Előadó

- **Ballagi Áron egyetemi adjunktus**
  - **Széchenyi István Egyetem, Automatizálási Tanszék**
  - **C707-es szoba**
  - **Tel.: 3255**
  - **E-mail: ballagi@sze.hu**

2

Irodalom

- Kóczy T. László, Tikk Domonkos, Botzheim János: Intelligens Rendszerek
  http://jegyzet.sze.hu
- Kóczy T. László, Tikk Domonkos: Fuzzy Rendszerek
  Typotex Kiadó, Budapest, 2000.
- Stuart J. Russel, Peter Norvig: Mesterséges Intelligencia modern megközelítésben
  Panem-Prentice Hall, Budapest, 2000.
- Lefteri H. Tsoukalas, Robert E. Uhrig: Fuzzy and Neural Approaches in Engineering
  John Wiley & Sons Inc., New York, 1997.

3

Mesterséges Intelligencia?!

4

Az intelligencia „egyszerű” definíciója

- **Az intelligencia a tapasztalatokból való tanulás, az elvont fogalmakban való gondolkodás és a környezet hatékony kezelésének képessége.**
- **Az a tulajdonság, amit egy megfelelően standardizált intelligencia teszt mér.**

5

Az intelligencia kulcsfontosságú jellemvonásai

- szándékosság **(intentionality)**
- rugalmasság **(flexibility)**
- produktív lustaság **(productive lazyness)**

6

Az intelligencia kulcsfontosságú jellemvonásai

- **Szándékosság**
  - Olyan belső állapotokkal való rendelkezés képessége, melyek időben, vagy térben többé-kevésbé távoli, vagy teljesen elvont objektumokra, vagy szituációkra vonatkoznak, illetve utalnak.
- A szándékos állapotok magukban foglalják pl.:
  - az elmélkedést, egyenletek vizsgálatát, tűnődést egy lehetséges tevékenységen, egy fogalom elképzelését

7

Az intelligencia kulcsfontosságú jellemvonásai

- **Rugalmasság**
  - Kezeli a széles és változatos szándékos agyi tartalmakat, pl. a célok, objektumok, problémák, tervek, környezetek, stb. típusainak választékát, ez foglalkozik az új szituációkkal, felhasználva a régi ismereteket, új módon kombinálva és transzformálva azokat.
- A rugalmasságból eredő képességek:
  - Kérdések sokaságának felvetése
  - Összetett problémák leegyszerűsítése

8

Az intelligencia kulcsfontosságú jellemvonásai

- **Produktív lustaság**
  - **a felesleges munka elkerülését jelenti**
  - **Másként számolja ki az emberi agy a 200! - 200! = ? feladatot, mint a számítógép.**
  - **Előny: a kombinatorikus robbanás elkerülése**
  - **Magába foglalja:**
    - **szimmetriák, viszonylatok, egyszerűsítő összefüggések felfedezését**
    - **általánosítás képességét**
  - **Igényli a tanulás képességét: azt a képességet, hogy új koncepciókat formáljunk.**

9

Az intelligencia mérése

- **Teszttípusok**
  - Teljesítménytesztek: **jelenleg mit tudunk teljesíteni**
  - Képességtesztek: **gyakorlás után mire leszünk képesek, jóslás ilyen az intelligencia teszt is**
- Érvényesség: **azt mérje, amit mérni szeretnénk**
- Megbízhatóság: **ismételve közel ugyanolyan eredményt adjon**

10

Az intelligencia teszt

Lewis Terman

- **A Binet teszt (iskola érettség teszt) átdolgozása amerikai gyerekek értékelésére, 1916.**
- William Stern javaslatára bevezette az IQ hányadost: IQ = MK/ÉK *100 **(MK – mentális kor, ÉK – életkor)**
- Átlagos **intelligencia érték:** 90 - 110**, értelmi** fogyatékosság**:** 70 **alatt,** zsenialitás 140 **feletti értéknél.**
- **Egyetemi és főiskolai hallgatók : IQ ~ 120.**
- **Külön pontozott területek:**
  - **verbális gondolkodás,**
  - **absztrakt-vizuális gondolkodás,**
  - **számolás,**
  - **rövidtávú memória**

11

Mesterséges intelligencia

- **Az AI (Artificial Intelligence = Mesterséges Intelligencia) elnevezést McCarthy alkalmazta először 1956-ban a dartmouthi találkozón.**
- **A kifejezés elterjedése Marvin Minsky 1961-ben megjelent "Steps towards artificial intelligence" című cikkének köszönhető**
- Cél**: az intelligens entitások megértése és ilyen entitások építése**

12

Mesterséges intelligencia definíciók

Emberi módra gondolkodó rendszerek	Racionálisan gondolkodó rendszerek
„Izgalmas újszerű kísérlet, hogy a számítógépet gondolkodásra késztessük… tudatos gépek, e fogalom és teljes és szó szerinti értelmében” (Haugeland, 1985) „Az emberi gondolkodással asszociálható olyan aktivitások [automatizálása], mint pl. a döntéshozatal, a problémamegoldás, a tanulás, …” (Belmann, 1978)	„A mentális képességek tanulmányozása számítási modellek segítségével” (Charniak és McDermott, 1985) „Az észlelést, a következtetést és a cselekvést biztosító számítási mechanizmusok tanulmányozása” (Winston, 1992)
„Az olyan funkciókat teljesítő gépi rendszerek létrehozásának a művészete, amikhez az intelligencia szükséges, ha azt emberek teszik” (Kurzweil, 1990) „Annak tanulmányozása, hogy hogyan lehet a számítógéppel olyan dolgokat művelni, amiben pillanatnyilag az emberek jobbak” (Rich és Knight, 1991)	„Egy olyan kutatási terület, amely a számítási folyamatok segítségével megkísérli megmagyarázni és emulálni az intelligens viselkedést” (Schalkoff, 1990) „A számítógépes tudományok egy ága, amely az intelligens viselkedés automatizálásával foglalkozik” (Luger és Stubblefield, 1993)
Emberi módra cselekvő rendszerek	Racionálisan cselekvő rendszerek

