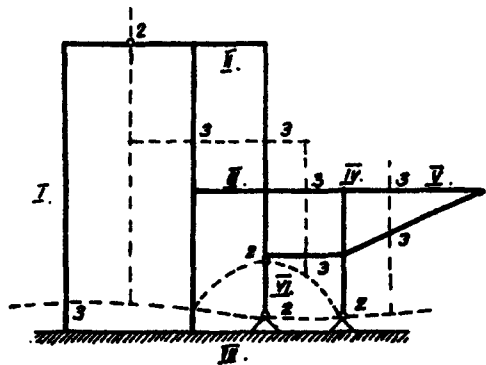


4.2.5. Az ábrán látható tartónál:

$e = 3(7-1) = 18$

$i = 8 \times 3 + 4 \times 2 = 32$

$n = 32 - 18 = 14$



4.3. A statikailag határozatlan tömör tartók megoldása erőmódszerrel

Azoknál a feladatoknál, ahol a szerkezet merevsége azonos az alakváltozások nagyított értékével számolunk.

4.3.1. A törzstartó egy kéttámaszu tartó, melyet úgy nyertünk, hogy az A pontban egy képzeletbeli átvágással felszabadítjuk a befogást.

Az egység tényező az egységnyi nyomaték hatására keletkező elfordulás az A pontban:

$$a_{11} = \int_0^l M_1^2 dz = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l}{3} = 4 \text{ m}$$

A terhelési tényező:

$$a_{10} = \int_0^l M_1 M_0 dz =$$

$$= \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24} = 144 \text{ kNm}^2$$

A csatlakozási feltételi egyenlet:

$$4x_1 + 144 = 0$$

$$x_1 = -\frac{144}{4} = -36 \text{ kNm}$$

A további reakcióerők:

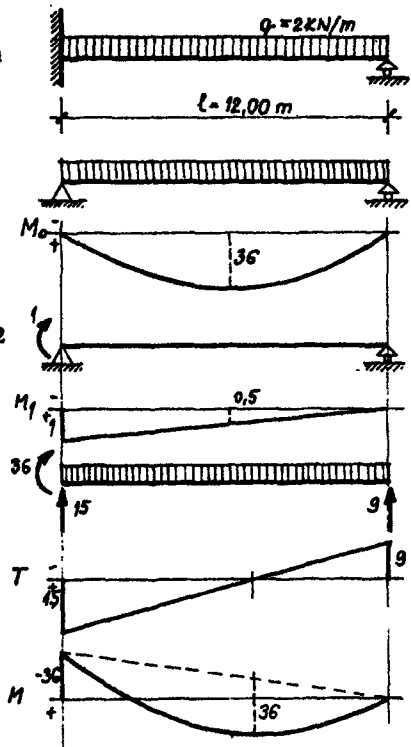
$$\sum M_1^A = -36 + 12 \cdot 2 \cdot 6 - B \cdot 12 = 0$$

$$B = 9 \text{ kN}$$

$$\sum Y_1 = 12 \cdot 2 - 9 - A_y = 0$$

$$A_y = 15 \text{ kN}$$

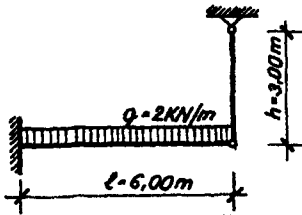
Az igénybevételi ábrák már megrajzolhatók az M. 3. 4. 1. ábra szerint



M. 4.3. 1. ábra

4.3.2. Az egységtényező

$$a_{11} = \int \frac{M_1^2}{EJ} dz + \frac{S_1^2}{EA} s = \frac{l^2 \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot 3 \cdot EJ} + \frac{h}{EA} = \frac{l^3}{3EJ} + \frac{h}{EA} \text{ (m/kN)}$$



$$a_{11} = 13,2 \cdot 10^{-3} \text{ (m/kN)}$$

A terhelési tényező:

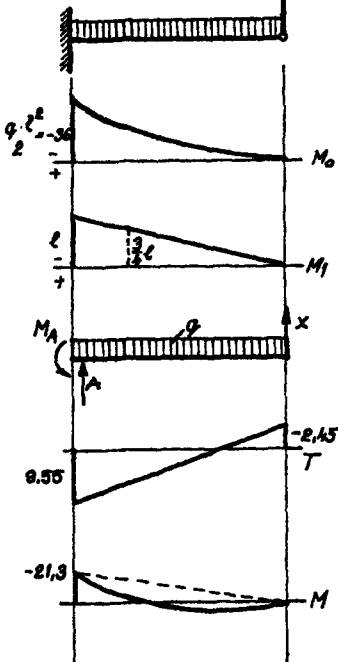
$$a_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EJ} dz + \frac{S_0 S_1}{EA} s =$$

$$= + \frac{q l^2}{2EJ} \cdot \frac{l}{3} \left(\frac{3l}{4}\right) + 0 = \frac{q l^4}{8EJ}$$

$$a_{10} = 3,24 \cdot 10^{-2} \text{ (m)}$$

$$\text{Az egyenlet: } 13,2 \cdot 10^{-3} x + 3,24 \cdot 10^{-2} = 0$$

$$x_1 = -2,45 \text{ (kN)}$$



M. 4.3.2. ábra

4.3.3. A legideálisabb törzstartó az, ha a közbenső támasz felett az anyagi összefüggést megszüntetve, egy csuklót hozunk létre. Itt az alakváltoztatás relatív szögelfordulás.

$$a_{11} = \int M^2 dz = 2 \frac{12 \cdot 1}{2} \frac{2}{3} = 8 \text{ (m)}$$

$$a_{10} = \int M_1 M_0 dz = \frac{48 \cdot 12}{2} \frac{1}{2} + \frac{36 \cdot 12 \cdot 2}{3} \frac{1}{2} = 288 \text{ (kNm}^2\text{)}$$

$$x = -\frac{288}{8} = -36 \text{ (kNm)}$$

A nyomatéki ábrát szuperponálással állítjuk elő.

4.3.4. A kerettartók igénybevételi ábráinál a szokásostól eltérően a tengelyvonal a vastagabb az érthetőség miatt.

Az ábra a 120. oldalon

$$a_{11} = \int M_1^2 dz = 1 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 8}{2} \frac{2}{3} = 6,67 \text{ (m)}$$

$$a_{10} = \int M_1 M_0 dz = \frac{4000 \cdot 4}{2} \cdot 1 + \frac{4000 \cdot 8}{2} \frac{2}{3} = 18\,666,7 \text{ (kNm}^2\text{)}$$

$$x = \frac{18\,666,7}{6,67} = -2800 \text{ (kNm)}$$

4.3.5. A törzstartó kialakítása úgy történik, hogy a feszítő CD rudját vágjuk át. A tényezők az átvágás helyén keletkező relatív eltolódások.

$$a_{10} = -2 \frac{4 \cdot 80 \cdot 2}{3}$$

$$\cdot \frac{2 \cdot 5}{8} \frac{10^8}{935} = -5,7 \cdot 10^7$$

$$a_{11} = \frac{4 \cdot 2}{2} \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^8}{935} +$$

$$+ \frac{10^4}{7,94} + \frac{10^4 \cdot 2 \cdot 0,06^2 \cdot 4 \cdot 123}{3,8} \cdot 2 =$$

$$= 1,2342 \cdot 10^6$$

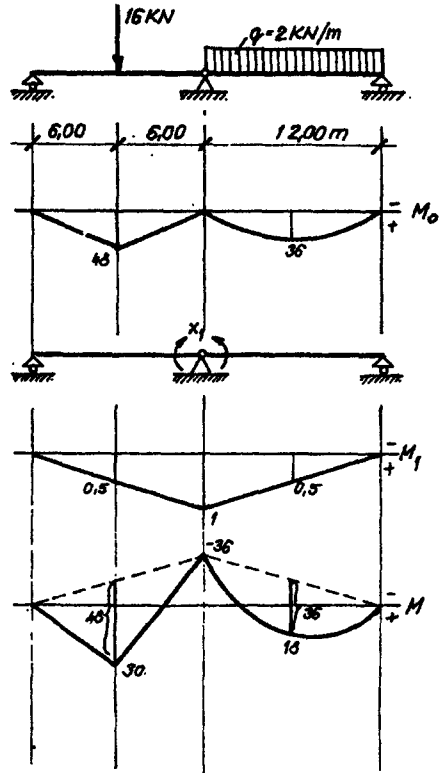
$$x = \frac{5,7 \cdot 10^7}{1,2342 \cdot 10^6} = 46,2 \text{ (kN)}$$

a rudban keletkező erő.

