

# Elektrotechnika

Ballagi Áron

# Bemutakozás

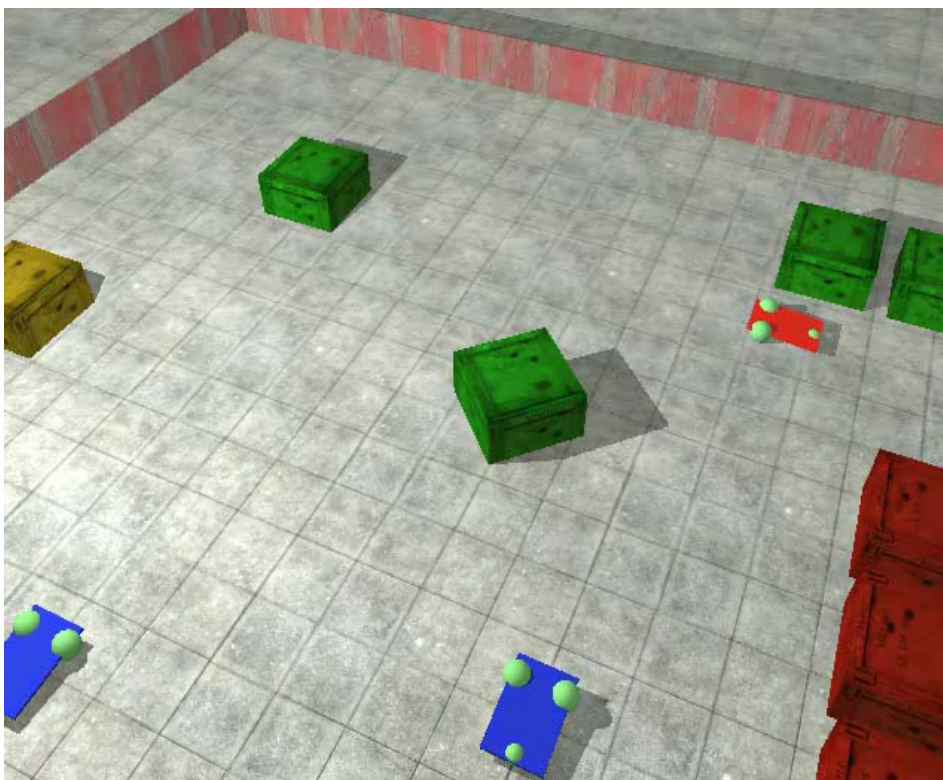
- Ballagi Áron egyetemi adjunktus
  - Széchenyi István Egyetem, Automatizálási Tanszék
  - C707-es szoba
  - Tel.: 3255
  - E-mail: [ballagi@sze.hu](mailto:ballagi@sze.hu)
  - Web: <http://www.sze.hu/~ballagi/elektrotechnika/>

# Amivel foglalkozom: Robotok intelligens irányítása

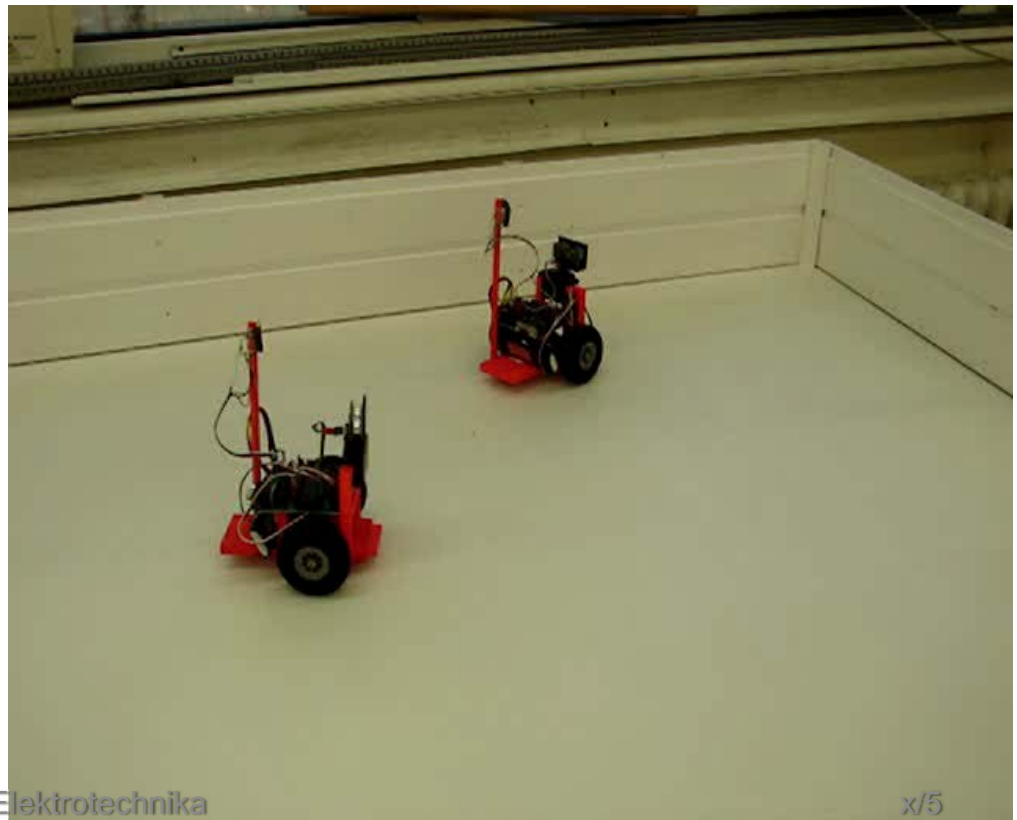
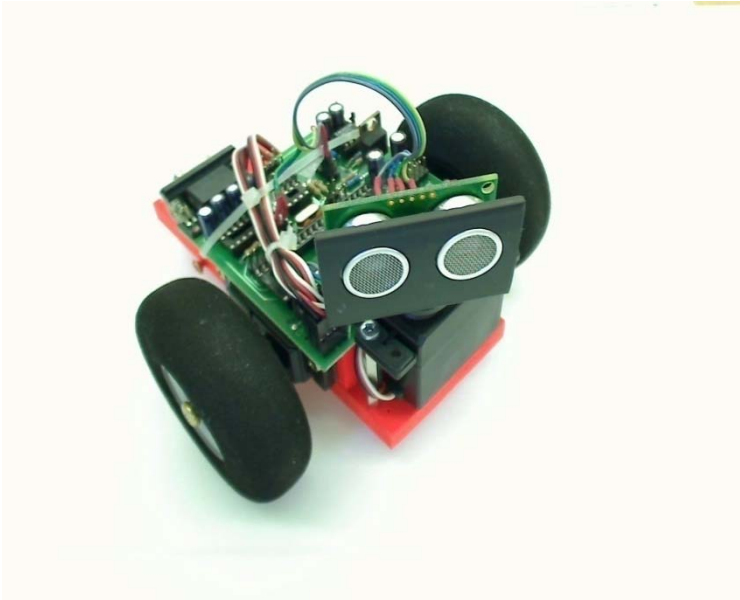
- Ipari robotok
- Autonóm mobil robotok
- Robot kooperáció
  - Fuzzy kommunikáció
  - Szimuláció
  - Távvezérlés
  - Mikro robotok

# Robot szimuláció

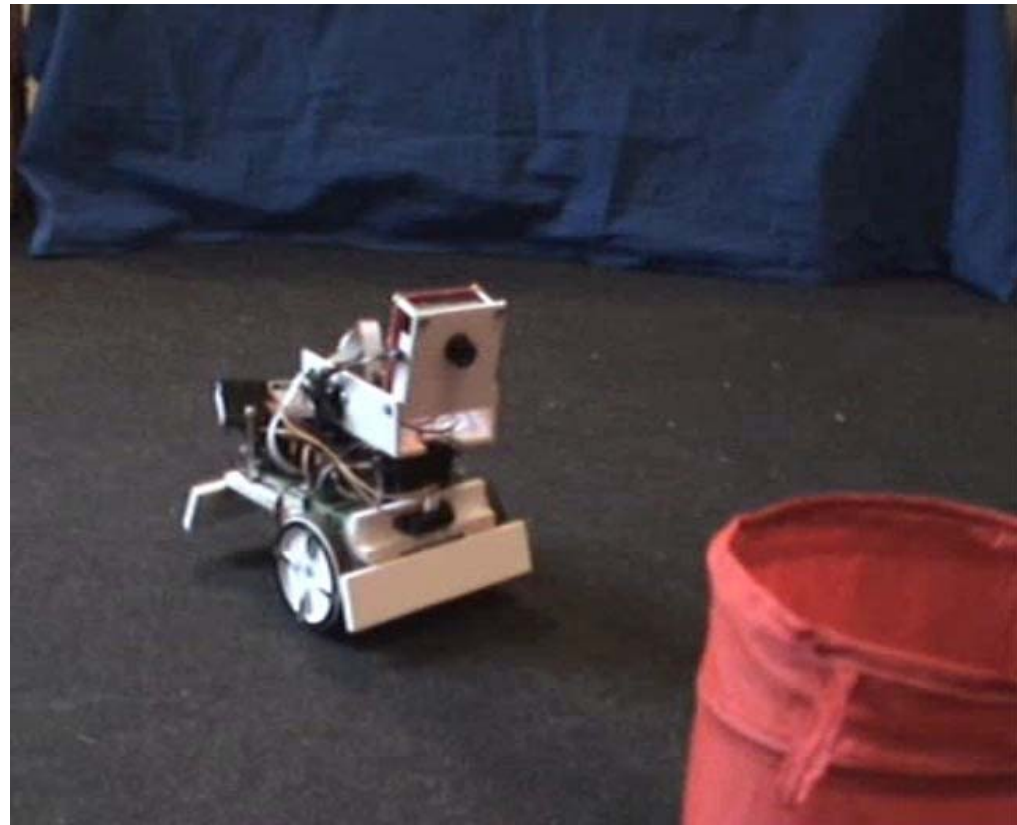
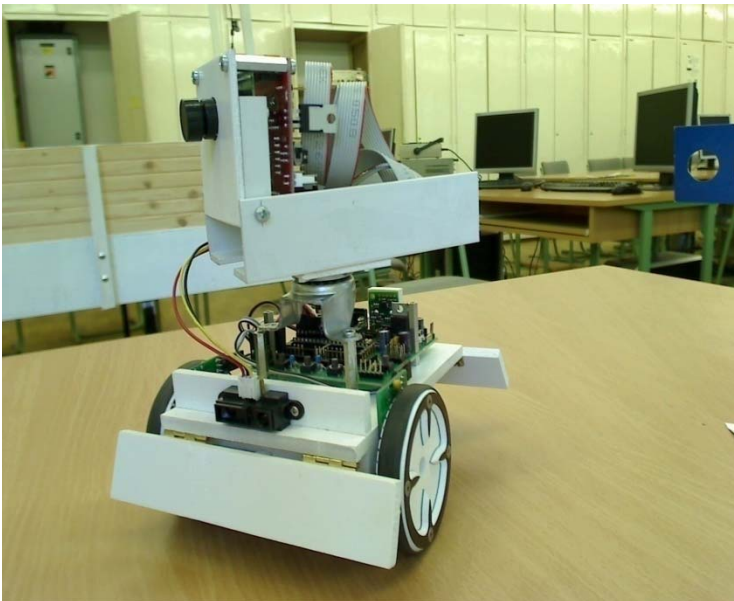
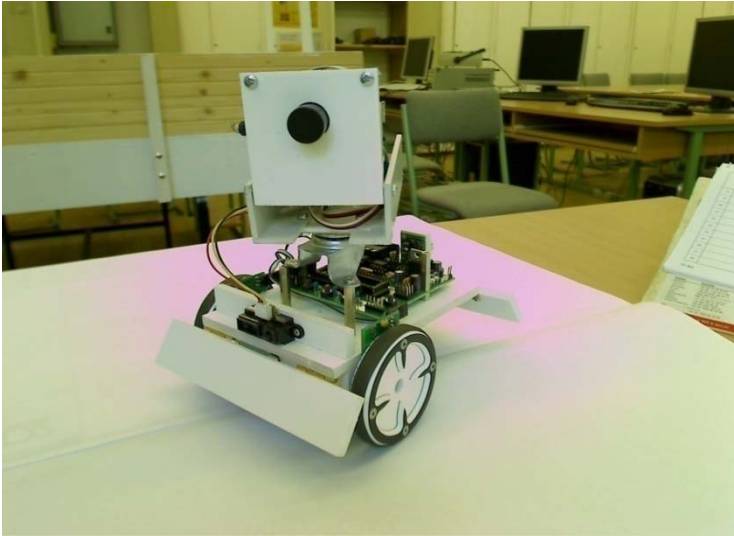
- Marilou Robotics Studio
- ICE - távvezérlés



# Kísérleti mikro robotok



# Kísérleti mikro robotok



# Elektrotechnika

# Tematika

- **Villamosságtan alapjai**
- **Hálózatszámítás**
  - Egyenáramú hálózatok
  - Váltakozóáramú hálózatok
- **Villamos és mágneses tér**
- **Villamos gépek**
  - Transzformátorok
  - Aszinkron gépek
  - Szinkron gépek
  - Egyenáramú gépek
  - Különleges gépek



# Irodalom

- Dr. Hodossy László, *Elektrotechnika* c. jegyzet, Universitas-Győr Kht. Győr, 2006.  
<http://jegyzet.sze.hu/>
- Selmeczi-Schnöller: *Villamosságatan I-II.* 49203/I-II. KKVMF

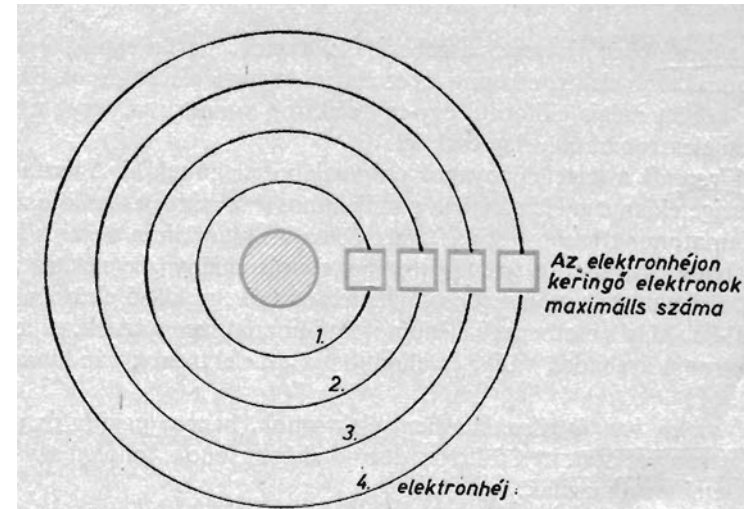
# Követelmények

- Előadás látogatása
- Vizsga
  - Félév teljes anyagából, gyakorlat orientált, írásban
- Kreditátvitel feltételei:
  - Felsőfokú, leckekönyvvel és tematikával igazolt tárgy. Középiskola nem elfogadható!
- Megajánlott jegy:
  - Szakirányú tanulmányok igazolása bizonyítvánnyal és tematikával.
  - Minimum 4 (jó) szintű érdemjegy.
  - Beadás a 2009.09.14-ei előadáson (után)!