Turing mesterséges intelligencia definíciója

Alan Turing:

az intelligens viselkedés az emberi teljesítmény olyan szintű elérésének képessége bármilyen kognitív feladatban, hogy egy külső kérdezőt be lehessen csapni

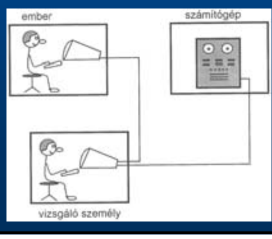
Mi kell hozzá?

- **természetes nyelvfeldolgozás a sikeres emberi nyelvű párbeszédhez**
- **tudásreprezentáció a megszerzett információ tárolására**
- **automatizált következtetés, tárolt információt a válaszok formálására és az új következtetések levonására használjuk**
- **gépi tanulás az új körülményekhez való adaptálódáshoz, a mintázatok detektálására és általánosítására**

14

Turing teszt (1950)

- **A tesztet Alan Turing fogalmazta meg a(z igazi) mesterséges intelligencia minősítésére.**
- **Turing a COMPUTING MACHINERY AND INTELLIGENCE c. cikkében tette fel a kérdést: "Can machines think?" , azaz "Tudnak a gépek gondolkodni?"**
- **A gondolkodó gép címre pályázó számítógép megítélésére alkotta meg tesztjét.**
- **A tesztet általánosították az** emberhez hasonlóan gondolkodó **gépből kiindulva az** emberhez hasonlóan cselekvő **gép irányába (gépi látás +** **robotika)**

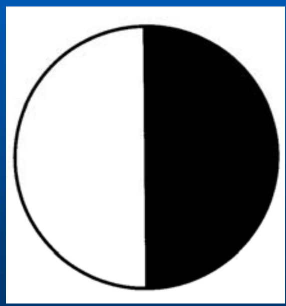


15

Fuzzy rendszerek

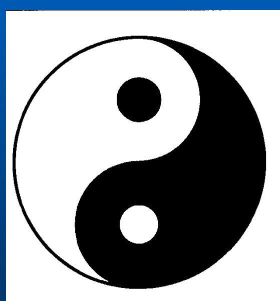
16

Arisztotelészi logika



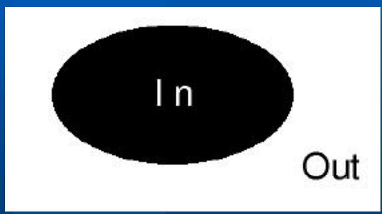
17

Taichi Yin-Yang logika

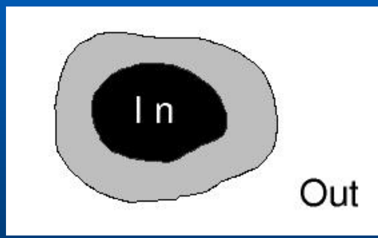


18

Hagyományos és Fuzzy halmaz



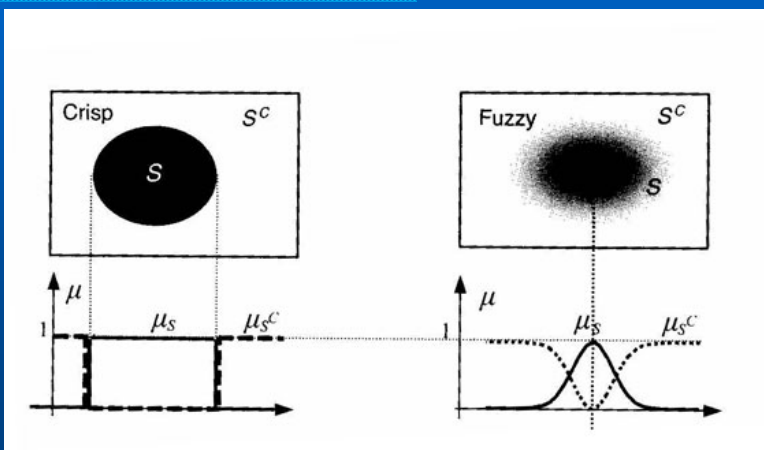
Egy hagyományos halmaz



Egy fuzzy halmaz

19

Hagyományos és Fuzzy halmaz



20

A hagyományos halmazok

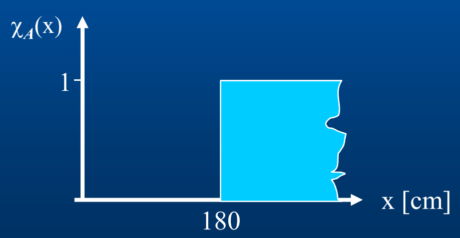
- $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$
- **Egy elem halmazba tartozása egyértelműen megállapítható.**
- **Ha beletartozik, úgy ezt egy logikai igaz, ha nem azt egy logikai hamis értékkel jellemezzük.**
- **Az, hogy egy elem beletartozik-e *A*-ba 0 vagy 1 értékkel jelemezhető.**

21

A hagyományos halmazok - pl

Magas emberek halmaza: $\boldsymbol{A} = \{ x \in X \mid x \geq 180 \}$

$$\text{karakterisztikus függvény : } \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 180 \\ 0 & \text{ha } x < 180 \end{cases}$$



22

A határozatlanság formái

- Sztochasztikus: kocka dobás, ...
- Lingvisztikus: magas ár, alacsony kor, ...
- Információs: őszinteség, hitelesség,...