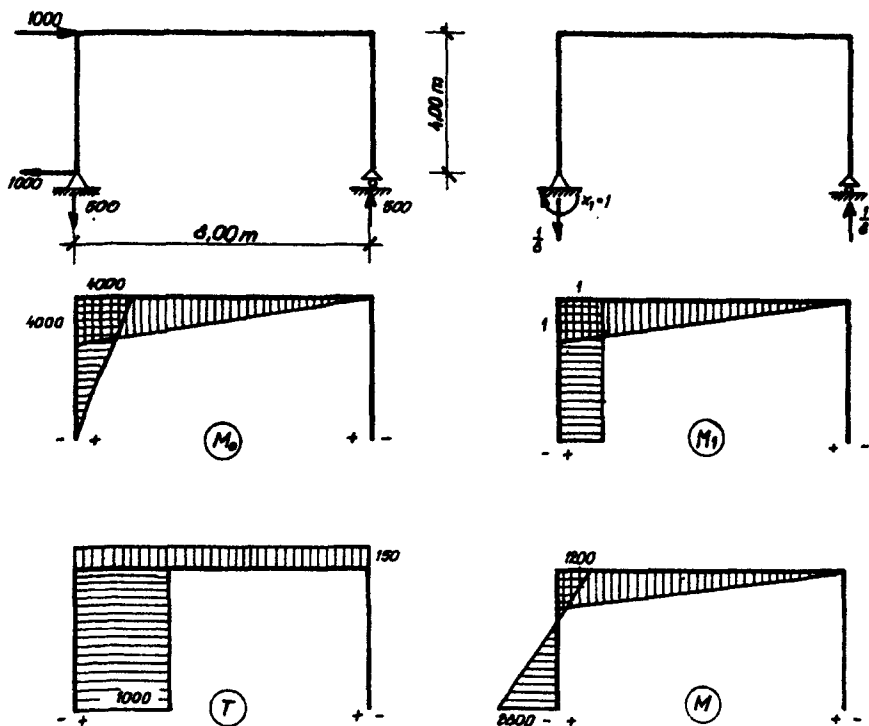
Ebből a nyomaték középen

$$M = -\frac{46,2 \cdot 8}{4} = -92,4$$

Szuperponálva $M_K = -92,4 + 80 = 12,4 \text{ (kNm)}$.



M. 4.3.3. ábra



M. 4.3.4. ábra

4.3.6. A törzstartó a B támasz elhagyásával keletkezik.
A terhelési tényező két részből áll:

$$a_{10}' = \frac{96 \cdot 4 \cdot 2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{8} \cdot 2 = 640 \text{ (kNm}^3\text{)}$$

$$a_{10}'' = -EJ \cdot 1 \cdot 10^{-2} = -3,05 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} = -30,5 \text{ (kNm}^3\text{)}$$

Az egységtényező:

$$a_{11} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3} = 10,67 \text{ (m}^3\text{)}$$

Az egyensúlyi feltételi egyenlet:

$$640 - 30,5 + 10,67x = 0$$

$$x = -57,14 = B \text{ (kN)}$$

Az A és C reakcióerők egyenlők

$$A = C = \frac{8 \cdot 12 - 57,14}{2} = 19,43 \text{ kN}$$

A nyomatéli ábrát lásd az
M. 4.3.6. ábrán

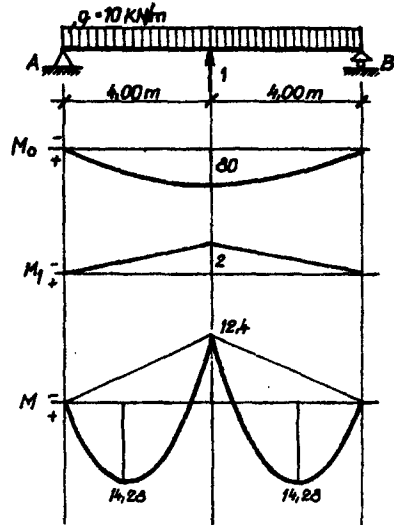
4.3.7. Megoldás:

$$S_1 = 2,065 \text{ kN}$$

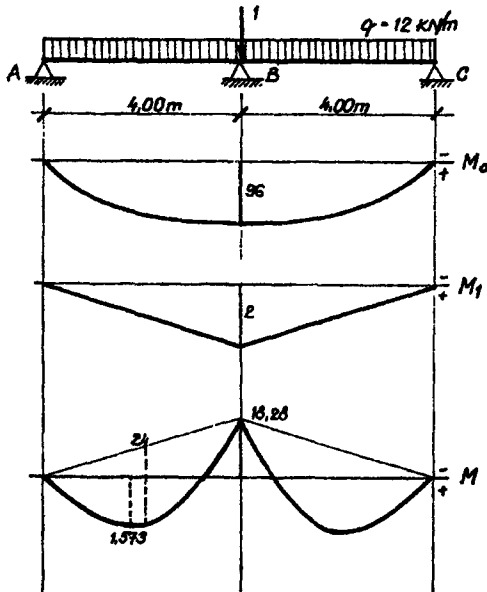
$$S_2 = 0,661 \text{ kN}$$

4.3.8.

$$S = 2,2 \text{ kN}$$



M. 4.3.5. ábra



M. 4.3.6. ábra

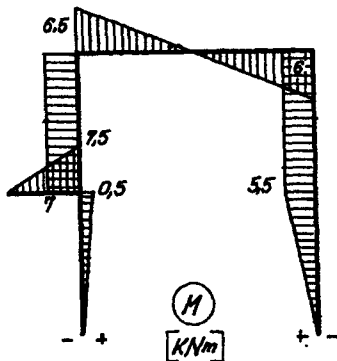
4.3.9. Eredmények

$$a_{11} = 183,3 \text{ m}^3$$

$$a_{10} = 404,4 \text{ m}^2 \text{ kN}$$

$$x = B_x = -2,2 \text{ kN}$$

Az igénybevételek az ábrán láthatóak.

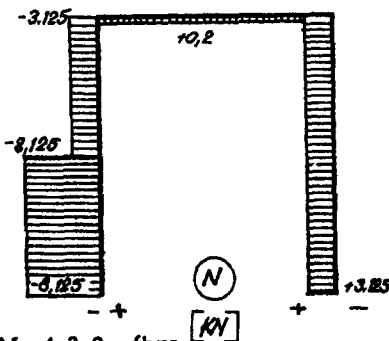
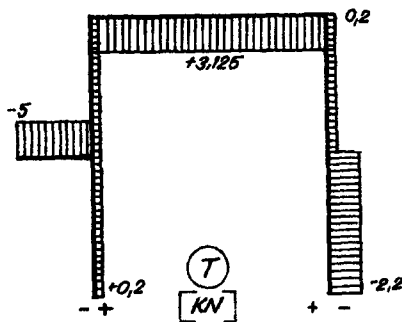


4.3.10. A középső támasz felett beiktatott csuklóban keletkező relatív elfordulás a tényező. A támaszponti nyomaték: $x = -6,043 \text{ kNm}$. Az igénybevételeket az ábráról leolvashatjuk.

4.3.11. Megoldásként az igénybevételi ábrákat közöljük.

4.3.12. A törzstartó felvétele az ábra szerint úgy történik, hogy a merev befogásból csuklót alakítunk, és a fix csuklóból pedig görgőt. Az 1. helyen az egységdinám nyomaték és a tényező abszolút elfordulás lesz, a 2. helyen egység-erőt kell alkalmazni, és a tényező vízszintes irányu eltolódás. Első lépésként megrajzoljuk a törzstartó nyomatéki ábráját a terherre (M_0), majd megrajzoljuk az egységnyomatékból keletkező M_1 és az $x_2 = 1$ erőből keletkező M_2 nyomatéki ábrákat.