# Villamosságtan alapjai

# Az atom szerkezete

- Atommag
  - Proton – pozitív töltés
  - Neutron - semleges
- Elektronhéj
  - Elektronok – negatív töltés
  - Az elektron héjon keringő elektronok száma :  $2 \cdot K^2$



# Elektromos töltések

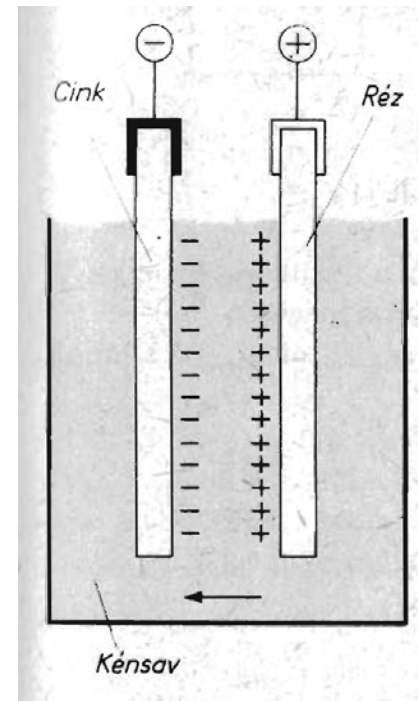
- A villamos jelenségek alapja az *elemi töltések* létezése.
  - Proton töltés:  $Q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} C$
  - Elektron töltése:  $Q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$
- A töltés
  - jelölése:  $Q$
  - mértékegysége a *Coulomb*, jele:  $C$ 
    - $1C = 6.25 \cdot 10^{18} e = 6.25$  trillió elektron
- Az elektromos töltések egymásra ható ereje lehet vonzó és taszító – egyneműek taszítják, különeműek vonzzák egymást.
- Megkülönböztetünk, *pozitív* és *negatív* töltéseket

# Vezető, szigetelő, félvezető anyagok

- **Vezetők**
  - főleg a fémek és a szén
  - külső héjon 1÷3 elektron, könnyű leadás és felvétel
- **Szigetelők**
  - külső héjon 4 vagy több elektron, nehéz kiszakítás és helyfoglalás
- **Félvezetők**
  - vezetővel „szennyezett” szigetelő, „lyuk” alakulnak ki ahol az elektron már át tud lépni. pl. szilícium alumíniummal szennyezve

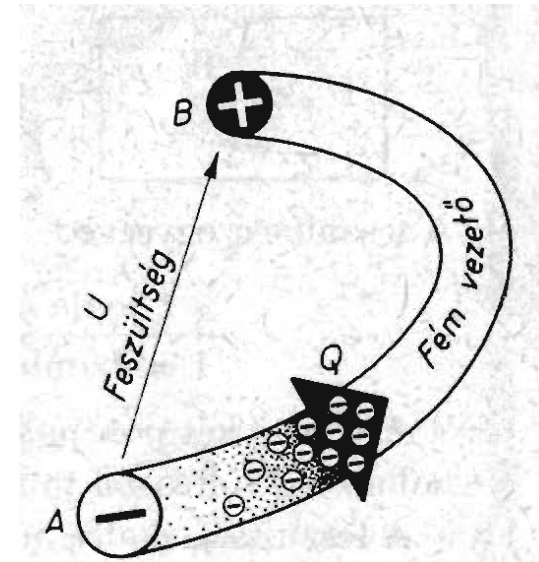
# Galvánelem

- A kémiai folyamat elektronhiányt, illetve –fölösleget eredményez
  - cink lemez – elektronfölösleg (negatív pólus)
  - réz lemez – elektronhiány (pozitív pólus)



# Töltés (elektron) áramlás

- Ha a galvánelem pólusait egy fém vezetővel összekötjük, akkor az elektronok „átfolynak” cink lemezről a réz lemezre.
  - elektromos feszültség
  - elektromos áram





# Elektromos feszültség

A  $Q$  töltés mozgatása közben végzett  $W$  munka és a  $Q$  töltés hányadosával meghatározott fizikai mennyiség a feszültség.

$$U = \frac{W}{Q}$$

- Az elektromos feszültség valójában egy elektromos áramkör két pontja közötti töltés vagy potenciál különbség.
- Más megfogalmazásban: egy elektromos mezőben létrejövő helyzeti energia, ami elektromos áramot hoz létre egy elektromos vezetőben.
  - jelölése:  $U$
  - mértékegysége: *volt*, jele:  $V$
- A feszültség „*esik*”

$$[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{1 \text{ joule (J)}}{1 \text{ coulomb (C)}} = 1 \text{ volt (V)}$$

# Jellemző feszültségek

Normáalelem	1.0183	V
Szárazelem	1.5	V
Akkumulátorcella	2	V
Gépjármű-akkumulátor	6-12	V
Kéziszerszám-motor	24-42	V
<b>Érinthető feszültség felső határa</b>	<b>65</b>	<b>V</b>
Lakások villamos hálózata	230 (220)	V
Közúti villamos	550	V
Helyiérdekű villamos	1000	V
Városi kábel hálózatok	3000-5000	V
Erőművi generátorok	10000	V
Nagyvasúti vontatás	25000	V
Távvezetékek	30000-60000	V
Országos távvezetékek	110000	V
Nemzetközi távvezetékek	220000	V
Transzkontinentális távvezetékek	750000-1000000	V

# Szabványos feszültség elnevezések

- 42 V-ig törpefeszültség
- 42 – 250 V kisfeszültség
- 250 V felett nagyfeszültség

# Elektromos áram

A vezető keresztmetszetén áthaladó  $Q$  töltés és a töltés áthaladásához szükséges  $t$  idő hányadosával meghatározott fizikai mennyiség az áramerősség

$$I = \frac{Q}{t}$$

- Az elektromos töltések mozgását, áramlását az elektromos árammal jellemezzük.
  - jelölése:  $I$
  - mértékegysége: *amper*, jele:  $A$
- Az áram „*folyik*”

$$\frac{1 \text{ coulomb (C)}}{1 \text{ szekundum (s)}} = 1 \text{ amper (A)}$$

# Jellemző áramerősségek

Észlelhető alsó határ	0.01	A
<b>Halálos áramerősség (szíven áthaladva)</b>	<b>0.1</b>	<b>A</b>
Mosógép	1-5	A
Vasaló	2-5	A
Hőkandalló	10-20	A
Szerszámgép motor	10-50	A
Gépjármű-indítómotor indításkor	100-200	A
Televízióadók	100-1000	A
Nagyvasúti mozdony indításkor	1000-1500	A
Alumínium elektrolízis	10000-50000	A
Villám	50000-100000	A

# A villamos töltés „új” definíciója

A coulomb az a villamos töltés, amely 1 amper állandó erősségű áramot vivő villamos vezető bármely keresztmetszetén 1 másodperc idő alatt áthalad.

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

- Az As helyett a gyakorlatban általában az amper-órát (Ah) használjuk

$$1 \text{ Ah} = 3600 \text{ As}$$

# Feladatok

1. Egy fémvezetőben  $Q = 2 \text{ C}$  töltés áramlik, és közben  $W = 200 \text{ J}$  munkát végez. Mekkora a feszültség a vezető két végpontja között?

$$U = \frac{W}{Q} = \frac{200 \text{ J}}{2 \text{ C}} = 100 \text{ V}$$

2. Mekkora munkát végez  $Q = 10 \text{ C}$  töltés, ha  $U = 220 \text{ V}$  feszültségű pontok között áramlik?

$$W = Q \cdot U = 10 \text{ C} \cdot 220 \text{ V} = 2200 \text{ J}$$

3. Mekkora töltés végez  $W = 3800 \text{ J}$  munkát  $U = 190 \text{ V}$  feszültségű pontok között?

$$Q = \frac{W}{U} = \frac{3800 \text{ J}}{190 \text{ V}} = 20 \text{ C}$$

# Feladatok

4. Mekkora munkát végez egy elektron, ha  $U = 1 \text{ V}$  feszültségű pontok között „repül át”?

A töltés az elektron töltése, vagyis:

$$Q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Az elektron által végzett munka:

$$W = e \cdot U = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Az atomfizikában egyetlen elektron 1 V feszültségű pontok közötti munkáját külön egységként kezelik, neve: *elektronvolt*, jele: eV

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

5. Mekkora az áramerősség az 1. példában, ha  $t = 0.1 \text{ s}$ ? ( $Q = 2 \text{ C}$ )

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{2 \text{ C}}{0.1 \text{ s}} = 20 \text{ A}$$



# Feladatok

6. Mekkora töltés halmozódik fel egy akkumulátorban, ha  $I = 50 \text{ mA}$  áramerősség  $t = 2 \text{ h}$  ideig tölti?

$$I = 50 \text{ mA} = 50 \cdot 0.001 = 0.05 \text{ A}$$

$$t = 2 \text{ h} = 7200 \text{ s}$$

$$Q = I \cdot t = 0.05 \text{ A} \cdot 7200 \text{ s} = 360 \text{ C}$$

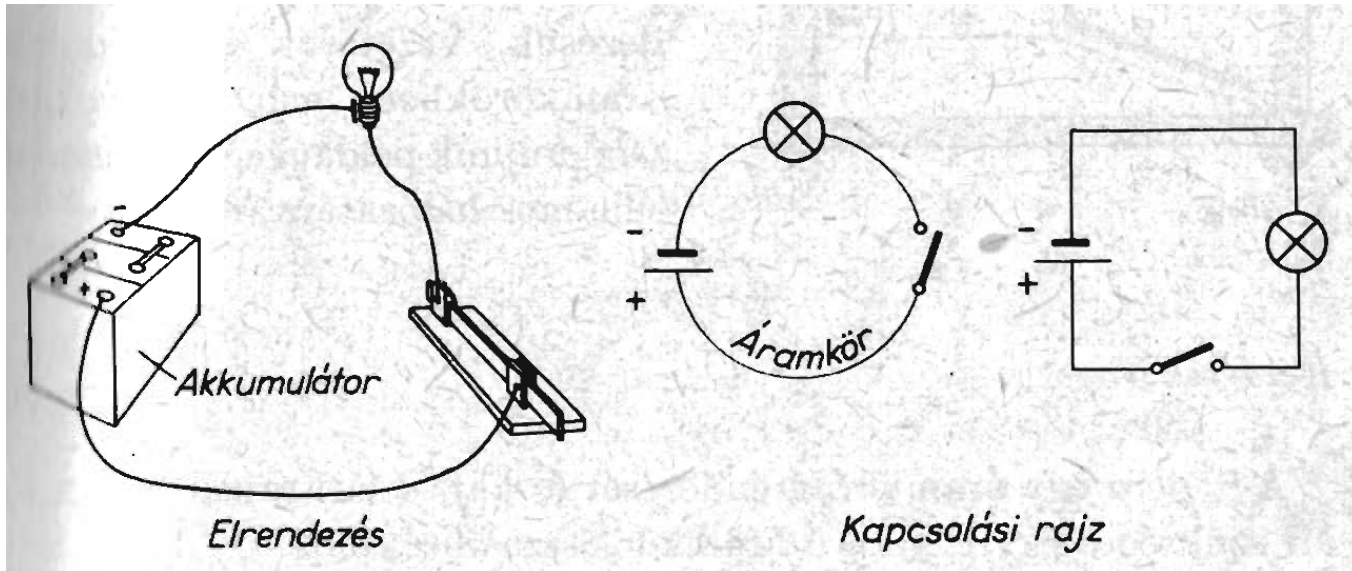
$$Q = 0.05 \text{ A} \cdot 2 \text{ h} = 0.1 \text{ Ah}$$

7. Mennyi idő alatt halmozódik fel  $Q = 60 \text{ Ah}$  villamos töltés, ha az áramerősség  $I = 8 \text{ A}$ ?

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{60 \text{ Ah}}{8 \text{ A}} = 7.5 \text{ h}$$

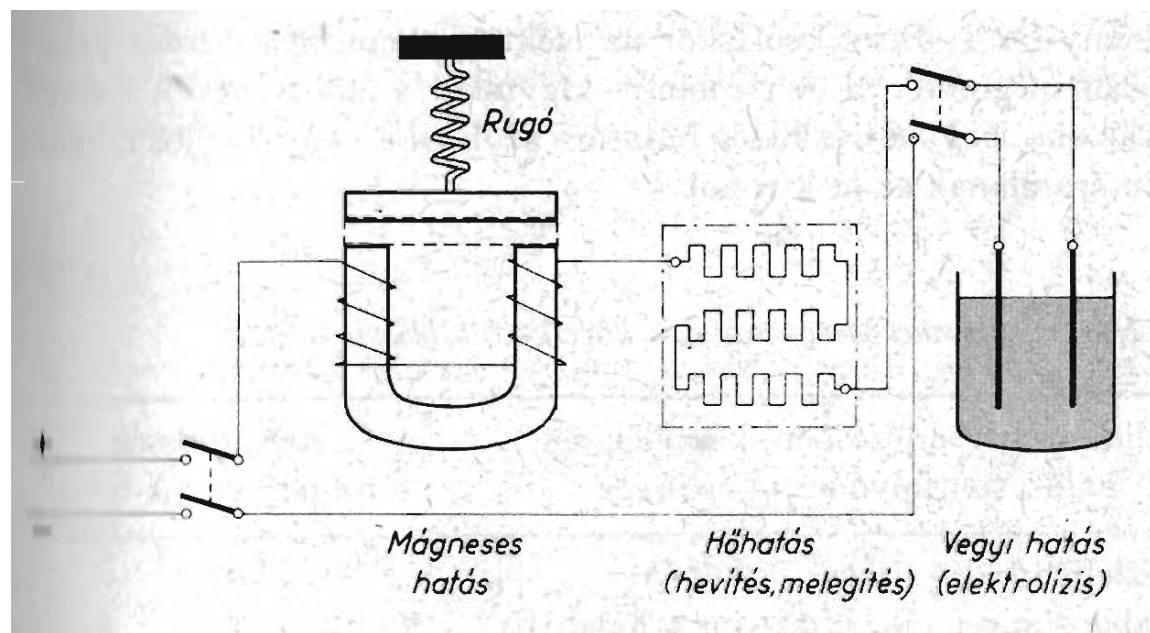
# Villamos hálózatok, „áramkörök”

- Az egyszerű „áramkör” az áramforrásból, a fogyasztóból, a kettőt összekötő vezetékből (és egy kapcsolóból) áll.