Hagyományos halmazok segítségével nem vagy csak nagyon nehezen reprezentálhatók.

23

Fuzzy Logika

- A fuzzy logika alkalmazása lehetővé teszi a mindennapi életben megszokott, korábban igen nehezen kezelhető nyelvi fogalmak (pl. magas, alacsony, öreg, fiatal) matematikai kezelését. A fuzzy logika a többértékű logikák sorába tartozik, tehát ellentétben a kétértékű logikával, ahol az érték vagy „igaz” vagy „hamis” köztes állapot nincsen, itt az igaz és hamis közti értékeket is meg tudunk különböztetni (pl. talán igaz).
- A fuzzy logika műveletei fuzzy halmazokra épülnek

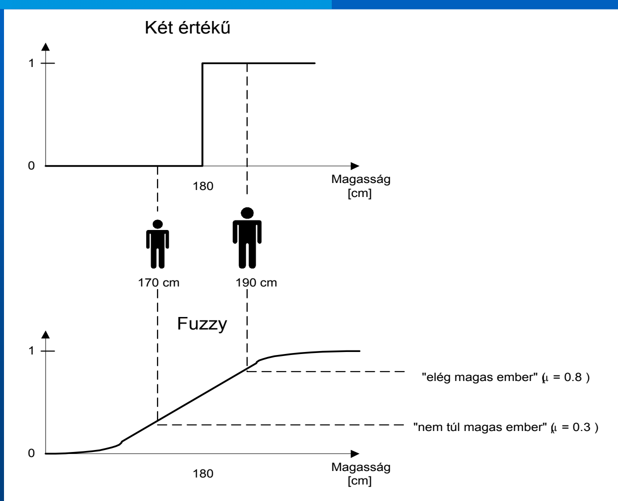
24

Történeti áttekintés

- 1965 L.A Zadeh: a fuzzy halmazok első leírása (a fuzzy időszámítás kezdete)
- 1973 L.A. Zadeh: az első fuzzy következtető rendszer – fuzzy algoritmusok
- 1974 E.H. Mamdani: az első működő fuzzy vezérlés (gőzgép vezérlése)
- 1985 Megjelenik a fuzzy chip (Bell Labs)
- 1988 Az Omron elkezdi árulni fuzzy szabályozó rendszerét

25

Fuzzy halmazok



26

Fuzzy halmazok

- Minden A halmazbeli a_k elemhez hozzárendelünk egy számot, általában 0 és 1 között, ami jellemzi az elem halmazba tartozásának mértékét.
- A fuzzy tagsági érték megmutatja, hogy egy adott a_k elem mennyire tartozik bele a halmazba:
  - nagyon, kissé, kevésbé, vagy egyáltalán nem.

27

Fuzzy halmazok

- Az X univerzumon értelmezett A fuzzy halmaz az x elemek és az ezekhez tartozó tagsági értékek által alkotott rendezet számpárok halmaza,

$$A = \left\{ (x, \mu_A(x)) \middle| \; x \in X \right\}$$

- A hozzárendelést tagsági függvénynek nevezzük, mely egy A fuzzy halmaz esetén:

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

28

Fuzzy halmazok

- **diszkrét elemű halmaz esetén:**

$$A=\mu(x_1)/x_1+\mu(x_2)/x_2+\mu(x_3)/x_3+\ldots\mu(x_n)/x_n=\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i)/x_i$$

Pl.: Magas emberek halmaza:

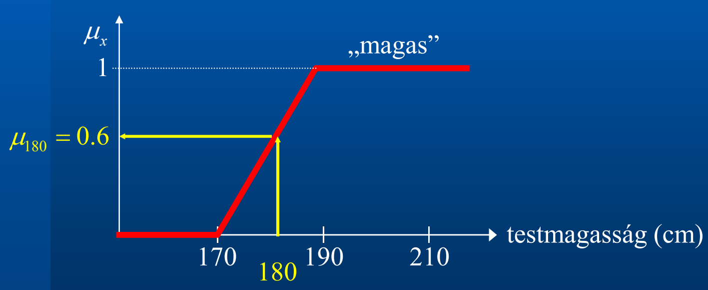
$$Magas=0/165+0.1/170+0.5/175+0.6/180+0.8/185+1/190+1/195$$

- **folytonos elemű halmaz esetén:** $A=\int_u \mu(x)/x$

29

Fuzzy halmazok – pl.

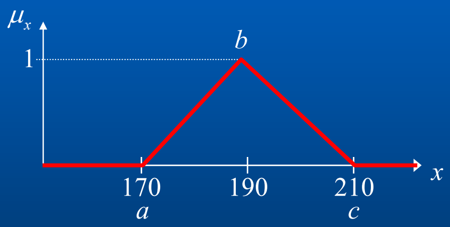
- **Testmagasság univerzum:** $X:0\le x\le 270$
- **Magas emberek halmaza:** $\mu_{magas}:X\to[0,1]$



30

Tagsági függvény típusok

- **Háromszög**

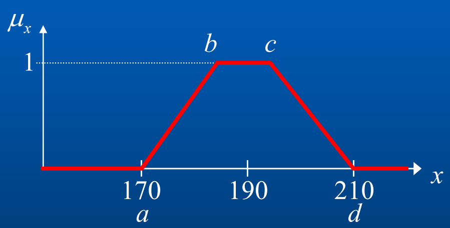


$$\mu(x;a,b,c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{c-x}{c-b}\right),0\right)$$

