

# Fizikatörténet

## Az ókori matematika főbb eredményei

Horváth András  
SZE, Fizika és Kémia Tsz.

**v 1.0**

## Miért fontos ez nekünk?

A természet leírásának legeredményesebb kódolása a matematika:

- számolás (algebra, analízis)
- geometria (hagyományos és koordináta-geometria)

“A természet nagy könyve a matematika nyelvén íródott.”

*Galileo Galilei*

“Azoknak, akik nem ismerik a matematikát, nehézséget okoz keresztüljutni a szépség valódi érzéséhez, a legmélyebb szépséghez, a természethez... Ha a természetről akarsz tanulni, méltányolni akarod a természetet, ahhoz szükség van arra, hogy értsd a nyelvét, amin szól hozzád.”

*Richard Feynman*

# Korlátok

Itt csak a számunkra fontos részeket, a számunkra lényeges mélységig vizsgáljuk.

Pedig ez is érdekes volna. . . egy külön tantárgyban.

# Alapvető számtípusok

AFKT 1.1.2–1.2.1–1.2.2

A **természetes számok** természetesek. :-)

Csoportok megszámlálásával jutunk el hozzájuk, pl. itt 8 birka van,  
ott meg 10000 katona jön, ...

# Alapvető számtípusok

AFKT 1.1.2–1.2.1–1.2.2

A **természetes számok** természetesek. :-)

Csoportok megszámlálásával jutunk el hozzájuk, pl. itt 8 birka van, ott meg 10000 katona jön, ...

A **racióális számok** könnyen eredeztethetők a természetesekből. Osztozkodási problémák vezettek ide. Pl. van 5 elejtett nyúl és 12 ember, akkor hány nyúl jut egy emberre?

Eredetük ködbe vész. A görögök nagyon szerették őket. “racióális”=“logosz”=“értelmes” számok.

# Alapvető számtípusok

AFKT 1.1.2–1.2.1–1.2.2

A **természetes számok** természetesek. :-)

Csoportok megszámlálásával jutunk el hozzájuk, pl. itt 8 birka van, ott meg 10000 katona jön, ...

A **racionális számok** könnyen eredeztethetők a természetesekből. Osztozkodási problémák vezettek ide. Pl. van 5 elejtett nyúl és 12 ember, akkor hány nyúl jut egy emberre?

Eredetük ködbe vész. A görögök nagyon szerették őket. “racionális”=“logosz”=“értelmes” számok.

Az **irracionális számok** létét a görög pitagóreusok fedezték fel.

# A pitagóreusokról általában

**Pitagorasz** (Püthagorasz), i.e. 582–496? által alapított filozófiai iskola több évszázados történettel.

Alapelvük: **A dolgok lényege a szám.**

Mindenben a számszerűséget keresték: jó eszköz a fizikához.

# A pitagóreusokról általában

**Pitagorasz** (Püthagorasz), i.e. 582–496? által alapított filozófiai iskola több évszázados történettel.

Alapelvük: **A dolgok lényege a szám.**

Mindenben a számszerűséget keresték: jó eszköz a fizikához.

Fő tevékenységi köreik a matematikában:

- számok oszthatósági tulajdonságainak vizsgálata (prímszámok, osztók, stb.)
- a számok geometriai jelentésének tanulmányozása (négyzetszámok, háromszögszámok, stb.)
- geometriai alakzatok kategorizálása (szabályos testek)
- egyéb geometriai eredmények (pl. Pitagorasz-tétel).



## Pitagóreusok: zeneelmélet alapjai

Két egyforma anyagú és feszítettségű húrt pengetve észrevették, hogy akkor kellemes az összhangzás, ha a húrhosszak aránya racionális szám.



Pl.: oktáv=1:2, kvint=2:3, kvart=3:4, ... húrhossz-arány.  
A zeneelmélet alapjait teszik le.

# Pitagoreusok: szabályos testek

Előttük négy volt ismert: kocka, tetraéder, oktaéder, ikozaéder.

Megfeleltetik a 4 alapelemnek.

Csakhoggy: felfedezik a dodekaédert!

Van valami új alapelem?

Az ötödik szabályos testet sokáig titokként kezelik.

# Pitagoreusok: szabályos testek

Előttük négy volt ismert: kocka, tetraéder, oktaéder, ikozaéder.