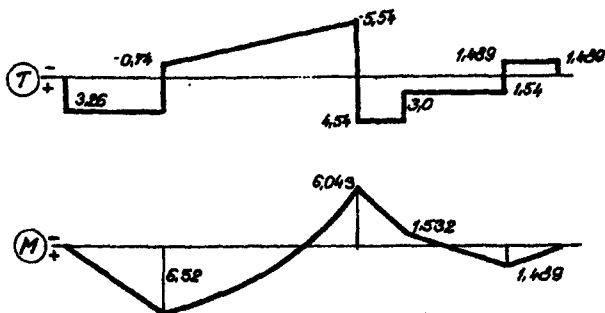
Az egységtényezőket és terhelési tényezőket munkatétellel az ábrából meghatározhatjuk.



$$a_{10} = \varphi_A = \frac{F l}{4} \frac{l}{2 \cdot 2} = \frac{F l^2}{16} h = \frac{10 \cdot 8^2}{16} = 40 \text{ (m}^2 \text{ kN)}$$

$$a_{20} = e_{Bx} = \frac{F l}{4} \frac{l}{2} \frac{h}{2} = \frac{F l^2}{16} = \frac{10 \cdot 8^2 \cdot 5}{16} = 200 \text{ (m}^3 \text{ kN)}$$

M. 4.3.9. ábra



M. 4.3.10. ábra

$$a_{11} = \varphi_A = \frac{l}{2} \frac{2}{3} = \frac{l}{3} = \frac{8}{3} = 2,67 \text{ (m)}$$

$$a_{12} = e_{Bx} = \varphi_A = \frac{lh}{6} = \frac{5 \cdot 8}{6} = 6,67 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$a_{22} = e_{Bx} = \frac{h^2 l}{3} + \frac{h^3}{3} = \frac{5^2 \cdot 8}{3} + \frac{5^3}{3} = 108,33 \text{ (m}^3\text{)}$$

Ezek után felírhatjuk a csatlakozási egyenletek:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} = 0$$

$$2,67x_1 + 6,67x_2 + 40 = 0$$

$$6,67x_1 + 108,33x_2 + 200 = 0$$

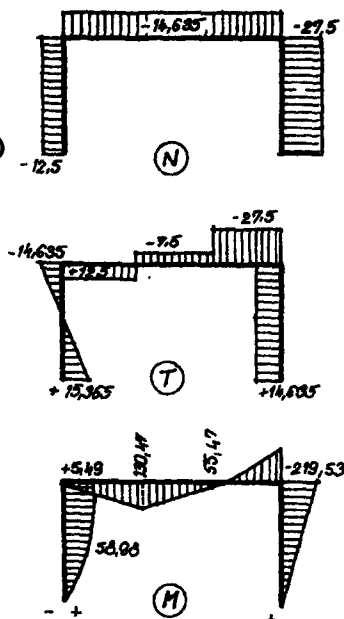
Az egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = -12,27 \text{ mkN}$$

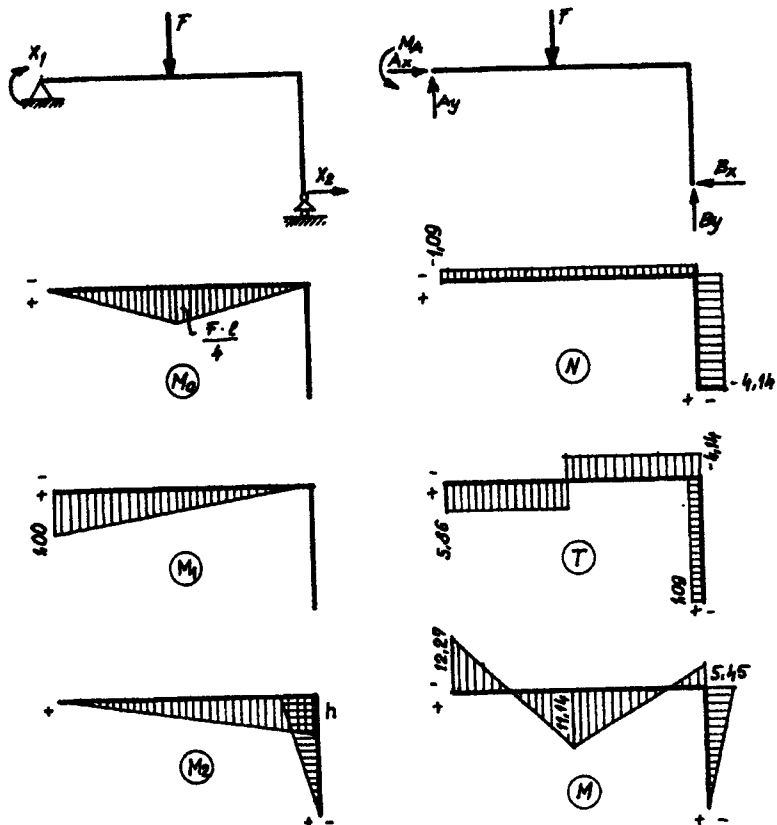
$$x_2 = -1,09 \text{ kN}$$

A törzstartóra tehát az F erő az x_1 nyomaték és x_2 erő hat, és erre az erőrendszerre kell meghatározni az A és B_y reakcióerőket.

A reakcióerők ismeretében már felrajzolhatók az igénybevételi ábrák.



M. 4.3.11. ábra



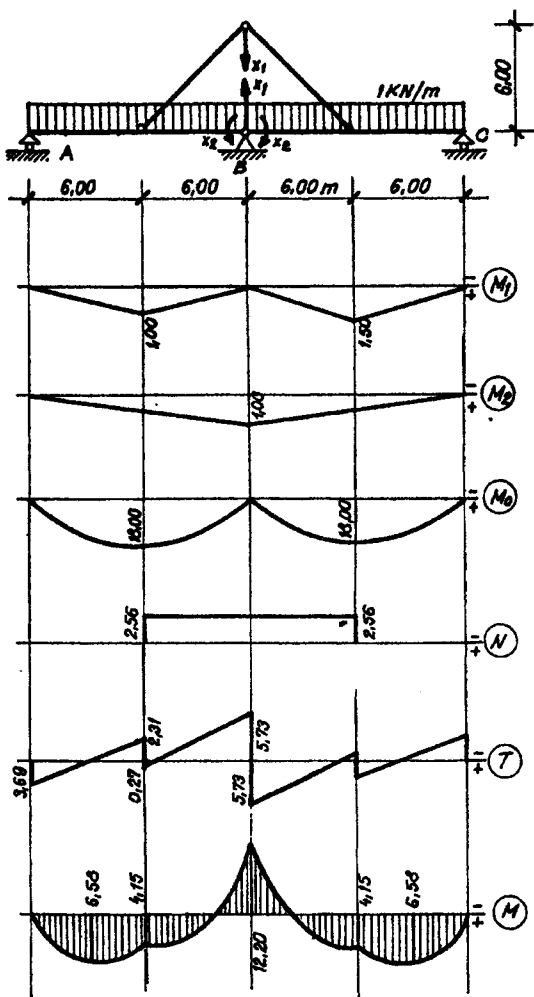
M. 4.3.12. ábra

- 4.3.13. A törzstartót úgy vesszük fel, hogy egyrészt átvágjuk a rudazat középső tagját, másrészt a gerenda folytonosságát megszüntetjük a B pontban. Az előző pontban relatív eltolódás, a B pontban relatív elfordulás keletkezik. Az egységtényezők meghatározása munkatétellel:

$$a_{11} = \int M_1^2 ds + \frac{1}{A} \sum S_1^2 s$$

$$a_{11} = 4 \frac{1,5 \cdot 6,0}{2} \frac{2}{3} \cdot 1,5 + 0,9(0,707^2 \cdot 8,49 \cdot 2 + 1,0^2 \cdot 6) = 31,041 \text{ (m}^3\text{)}$$

$$a_{12} = 2 \frac{12,0 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,5 = 9,0 \text{ (m}^2\text{)} = a_{21}$$



M. 4.3.13. ábra

$$a_{22} = 2 \frac{1,0 \cdot 12,0}{2} \frac{2}{3} \cdot 1,0 = 8,0 \text{ (m)}.$$

A terhelési tényezők meghatározása munkatétellel:

$$a_{10} = \int M_1 M_0 ds = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18,0 \cdot 6,0 \cdot \frac{5}{8} \cdot 1,5 = 270 \text{ (kNm}^3\text{)}$$

$$a_{20} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18,0 \cdot 12,0 \cdot 0,5 = 144 \text{ (kNm}^2\text{)}.$$

Egyensúlyi feltételi egyenletek:

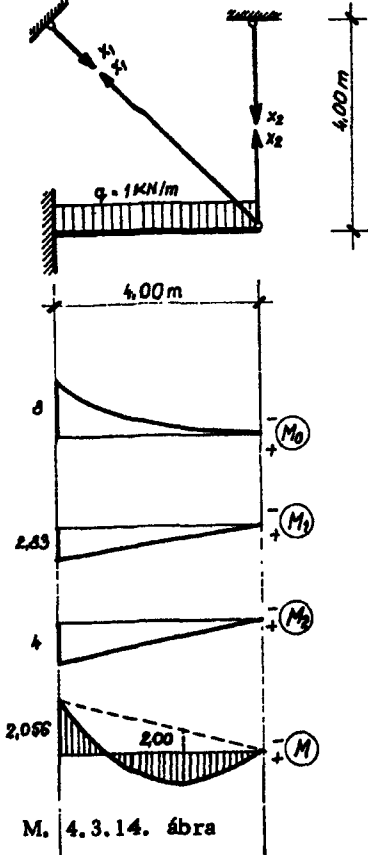
$$31,041x_1 + 9,0x_2 + 270 = 0$$

$$9,0x_1 + 8,0x_2 + 144 = 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -270 & 9 \\ -144 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 31,041 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}} = -5,16 \text{ kN}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 31,041 & -270 \\ 9 & -144 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 31,041 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}} = -12,2 \text{ kNm}$$

A további reakcióerők számítása, valamint az igénybevételi ábrák készítése a már ismert módon történik.