31

Tagsági függvény típusok

- **Trapéz**

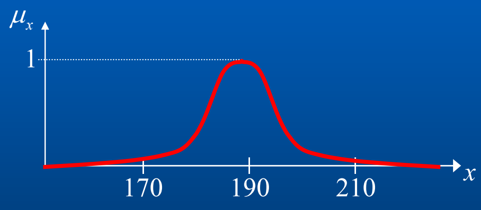


$$\mu(x;a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},1,\frac{d-x}{d-c}\right),0\right)$$

32

Tagsági függvény típusok

- **Gauss**

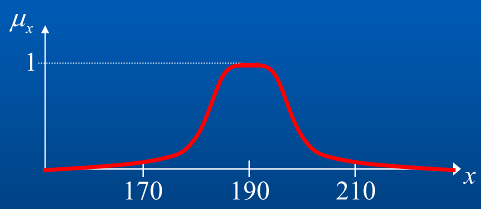


$$\mu(x;\sigma,m) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

33

Tagsági függvény típusok

- **Általánósított haranggörbe**

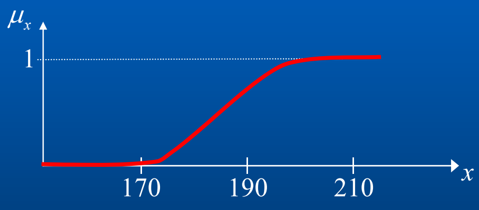


$$\mu(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-b}{a}\right|^{2c}}$$

34

Tagsági függvény típusok

- **Szigmoid**

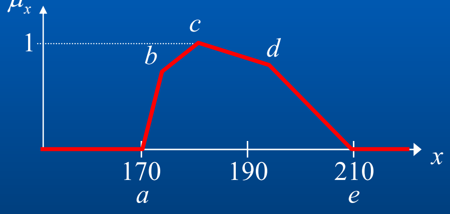


$$\mu(x;a,b)=\frac{1}{1+e^{a(x-b)}}$$

35

Tagsági függvény típusok

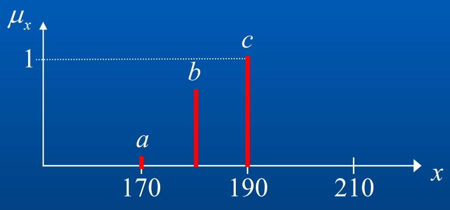
- **Szakaszonként lineáris**



36

Tagsági függvény típusok

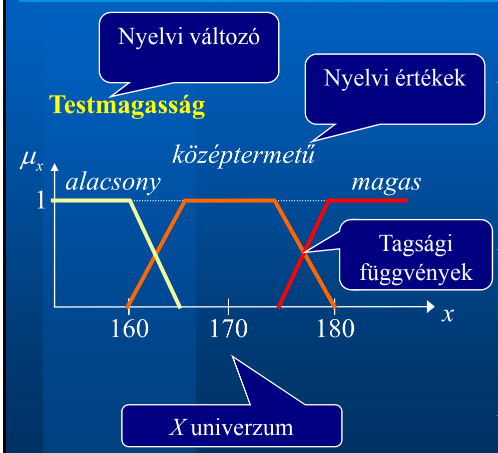
- **Singleton**



$$\mu(a) = 0.1$$
$$\mu(b) = 0.8$$
$$\mu(c) = 1$$

37

Fuzzy halmazok jellemzői



$$A_a = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \le 160 \\ \dfrac{165 - x}{5} & \text{ha } 160 < x < 165 \\ 0 & \text{ha } x \ge 165 \end{cases}$$

$$A_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 160 \text{ vagy } x \ge 180 \\ \dfrac{x - 160}{5} & \text{ha } 160 < x < 165 \\ 1 & \text{ha } 165 \le x \le 175 \\ \dfrac{180 - x}{5} & \text{ha } 175 < x < 180 \end{cases}$$

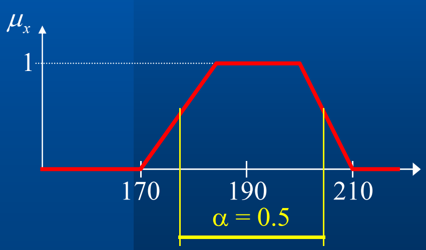
$$A_m = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 175 \\ \dfrac{x - 175}{5} & \text{ha } 175 < x < 180 \\ 1 & \text{ha } x \ge 180 \end{cases}$$

38

Fuzzy halmazok: az α - vágat

- **Valamely adott A fuzzy halmazhoz az A_α α – vágat minden α ∈ [0,1] értékre az**

$$A_\alpha = \{ x \,|\, A(x) \geq \alpha \}$$

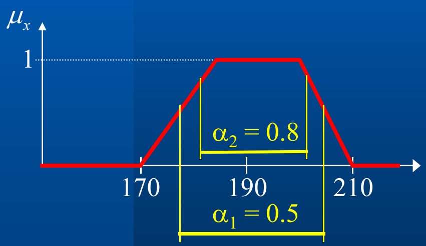


$$A_{0.5} = [175, 205]$$

39

Fuzzy halmazok: az α - vágat

- **Az α – vágatok fontos tulajdonsága, hogy megfordítják az eredetí α ∈ [0,1] értékek rendezettségét, azaz minden α_1, α_2 ∈ [0,1] , $\alpha_1 < \alpha_2$ esetén**



$$A_{\alpha_1} \supset A_{\alpha_2}$$

$$A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = A_{\alpha_2}$$

$$A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} = A_{\alpha_1}$$

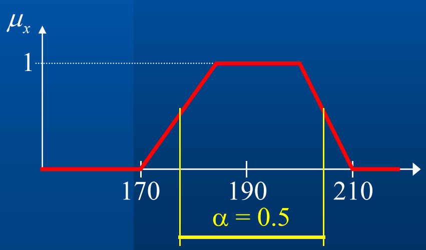
Az α – vágatok egymásba ágyazott halmazcsaládot alkotnak