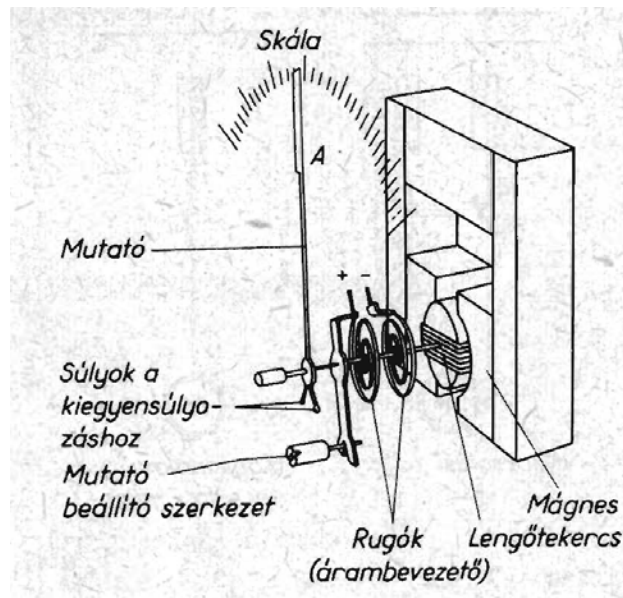
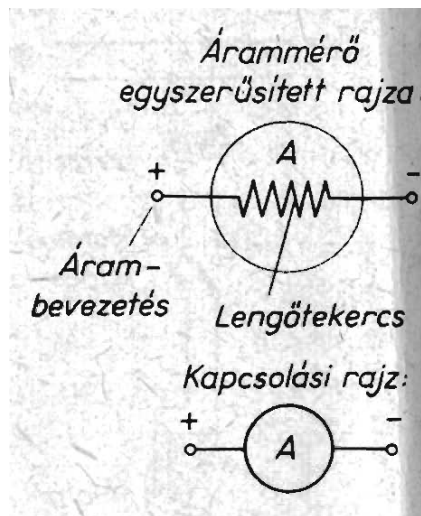
# Elektromos áram észlelhető hatásai

- Hőhatás
- Vegyi hatás
- Mágneses hatás



# Áramerősség mérése (ampermérő)

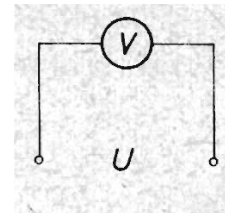
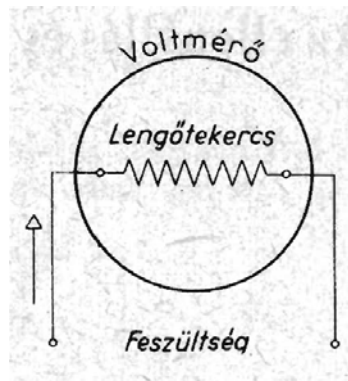
- Mágneses hatás alapján
  - állandó mágnesű, lengőtekerces műszer, *Deprez-műszer*
  - az áramot átvezetjük a lengőtekercsen, az áramerősség nagyságával arányosan mozdul el.



- Az árammérőt mindig **sorba kötjük** a mérendő körbe!

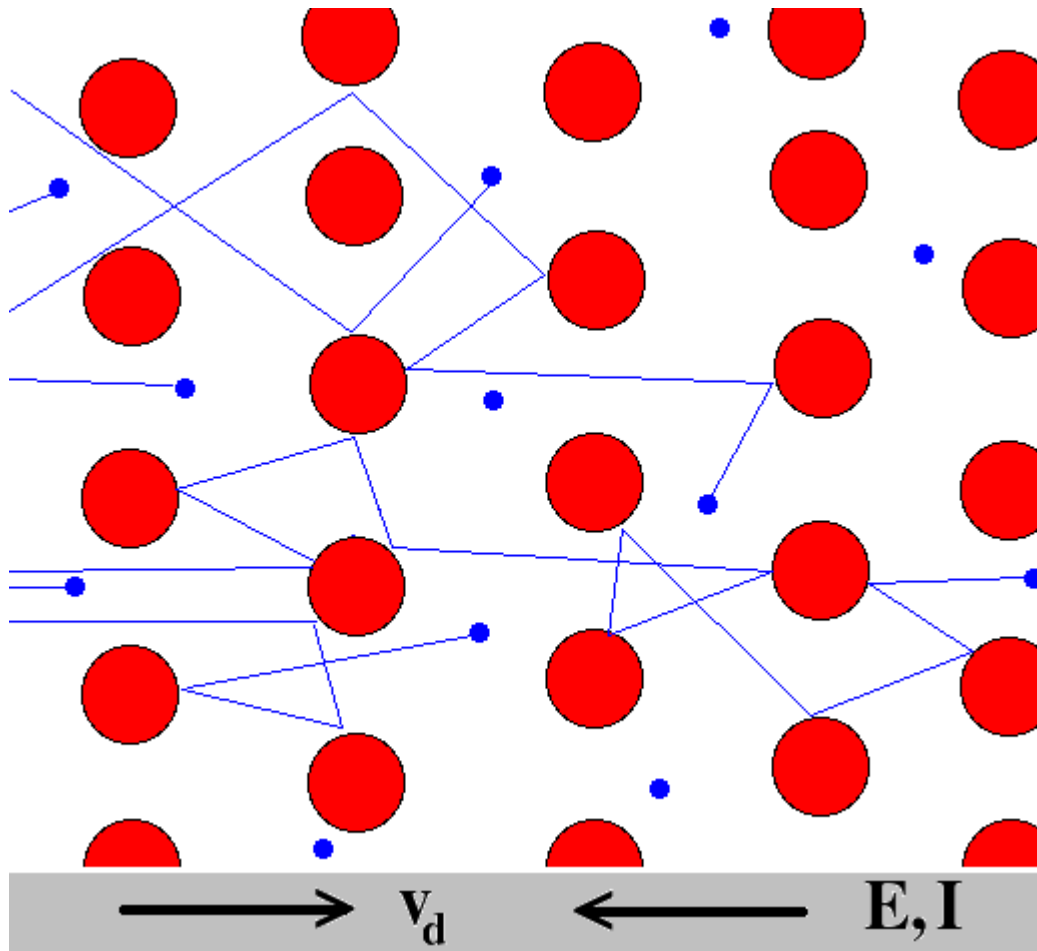
# A feszültség mérése (voltmérő)

- Átalakított (nagy belső ellenállású) állandó mágnesű műszer

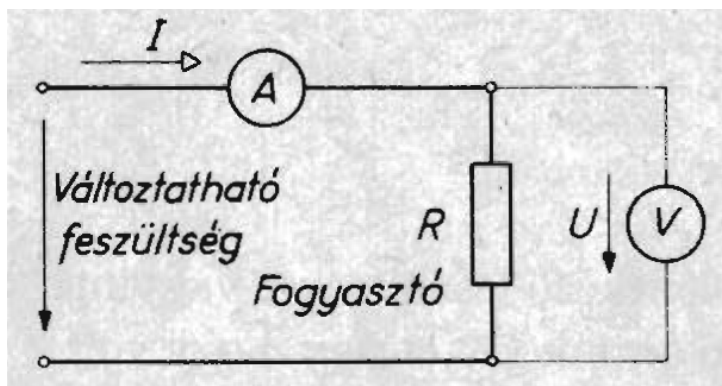


- A feszültség mindig két pont között mérhető, tehát a voltmérőt mindig a fogyasztó (vagy a mérendő szakasz) két végpontja közé, **párhuzamosan** kell kapcsolni

# Az elektromos ellenállás



# Elektromos ellenállás - kísérlet



U (V)	I (A)	V/A
10	0.22	45
20	0.44	45
50	1.1	45
70	1.54	45
100	2.2	45
150	3.3	45
220	4.8	45

$$\frac{U}{I} = \text{állandó}$$

# Elektromos ellenállás – Ohm törvénye

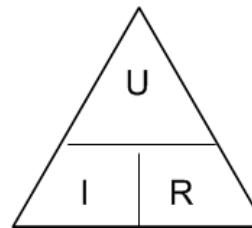
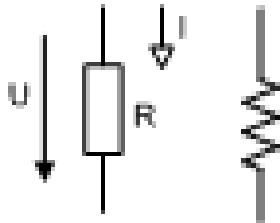
A feszültség és az áramerősség hányadosával meghatározott fizikai mennyiség jellemző az adott vezetőre, ez az adott vezető ellenállása

$$R = \frac{U}{I}$$

- Ohm törvénye

- ellenállás jelölése:  $R$

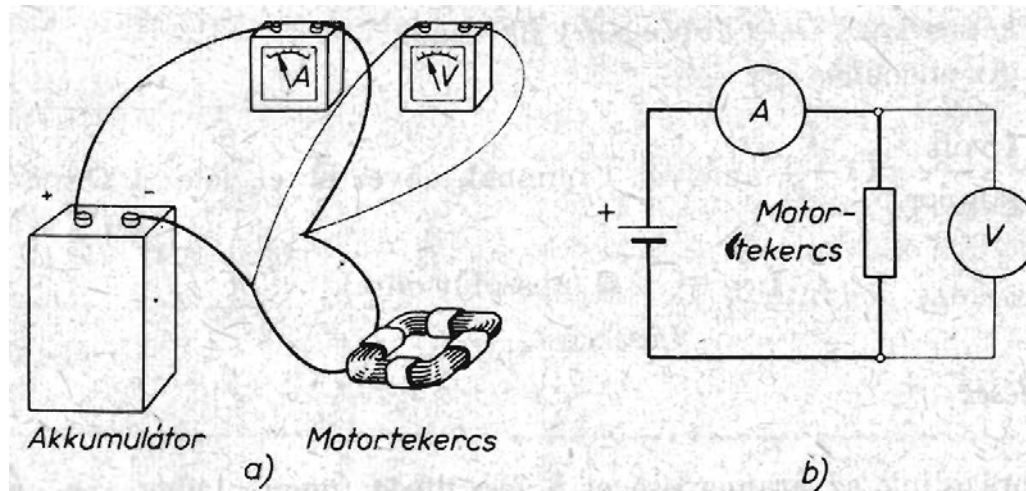
- mértékegysége: *ohm*, jele:  $\Omega$   $\frac{1 \text{ volt (V)}}{1 \text{ amper (A)}} = 1 \text{ ohm } (\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}})$





# Példák

1. Egy motortekercs ellenállását  $U = 6 \text{ V}$  feszültséggel mérjük. Az áramerősség  $I = 8 \text{ A}$ . Mekkora a tekercs ellenállása?



$$R = \frac{U}{I} = \frac{6 \text{ V}}{8 \text{ A}} = 0.75 \Omega$$

## Példák

2. Egy távvezetéknek kezdőpontján (táppontján), az erőműben,  $I = 300$  A áramerősséget vezetnek be. A távvezeték ellenállása  $25 \Omega$ . Számítsuk ki, hogy a táppont és a fogyasztói pont között, vagyis a távvezetéken mekkora a feszültség esés.

$$U = I \cdot R = 300 \cdot 25 = 7500 \text{ V} = 7.5 \text{ kV}$$

A vezeték mentén mérhető feszültségcsökkenés csökkenti a táppont feszültségét.

3. Mekkora egy melegvíz-tároló fűtőtest ellenállása, ha  $220$  V-on  $6.36$  A áramot vesz fel?

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220 \text{ V}}{6.36 \text{ A}} = 34.6 \Omega$$

## Példák

4. Egy nedves ember testellenállása  $R = 2200 \Omega$ ; véletlen érintés következtében  $U = 220 \text{ V}$  feszültséget hidal át. Mekkora az emberi testen áthaladó áramerősség?

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ V}}{2200 \Omega} = 0.1 \text{ A} = 100 \text{ mA}$$

**100 mA már halálos lehet!**

5. Száraz körülmények között az emberi test ellenállása elérheti az  $R = 5000 \Omega$ -ot; mekkora feszültséget hidalhat át, ha legfeljebb  $I = 13 \text{ mA}$  áramot engedünk át a szervezeten?

$$U = I \cdot R = 0.013 \cdot 5000 = 65 \text{ V}$$

Ez az *érintési feszültség*. A szabványok a megengedett érintési feszültséget 65 V-ban szabják meg.

## Példák

6. Egy  $U = 220 \text{ V}$  feszültségre kapcsolt vezeték szigetelésén keresztül a föld felé  $I = 5 \text{ mA}$  szivárgó áramerősséget mérünk. Mekkora a vezeték szigetelési ellenállása?