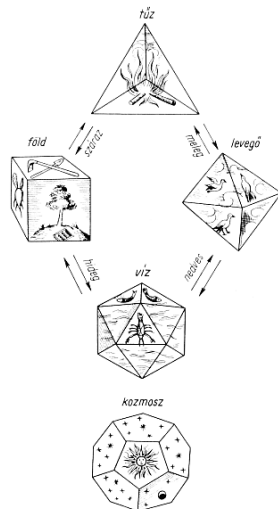
Megfeleltetik a 4 alapelemnek.

Csakhogy: felfedezik a dodekaédert!  
Van valami új alapelem?

Az ötödik szabályos testet sokáig titokként kezelik.

A szimmetrikus testeket “tökéletesnek” tartották.

Legtökéletesebb alak: kör és gömb.



# Pitagoreusok: A Pitagorasz-tétel

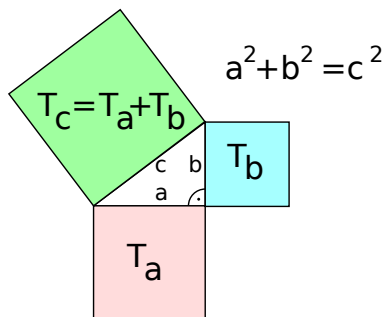
## Nem Pitagorasz fedezi fel!

Ismert volt korábban valami hasonló  
Mezopotámiában, Egyiptomban.

Pitagorasz talán egy általános  
bizonyítást adott rá, de az biztos,  
hogy a pitagóreusok sokat  
használták.

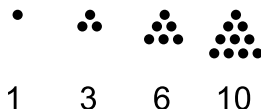
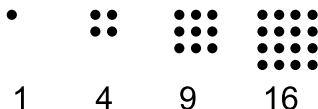
Ókori megfogalmazás:  
terület-összegekkal.

Képlet, hogy " $a^2 + b^2 = c^2$ " nem is  
volt akkoriban.

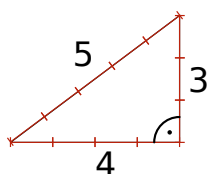


# Pitagóreusok: számok és geometria

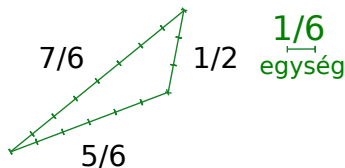
Négyzetszámok, háromszög-számok, ...



Ha egy alakzat oldalainak aránya racionális, akkor elég finom egységet használva egész számú egységgel kirakható! Ezt szerették volna elérni, mert akkor pontosan lehetne szerkeszteni.



1  
egység



1/6  
egység

# Az irracionális számok felfedezése

Nagy kérdés:

“Minden mennyiség kifejezhető racionális számokkal?”

Ez a pitagóreusok fejében azt is jelentette, hogy:

“Van valami elemi egység, melynek többszöröseként minden előáll?”  
avagy:

“Számokkal leírható a természet?”

# Az irracionális számok felfedezése

Nagy kérdés:

“Minden mennyiség kifejezhető racionális számokkal?”

Ez a pitagóreusok fejében azt is jelentette, hogy:

“Van valami elemi egység, melynek többszöröseként minden előáll?”  
avagy:

“Számokkal leírható a természet?”

Válasz az első kérdésre: **Nem!** (Akkor a többire is “nem” a válasz?)

# Az egységnégyzet átlója nem racionális!

**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

Legyen  $c$  az átló hossza. A pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?



# Az egységnégyzet átlója nem racionális!

**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

Legyen  $c$  az átló hossza. A pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

**Indirekt bizonyítás:**

Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható.

$$\text{Ekkor:} \quad c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

# Az egységnégyzet átlója nem racionális!

**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

Legyen  $c$  az átló hossza. A pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

**Indirekt bizonyítás:**

Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható.

$$\text{Ekkor:} \quad c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

Az utolsó formula szerint  $m$  biztosan páros.

# Az egységnégyzet átlója nem racionális!

**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

Legyen  $c$  az átló hossza. A pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

**Indirekt bizonyítás:**

Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható.

$$\text{Ekkor:} \quad c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

Az utolsó formula szerint  $m$  biztosan páros. De akkor  $m^2$  4-gyel osztható.

# Az egységnégyzet átlója nem racionális!

**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

Legyen  $c$  az átló hossza. A pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

**Indirekt bizonyítás:**

Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható.

$$\text{Ekkor:} \quad c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

Az utolsó formula szerint  $m$  biztosan páros. De akkor  $m^2$  4-gyel osztható. De akkor  $n$  is osztható 2-vel...