40

Fuzzy halmazok: szigorú α - vágat

- **Valamely adott A fuzzy halmazhoz az $A_{\alpha+}$ szigorú α – vágat minden α ∈ [0,1] értékre az**

$$A_{\alpha+} = \{x \mid A(x) > \alpha\}$$



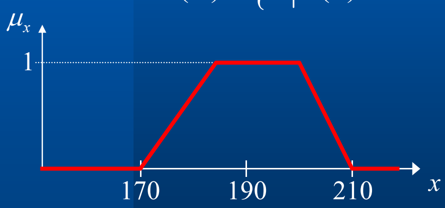
$$A_{0.5} = (175, 205)$$

41

Fuzzy halmazok: a szinthalmaz

- ***Az A* fuzzy halmaz összes egymástól különböző α – vágatát tartalmazó halmazt *A* szinthalmazának nevezzük.**

$$\Lambda(A) = \{\alpha \mid A(x) = \alpha \text{ valamilyen } x \in X\text{-re}\}$$



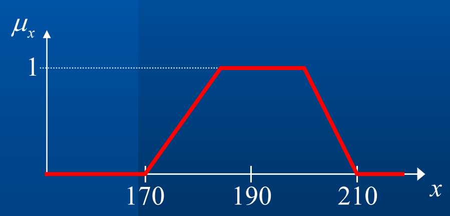
$$\Lambda_f(A) = [0,1]$$

$$\Lambda_d(A) = \{0, 0.1, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

42

Fuzzy halmazok: lényeges α - vágatok

- **Szakaszonként lineáris fuzzy halmazok esetén (pl.: háromszög, trapéz, stb.) azon α ∈ [0,1] értékeket, melyeknél a tagsági függvénynek töréspontja van, lényeges α – vágatoknak nevezzük.**



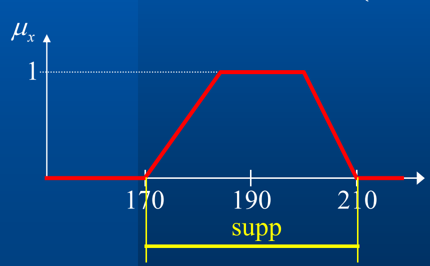
$$\Lambda^*(A) = \{0,1\}$$

43

Fuzzy halmazok: a hordozó

- **Az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz hordozója (support) *S(A)* halmaz, mely tartalmazza az *X* univerzum összes olyan elemét amelynek tagsági értéke nem *nulla*:**

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$



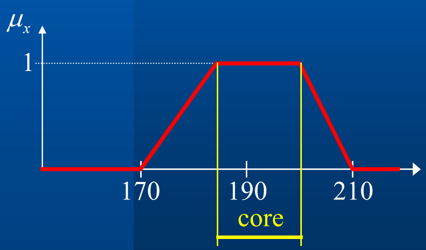
$$S(A) = (170, 210)$$

44

Fuzzy halmazok: a mag

- **Az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz magja (core) az a *C(A)* halmaz, mely tartalmazza *A* minden olyan elemét, melynek tagsági értéke *egy*:**

$$C(A)=\{x \in X \,|\, \mu_A(x)=1\}$$



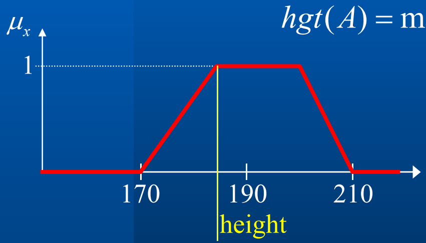
$$C(A)=[185,200]$$

45

Fuzzy halmazok: a magasság

- ***A* fuzzy halmaz magassága (height) *hgt(A)* a halmazban levő legnagyobb tagsági függvényérték:**

$$hgt(A)=\max_x(\mu_A(x))$$



Normalizált a fuzzy halmaz, ha a magassága egységnyi: $hgt(A)=1$

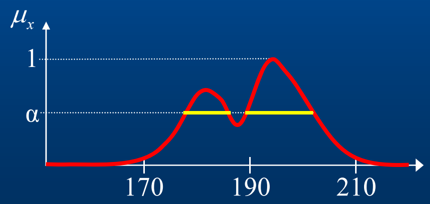
46

Fuzzy halmazok: konvexitás

- **Konvex valamely X univerzumon értelmezett A fuzzy halmaz, ha valamennyi α – vágata konvex halmaz**

$$\mu_A\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\geq \min\left[\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\right]$$

$$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R},\quad \lambda\in[0,1]$$



47

Fuzzy halmazműveletek

- ***Komplemens* definiálható bármely olyan c függvény segítségével, amely megfelel a következő axiomának:**

$$c:[0,1]\rightarrow[0,1]$$

$$\mu_{\neg A}(x)=c(\mu_A(x))\quad \forall x\in X$$

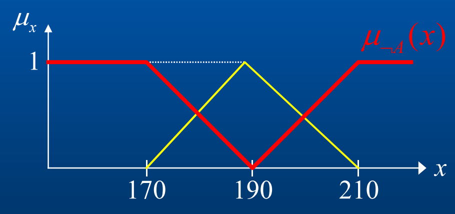
1: $c(0)=1$ és $c(1)=0$

2: $\forall a,b\in[0,1]$, ha $a<b$, akkor $c(a)\geq c(b)$
(c monoton nem növekvő)