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220 \text{ V}}{0.005 \text{ A}} = 44000 \text{ } \Omega = 44 \text{ k}\Omega$$

A szigetelési ellenállások rendszerint megaohm ( $\text{M}\Omega$ ) nagyságrendűek

7. Egy ampermérő belső ellenállása  $0.2 \text{ } \Omega$ ; a mutató végkitéréséhez  $250 \text{ mV}$  feszültség szükséges. Mekkora áramot mérhetünk, ha a mutató végkitéréséig kileng?

$$I = \frac{U}{R} = \frac{250 \text{ mV}}{0.2 \text{ } \Omega} = \frac{0.250 \text{ V}}{0.2 \text{ } \Omega} = 1.25 \text{ A}$$

## Vezeték ellenállása - kísérlet

1. Mérjük meg egy  $A$  keresztmetszetű,  $l$  hosszúságú fűtőhuzal ellenállását!
2. Növeljük a huzal **hosszát kétszeresére**, azt tapasztaljuk, hogy az ellenállása is **kétszeresére nő**.
3. Növeljük a **keresztmetszetét kétszeresére!** A mérési adatok azt mutatják, hogy az **ellenállása feleakkora** lesz!

$$R \sim \frac{l}{A}$$

4. Ismételjük meg a kísérletet más-más anyagokkal! Az  $R$  értéke anyagonként eltérő lesz – az ellenállás anyag függő!

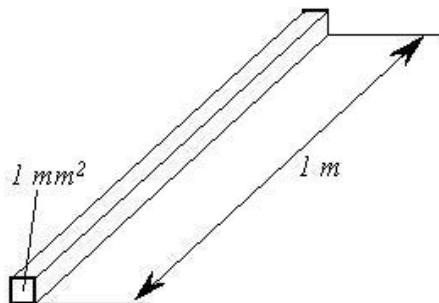
# A vezető ellenállása – fajlagos ellenállás

A vezető ellenállása a hosszával egyenesen, keresztmetszetével fordítottan arányos. A  $\rho$  arányossági tényező az anyagra jellemző *fajlagos ellenállás*.

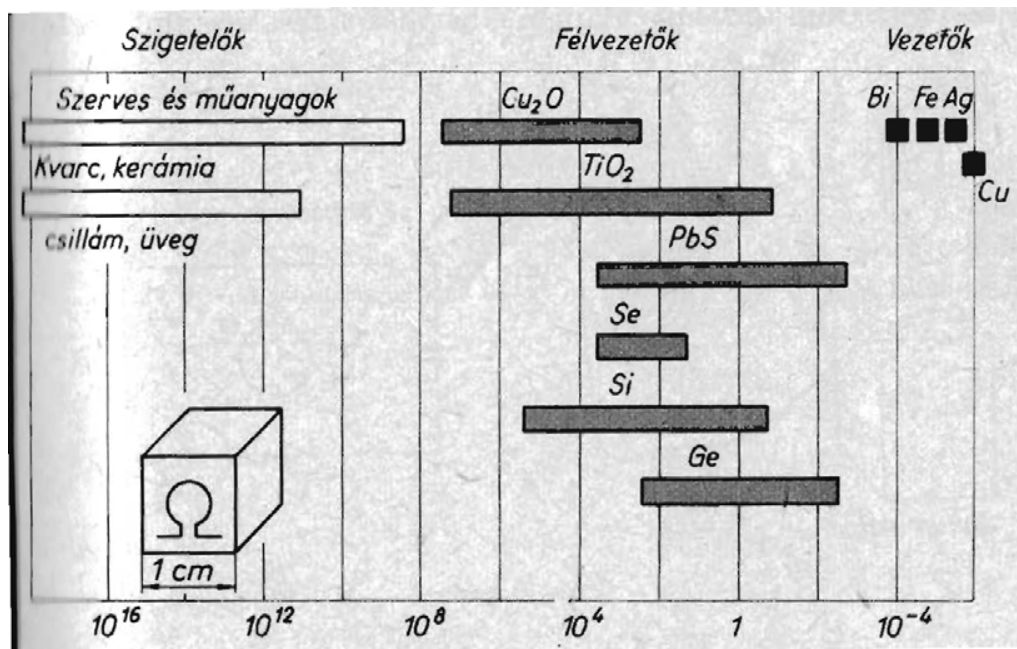
$$R = \rho \frac{l}{A}$$

- Fajlagos ellenállás
  - valamely anyag  $1 \text{ mm}^2$  keresztmetszetű,  $1 \text{ m}$  hosszú darabjának az ellenállása. Jele:  $\rho$ , mértékegysége:

$$\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \text{m}$$



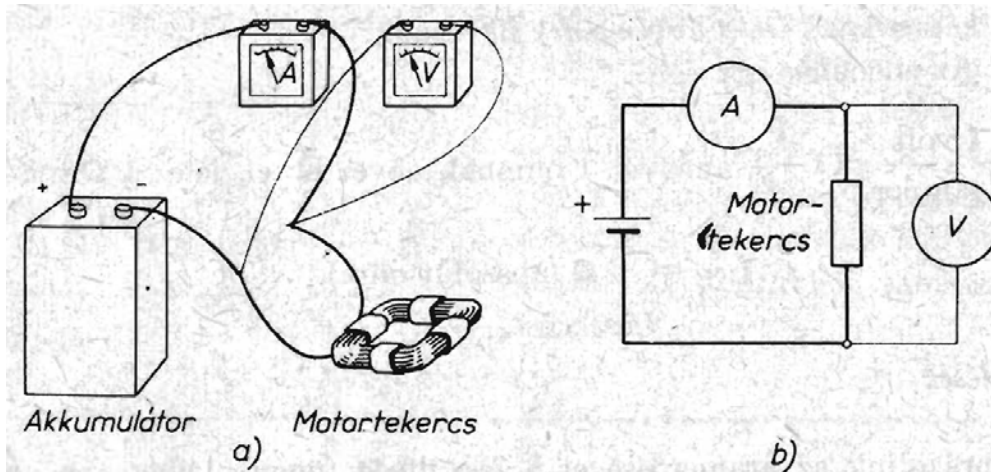
# Fajlagos ellenállás



Anyag	Vegyjel	$\rho$ $\left[ \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right]$
réz	Cu	0.0178
alumínium	Al	0.0286
ezüst	Ag	0.0160
arany	Au	0.0220

# Példák

1. Egyszerű alumínium vezetékkeg hosszát kell meghatározni. A vezeték kiterítésére megfelelő hely nem áll rendelkezésre, ezért Ohm törvénye alapján ellenállásmérést végzünk. A fajlagos ellenállás ismert  $\rho = 0.03 \Omega\text{mm}^2/\text{m}$ , a keresztmetszet  $A = 25 \text{ mm}^2$ , a mért értékek:  $U = 6 \text{ V}$ ,  $I = 10 \text{ A}$ .



$$R = \frac{U}{I} = \frac{6 \text{ V}}{10 \text{ A}} = 0.6 \Omega$$

$$l = R \cdot \frac{A}{\rho} = 0.6 \cdot \frac{25}{0.03} = 500 \text{ m}$$



## Példák

2. Két, egymástól 10 km-re fekvő falut 3 mm átmérőjű, vörösrézből készített távbeszélő-vezeték-pár köt össze. Mekkora a vezeték-pár ellenállása?

A vezeték teljes hossza:  $l = 2 \cdot 10 \text{ km} = 20 \text{ km} = 20000 \text{ m}$

A vezeték keresztmetszete:  $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{3^2 \cdot \pi}{4} = 7.1 \text{ mm}^2$

A vezeték-pár ellenállása:  $R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0.0175 \cdot \frac{20000}{7.1} = 49.3 \text{ } \Omega$

## Példák

3. Egy vasaló ellenállása  $R = 93 \Omega$ , a fűtőszál hossza  $l = 5.9 \text{ m}$ , fajlagos ellenállása  $\rho = 1.1 \Omega\text{mm}^2/\text{m}$  (króm-nikkel). Mekkora a fűtőszál keresztmetszete?

$$A = \rho \cdot \frac{l}{R} = 1.1 \cdot \frac{5.9}{93} = 0.07 \text{ mm}^2$$

# Az ellenállás hőmérséklet függése - kísérlet

1. Mérjük meg egy fűtőszál ellenállását  $\mathcal{G}_0$  kiindulási (hideg) hőmérsékleten; jelöljük az ellenállást ekkor  $R_0$ -val!
2. Növeljük a fűtőszál hőmérsékletét  $\mathcal{G}_1$  hőmérsékletre, és közben ismét mérjük az ellenállást ( $R_1$ ). A hőmérséklet különbség:  
 $\Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0$ .
3. A mérési adatokat táblázatba foglaljuk.

$\Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0$ [°C]	$R_0$ [Ω]	$R_1$ [Ω]	$\frac{R_1 - R_0}{R_0}$
0	20	-	-
50	20	24	0.2
100	20	28	0.4
150	20	32	0.6
200	20	36	0.8

# Az ellenállás hőmérséklet függése

A hőmérséklet növekedésével a fémek ellenállása arányosan növekszik. Az  $\alpha$  arányossági tényező az anyagra jellemző *hőfoktényező*.

$$R_1 = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta \vartheta)$$

Anyag	$\alpha \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$
Alumínium	0.0037
Réz	0.0039

- Fémeknél:  $\alpha \approx 4 \frac{\text{‰}}{\text{K}}$
- A folyadékok, a szén és a félvezetők hőfoktényezője negatív!  
Hőmérséklet emelkedés hatására ellenállásuk csökken.  
(NTK – Negatív-Temperatúra-Koefficiens)

# Példák

1. Egyenáramú motor réz tekercsének ellenállása  $\vartheta_0 = 10 \text{ °C}$ -on  $R_0 = 1.45 \text{ } \Omega$ , felmelegedve pedig  $R_1 = 1.886 \text{ } \Omega$ ; a hőfoktényező  $\alpha = 0.00392$ . Számítsuk ki a tekercs üzemi hőmérsékletét!

$$R_1 = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta \vartheta)$$

$$\Delta \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0 = \frac{R_1 - R_0}{\alpha \cdot R_0} = \frac{1.886 - 1.45}{0.00392 \cdot 1.45} = 77 \text{ °C}$$

$$\vartheta_1 = \Delta \vartheta + \vartheta_0 = 77 + 10 = 87 \text{ °C}$$

# Egyenáramú hálózatok

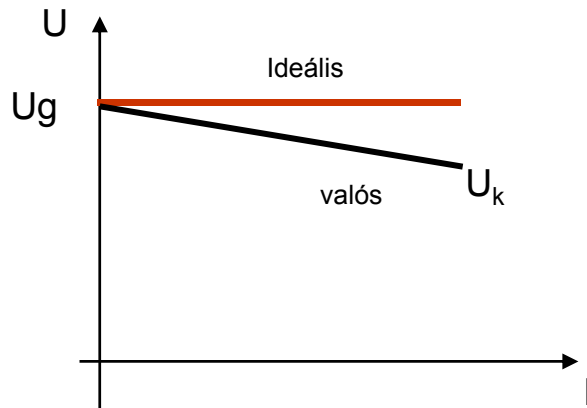
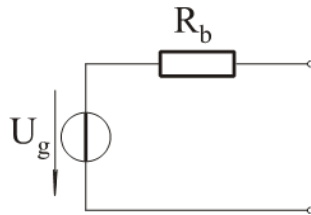
# Egyenáramú hálózatok elemei

- Aktív elemek
  - feszültséggenerátor
  - áramgenerátor
- Passzív elemek
  - ellenállás
  - (ideális vezeték)
  - (ideális szigetelés)

# Egyenáramú hálózatok elemei

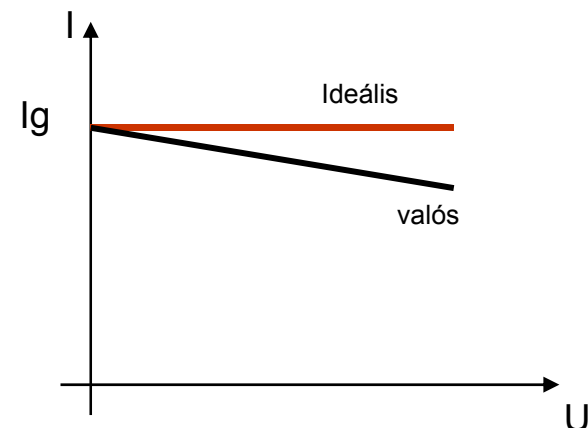
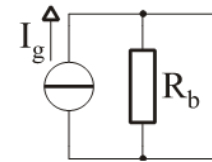
- Feszültséggenerátor

- a kapcsain mindig  $U_g$  feszültség mérhető



- Áramgenerátor

- Az áramgenerátoron mindig  $I_g$  áram folyik

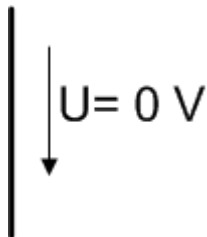




# Egyenáramú hálózatok elemei

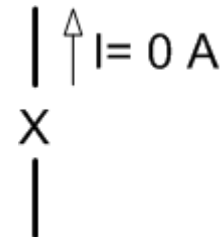
- Vezeték

- a vezetéken sosem esik feszültség



- Szigetelés, szakadás

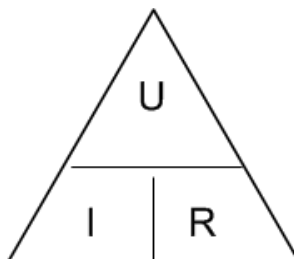
- a szakadáson sosem folyik áram



# Hálózatszámítási alap törvények

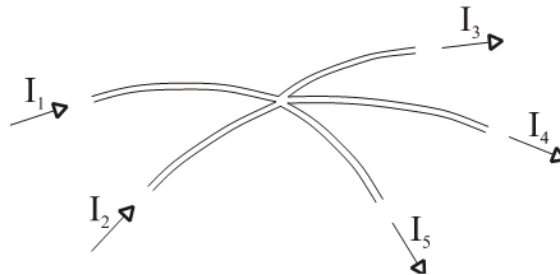
- Ohm törvénye

$$R = \frac{U}{I} \quad I = \frac{U}{R} \quad U = I \cdot R$$



# Hálózatszámítási alap törvények

- **Kirchhoff I. vagy csomóponti törvénye:**
  - A csomópont áramainak előjelhelyes összege nulla.