M. 4.3.14. ábra

4.3.14. A törzstartó a rudak átvágásával keletkezik

$$x_1 = 0,549 \text{ kN} \quad x_2 = 1,098 \text{ kN.}$$

A nyomatéki ábráról leolvashatók a nyomaték értékek.

4.3.15. A merev befogásokat feloldva számíthatjuk a befogási nyomatékokat.

$$M_A = -2,736 \text{ kNm} \quad M_B = -1,584 \text{ kNm.}$$

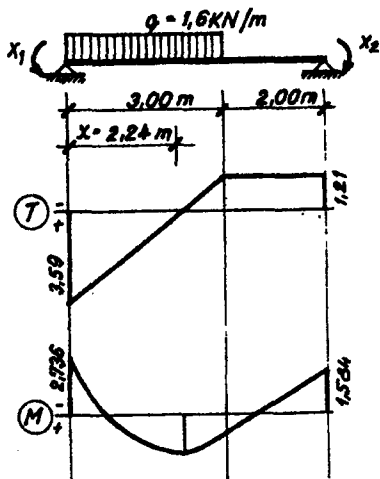
Az igénybevételi ábrákat közöltük.

4.3.16. Megoldásként a nyíróerő és nyomatéki ábrát közöltük.

4.3.17. A megoldás $q = 1,43 \text{ kN/m}$.

4.4. A statikailag határozatlan rácsos tartók megoldása erőmódszerrel

4.4.1. A törzstartót úgy célszerű felvenni, hogy valamelyik rácsrudat elvágjuk. Az 1-3 rudban keletkező erő legyen: x_1 . A csatlakozási feltételei egyenlet:



M. 4.3.15. ábra

$$a_{10} + x_1 a_{11} = 0.$$

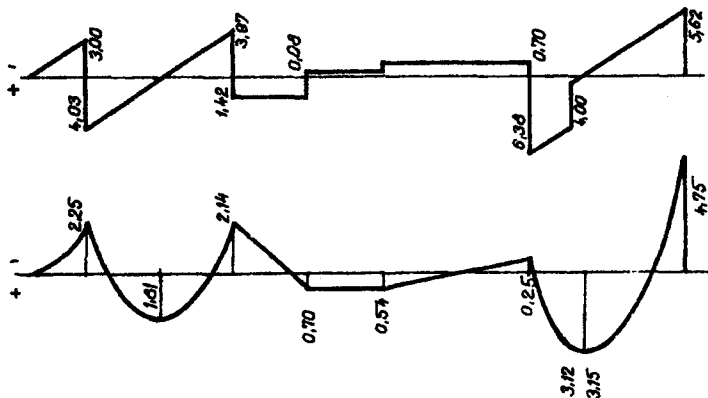
Az egységtegyező az átvágott keresztmetszetben fellépő relatív eltolódás az egység-erő hatására:

$$a_{11} = \sum \frac{S_1^2 s}{\lambda}$$

A terhelési tényező az átvágott keresztmetszetben fellépő relatív eltolódás a teher hatására:

$$a_{11} = \sum \frac{S_0 S_1 s}{\lambda}$$

A számítást táblázatosan közöljük.



M. 4.3.16. ábra

$$x_1 = - \frac{157,68}{12,16} = - 12,97 \text{ kN}$$

A ruderöket az $S = S_0 + x_1 S_1$ képletből számítjuk a táblázat utolsó két oszlopában. Az ábra a 130. oldalon, a táblázat a 129. oldalon

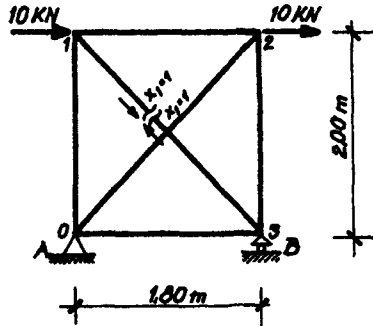
4.4.2. A törzstartót a 0-í rud átvágásával alakítottuk ki, és ott keressük a relatív eltolódást, a teher és az egység-erők hatására. A relatív eltolódások összege nullával egyenlő.

A számítást táblázatosan közöljük.

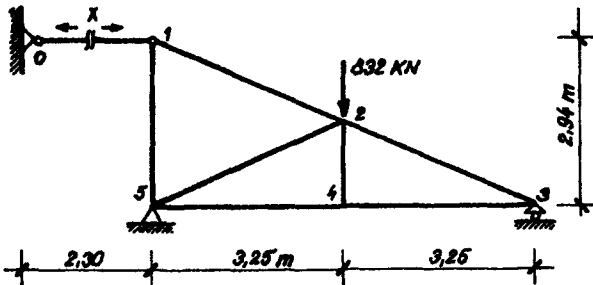
Az ábra a 130. oldalon, a táblázat a 131. oldalon

Rud jele	s (m)	λ	s_1	S_2 $\frac{\lambda}{s_1}$ (m)	S_0 (kN)	$S_0 S_1 s$ $\frac{\lambda}{s_1}$ (mkN)	λS_1 (kN)	S (kN)
0-1	2,0	1,0	-0,743	1,105	0	0	9,64	+9,64
0-2	2,691	0,8	+1,000	3,365	+29,90	+100,58	-12,97	+16,93
0-3	1,80	0,5	-0,669	1,610	0	0	8,68	+8,68
1-2	1,80	0,5	-0,669	1,610	-10,0	+24,08	8,68	-1,32
1-3	2,691	0,8	+1,000	3,365	0	0	-12,97	-12,97
2-3	2,0	1,0	-0,743	1,105	-22,22	+33,02	9,64	-12,58

$$s_{11} = 12,16 \text{ (m)} \quad s_{10} = 157,68 \text{ (mkN)}$$



M. 4.4.1. ábra



M. 4.4.2. ábra

$$x_1 = \frac{9910}{17,85} = 555 \text{ kN.}$$

$$a_{10} = \sum \frac{S_1 S_0 s}{A} \quad a_{11} = \sum \frac{S_1^2 s}{A} \quad (\text{A-szoros nagyítás})$$

4.3. A feladatot megoldhatjuk, úgy hogy az 1-2 rudat vágjuk keresztül, és az átvágott rud relatív eltolódását határozzuk meg. A törzstartó kialakítható úgy is, hogy a B csuklóból görgőt csinálunk, és a B csuklópont vízszintes eltolódását keressük.

A két megoldás azonos eredményt ad. Itt csak a végeredményeket közöljük, a számítás a már begyakorolt módon elvégezhető.

$$S_{01} = -7,48 \text{ kN}$$

$$S_{02} = S_{23} = -2,26 \text{ kN}$$

$$S_{12} = S_{13} = -1,43 \text{ kN.}$$

Rud	s	S ₁	S ₁ ² s	S _o	S _o S ₁ s	xS ₁	S
0-1	2,3	1,0	2,3	0	0	555	555
1-2	3,57	1,09	4,23	0	0	605	605
1-5	2,94	-0,45	0,59	0	0	-330	-330
2-3	3,57	1,09	4,23	-1010	-3930	605	-405
2-4	1,47	0	0	0	0	0	0
2-5	3,57	0	0	-1010	0	0	-1010
3-4	3,25	-1,00	3,25	+920	-2990	-555	+365
4-5	3,25	-1,00	3,25	+920	-2990	-555	+365
$a_{11} = 17,85$				$a_{10} = -9910$			

4.4.4. A törzstartó legcélszerűbben úgy alakítható ki, hogy a 2-5 rudat vágjuk át.

A számítást táblázatosan közöljük a 132. oldalon.

$$x = -\frac{238,75}{30,40} = -7,958 \text{ kN}$$

4.4.5. A példa megoldását nem közöljük, csak a végeredményeket.

$$S_{o1} = -3,79$$

$$S_{12} = S_{2-3} = -2,39$$

$$S_{o5} = 0$$

$$S_{15} = +3,00$$

$$S_{2-5} = -4,00$$

$$S_{4-5} = -0,54$$

$$S_{3-5} = +3,67$$

$$S_{3-4} = -841$$

Természetesen a szimmetrikus rudakban azonos a ruderő.