48

Zadeh-féle standard komplemens

$$c(\mu_A(x)) = \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \forall x \in X$$

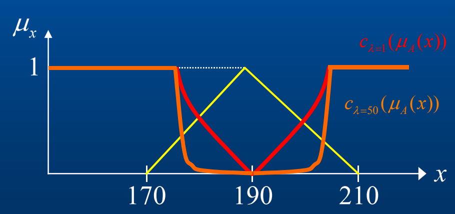


49

Sugeno komplemensek osztálya

$$c_\lambda(\mu_A(x)) = \frac{1 - \mu_A(x)}{1 + \lambda\mu_A(x)} \qquad \forall x \in X$$

$$\lambda > -1$$

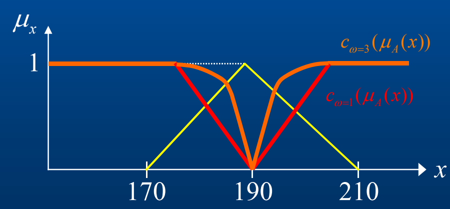


50

Yager féle komplemensek

$$c_\omega(\mu_A(x)) = \sqrt[\omega]{1-(\mu_A(x))^\omega} \qquad \forall x \in X$$

$$\omega > 0$$



51

Fuzzy halmazműveletek

- ***Metszet:*** **Fuzzy *t-norma (metszet)* definiálható bármely olyan *t* függvény segítségével, amely megfelel a következő axiómáknak:**

$$t:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = t\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] \quad \forall x \in X$$

1: *t(1,1)=1*
t(0,1)=t(1,0)=t(0,0)=0 (határfeltétel)

2: *t(a,b)=t(b,a)* (kommutatív)

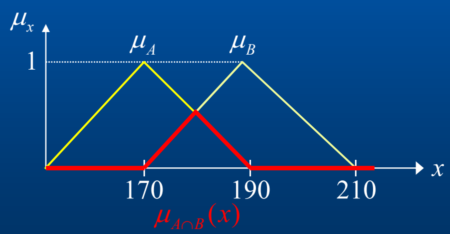
3: ha $a \le a'$ és $b \le b'$ akkor $t(a,b) \le t(a',b')$ (monoton)

4: *t(t(a,b),c) = t(a,t(b,c))* (asszociatív)

52

Zadeh féle metszet

$$t(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_{A\cap B}(x) = \min\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right] \qquad \forall x \in X$$



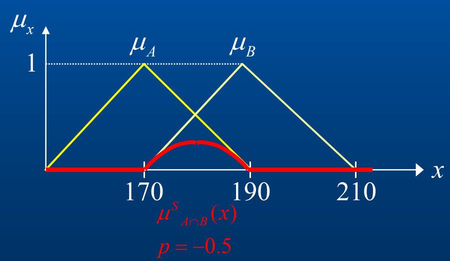
53

Schweitzer - Sklar féle metszet

$$t_S(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu^S{}_{A\cap B}(x) = \sqrt[p]{\max\left(0,\left(\mu_A(x)\right)^p + \left(\mu_B(x)\right)^p - 1\right)}$$

$\forall x \in X$

$p \neq 0$



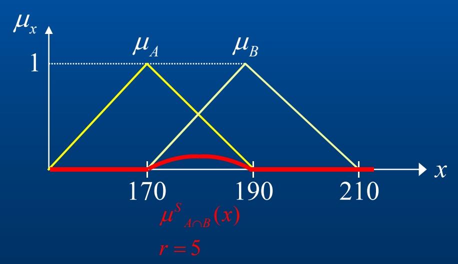
54

Hamacher féle metszet

$$t_H(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu^H{}_{A\cap B}(x) = \frac{\mu_A(x)\mu_B(x)}{r+(1-r)\left(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x)\right)}$$

$\forall x \in X$

$r > 0$



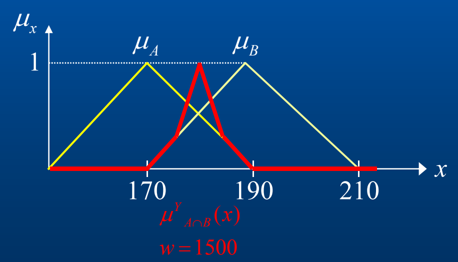
55

Yager féle metszet

$$t_Y(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu^Y{}_{A\cap B}(x) = 1-\min\left(1, \sqrt[w]{\left(1-\mu_A(x)\right)^w+\left(1-\mu_B(x)\right)^w}\right)$$

$\forall x \in X$

$w > 0$



56

Fuzzy halmazműveletek

- **Fuzzy** ***s-norma (t-conorma, unió)*** **definiálható bármely olyan** ***s*** **függvény segítségével, amely megfelel a következő axiómáknak:**

$$s:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=s\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right] \quad \forall x\in X$$

1: s*(0,0)=0*
s(0,1)=s(1,0)=s(1,1)=1 (határfeltétel)

2: s*(a,b)*=s*(b,a)* (kommutatív)

3: ha $a\le a'$ és $b\le b'$ akkor $s(a,b)\le s(a',b')$ (monoton)

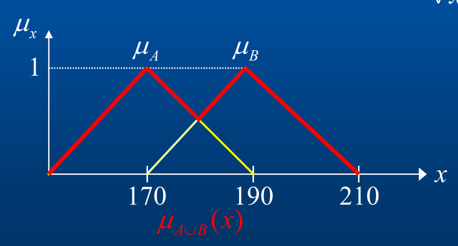
4: s*(s(a,b),c)* = s*(a,s(b,c))* (asszociatív)