## Az egységnégyzet átlója nem racionális!

**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

Legyen  $c$  az átló hossza. A pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

**Indirekt bizonyítás:**

Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható.

$$\text{Ekkor:} \quad c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

Az utolsó formula szerint  $m$  biztosan páros. De akkor  $m^2$  4-gyel osztható. De akkor  $n$  is osztható 2-vel. . .

Ellentmondásra jutottunk a kezdeti feltevéssel, tehát kimondhatjuk:

**az egységnégyzet átlója nem írható fel két egész szám hányadosaként.**

## ...következmények

Ez megrázó dolog volt a görögöknek a fenti gondolattársítások miatt. (“Ez azt jelenti, hogy a számok mégsem tudják leírni a természetet?”)

Kicsit hasonlít ez a modern fizika által okozott sokkra: “Akkor nem mehetek gyorsabban, mint a fény?”, “Tehát a természetben szerepet játszik a véletlen?”

## ...következmények

Ez megrázó dolog volt a görögöknek a fenti gondolattársítások miatt. (“Ez azt jelenti, hogy a számok mégsem tudják leírni a természetet?”)

Kicsit hasonlít ez a modern fizika által okozott sokkra: “Akkor nem mehetek gyorsabban, mint a fény?”, “Tehát a természetben szerepet játszik a véletlen?”

Eredmény:

- A görögök keveset foglalkoztak a számolással.
- Geometriai módszerrel tudták kezelni az irracionális mennyiségeket.
- A geometria erős fejlődése.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻



# Számírás az ókorban: betűk számértéke

A görögök fő számjelölése:

$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$	$\delta'$	$\epsilon'$	$\zeta'$	$\xi'$	$\eta'$	$\theta'$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\iota'$	$\kappa'$	$\lambda'$	$\mu'$	$\nu'$	$\xi'$	$\omicron'$	$\pi'$	$\varsigma'$
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\zeta'$	$\sigma'$	$\tau'$	$\upsilon'$	$\varphi'$	$\chi'$	$\psi'$	$\omega'$	$\mathfrak{d}'$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

,  $\overline{\alpha} \overline{\tau} \overline{\epsilon} \Rightarrow 1305$

Más nyelvek betűinek is meg volt határozva a számértéke.

## Érdekesség: a nevek számértéke

**Minden névnek, szónak volt számértéke.**

(Ha hangsúlyozni akarták, hogy ez egy szám, akkor egy vesszővel fejezték be, pl.  $\mu\theta'=49$ .)

Ez számmisztikai megfontolásoknak, rejtvényeknek, burkolt utalásoknak volt az alapja.

Máig is ismert ezek közül:

Jelenések könyve (13, 17–18): (az Antikrisztusról szóló rész) ...  
*senki ne adhasson-vehessen, ha nem viseli a vadállat jelét: nevét vagy nevének a számát... Akinek van esze, számítsa ki a vadállat számát, hisz emberi szám: **hatszázhatvanhat**.*

A “666” máig is sátáni szimbólum, holott a keletkezésekor ez a jelölés még nem létezett (szövegesen írták le) és feltehetően János apostol csak burkoltan beszélt egy akkoriban közismert személyről.

## Nagy számok írása a görög jelöléssel

“,” egy betű előtt: 1000-szeres szorzó. Pl. “,α”=1000.

A vesszőt nem halmozták, hanem a 10000-nek volt egy jele:

“M”=miriad. Amit e fölé írtak, az 10000-rel volt szorozva:

$$\mu\beta' = 42, \quad \mu\beta \text{ M}' = 420\,000$$

MM’=“miriád szor miriád”, azaz 100000000=10<sup>8</sup>.

MMM’=10<sup>12</sup>, stb.

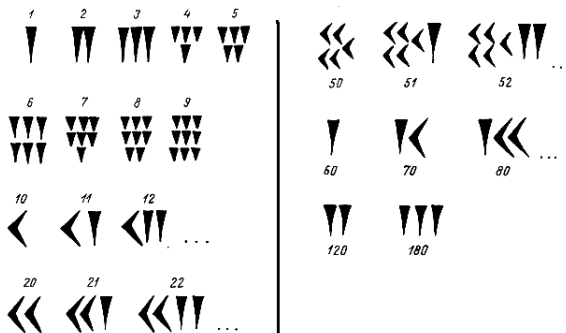
Ezzel, kicsit körülményesen, de akármekkora szám leírható!