Rud	s m	S_1 1	S_1^2 m	S_0 kN	$S_1 S_0$ kNm	$x S_1$ kN	S kN
0-1	4	-0,667	+1,790	-14,0	+37,35	+5,31	-8,69
0-2	5	+0,833	+3,470	+18,75	+78,15	-6,63	-12,12
1-2	3	0	0	-15,0	0	0	-15,00
1-3	4	-0,667	+1,790	-14,0	+37,35	+5,31	-8,69
2-3	5	+0,833	+3,470	+12,5	+52,10	-6,63	+5,87
2-4	5	0	0	-6,25	0	0	-6,25
2-5	6	+1,000	+6,0	0	0	-7,96	-7,96
3-4	6	-0,500	+1,500	-7,50	+22,50	+3,98	+3,52
4-5	5	0	0	-6,25	0	0	-6,25
4-6	6	-0,500	+1,500	0	0	+3,98	+3,98
5-6	6	+0,833	+3,470	0	0	-6,63	-6,63
5-7	3	0	0	0	0	0	0
5-8	5	+0,833	+3,470	-6,25	-26,05	-6,63	-12,88
6-7	4	-0,667	+1,790	-7,00	+18,67	+5,31	-1,69
7-8	4	-0,667	+1,790	-7,00	+18,67	+5,31	-1,69
$a_{11} =$			30,40	$a_{10} =$		238,75	

5. A KIHAJLÁS

5.2.5.1.

$$i = \sqrt{\frac{\pi \cdot r^4}{4 \cdot \pi r^2}} = \frac{r}{2} = 7,5 \text{ mm}$$

$$l_0 = \frac{1}{2} l = 0,60 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{6,00}{7,5} = 80 < \lambda_0$$

$$\sigma_k = 0,31 - 0,00114 \cdot 80 = 0,2188 \text{ kN/mm} = 218,8 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma = \frac{50\,000}{15^2} = 70,8 \text{ N/mm}^2 < \frac{\sigma_k}{n} = \frac{218,8}{3} = 72,9 \text{ N/m}^2$$

5.2.5.2. $P = 1589 \text{ kN}$

5.2.5.3. $a = 45,6 \text{ mm}$ $a_{\text{alk}} = 50 \text{ mm}$

5.2.5.4. $r = 77,6 \text{ mm}$ $r_{\text{alk}} = 80 \text{ mm}$

6. A MECHANIKAI MOZGÁSOK

6.1. Az anyagi pont kinematikája

6.1.1. Az A pontból induló pont mozgásegyenlete:

$$x = v_1 (t - t_0) = v_1 t = 30t.$$

A B pontból induló pont mozgásegyenlete:

$$60 - x = v_2 (t - t_0) = v_2 t = 20t.$$

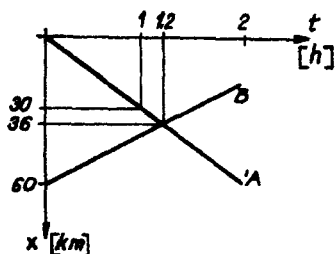
A találkozás az x távolságok egyenlőségénél van.

$$60 - 30t = 20t$$

$$t = \frac{60}{50} = 1,2 \text{ h} = 1 \text{ h } 12'$$

Az A kerékpáros utja $x = 30 \cdot 1,2 = 36 \text{ km}$.

A példa megoldható az M. 6.1.1. ábra szerinti diagramok segítségével is.



M. 6.1.1. ábra

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = 20 \text{ km}$$

$$400 = 30^2 t^2 + 50^2 (t - 0,25)^2$$

$$3400t^2 - 1250t - 244 = 0$$

$$t = 0,509 \text{ h.}$$

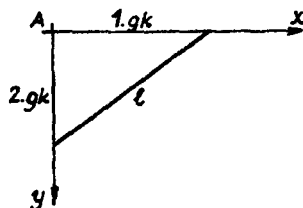
6.1.2. Az első gépkocsi által megtett ut:

$$x = v_1 t$$

A második gépkocsi által megtett ut:

$$y = v_2 (t - 0,25).$$

A távolság:



M. 6.1.2. ábra

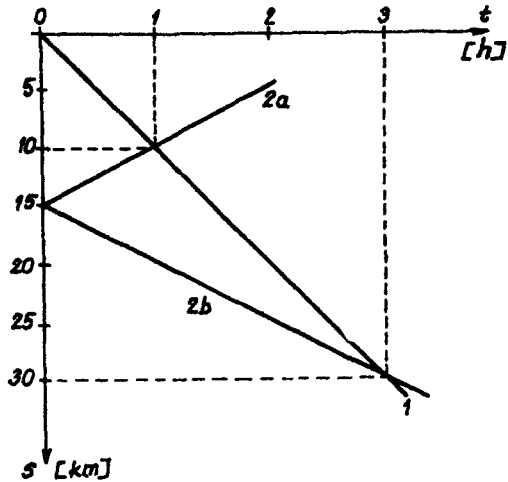
6.1.3. A megoldást grafikusan közli az M. 6.1.3. ábra

$$t_1 = 1 \text{ h}$$

$$s_1 = 10 \text{ km}$$

$$t_2 = 3 \text{ h}$$

$$s_2 = 30 \text{ km}$$



M. 6.1.3. ábra

$$6.1.4. a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{25 - 15}{5} = 2 \text{ ms}^{-2}$$

A gyorsulás $a = 2 \text{ ms}^{-2}$

6.1.5. Gyorsulás az utfüggvényből

$$s = v_0 t - \frac{a}{2} t^2$$

$$0,2 = \frac{a}{2} \cdot 1$$

$$a = 0,4 \text{ ms}^{-2}$$

A nyolcadik másodpercben megtett út:

$$s = \frac{0,4}{2} (8^2 - 7^2) = 3 \text{ m.}$$

A sebességképletből:

$$24 = 0,4 t$$

$t = 60$ s. Tehát 1 perc alatt nő a sebessége 24 ms^{-1} -re.

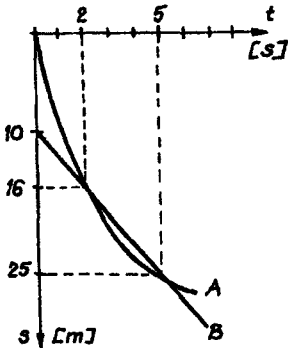
Az öt perc alatt megtett ut:

$$s = 0,4 \cdot \frac{(5 \cdot 60)^2}{2} = 18\,000 \text{ m} = 18 \text{ km}$$

6.1.6. Az A pont által megtett ut

$$x + 10 = v_{A0} \cdot t - \frac{a_A}{2} t^2 = 10t - \frac{2}{2} t^2$$

A B pont által megtett ut:



$$x = v_B t = 3t$$

$$3t = 10t - t^2 - 10$$

$$t_1 = 5 \text{ sec} \quad t_2 = 2 \text{ sec.}$$

$$x_1 = 15 \text{ m} \quad x_2 = 6 \text{ m}$$

Az M. 6.1.6. ábra az ut diagrammal ábrázolja.