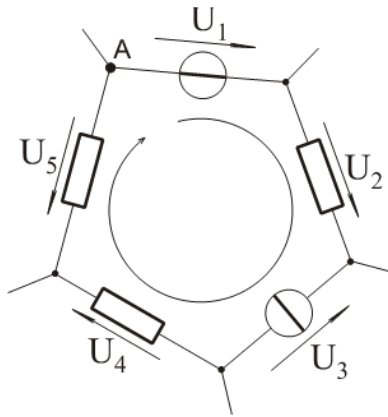
$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0$$

# Hálózatszámítási alap törvények

- **Kirchhoff II. vagy huroktörvénye:**
  - A hurokban szereplő feszültségek előjelhelyes összege nulla.

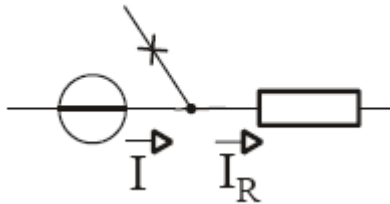


$$U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$$

$$\sum_{i=1}^m U_i = 0$$

# Egyenáramú hálózatok kapcsolása

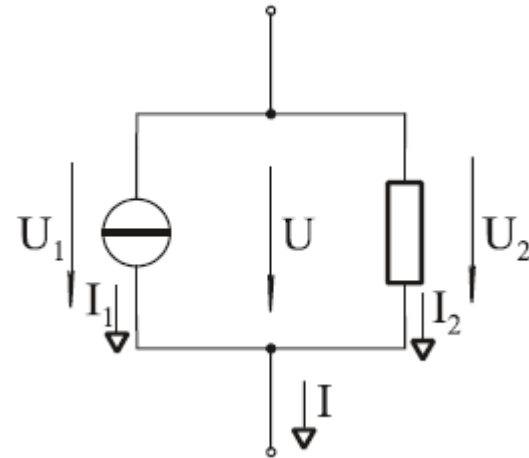
- Soros kapcsolás



- Sorosan kapcsolt elemeken az áram azonos (csomóponti törvény)

$$I = I_R$$

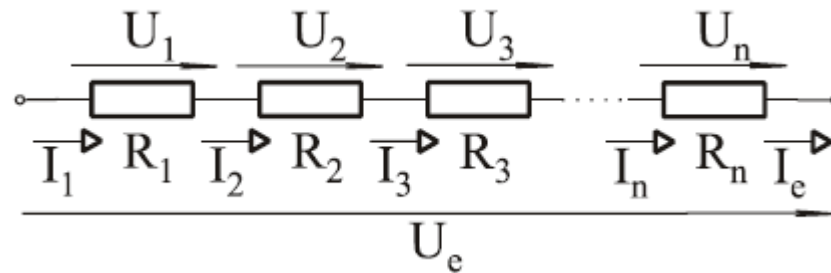
- Párhuzamos kapcsolás



- Párhuzamosan kapcsolt elemeken a feszültség azonos

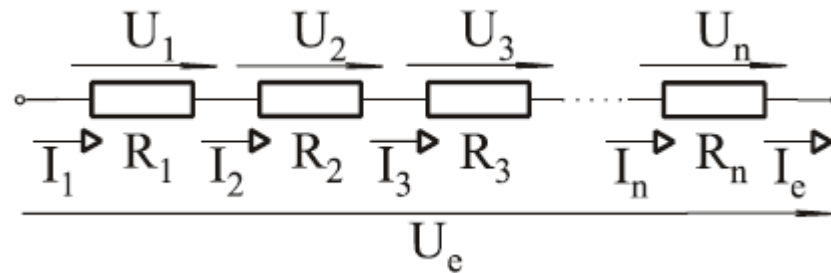
$$U_1 = U_2 = U$$

# Ellenállások soros kapcsolása



- Ohm törvénye alapján:  $R_1 = \frac{U_1}{I_1}, R_2 = \frac{U_2}{I_2}, R_3 = \frac{U_3}{I_3}, \dots, R_n = \frac{U_n}{I_n}$
- Kirchhoff csomóponti törvénye alapján:  $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_n = I_e$
- Kirchhoff huroktörvénye alapján:  $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = U_e$

# Ellenállások soros kapcsolása



$$R_{es} = \frac{U_e}{I_e} = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n}{I_e}$$

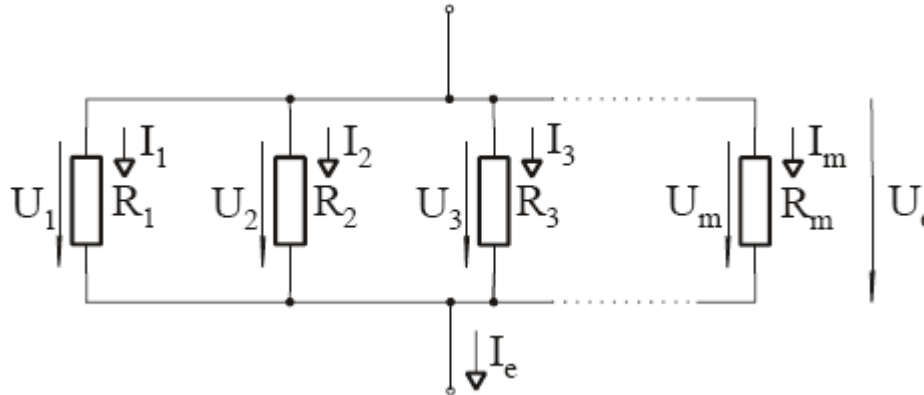
$$R_{es} = \frac{U_1}{I_1} + \frac{U_2}{I_2} + \frac{U_3}{I_3} + \dots + \frac{U_n}{I_n}$$

$$R_{es} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

$$R_{es} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Sorosan kapcsolt ellenállások eredője a részellenállások összegével egyenlő

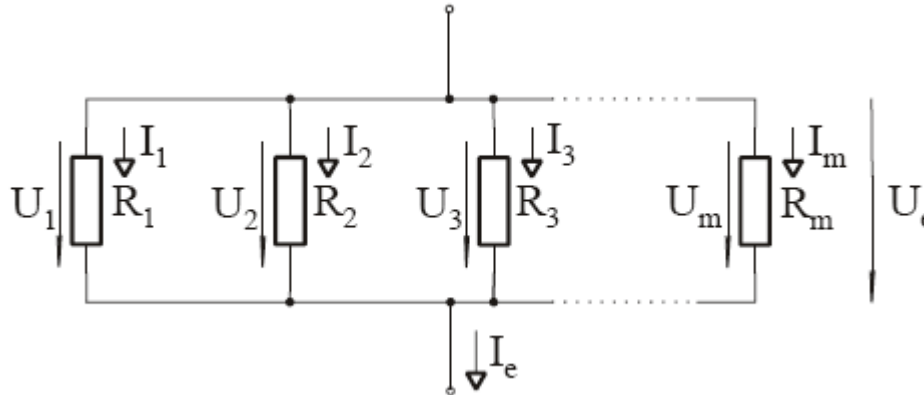
# Ellenállások párhuzamos kapcsolása



- Ohm törvénye alapján:  $R_1 = \frac{U_1}{I_1}, R_2 = \frac{U_2}{I_2}, R_3 = \frac{U_3}{I_3}, \dots, R_m = \frac{U_m}{I_m}$
- Kirchhoff csomóponti törvénye alapján:  $I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_m = I_e$
- Kirchhoff huroktörvénye alapján:  $U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_m = U_e$



# Ellenállások párhuzamos kapcsolása



$$R_{ep} = \frac{U_e}{I_e} = \frac{1}{\frac{I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_m}{U_e}}$$

$$R_{ep} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_m}}$$

$$R_{ep} = \frac{1}{\frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} + \frac{I_3}{U_3} + \dots + \frac{I_m}{U_m}}$$

$$R_{ep} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{R_j}}$$

$$G_e = \sum_{i=1}^m G_i$$

Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredő vezetése a részvezetések összegével egyenlő

# Ellenállások párhuzamos kapcsolása

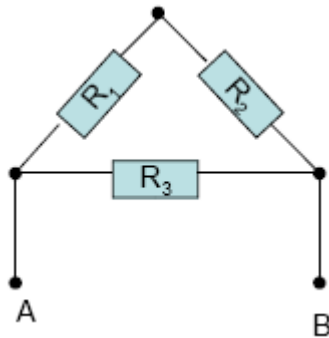
- Két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredője

$$R_{e12} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$R_{e12} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{e12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_2 \times R_1$$

# Példák



Ahol:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 500 \text{ }\Omega$$

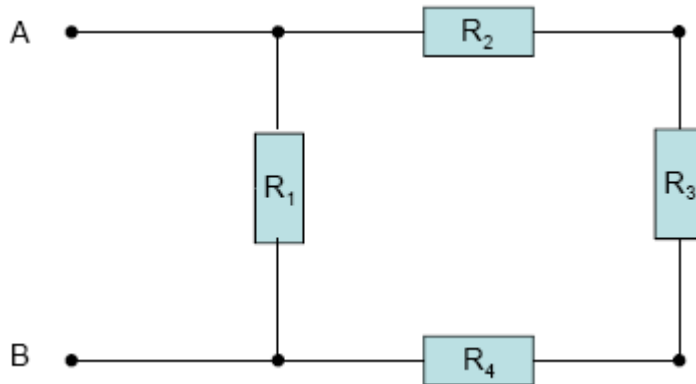
$$R_3 = 300 \text{ }\Omega$$

$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = (R_1 + R_2) \times R_3$$

$$R_{AB} = \frac{(1000 + 500) \cdot 300}{1000 + 500 + 300} = 250 \Omega$$

# Példák



Ahol:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 500 \text{ }\Omega$$

$$R_3 = 300 \text{ }\Omega$$

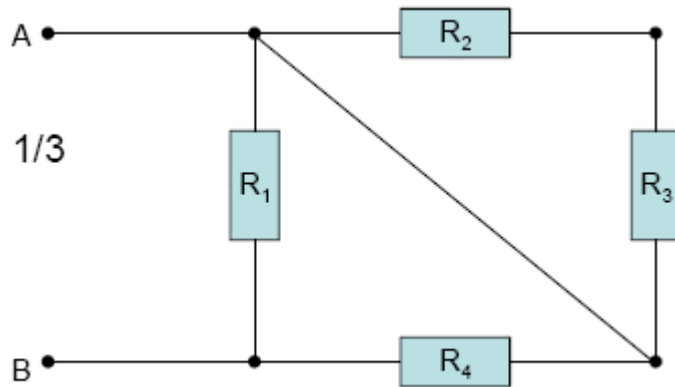
$$R_4 = 200 \text{ }\Omega$$

$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = R_1 \times (R_2 + R_3 + R_4)$$

$$R_{AB} = \frac{1000 \cdot (500 + 300 + 200)}{1000 + 500 + 300 + 200} = 500 \Omega$$

# Példák



Ahol:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 500 \text{ }\Omega$$

$$R_3 = 300 \text{ }\Omega$$

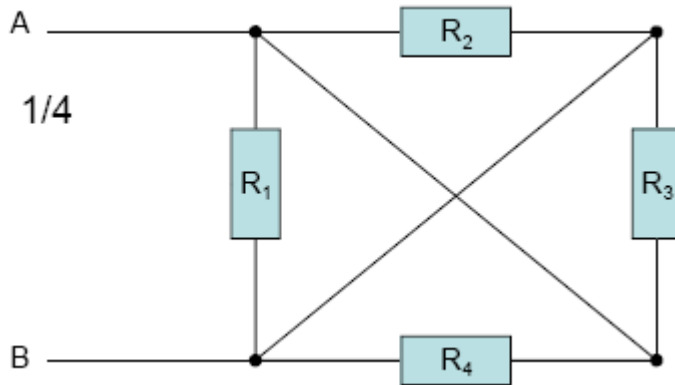
$$R_4 = 200 \text{ }\Omega$$

$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = R_1 \times R_4$$

$$R_{AB} = \frac{1000 \cdot 200}{1000 + 200} = 166.6 \dot{\Omega}$$

# Példák



Ahol:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 500 \text{ }\Omega$$

$$R_3 = 300 \text{ }\Omega$$

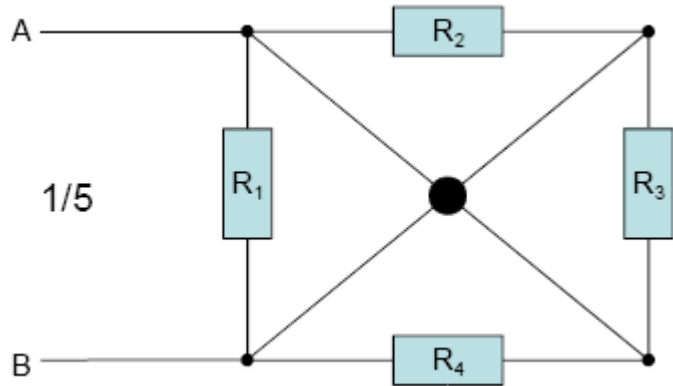
$$R_4 = 200 \text{ }\Omega$$

$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4$$

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{500} + \frac{1}{300} + \frac{1}{200}} = 88.23 \Omega$$

# Példák



$$R_{AB}=?$$

$$R_{AB} = 0\Omega$$

Ahol:

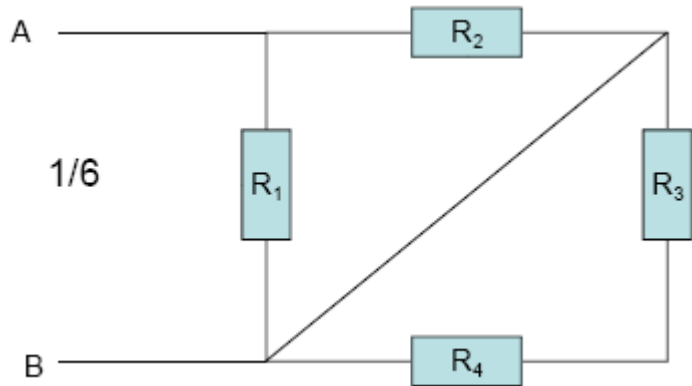
$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 500 \Omega$$

$$R_3 = 300 \Omega$$

$$R_4 = 200 \Omega$$

# Példák



Ahol:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 500 \text{ }\Omega$$

$$R_3 = 300 \text{ }\Omega$$

$$R_4 = 200 \text{ }\Omega$$

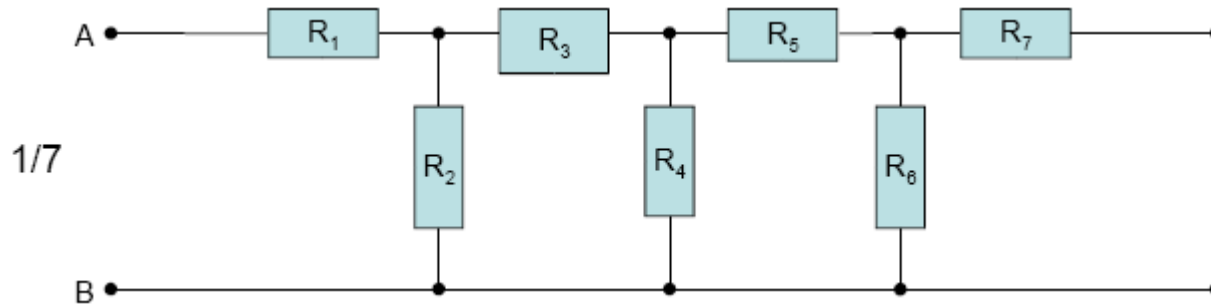
$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = R_1 \times R_2$$

$$R_{AB} = \frac{1000 \cdot 500}{1000 + 500} = 333.3 \Omega$$



# Példák



$$R_{AB}=?$$

Ahol:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 500 \text{ }\Omega$$

$$R_3 = 300 \text{ }\Omega$$

$$R_4 = 200 \text{ }\Omega$$

$$R_5 = 2 \text{ k}\Omega$$

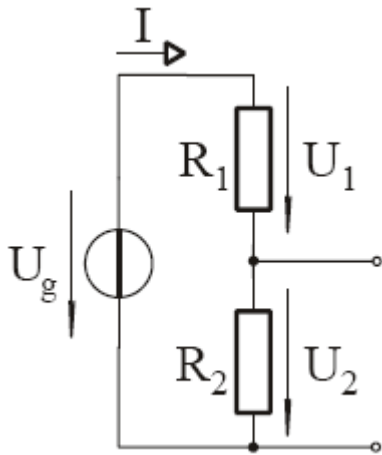
$$R_6 = 750 \text{ }\Omega$$

$$R_7 = 1.2 \text{ k}\Omega$$

$$R_{AB} = \left( \left( (R_5 + R_6) \times R_4 \right) + R_3 \right) \times R_2 + R_1$$

$$R_{AB} = \frac{\left( \frac{(2000 + 750) \cdot 200}{2000 + 750 + 200} + 300 \right) \cdot 500}{\left( \frac{(2000 + 750) \cdot 200}{2000 + 750 + 200} + 300 \right) + 500} + 1000 = 1.25 \text{ k}\Omega$$

# Feszültségosztó



$$U_g = U_1 + U_2$$

$$U_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R_2}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

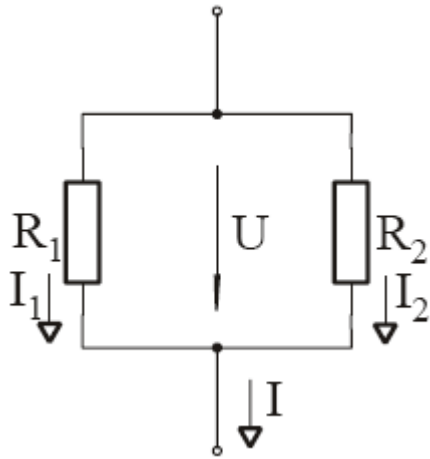
$$I = \frac{U_g}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = \frac{U_g}{R_1 + R_2} \cdot R_2$$

$$U_2 = U_g \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Feszültségosztóban a feszültség az ellenállásokkal egyenes arányban oszlik meg.

# Áramosztó



$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{U}{R_1}}{\frac{U}{R_2}}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

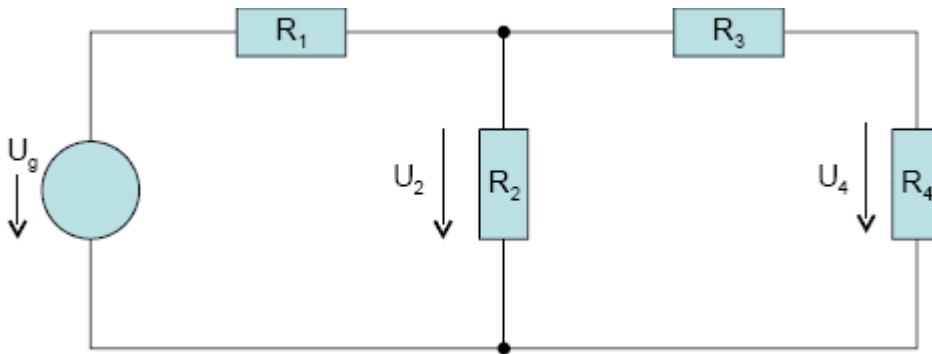
$$U = I \cdot R_e = I \cdot (R_1 \times R_2) = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{1}{R_2} \cdot I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Áramosztókban az áram az ellenállásokkal fordított arányban oszlik meg.

## Példák



$$U_g = 10V$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\Omega$$

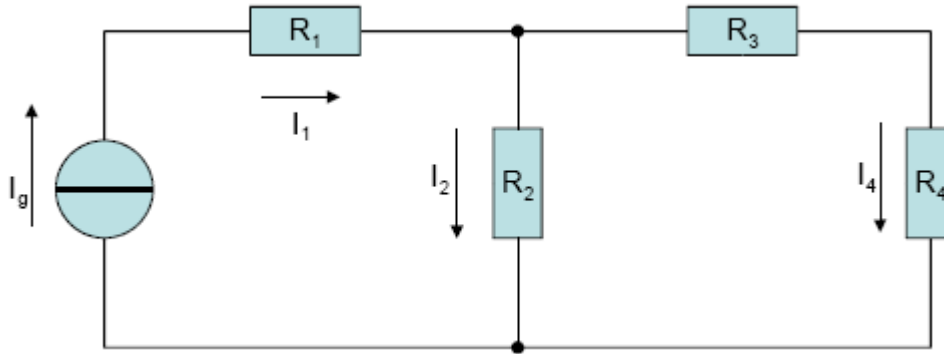
$$U_2 = ?$$

$$U_2 = U_g \cdot \frac{R_2 \times (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 \times (R_3 + R_4)} = 10 \cdot \frac{10 \times 20}{10 + 10 \times 20} = 10 \cdot \frac{\frac{200}{30}}{10 + \frac{200}{30}} = 4V$$

$$U_4 = U_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 4 \cdot 0.5 = 2V$$

$$U_1 = U_g - U_2 = U_g \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 \times (R_3 + R_4)} = 6V$$

## Példák



$$I_g = 4A$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\Omega$$

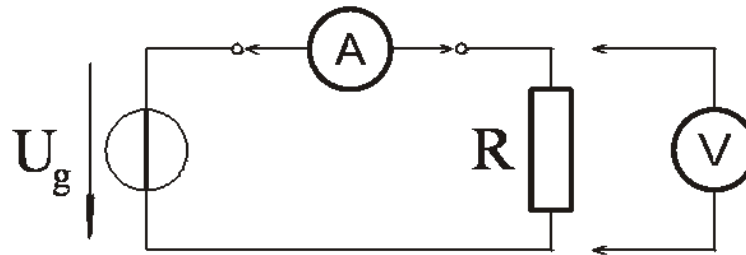
$$I_2, I_4 = ?$$

$$I_2 = I_g \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_2 + (R_3 + R_4)} = \frac{8}{3} A = 2.6A$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = \frac{80}{3} V = 26.6V$$

$$I_4 = I_g - I_2 = I_g \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{4}{3} A = 1.3A$$

# Feszültség és áram mérése



$$R_m = \frac{U_m}{I_m}$$

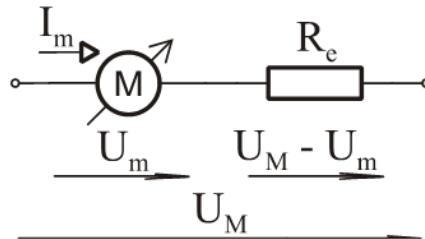
Példa: Egy tipikus alpműszer végkitéréséhez tartozó értékek:

$$U_m = 50 \text{ mV}$$

$$I_m = 50 \text{ } \mu\text{A}$$

$$R_m = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ V}}{50 \cdot 10^{-6} \text{ A}} = 1000 \text{ } \Omega = 1 \text{ k}\Omega$$

# Feszültség-méréshatár kiterjesztése



$$n = \frac{U_M}{U_m}$$

$$R_e = \frac{U_e}{I_e} = \frac{U_M - U_m}{I_m} = \frac{n \cdot U_m - U_m}{I_m} = \frac{(n-1) \cdot U_m}{I_m} = (n-1) \cdot R_m$$

Előítétellenállás:

$$R_e = (n-1) \cdot R_m$$

# Feszültség-méréshatár kiterjesztése

*A feszültségmérő voltonkénti belső ellenállása*

$$e = \frac{R_m + R_e}{U_M} = \left[ \frac{k\Omega}{V} \right]$$

*Példa:*

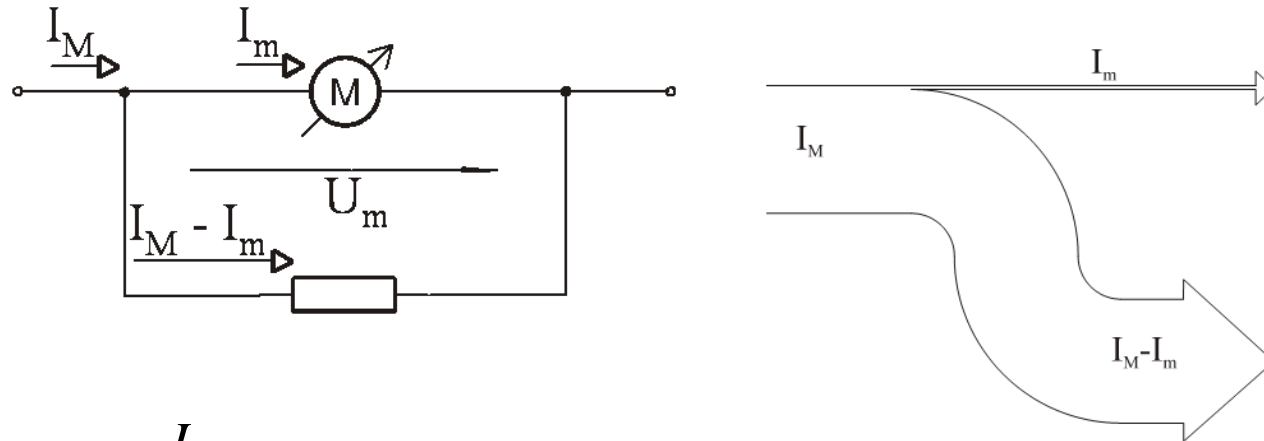
$$e = \frac{R_m + R_e}{U_M} = \frac{1 \text{ k}\Omega + 99 \text{ k}\Omega}{5 \text{ V}} = 20 \frac{\text{k}\Omega}{\text{V}}$$

*az alaplámpa adataival is ezt kapjuk:*

$$e = \frac{R_m}{U_m} = \frac{1 \text{ k}\Omega}{50 \text{ mV}} = 20 \frac{\text{k}\Omega}{\text{V}}$$



# Áram-méréshatár kiterjesztése



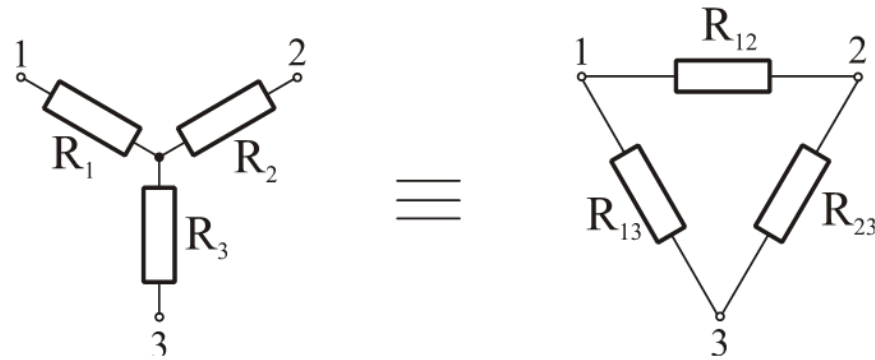
$$n = \frac{I_M}{I_m}$$

$$R_s = \frac{U_s}{I_s} = \frac{U_m}{I_M - I_m} = \frac{U_m}{n \cdot I_m - I_m} = \frac{U_m}{(n-1) \cdot I_m} = \frac{R_m}{(n-1)}$$