Pl. Arkhimédész kiszámolta, hogy hány homokszem töltené ki az akkor ismert Univerzumot. (10<sup>63</sup> nagyságrendűt kapott.)

# Számírás az ókorban: kezdetleges helyiértékes rendszer

Babilónia. 60-as számrendszer, de 0 nincs.

“Számjegyek.” több jelből álló csoportok (egyiptomihoz hasonló jellegű).



10-es rendszerű számjegyek 60-as rendszer szerint csoportosítva.

## A babilóniai számjelölés

Gond a “0” hiánya:

- tudni kellett a számok nagyságát fejből
- szerencsére ritkán van rá szükség
- az i.e. 2–3.szdz. környékére megjelent egy “helykitöltő” szimbólum

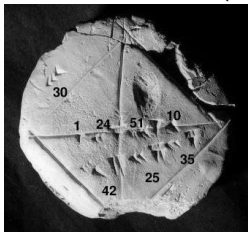
Az **idő- és fokjelölés**ben még ma is megvan a nyoma. (1 óra = 60 perc, a teljes kör  $6 \cdot 60 = 360$  fok, stb.)

A 60-as rendszer előnye: **sok osztási probléma pontosan jelölhető**, mert 60 osztható a 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 számokkal.

Pl. az  $\frac{1}{3}$  10-es rendszerben 0,33333..., 60-adosban meg 20'. (20 perc)

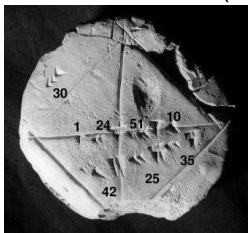
# A négyzet átlója a babilóniaiak szerint

Egy ókori babilóniai lelet (i.e. 1200–1400):



# A négyzet átlója a babilóniaiak szerint

Egy ókori babilóniai lelet (i.e. 1200–1400):



Mit jelent az “1, 24, 51, 10” számsor a négyzet átlóján?

$$1 + 24 \cdot \frac{1}{60} + 51 \cdot \frac{1}{(60)^2} + 10 \cdot \frac{1}{(60)^3} = 1,41421295...$$

$$\sqrt{2} = 1,4142136...$$

A  $\sqrt{2}$  igen pontos közelítése!

Sokat kellett hozzá számolni, de nem lehetetlen. (Intelligens próbálkozással is lehet, ha valaki tud szorozni.)

# A számjelölés fontossága

A számjelölés befolyásolta az elvégezhető számítások jellegét és mennyiségét.



## A számjelölés fontossága

A számjelölés befolyásolta az elvégezhető számítások jellegét és mennyiségét.

Egyiptomi: kicsit terjedős, de könnyű összeadni, kivonni, közepesen nehéz szorozni és osztani.

Görög betűjelölés: tömör, de minden művelet elvégzése körülményes.

Babilóniai: kicsit terjedős, a "0" jelölés hiánya nehézkessé teszi, de minden alapműveletet könnyű elvégezni vele.

## A számjelölés fontossága

A számjelölés befolyásolta az elvégezhető számítások jellegét és mennyiségét.

Egyiptomi: kicsit terjengős, de könnyű összeadni, kivonni, közepesen nehéz szorozni és osztani.

Görög betűjelölés: tömör, de minden művelet elvégzése körülményes.

Babilóniai: kicsit terjengős, a "0" jelölés hiánya nehézkessé teszi, de minden alpműveletet könnyű elvégezni vele.

Két, eltérő megközelítés:

- Görögök: inkább szerkesztenek, mint számolnak.
- Babilóniaiak: inkább számolnak, mint szerkesztenek.

Máig él ez a kettősség a mérnöki gyakorlatban. (Erőábrák szerkesztése, vagy egyenletek felírása.)

## A számjelölés további története

Arkhimédész már sejtette, hogy a babilóniai jelölés lesz a jobb. Javított is rajta, de a mai, tízes számrendszert majd a hinduk dolgozzák ki és arab közvetítésen át jut Európába, ahol elnyer mai formáját a középkorban.

# A számjelölés további története

Arkhimédész már sejtette, hogy a babilóniai jelölés lesz a jobb. Javított is rajta, de a mai, tízes számrendszert majd a hinduk dolgozzák ki és arab közvetítésen át jut Európába, ahol elnyer mai formáját a középkorban.