6.1.7. Az első másodperc végén a sebesség:

$$v_1 = 15 - 9,81 \cdot 1 = 5,1 \text{ ms}^{-2}.$$

M. 6.1.6. ábra

Az első másodperc végén a magasság:

$$h_1 = 20 + 15 \cdot 1 - \frac{9,81}{2} 1^2 = 30,1 \text{ m.}$$

A tetőpontban a sebesség $v = 0$

$$15 - 9,81 \cdot t = 0$$

$$t = 1,53 \text{ s.}$$

A tetőpont magassága:

$$h = 20 + 15 \cdot 1,53 - \frac{9,81 \cdot 1,53^2}{2} = 31,5 \text{ m}$$

A talajra érkezés időpontjában a kezdőpontból mért távolság $h = 0$

$$20 + 15 \cdot t - \frac{9,81}{2} t^2 = 0$$

$$t = 4,06 \text{ s.}$$

A végsősebesség:

$$v = 15 - 9,81 \cdot 4,06 = -24,8 \text{ ms}^{-1}.$$

6.1.8. A két tömegpont találkozásának ideje:

$$t_1 = 5,08 \text{ s.}$$

A tömegpontok találkozásának helye:

$$y = 76,64 \text{ m.}$$

A találkozásakor a sebességek:

$$v_1 = -9,81 \text{ ms}^{-1} \quad v_2 = +9,81 \text{ ms}^{-1}, \text{ a második pontot } v_{o2} = 49,44 \text{ ms}^{-1} \text{ kell indítani, hogy az első tetőpontjában találkozzanak.}$$

6.1.9. A függőleges ut:

$$y = +h - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

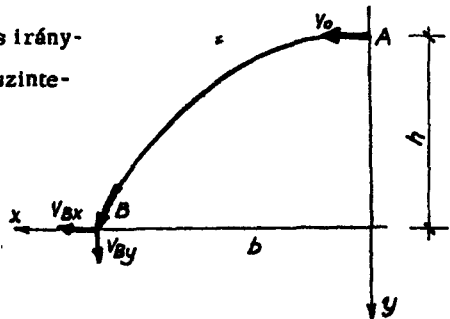
A v_o értéket, a vízszintes utból számítjuk.

A $v_{Bx} = v_o$, mert vízszintes irányban nincs gyorsulás. A vízszintesen megtett út:

$$b = v_o t = v_o \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

A kezdősebesség:

$$v_o = \frac{b}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}.$$



M. 6.1.9. ábra

A végsebesség függőleges összetevője a sebességképleteből:

$$v_{By} = -gt = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

A végsebesség:

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{v_o^2 + 2gh} = \sqrt{\frac{b^2 g}{2h} + 2hg}.$$

6.1.10. Felírjuk az ut x és y irányu vetületét

$$x = x_o + v_{ox} t + a_x \frac{t^2}{2} \quad y = y_o + v_{oy} t + a_y \frac{t^2}{2}$$

$$3a = tv_o \cos 30^\circ \quad 0 = 2 + \frac{6,93}{v_o} \cdot v_o \sin 30^\circ - \frac{9,81}{2} \cdot \frac{6,93^2}{v_o^2}$$

$$t = \frac{6,93}{v_o} \text{ sec.} \quad v_o = \sqrt{\frac{235,4}{5,46}} = 6,56 \text{ ms}^{-1}.$$

$$t = \frac{6,93}{6,56} = 1,056 \text{ s.}$$

A kezdősebesség $v_o = 6,56 \text{ ms}^{-1}$

A célbeéréshez szükséges idő $t = 1,06 \text{ s.}$

6.1.11. Az ut x és y irányu vetületei:

$$x = \frac{2}{2} t^2 \quad y = 4t.$$

A két vetületből a pálya egyenlete meghatározható.

$$t = \frac{y}{4} \quad x = t^2 = \frac{y^2}{16}$$

$$16x - y^2 = 0.$$

Az $x = 4 \text{ m}$ koordinátájú pont elérésének időpontja:

$$4 = t^2 \quad t = 2 \text{ s.}$$

A görbe érintőjének iránya megegyezik a sebességvektor irányával.

$$v_x = e \cdot 2 = 4 \text{ ms}^{-1} \quad v_y = 4 \text{ ms}^{-1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{4} \quad \alpha = 45^\circ$$

Az érintőirányú és normálirányú gyorsulás-összetevő megegyezik:

$$a_n = a_t = 2 \cdot \sin 45^\circ = 1,41 \text{ ms}^{-2}$$

6.1.12. A becsapódás helyének vízszintes távolsága:

$$x = 632 \text{ m.}$$

A becsapódás sebessége:

$$v_x = 100 \text{ ms}^{-1} \quad v_y = 63,2 \text{ ms}^{-1}$$
$$v = 118,3 \text{ ms}^{-1}$$

6.1.13. Megoldások

$$x = 2 \text{ m}$$

$$\alpha = 63^\circ 26'$$

$$v_0 = 7 \text{ ms}^{-1}$$

6.1.14. Szögsebesség:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 40}{60} = 4,19 \text{ s}^{-1}.$$

Kerületi sebesség:

$$v = r \omega = 2,5 \cdot 4,19 = 10,5 \text{ ms}^{-1}.$$

Normáltis gyorsulás:

$$a_n = r \omega^2 = 2,5 \cdot 4,19^2 = 43,9 \text{ ms}^{-2}.$$

6.1.15. A sebességeket felírjuk a szögsebesség segítségével:

$$v_1 = r_1 \omega \quad v_2 = r_2 \omega.$$

$$v_2 - v_1 = (r_2 - r_1) \omega$$

$$\omega = \frac{13 \cdot 7}{0,3} = 20 \text{ s}^{-1}.$$

6.1.16. A megoldás:

$$\omega = 25 \text{ s}^{-1}$$

$$n = 3,98 \text{ s}^{-1}$$

6.1.17. A szögsebesség:

$$\omega = 157 \text{ s}^{-1}$$

$$K = 31,4 \text{ s}^{-2}$$

6.1.18. Az M. 6.1.18. ábrán a nagymutatót A-val a kismutatót B-vel jelöltük.

$$t = 16,35 \text{ perc}$$

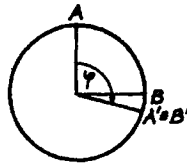
6.1.19. Megoldások

$$v = 6 \text{ ms}^{-1}$$

$$K = 2 \text{ s}^{-2}$$

$$\bar{a}_c = 2 \text{ ms}^2$$

$$a = 36,1 \text{ ms}^2.$$



M. 6.1.18. ábra

6.2 A merev testek kinematikája

6.2.1. A szögsebesség:

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{7,2}{4,5} = 1,6 \text{ s}^{-1}$$

$$v_B = r_B \omega = 3 \cdot 1,6 = 4,8 \text{ ms}^{-1}$$

$$v_C = r_C \omega = 5,2 \cdot 1,6 = 8,32 \text{ ms}^{-1}$$

$$a_A = r_a \omega^2 = 4,5 \cdot 1,6^2 = 11,52 \text{ ms}^{-2}$$

$$a_B = r_c \omega^2 = 5,2 \cdot 1,6^2 = 13,31 \text{ ms}^{-2}.$$

6.2.2. A gyorsulásvektor 45° -ot zár be az érintővel, ezért az érintőirányu és a normális gyorsulás egyenlő.

$$a_e = a_n = a \sin 45^\circ = 2 \text{ ms}^{-2}.$$

A görbületi sugár:

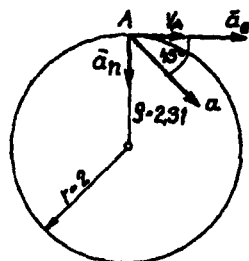
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2,15^2}{2} = 2,31 \text{ m}.$$

A szögsebesség:

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{2,15}{2,31} = 0,931 \text{ s}^{-1}.$$

A szöggyorsulás:

$$K = \frac{a_e}{\rho} = \frac{2}{2,31} = 0,87 \text{ s}^{-2}$$



M. 6.2.2. ábra

6.2.3. A megoldás

$$\varphi_B = 8 \cdot 10^{-3}$$

$$\varphi_A = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$e_{cy} = -24 \text{ mm}$$

6.2.4. A középpont sebessége:

$$v_s = 6,28 \text{ ms}^{-1}.$$

Körfordulatok száma:

$$n = 4.$$

A középpont szögsebessége (a nagy körhöz viszonyítva)

$$\omega = 1,045 \text{ s}^{-1}.$$

A kis körlap szögsebessége

$$\omega_1 = 4,2 \text{ s}^{-1}.$$

6.3 Az anyagi pont kinetikája

6.3.1. A Newton-törvényt felírjuk a rendszerre:

$$F = m \cdot a$$
$$240 - (8 + 6 + 3) \cdot 9,81 = (8 + 6 + 3) a$$
$$a = \frac{73,23}{17} = 4,31 \text{ ms}^{-1}.$$

A felső pontra felírva a tételt:

$$240 - 8 \cdot 9,81 - S_1 = 8 \cdot 4,31$$
$$S_1 = 127 \text{ N}.$$

A törvényt az alsó pontra felírva.