57

Zadeh féle unió

$$s\left(\mu_A(x),\mu_B(x)\right)=\mu_{A\cup B}(x)=\max\left(\mu_A(x),\mu_B(x)\right)$$

$$\forall x\in X$$

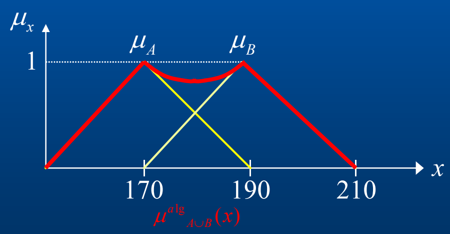


58

Algebrai unió

$$s_{a\lg}\left(\mu_A(x)\mu_B(x)\right) = \mu^{a\lg}{}_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

$$\forall x \in X$$

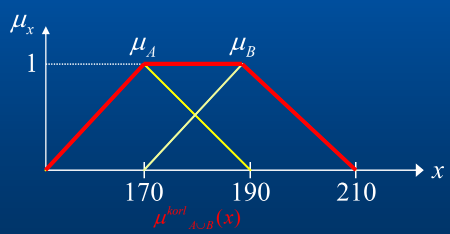


59

Korlátos unió

$$s_{korl}\left(\mu_A(x)\mu_B(x)\right) = \mu^{korl}{}_{A\cup B}(x) = \min\left(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\right)$$

$$\forall x \in X$$



60

Fuzzy halmazok tulajdonságai

- ***A,B*** **és** ***C*** **legyenek az** ***X*** **univerzumon értelmezett fuzzy halmazok.**

1. kommutatív $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

2. asszociatív $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. disztributív $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. idempotenciális $A \cup A = A$ és $A \cap A = A$

61

Fuzzy halmazok tulajdonságai

- ***A,B*** **és** ***C*** **legyenek az** ***X*** **univerzumon értelmezett fuzzy halmazok.**

5. identitás $A \cup 0 = A$ és $A \cap X = A$

$A \cap 0 = 0$ és $A \cup X = X$

6. tranzitív ha $A \subseteq B \subseteq C$ akkor $A \subseteq C$

7. involució $\overline{\overline{A}} = A$

- **Fuzzy halmazok esetén is alkalmazhatók a DeMorgan szabályok:**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

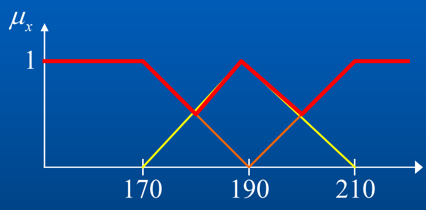
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

62

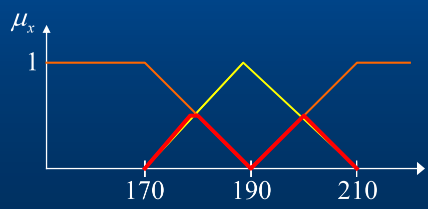
Fuzzy halmazok tulajdonságai

Figyelem!

$A \cup \overline{A} \neq X$



$A \cap \overline{A} \neq 0$



63

Fuzzy reláció

- **Az n darab A_1, A_2, …,A_n halmaz fuzzy relációja az $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ univerzumon értelmezett fuzzy halmaz, ahol A_i az X_i univerzumon értelmezett halmaz és az „×” a direkt (Descartes) szorzat jele:**

$$R_{A_1 \times \ldots \times A_n} = \left\{ \begin{array}{l} \left((a_1, a_2, \ldots, a_n), \mu_R(a_1, a_2, \ldots, a_n) \right) \Big| \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \end{array} \right\}$$

64

Fuzzy reláció

- **Az *n* darab $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fuzzy halmaz *direkt szorzata* az $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ univerzumon értelmezett fuzzy halmaz:**

$$R_{A_1\times\ldots\times A_n} = \left\{ \begin{array}{l} ((a_1,a_2,\ldots,a_n), \mu_R(a_1,a_2,\ldots,a_n)) \,\big|\, (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \\ \mu_R(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \min_i(\mu(a_i)) \end{array} \right\}$$

- **Két tetszőleges halmaz relációját *bináris relációnak* nevezzük.**

65

Fuzzy reláció

- **Diszkrét, véges elemszámú fuzzy halmazok esetén a relációt legeggyszerübben tagsági függvény mátrixszal adhatjuk meg.**

R(X,Y)	y_1	y_2	y_3
x_1	0.8	0	0
x_2	0.2	0	0.5
x_3	0	1	0.5

66

Fuzzy reláció

- **Egy *R(X,Y)* fuzzy reláció értelmezési tartományának (domain, *domR(X,Y)*) nevezzük azt az *X*-en értelmezett fuzzy halmazt, melynek tagsági függvényértékei:**

$$\mu_{domR}(x) = \max_{y \in Y} \mu_R(x,y), \qquad \forall x \in X$$

- **Egy *R(X,Y)* fuzzy reláció értékkészletének (range, *ranR(X,Y)*) nevezzük azt az *Y*-on értelmezett fuzzy halmazt, melynek tagsági függvényértékei:**

$$\mu_{ranR}(y) = \max_{x \in X} \mu_R(x,y), \qquad \forall y \in Y$$

67

Fuzzy reláció

- **Egy *R(X,Y)* fuzzy reláció magasságának (*h(R)*) nevezzük azt a valós számot, amely a reláció legmagasabb tagsági foka:**

$$h(R) = \max_{y \in Y} \max_{x \in X} \mu_R(x,y),$$

$$h(R) = h(domR) = h(ranR)$$

- **Ha *h(R)*=1, akkor az *R* normális fuzzy reláció, egyébként szubnormális.**

68

Fuzzy reláció

- **Függvénynek nevezzük az X és Y fuzzy halmazokon értelmezett *R(X,Y)* bináris relációt, ha nem létezik olyan értelmezési tartománybeli eleme, amelyhez a reláció két értékkészletbeli elemet rendelne:**

$$\forall x \in X\text{-hez nem létezik } y_1, y_2 \in Y,\ \text{hogy}$$
$$R(x, y_1) > 0 \text{ és } R(x, y_2) > 0,\ \ \text{ahol } y_1 \neq y_2$$