Söntellenállás:

$$R_s = \frac{R_m}{(n-1)}$$

# Ellenállások csillag (Y) -delta (háromszög) átalakítása

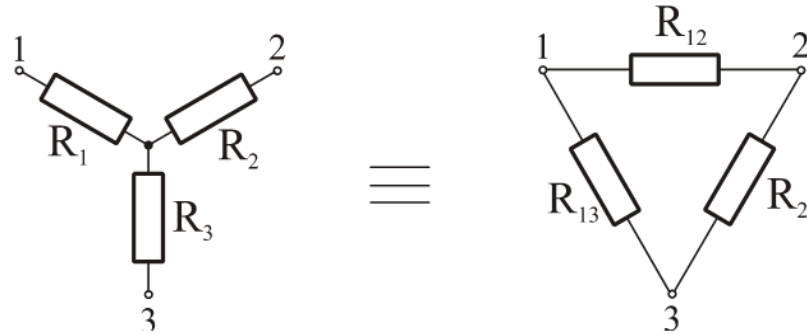


$$\text{I.} \quad R_1 + R_2 = R_{12} \times (R_{23} + R_{13}) = \frac{R_{12} (R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$\text{II.} \quad R_2 + R_3 = R_{23} \times (R_{13} + R_{12}) = \frac{R_{23} (R_{13} + R_{12})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$\text{III.} \quad R_1 + R_3 = R_{13} \times (R_{12} + R_{23}) = \frac{R_{13} (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

# Ellenállások csillag - delta átalakítása



Delta-csillag átalakítás:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_h}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_h}$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_h}$$

$$R_h = R_{12} + R_{13} + R_{23}$$

Csillag-delta átalakítás:

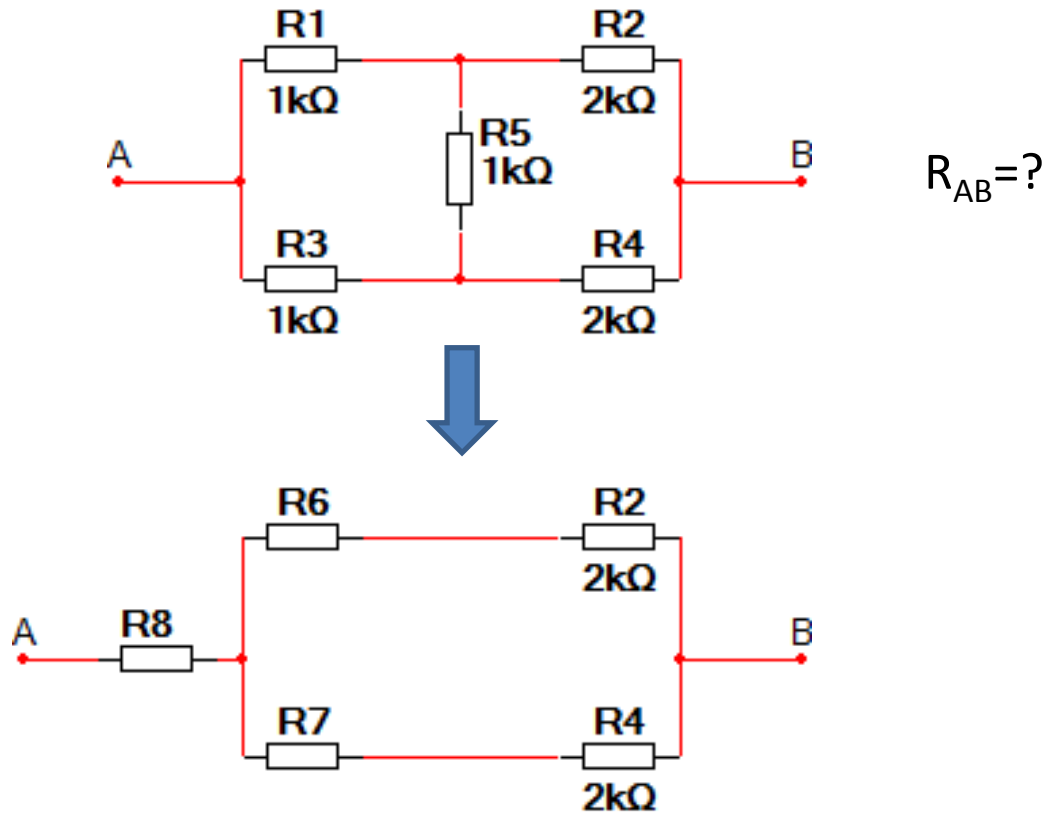
$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_Y}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_Y}$$

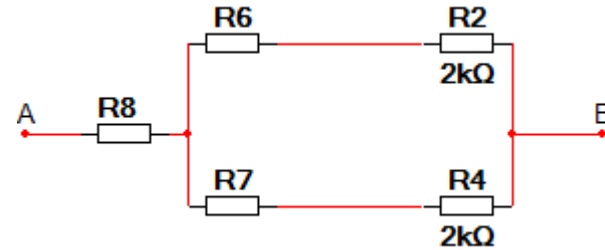
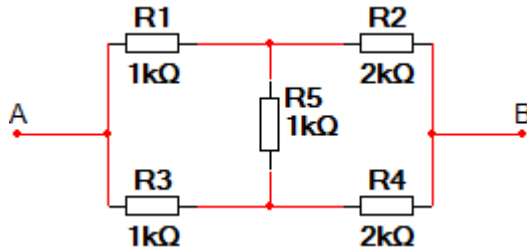
$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_Y}$$

$$\frac{1}{R_Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

# Példa



# Példák



$$R_h = R_1 + R_3 + R_5 = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ k}\Omega$$

$$R_6 = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_h} = \frac{1 \cdot 1}{3} = 0.\dot{3} \text{ k}\Omega$$

$$R_7 = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_h} = \frac{1 \cdot 1}{3} = 0.\dot{3} \text{ k}\Omega$$

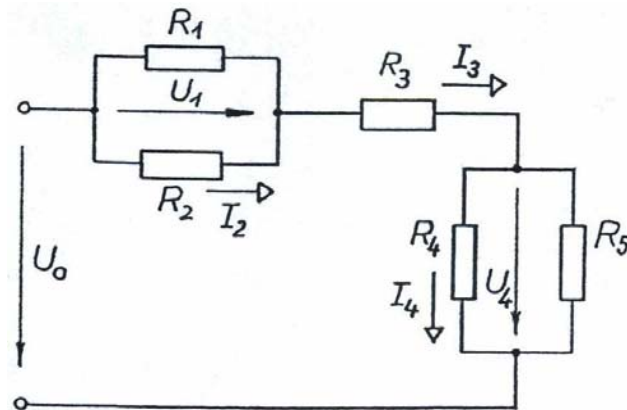
$$R_8 = \frac{R_3 \cdot R_1}{R_h} = \frac{1 \cdot 1}{3} = 0.\dot{3} \text{ k}\Omega$$

$$R_{AB} = R_8 + ((R_6 + R_2) \times (R_7 + R_4))$$

$$R_{AB} = 0.\dot{3} + \frac{2.\dot{3} \cdot 2.\dot{3}}{2.\dot{3} + 2.\dot{3}} = 1.5 \text{ k}\Omega$$

# Példák

Számítsuk ki a kapcsolásban jelölt feszültségeket és áramokat



$$R_1 = R_2 = R_3 = 40\Omega$$

$$R_4 = 60\Omega$$

$$R_5 = 120\Omega$$

$$U_0 = 300V$$

$$R_e = R_1 \times R_2 + R_3 + R_4 \times R_5 = 40\Omega \times 40\Omega + 40\Omega + 60\Omega \times 120\Omega = 100\Omega$$

$$I_3 = \frac{U_0}{R_e} = \frac{300V}{100\Omega} = 3A \quad I_2 = I_3 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 3A \cdot \frac{40\Omega}{40\Omega + 40\Omega} = 1,5A$$

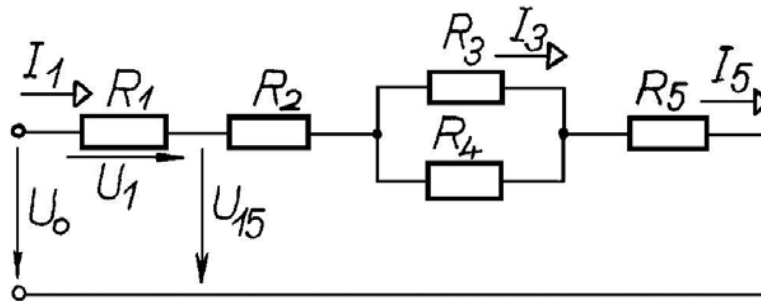
$$I_4 = I_3 \cdot \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 3A \cdot \frac{120\Omega}{60\Omega + 120\Omega} = 2A$$

$$U_1 = U_2 = I_2 \cdot R_2 = 1,5A \cdot 40\Omega = 60V$$

$$U_4 = I_4 \cdot R_4 = 2A \cdot 60\Omega = 120V$$

## Példák

Számítsuk ki a kapcsolásban jelölt feszültségeket és áramokat



$$R_1 = R_2 = R_3 = 30\Omega$$

$$R_4 = R_5 = 60\Omega$$

$$U_0 = 420V$$

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 \times R_4 + R_5 = 30\Omega + 30\Omega + 60\Omega \times 30\Omega + 60\Omega = 140\Omega$$

$$I_1 = I_5 = \frac{U_0}{R_e} = \frac{420V}{140\Omega} = 3A$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 3A \cdot 30\Omega = 90V$$

$$U_{15} = U_0 - U_1 = 420V - 90V = 330V$$

$$I_3 = I_1 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 3A \cdot \frac{60\Omega}{30\Omega + 60\Omega} = 2A$$

# Teljesítményszámítás, hatásfok

Valamely villamos hálózati elem feszültségének és áramának szorzata a villamos teljesítmény vagy munkavégző képesség:

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \qquad 1W = 1V \cdot 1A$$

A villamos munka vagy energia:

$$W = E = P \cdot t = U \cdot I \cdot t \qquad 1Ws = 1V \cdot 1A \cdot 1s$$

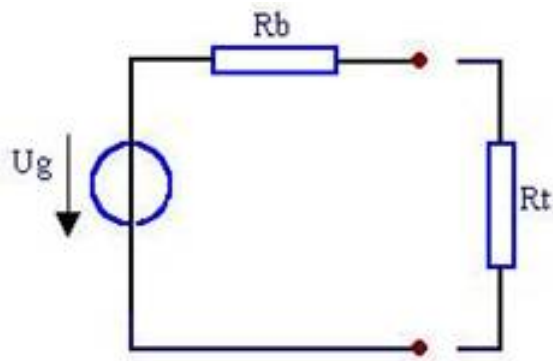
Ha egy villamos hálózatban megkülönböztethető a hasznos és az összes teljesítmény, akkor a hatásfok:

$$\eta = \frac{P_{\text{hasznos}}}{P_{\text{összes}}}$$



# Teljesítményillesztés

Vizsgáljuk meg, hogy mi a feltétele annak, hogy az aktív kétpólus a legnagyobb teljesítményt szolgáltatassa, tehát keressük meg a  $P=f(R_t)$  függvény maximumát!



A körben folyó áram:

$$I = \frac{U_g}{R_b + R_t}$$

A terhelésre jutó teljesítmény:

$$P = I^2 \cdot R_t = U_g^2 \cdot \frac{R_t}{(R_b + R_t)^2}$$

Az aktív kétpólus hatásfoka:

$$\eta = \frac{P_{\text{hasznos}}}{P_{\text{hasznos}} + P_{\text{veszteség}}} = \frac{I^2 \cdot R_t}{I^2 (R_b + R_t)} = \frac{R_t}{R_b + R_t}$$

# Teljesítményillesztés

Keressük meg a  $P=f(R_t)$  függvény maximumát. A függvény szélső értéke ott van, ahol:

$$\frac{dP}{dR_t} = U_g^2 \cdot \frac{(R_b + R_t)^2 - 2(R_b + R_t) \cdot R_t}{(R_b + R_t)^4} = 0$$

Vagyis ahol:  $(R_b + R_t)^2 = 2 \cdot (R_b + R_t) \cdot R_t$

Illetve:  $R_b + R_t = 2 \cdot R_t$       Azaz:  $R_t = R_b$

Ez az egyetlen szélsőérték hely a  $P=f(R_t)$  folytonos függvény  $0 \leq R_t < \infty$  intervallumában, a szélsőérték maximum.

A legnagyobb teljesítmény tehát:

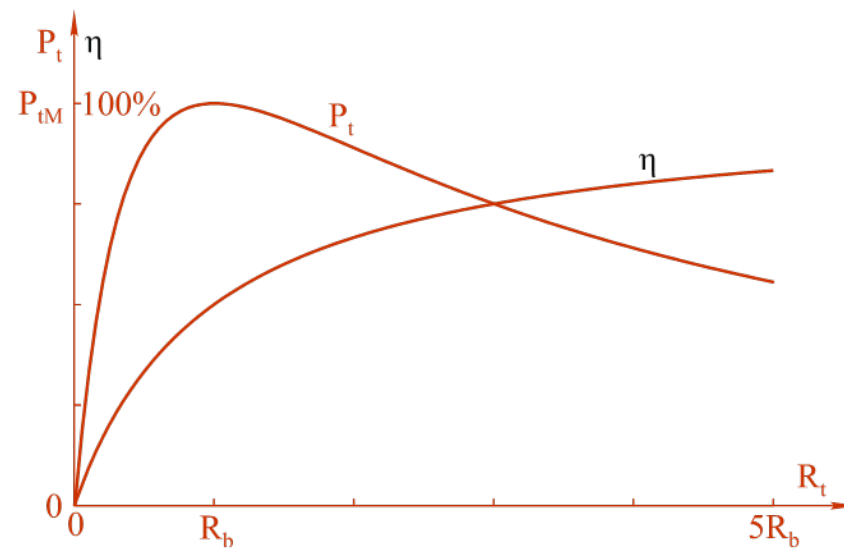
$$P_{\max} = \frac{U_g^2}{4R_b}$$

És a hatásfok:

$$\eta = \frac{R_b}{2R_b} = 0,5$$

# Teljesítményillesztés

A terhelésre jutó teljesítmény és hatásfok a terhelő ellenállás függvényében:



# Figyelem!

**A jövő heti (okt. 19.) előadás elmarad!**

**Következő előadás október 26.**

MEGHÍVÓ

A Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Kara és a Magyar Fuzzy Társaság  
meghívja Önt a

**Second Győr Symposium on  
Computational Intelligence  
(II. Győri Számítási Intelligencia Szimpózium)**

tudományos előadássorozatára.

Időpont és helyszín: 2009. október 19, hétfő, a Széchenyi István Egyetem VIP  
termében (9026 Győr, Egyetem tér 1.)