Az ókori számjelölések máig tartó hatása:

- római számok (nem szóltunk róluk, mert mindenki ismeri)
- óra, perc, másodperc jelölés
- számmisztika (sajnos még foglalkoznak vele páran)
- két eltérő megközelítés: szerkesztés vagy közelítő számolás

# A geometria csúcsa: Görögország

AFKT 1.4.5

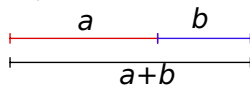
Egyiptomban, Mezopotámia, ...: sok praktikus ismeret. (Piramisok méretei, tájolása, földmérési feladatok, stb.)

**Ókori geometria csúcsa: Görögország.**

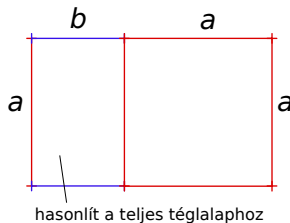
- Mások eredményeinek bebizonyítása.
- Igen széles körű alkalmazások.
- Geometria és esztétika kapcsolatának vizsgálata.
- A teljes geometria egy rendszerré rendezése.

# Aranymetszés: egy érdekes és jellemző elem

**Aranymetszés:** egy szakasz felosztása két részre, mely sem nem túl szimmetrikus, sem nem túl asszimmetrikus.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$



A görögök szerint az aranymetszés “esztétikus”:

- A megfelelő téglalap “arányos”.
- Szobrok, épületek méretarányainál érdemes használni.
- Sok meglepő helyen felbukkan.

Ma úgy mondanánk, hogy az aranymetszés egy

$\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$  arányú felosztás.

A görögök inkább szerkesztették.

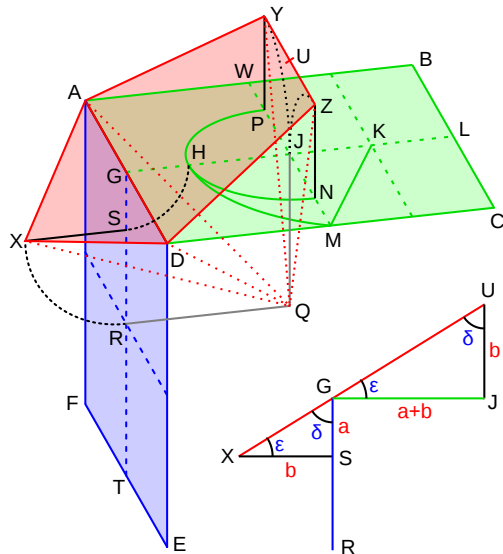
# Egy bonyolult feladat

Hogyan szerkesszünk szabályos dodekaédert?

Euklidesz: egy kocka köré, az ábra szerint.

Az aranymetszés aránya felbukkan!

Sok, hasonló szerkesztési problémát is megoldottak. De nem ez a legfontosabb, hanem az, hogy ezt egy tökéletes rendszerbe szervezték!



# Euklidesz: Elemek

Csúcspont: **Euklidesz** (ie. 325–265?)

Fő mű: **Elemek**.



# Euklidesz: Elemek

Csúcspont: **Euklidesz** (ie. 325–265?)

Fő mű: **Elemek**.

Évezredekig alapmű.

Lényegében csak az 1800-as években sikerül elvileg újat hozzátenni. (Bolyai János)

# Euklidesz: Elemek

Csúcspont: **Euklidesz** (ie. 325–265?)

Fő mű: **Elemek**.

Évezredekig alapmű.

Lényegében csak az 1800-as években sikerül elvileg újat hozzátenni. (Bolyai János)

Az Elemek geometriai része **axiomatikus felépítésű**.

Későbbi tudományos elméletek célja ilyen állapotot elérni.

# Euklidesz: Elemek (geometria)

Logikai felépítés: **Néhány alapvető fogalomból és magától értetődő szabályból vezet le mindent.**

Ízelítő:

*Definíciók:*

- 1. Pont az, aminek nincs része.*
- 2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.*
- 3. A vonal végei pontok.*
- 4. Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.*
- 5. ...*

*(23 definíció)*

## ... posztulátumok

1. *Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.*
2. *És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.*
3. *És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.*
4. *És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.*
5. *És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.*

## ... axiómák

1. *Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.*
2. *Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.*
3. *Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.*
4. *Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.*
5. *Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.*
6. *Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.*
7. *Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.*
8. *Az egész nagyobb a résznél.*
9. *Két egyenes vonal nem fog közre területet.*

## ... tételek

Ezekből az elemi azonosságokból **a teljes geometria levezethető**.  
Euklidesz meg is mutatta ezt és az egész ismert geometriát  
beleillesztette művébe.