69

Fuzzy reláció

- **Egy *R(X,Y)* bináris fuzzy reláció inverzének nevezzük azt az R^{-1}*(X,Y)* relációt, ahol:**

$$\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(y, x) \qquad \forall (x, y) \in X \times Y$$

$$domR(X,Y) = ranR^{-1}(X,Y)$$
$$domR^{-1}(X,Y) = ranR(X,Y)$$
$$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$$

70

Fuzzy reláció

- **$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ $\left(\times_{i\in\mathbb{N}_n} X_i\right)$ univerzum elemeit az x sorozattal (vektor) jelölhetjük:**

$$x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

$$\times_{i\in\mathbb{N}_n} X_i = \left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \middle| x_i \in X_i, \forall i \in \mathbb{N}_n\right\}$$

- **Az y sorozat az x sorozat részsorozata $\left(y \prec x\right)$, ha az x sorozat tagjainak csak egy részét tartalmazza:**

$$x = \left(x_i \middle| i \in \mathbb{N}_n\right) \in \times_{i\in\mathbb{N}_n} X_i,\ \ y = \left(y_j \middle| j \in J\right) \in \times_{j\in J} X_j,\ \ J \subset \mathbb{N}_n$$

$$y_i = x_j,\quad \forall j \in J$$

71

Projekció

- **Legyen $R(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)$ egy fuzzy reláció, ekkor $\left[R \downarrow Y\right]$ jelöli R-nek az Y halmazra vetített projekcióját, melynek tagsági függvénye:**

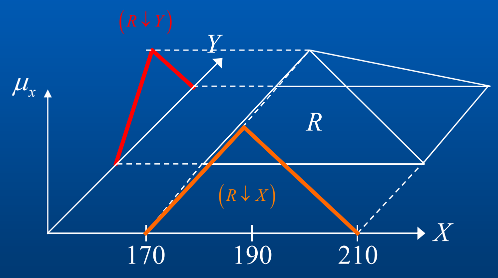
$$\mu_{\left[R\downarrow Y\right]}(y) = \max_{y \prec x} \mu_R(x)$$

ahol $Y = \left\{X_j \middle| j \in J \subset \mathbb{N}_n\right\}$, y az x sorozat részsorozata

- **Kisebb dimenziószámra vetíti a relációt**

72

Projekció



73

Hengeres kiterjesztés

- Legyen $R(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)$ egy fuzzy reláció, ekkor $\left[R \uparrow X - Y\right]$ jelöli *R*-nek az *X-re* vett hengeres kiterjesztését, melynek tagsági függvénye:

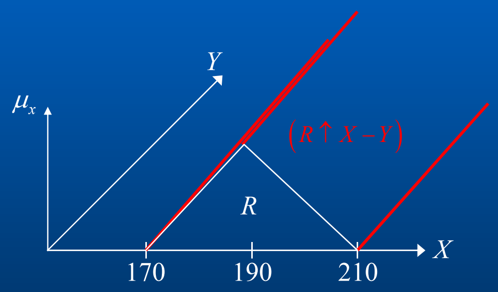
$$\mu_{\left[R \uparrow X-Y\right]}(x) = \mu_R(y)$$

$\forall x$-re, ahol y az x sorozat részsorozata

- Olyan dimenziókra terjeszti ki a relációt, melyekre az korábban nem volt definiálva (az X-ben megtalálhatóak de az Y-ban nem (X-Y)).

74

Hengeres kiterjesztés



75

Hengeres lezárt

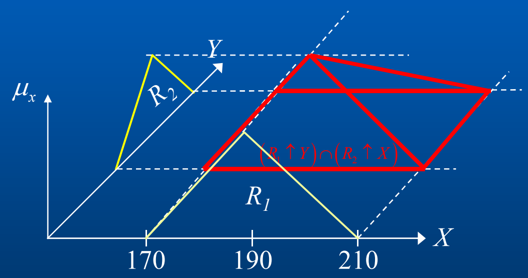
- **Valamely relációt közelíthetünk az egyes dimenzióira vett vetületei hengeres kiterjesztésének metszetével, azok hengeres lezártjával:**

$$\mu_{cyl\{R_i\}}(x) = \min_{i \in I} \mu_{[R_i \uparrow X - Y_i]}(x)$$

ahol $cyl\{R_i\}$ $\boldsymbol{R_i}$ **reláció** $\{R_i \mid i \in I\}$ **vetületeken alapuló hengeres lezártja**

76

Hengeres lezárt



77

Fuzzy kompozició

- **A fuzzy kompozíció általános alakja az *s-* és *t-normával* leírva (*s-t kompozíció*):**

$$\mu_{P \circ s,tQ}(x,z) = \underset{y \in Y}{s}\left[t\left(\mu_p(x,y), \mu_q(y,z)\right)\right] \qquad \forall x \in X, z \in Z$$

- **Zadeh-féle max-min kompozíció:**

$$\mu_{P \circ Q}(x,z) = \max_{y \in Y} \min\left[\mu_p(x,y), \mu_q(y,z)\right] \qquad \forall x \in X, z \in Z$$

78


Köszönöm a figyelmet!
Kérdések?