# Szuperpozíció tétele

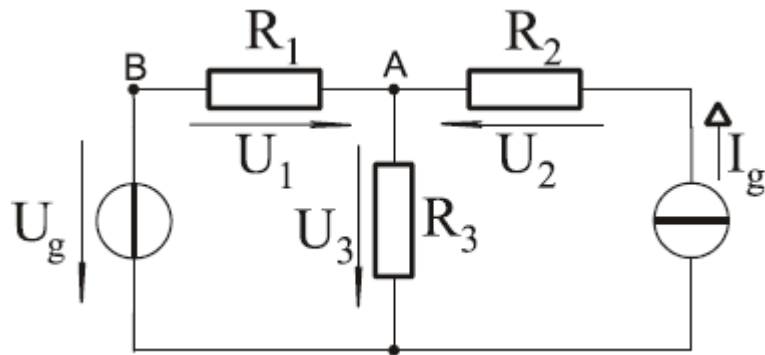
- Több generátoros hálózatok számítására használható módszer
- A szuperpozíció tétel csak akkor alkalmazható, ha a hálózat lineáris
- A hálózat valamennyi generátorát egyszer és csakis egyszer vesszük figyelembe
- A generátorok hatástalanítása (dezaktiválása):



- A hálózatban található generátorokat külön-külön, egyenként vesszük figyelembe és ezáltal részeredményeket kapunk. Valamely keresett feszültség vagy áram értékét úgy számítjuk ki, hogy a részeredmények előjelhelyes összegét képezzük.
- Ez utóbbi lépés a tulajdonképpeni **szuperpozíció**.

# Példák

1. Határozzuk meg a feszültségeket a szuperpozíció tétel alkalmazásával!



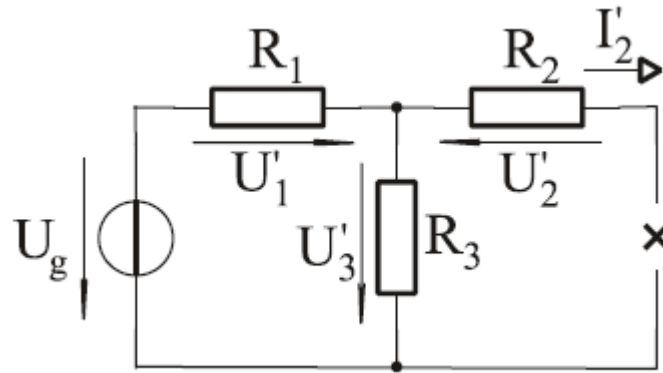
$$U_g = 100V$$

$$I_g = 1A$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100\Omega$$

# Példák

- 1. eset:** A feszültséggenerátor hatásának vizsgálata.  
Helyettesítsük az áramgenerátort szakadással!



$$I'_2 = 0A, \quad U'_2 = I'_2 \cdot R_2 = 0V$$

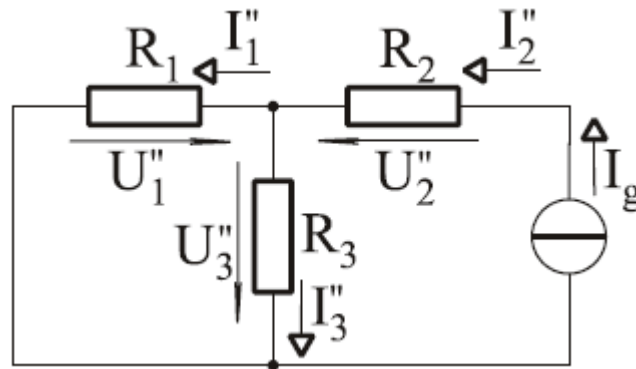
$$U'_1 = U_g \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 100V \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 100\Omega} = 100V \cdot \frac{100\Omega}{200\Omega} = 50V$$

$$U'_3 = U_g \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 100V \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 100\Omega} = 100V \cdot \frac{100\Omega}{200\Omega} = 50V$$

## Példák

**2. eset:** Az áramgenerátor hatásának vizsgálata.

Helyettesítsük a feszültséggenerátort rövidzárral!



$$I_2'' = I_g, \quad U_2'' = I_2'' \cdot R_2 = I_g \cdot R_2 = 1A \cdot 100\Omega = 100V$$

$$I_1'' = I_2'' \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = I_g \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 1A \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 100\Omega} = 1A \cdot \frac{100\Omega}{200\Omega} = 0,5A$$

$$I_3'' = I_2'' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = I_g \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 1A \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 100\Omega} = 1A \cdot \frac{100\Omega}{200\Omega} = 0,5A$$

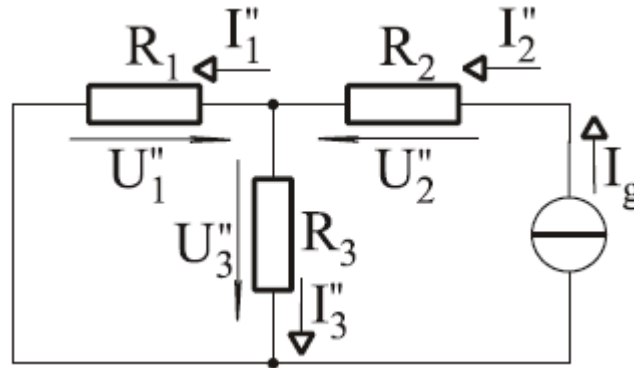
Ohm törvénye alapján:  $U_3'' = I_3'' \cdot R_3 = 0,5A \cdot 100\Omega = 50V$



# Példák

**2. eset:** Az áramgenerátor hatásának vizsgálata.

Helyettesítsük a feszültséggenerátort rövidzárral!



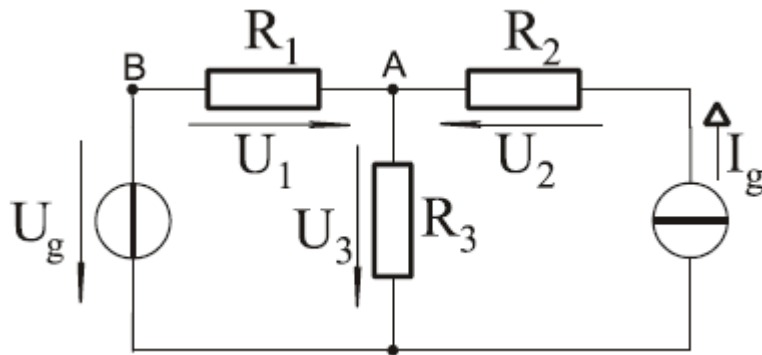
Az  $R_1$  ellenálláson a feszültség és az áram iránya ellentétes, ezért

$$U_1'' = -I_1'' \cdot R_1 !$$

Behelyettesítve

$$U_1'' = -0,5A \cdot 100\Omega = -50V .$$

## Példák



$$U_g = 100V$$

$$I_g = 1A$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100\Omega$$

**Szuperpozíció:**

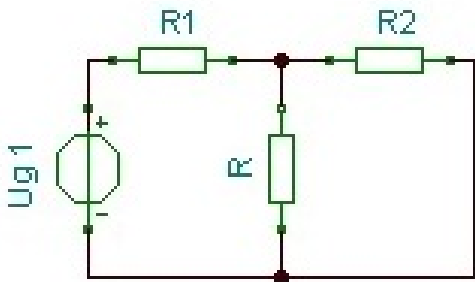
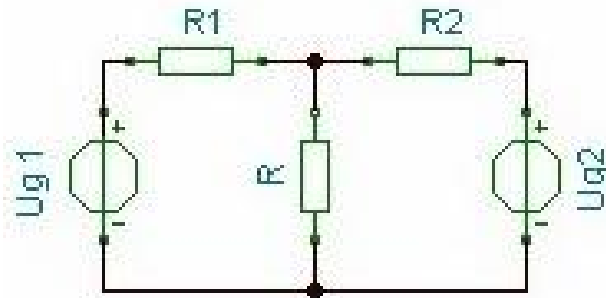
$$U_1 = U_1' + U_1'' = 50V - 50V = 0V$$

$$U_2 = U_2' + U_2'' = 0V + 100V = 100V$$

$$U_3 = U_3' + U_3'' = 50V + 50V = 100V$$

# Példák

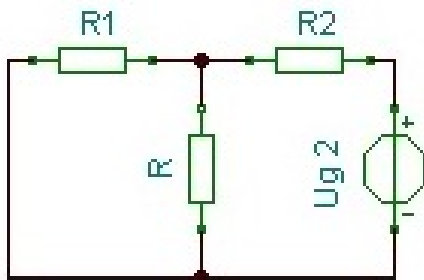
2. Határozzuk meg az R ellenállás áramát a szuperpozíció tétel alkalmazásával!



$$I'_R = I'_1 \cdot \frac{R_2}{R + R_2}$$

$$I'_1 = \frac{U_{g1}}{R_1 + R \times R_2}$$

$$I_R = I'_R + I''_R$$



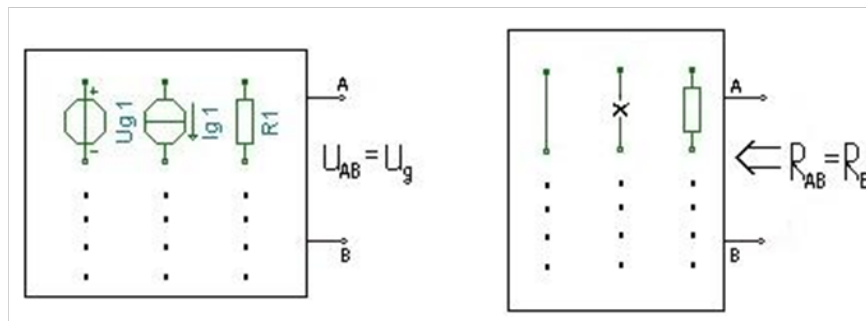
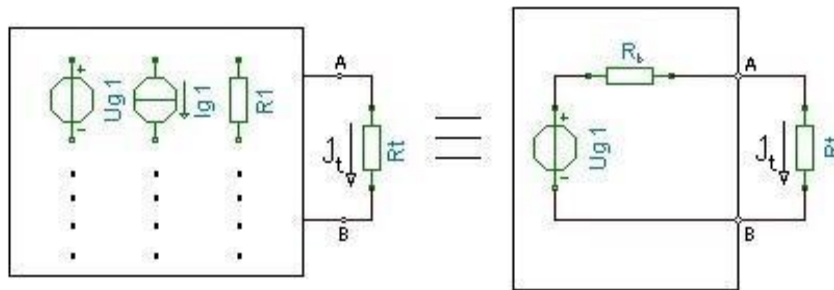
$$I''_R = I''_2 \cdot \frac{R_1}{R + R_1}$$

$$I''_2 = \frac{U_{g2}}{R_2 + R \times R_1}$$

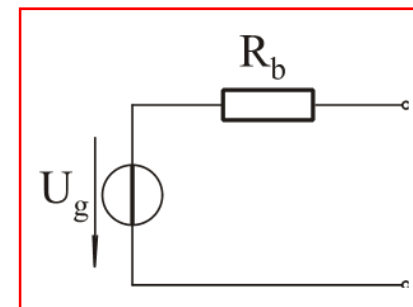
# Helyettesítő generátorok tétele

- **Thèvenin és Norton tétele**

- A **Thèvenin-féle** helyettesítő képet akkor alkalmazzuk, ha a terhelő ellenállás jóval nagyobb a belső ellenállásnál



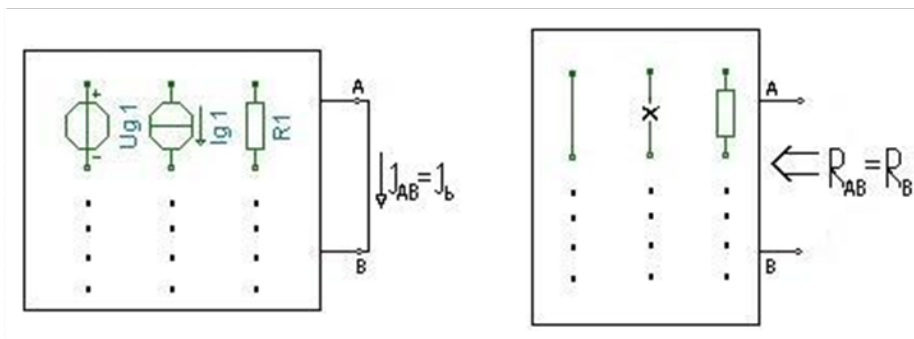
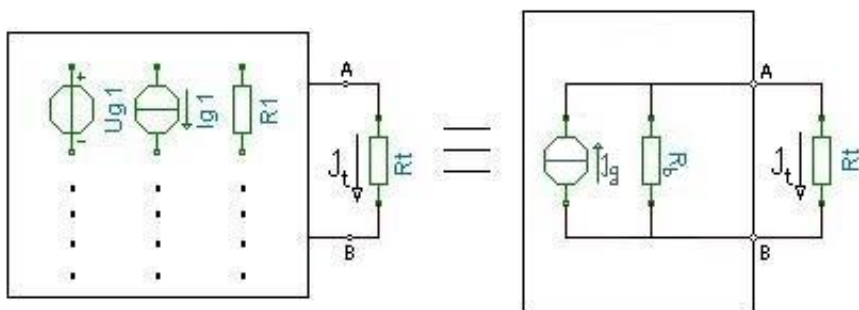
**A Thèvenin generátor:**



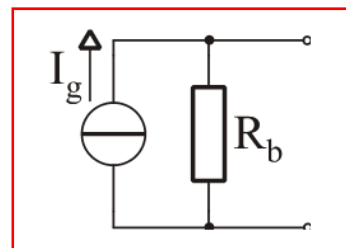
# Helyettesítő generátorok tétele

- **Thèvenin és Norton tétele**

- Áramgenerátoros vagy **Norton** féle helyettesítő képet használunk akkor, ha a terhelő ellenállás sokkal kisebb, mint a belső ellenállás.



**A Norton generátor:**



**KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!**

**KÉRDÉSEK?**