## ... tételek

A legalsó szinteken igen egyszerű tételek vannak.

Pl.: a csúcsszögek egyenlőek, ha két háromszög oldalai páronként egyenlőek, akkor a szögek is egyenlőek, ...

Kicsit fentebb már bonyolultak is találhatóak, mint pl. a Pitagorasz-tétel.

A felső szintű tételek már igen bonyolultak, ma is a legfelsőbb szintű matematikus képzésben fordulnak elő.

Nincs legfelső szint! Akárhány tétel levezethető. (A kérdés csak az, van-e értelme.)



## ... tételek

A legalsó szinteken igen egyszerű tételek vannak.

Pl.: a csúcsszögek egyenlőek, ha két háromszög oldalai páronként egyenlőek, akkor a szögek is egyenlőek, ...

Kicsit fentebb már bonyolultak is találhatóak, mint pl. a Pitagorasz-tétel.

A felső szintű tételek már igen bonyolultak, ma is a legfelsőbb szintű matematikus képzésben fordulnak elő.

Nincs legfelső szint! Akárhány tétel levezethető. (A kérdés csak az, van-e értelme.)

A felépítés végigvitele igen absztrakt gondolkodást igényel. Ma is csak a speciális matematikai képzésekben tanítják.

## A axiomatikus felépítés előnyei

- Ha az alapelvek igazak és nem hibázunk, az egész elmélet helyességében biztosak lehetünk.
- Olyan tételekhez is eljutunk, amelyek magunktól nem jutottak volna eszünkbe.
- Egyértelmű igazságkritérium: levezethető-e az állítás az axiómákból vagy az ellenkezője vezethető le?

Azóta is ez a felépítés a végső célja a tudományos elméleteknek.  
(Kevés esetben érhető el...)

## Néhány további eredmény

**Arkhimédész** (i.e. 287–212)

Terület- és térfogatszámítás: az integrálszámítás előfutára.

- Általános módszer.
- Parabola területének meghatározása.
- Gömb és kúp térfogatának meghatározása.

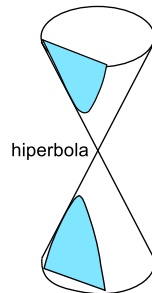
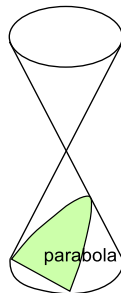
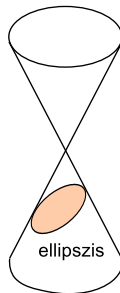
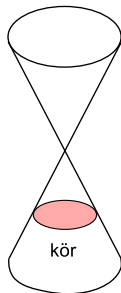
$\pi$  értékének addig legpontosabb közelítése:

- Nagyon sok oldalú szabályos sokszöggel közelíti a kört.
- Eredmény:  $\pi$  legalább  $3 + 10/71 \approx 3,1408$ , de legfeljebb  $3 + 1/7 \approx 3,1428$

Tizes helyiértékes rendszer előfutára.

## Néhány további eredmény

**Apollóniosz** (i.e. 265–190)  
Kúpszeletek tanulmányozása.



## Néhány megoldatlan probléma

### Kocka térfogat kettőzés.

Adott egy kocka élhossza. Szerkesszük meg azt az élhosszat, mely a kétszer ekkora térfogatú kockához tartozik!  
(Mai nyelven:  $\sqrt[3]{2}$  megszerkesztése.)

### Szögharmadolás.

Adott egy szög. Szerkesszük meg azt a szöget, aminek háromszorosa az eredeti szög. (Csak egyenes vonalzó, körző és ceruza használatával.)

### Kör négyszögesítése.

Szerkesszük meg adott körhöz a vele egyező területű négyzetet!

Ezek a látszólag egyszerű problémák **nem oldhatók meg!** Ezt csak az 18–19. században bizonyítják be.

# Értékelés

Az ókori matematika nagy érdemei:

- Megjelentek a nagy, egybefüggő gondolati rendszerek.
- Több példán kiderült, hogy a matematika jól alkalmazható a valóság leírására.
- Sok gyakorlati alkalmazás. (Tervrajzok, szerkesztés, elemi számítások.)

Hiányosságok:

- Hiányzik a könnyen használható számjelölés, ezért nem tudnak sokat számolni.
- Szűk réteg ismeri a matematikát.