$$S_2 - 3 \cdot 9,81 = 3 \cdot 4,31$$
$$S_2 = 42,3 \text{ N}.$$

6.3.2. Newton törvény alapján:

$$(14 + 8 + 12) \cdot 9,81 = (14 + 8 + 12) a$$
$$a = 2,88 \text{ m}^{-2}$$

A baloldali súly esetén:

$$S_1 - 12 \cdot 9,81 = 12 \cdot 2,88$$
$$S_1 = 152 \text{ N}.$$

A jobboldali alsó súlynál:

$$14 \cdot 9,81 - S_2 = 14 \cdot 2,88$$
$$S_2 = 97 \text{ N}.$$

6.3.3. A lejtő irányu erőkomponens:

$$G \sin \alpha = 400 \cdot 0,5 = 200 \text{ N}.$$

A lejtő irányban 200 N húzóerő szükséges.
A vízszintes húzóerő lejtőirányú összetevője

$$F \cos \alpha = G \sin \alpha$$
$$F = G \operatorname{tg} \alpha = 400 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \underline{\underline{231 \text{ N}}}.$$

6.3.4. A felvonó kötelében keletkező erő:

$$S = 2666 \text{ N.}$$

A felvonó fenekére ható erő:

$$N = 1066 \text{ N.}$$

6.3.5. Megoldás:

$$a = 0,421 \text{ ms}^{-2}$$

$$S' = 36,17 \text{ N.}$$

6.3.6. Megoldás

$$F = (m_1 + m_2 + m) \frac{m_1}{m_2} \cdot g.$$

6.3.7. A megoldás munkatételével történik

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = \int_0^s F ds$$

$$\int F ds = 4 \text{ J} \quad m = 2 \text{ kg}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{2}} = 2 \text{ ms}^{-1}$$

6.3.8. A szán mindhárom esetben egyenletesen mozog, tehát a ráható erők eredője nulla. Irjuk fel ezt a mozgás irányával párhuzamos erőkomponensekre.

$$\text{Felfelé: } F_1 - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Lefelé: } F_2 + mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Vízszintesen } F_3 = \mu mg = 0.$$

Mivel a teljesítmény állandó

$$P = F_1 v_1 = F_2 v_2 = F_3 v_3.$$

Ebből:

$$F_1 + F_2 = \frac{P}{v_1} + \frac{P}{v_2}$$

$$F_1 + F_2 = 2 mg \cos \alpha = \frac{P}{v_1} + \frac{P}{v_2} .$$

$$\mu = \frac{P (v_1 + v_2)}{v_1 v_2 2 mg \cos \alpha}$$

$$P = F_3 v = \mu mg v$$

$$P = \frac{P (v_1 + v_2)}{v_1 v_2 \cdot 2 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha} m \cdot g \cdot v .$$

$$v = 2 \cos \alpha = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \quad \cos \alpha \approx 1$$

$$v = \frac{6 \cdot 8}{6 + 8} = 6,8 \text{ ms}^{-1} . \quad \begin{array}{l} v_1 = 6 \\ v_2 = 8 \end{array}$$

6.3.9

$$a = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{60 - 0,2 \cdot 20 \cdot 9,81}{20} = 1,038 \text{ ms}^{-2} .$$

6.3.10.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{Rg} = \frac{625}{9,81 \cdot 600} = 0,103$$

$$e = 10,6\% .$$

6.3.11. Impulzus tétel:

$$mv_1 - mv_0 = \int_0^t (F - mg \mu) dt \quad v = \frac{72}{3,6} = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$20 \cdot 20 = (F - 0,12 \cdot 20 \cdot 9,81) 25 \cdot 60$$

$$F = \frac{400}{1500} + 23,54 = 23,81 \text{ kN} .$$

6.3.12. A sebesség: $v = \frac{8}{3,6} = 2,2 \text{ ms}^{-1} .$

A visszatartó erő: $F = mg(e + \mu) = 20 \cdot 9,81 \cdot (12 + 4)$.

$F = 3139 \text{ N}$.

Munkatétel:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -F \int_0^s ds.$$

$$-20 \cdot 10^3 \frac{2,2^2}{2} = -3139 \cdot s$$

$s = 15,4 \text{ m}$.

6.3.13. Munkatétellel az AC utra:

$$\frac{mv_c^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \int_A^c R ds$$

$$v_A = \frac{30}{3,6} = 8,33 \text{ ms}^{-2}$$

$$0 - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 8,33^2}{2} = 20 \cdot 9,81 (8-2) \cdot 300 - 20 \cdot 9,81 \cdot 1,5 x;$$

$x = 3558 \text{ m}$.

Az időt impulzus tétellel számítjuk.

Elsőször azonban meg kell határozni a B pontbeli sebességet.

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = mg(e - \mu_1) s$$

$$\frac{20 \cdot 10^3}{2} v_B^2 - \frac{20 \cdot 10^3}{2} 8,33^2 = 20 \cdot 9,81 (8-2) \cdot 300$$

$$v_B = 10,23 \text{ ms}^{-1}.$$

Impulzus tétel:

$$mv_B - mv_a = mg(e - \mu_1) t_{AB}$$

$$20 \cdot 10^3 \cdot 10,23 - 20 \cdot 10^3 \cdot 8,33 = 20 (8-2) 9,81 \cdot t_{AB}$$

$$t_{AB} = 32,3 \text{ s.}$$

$$mv_C - mv_B = mg (\mu_2) t_{BC}$$

$$0 - 20 \cdot 10^3 \cdot 10,23 = 20 \cdot 9,81 \cdot 1,5 t_{BC}$$

$$t_{BC} = 695,2 \text{ s}$$

$$t = 695,2 + 32,3 = 727,5 \text{ s.}$$

6.3.14. Tolatási hossz:

$$x = 240 \text{ m.}$$

Az első szakasz ideje : $t_1 = 49,3 \text{ s.}$

A második szakasz ideje: $t_2 = 123,5 \text{ s.}$

$$t = 172,8 \text{ s.}$$

6.3.15. Munkatétellei:

$$- x (4+2) \cdot 20 \cdot 9,81 + 20 \cdot 9,81 (6-2) \cdot 50$$

$$x = 33,3 \text{ m.}$$

A lejtő alján a sebesség először:

$$v_1 = 1,98 \text{ ms}^{-1}$$

A lejtő alján a sebesség másodszor :

$$v_2 = 1,14 \text{ ms}^{-1}$$

6.3.16. A menetellánállás

$$\mu = \frac{2s}{gt^2} = \frac{2 \cdot 146}{9,81 \cdot 72^2} = 0,0057$$

$$\mu = 5,7 \text{ N/kN.}$$

6.3.17. A határesetben a súly erő egyenlő a centrifugális erővel:

$$mg = m \frac{v^2}{R} \quad v^2 = Rg.$$

Munkatétellei:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} - 0$$

$$2gh = Rg$$

$$h = \frac{R}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m.}$$

6.3.18. Akkor hagyja el a körpályát, amikor a centrifugális erő egyenlő a normálerővel.

$$mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{r}$$

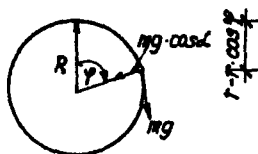
$$v = \sqrt{2g(r - r \cos \varphi)}$$

$$mg \cos \varphi = \frac{m \cdot 2g(r - r \cos \varphi)}{r}$$

$$\cos \varphi = 2 - 2 \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{2}{3}$$

$$\varphi = 48^{\circ}11'$$



M. 6.3.18. ábra

6.3.19. A megoldás:

$$v_{\max} = \sqrt{R f g} = \sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 10}$$

$$v_{\max} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36 \text{ km/h.}$$

6.3.20 Megoldás:

$$\text{tg } \alpha = 0,059$$

$$d = 0,059 \cdot 1,5 = 0,085 \text{ m a túlemelés.}$$

A második esetben a külső sínzárakat süllyeszteni kellene, ez gyakorlatilag nem fordulhat elő.

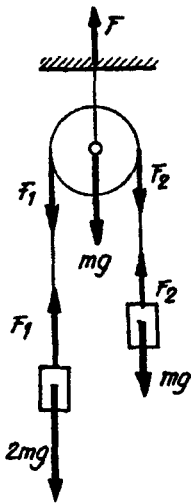
6.4 A merev testek kinetikája

6.4.1. A tengelyre vett inercianyomaték:

$$I_y = 2h \pi \gamma \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

$$6.4.2. \quad I_y = m \frac{R^2 - r^2}{2}$$

6.4.3. Az egyes kötelekre ható erők az ábrán láthatók. Felírjuk a testekre a Newton törvényt.



$$2mg - F_1 = 2ma$$

$$F_2 - mg = ma.$$

A speciális perdülettétel:

$$F_1 r - F_2 r = IK = I \frac{a}{r}.$$

A korong tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = \frac{mr^2}{2}$$

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2} ma.$$

A három ismeretlenes egyenletrendszert megoldva a következő eredményeket kapjuk:

M. 6.4.3. ábra

$$a = \frac{2}{7} \cdot g$$

$$F_1 = \frac{10}{7} mg$$

$$F_2 = \frac{9}{7} ma.$$

A mennyezetre ható erők összege nulla:

$$F - F_1 - F_2 - mg = 0$$

$$F = \frac{26}{7} mg.$$

6.4.4. Felírva a speciális perdülettételt:

$$M = IK$$

$$S \cdot r = \frac{mr^2}{2} K$$

$$S = \frac{mr}{2} K.$$

Felírjuk a Newton-tételt:

$$m \cdot g - S = m \cdot a$$

$$m \cdot g - S = m \cdot r \cdot K$$

$$S = mg - mrK$$

$$\frac{mr}{2} \cdot K = mg - mrK$$

$$\frac{3}{2} r \cdot K = g$$

$$K = \frac{2}{3} \frac{g}{r}.$$

6.4.5. Az m_2 tömegű hasábra felírjuk a Newton törvényt.

$$m_2 g - S = m_2 a_2$$

A hengerre felírjuk a Newton törvényt és a perdület tételt:

$$S - F_S = m_1 a_1$$

$$(S - F_3) r = IK.$$

$$a_1 = r K \quad I = \frac{1}{2} m_1 r^2$$

$$\text{A hasáb utja } s_2 = \frac{a_2}{2} t^2$$

$$\text{A henger utja } s_1 = \frac{a_1}{2} t^2$$

$$a_2 = 2s_1$$

$$\frac{a_2}{2} t^2 = 2 \frac{a_1}{2} t^2$$

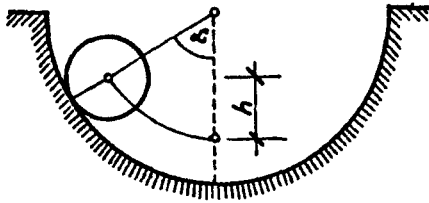
$$a_2 = 2a_1$$

Ezeket behelyettesítve az egyenletekbe a következő eredményeket kapjuk:

$$S = \frac{3m_1 m_2}{3m_1 + 8m_2} g, \quad a_1 = \frac{4m_2}{3m_1 + 8m_2} \cdot g, \quad a^2 = 2a_1$$

6.4.6. Megoldás:

$$S = \frac{mg}{3}, \quad a_s = \frac{2g}{3}.$$



M. 6.4.7. ábra

6.4.7. Az ábra szerint a henger súlypontja mialatt a vályu aljára ér:

$$h = (R - r) (1 - \cos 60^\circ) = \frac{3}{8}R$$

távolsággal mélyebbre kerül. A munka ezalatt:

$$W = mg \frac{3}{8}R.$$

A mozgási energia a legördülés alatt:

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Az energia különbség egyenlő a munkával:

$$mg \frac{3}{8}R = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} I \omega^2, \quad \omega = \frac{v}{r}, \quad I = \frac{mr^2}{2}$$

Behelyettesítés után:

$$v = \sqrt{\frac{gr}{2}}.$$

6.4.8. A korong sebessége: $v = 0,817 \sqrt{2gh}$.

A karika sebessége: $v = 0,707 \sqrt{2gh}$.

$$h = s \sin \alpha.$$

A korong gyorsulása: $a = \frac{2g}{3} \sin \alpha$, független az uttól.

A karika gyorsulása: $a = \frac{g}{2} \sin \alpha$.

6.4.9. A megoldás:

$$\cos \varphi = \frac{3}{4} \frac{8}{8(1 - 1 \cos \varphi)}$$

$$\cos \varphi = 0,571$$

$$\varphi = 48^{\circ}11'$$



TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	3
2. Az elemi szilárdságtan	5
2.1. A síkidomok jellemző mennyiségei	5
2.1.1. A súlypont és a síkidomok elsőrendű nyomatékai	5
2.1.2. A síkidomok másodrendű nyomatékai	11
2.2. A feszültségek meghatározása egyszerű igénybevételek esetén	15
2.2.1. A tiszta húzás és nyomás	15
2.2.2. A tiszta nyírás	18
2.2.3. Az egyszerű egyenes hajlítás	20
2.2.4. A tiszta csavarás	21
2.3. A feszültségek meghatározása összetett igénybevételek esetén	23
2.3.1. A ferde hajlítás	23
2.3.2. A külpontos húzás és nyomás	25
2.3.3. A hajlított és nyírt tartó	27
2.4. A főfeszültségek meghatározása	29
2.4.1. A síkbeli feszültségállapot	29
3. A tartók alakváltozása	31
3.1. A síkbeli tartók alakváltozása	31
3.1.1. A kis elmozdulások elmélete, a láncolatok	31
3.1.2. A tartók alakváltozásának meghatározása kis elmozdulások elméletével	31
3.1.3. A tömör tartók alakváltozásának meghatározása munkatétellel	34
3.1.4. A rácsos tartók alakváltozásának meghatározása munkatétellel	36
4. A statikailag határozatlan tartók	38
4.1. A statikailag határozatlan tartók megoldásának képletei	38
4.2. A statikai határozatlanság fokának meghatározása	39
4.3. A statikailag határozatlan tömör tartók megoldása erőműdszerrel	40

4.4. A statikailag határozatlan rácsos tartók megoldása erőműdszerrel	44
5. A kihajlás	47
6. A mechanikai mozgások	50
6.1. Az anyagi pont kinematikája	50
6.2. A merev testek kinematikája	54
6.3. Az anyagi pont kinetlkája	55
6.4. A merev testek kinetlkája	59

MEGOLDÁSOK

1. Bevezetés	62
2. Az elemi szllárdságtan	63
2.1. A síkidomok jellemző mennyiségei	63
2.1.1. A sulypont és a síkidomok elsőrendű nyomatékai	63
2.1.2. A síkidomok másodrendű nyomatékai	68
2.2. A feszültségek meghatározása egyszerű igénybevételek esetén	79
2.2.1. A tiszta huzás és nyomás	79
2.2.2. A tiszta nyírás	82
2.2.3. Az egyszerű egyenes hajlítás	85
2.2.4. A tiszta csavarás	87
2.3. A feszültségek meghatározása összetett igénybevételek esetén	88
2.3.1. A ferde hajlítás	88
2.3.2. A külpontos huzás és nyomás	97
2.3.3. A hajlított és nyírt tartó	98
2.4. A főfeszültségek meghatározása	103
2.4.1. A síkbeli feszültségállapot	103
3. A tartók alakváltozása	107
3.1. A síkbeli tartók alakváltozása	107
3.1.1. A kis elmozdulások elmélete, láncolatok	107
3.1.2. A tartók alakváltozásának meghatározása kis elmozdulások elméletével	109
3.1.3. A tömör tartók alakváltozásának meghatározása munkatétellel	112
3.1.4. A rácsos tartók alakváltozásának meghatározása munkatétellel	113

.....g határozatlan tartók	116
.....tikai határozatlanság fokának meghatározása	116
.....tikailag határozatlan tömör tartók megoldásadszerrel	118
.....tikailag határozatlan rácsos tartók megoldásadszerrel	127
.....	134
.....kai mozgások	134
.....yagi pont kinematikája	134
.....rev testek kinematikája	140
.....yagi pont kinetikája	142
.....rev testek kinetikája	148

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
www.ntk.hu
Vevőszolgálat: info@ntk.hu
Telefon: 06 80-200-788

A kiadásért felel: Jókai István vezérigazgató
Raktári szám: J 19477
Felelős főszerkesztő: Csuka Tünde
Műszaki szerkesztő: Görög Istvánné
Utánnomásra előkészítette: Laki Péter
Terjedelem: 13,7 (A/5) ív

A tizennegyedik kiadás változatlan utánnomása, 2009.

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben
a nyomda alapításának 127. esztendejében
Felelős vezető Papp Lajos vezérigazgató
Tel.: 66/887-400
<http://www.gyomai-kner.hu>;
e-mail: knernyomda@gyomai-kner.hu