

Fizikatörténet

Középkori matematika

Horváth András
SZE, Fizika és Kémia Tsz.

v 1.5

Bevezetés

Láttuk korábban:

A természettudomány forradalmát a középkor társadalmi, technikai és tudományos eredményei készítik elő.

Ezen alapozó tevékenységen kívül sok konkrét eredmény is született, pl.:

- Tízes számrendszerű helyiértékes számírás.
- Szögfüggvények.
- Problémamegoldási módszerek, algoritmusok.
- Egyenletrendezés szabályai.
- Pontos térképészeti, földmérési módszerek.

Ezek az eredmények igen **fontosak a fizika fejlődése szempontjából** is.

A kezdetek

A 10 a legtöbb ókori számírásban kitüntetett szerepű volt. (Lásd a korábban tanultakat.)

A mai rendszer: **10-es alapú, helyiértékes számírás.**

Első ismert **helyiértékes** rendszer: Mezopotámia.

A kezdetek

A 10 a legtöbb ókori számírásban kitüntetett szerepű volt. (Lásd a korábban tanultakat.)

A mai rendszer: **10-es alapú, helyiértékes számírás.**

Első ismert **helyiértékes** rendszer: Mezopotámia.

Az utóbb 40 évben ismerték fel: **Kínában volt egy 10 alapú, helyiértékes rendszer már az i.e. 5. században is.**

Felejtés oka: Kínában volt több könyv-égető uralkodó. A részleteket még kutatják.

A kezdetek

A 10 a legtöbb ókori számírásban kitüntetett szerepű volt. (Lásd a korábban tanultakat.)

A mai rendszer: **10-es alapú, helyiértékes számírás.**

Első ismert **helyiértékes** rendszer: Mezopotámia.

Az utóbb 40 évben ismerték fel: **Kínában volt egy 10 alapú, helyiértékes rendszer már az i.e. 5. században is.**

Felejtés oka: Kínában volt több könyv-égető uralkodó. A részleteket még kutatják.

Ősi változat: 0 nélkül. Helyiérték: rácson levő pozíció és váltogatott irány.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vertical		I	II	III	IIII	IIII	T	TT	TTT	TTTT
Horizontal		—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥

231		II	≡	I
5089	≡		⊥	TTTT

A kínai pálcika-számolás

Positive numbers (traditional)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vertical	○	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ	Ⅸ
Horizontal	○	—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Negative numbers (traditional)

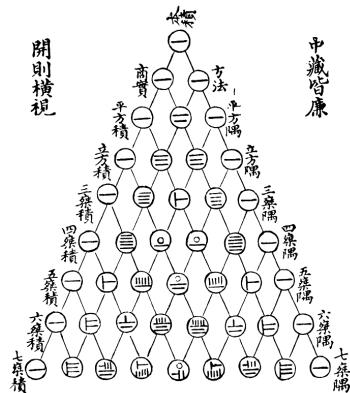
	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Vertical	⊙	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈

0 megjelenése: pontosan nem ismert időben.

Különböző változatai elterjednek Ázsiában.

Emellett létezik egy bonyolultabb, de nehezebben hamisítható számírás is.

Babilóniai – Kínai – Indiai kapcsolatok: kutatás alatt.



Yanghui-háromszög: 1300-as évek.

Európai megfelelő: Pascal-háromszög,
1600-as évek.

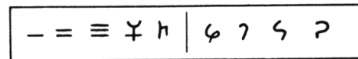
A tízes számrendszer: Áttekintés

AFKT 2.3.1

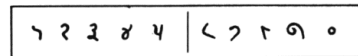
A mai rendszer kialakulásának fő lépései:

- i.e. 2. évezred, Mezopotámia: helyiértékes jelölés ötlete. (60-as alapú számrendszer 10-es csoportosítású számjegyekkel.)
- i.e. 3. szd., Arkhimédész: 10-es helyiértékű jelölés ötlete. (Sajnos nem dolgozza ki a részleteket.)
- i.sz. 2–6. szd., India: a 10-es rendszer kidolgozása egész számokra. Ötlet: Arkhimédész és/vagy Kína.
- i.sz. 8–15. szd., Arab Birodalom: alkalmazások, tizedes jelölés ötlete.
- 1600 körül, Napier, Kepler: mai tizedes törtek.

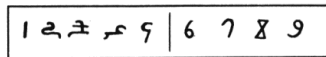
A számjegyek fejlődése:



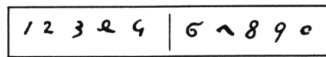
brahmi



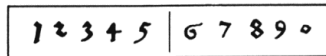
hindu



arab



európai (15.sz.)



Dürer

Indiai eredmények

Az ötletet Arkhimédészről veszik (Alexandriai Könyvtár).

Virágkor: 400–1200 között.

Kiemelkedő tudós: **Brahmagupta (598–668)**

A számábrázolás és számolás főbb eredményei:

- 0 következetes használata
- műveletek 0-val
- végtelen fogalmának kezelése
- negatív számok fogalma, értelmezése
- sok gyakorlati probléma megoldása

Egyéb eredmények:

- függvénytáblázatok (pl. \sin)
- másodfokú egyenletek megoldása
- ...

Érdekesség: mai számjegyek táblázata

Symbol										Used with alphabets
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Arabic, Latin, Cyrillic, and Greek
·	↘	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	Brahmi
०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	Devanagari
૦	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯	Gujarati
੦	੧	੨	੩	੪	੫	੬	੭	੮	੯	Gurmukhi
০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	Bengali / Assamese
೦	೧	೨	೩	೪	೫	೬	೭	೮	೯	Kannada
୦	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯	Odia
൦	൧	൨	൩	൪	൫	൬	൭	൮	൯	Malayalam
௦	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯	Tamil
౦	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	Telugu
၀	၁	၂	၃	၄	၅	၆	၇	၈	၉	Burmese
༠	༡	༢	༣	༤	༥	༦	༧	༨	༩	Tibetan

Symbol										Used with alphabets
᠐	᠑	᠒	᠓	᠐	᠕	᠖	᠗	᠘	᠙	Mongolian
෦	෧	෨	෩	෪	෫	෬	෭	෮	෯	Sinhala
០	១	២	៣	៤	៥	៦	៧	៨	៩	Khmer
๐	๑	๒	๓	๔	๕	๖	๗	๘	๙	Thai
໐	໑	໒	໓	໔	໕	໖	໗	໘	໙	Lao
ᦀ	ᦁ	ᦂ	ᦃ	ᦄ	ᦅ	ᦆ	ᦇ	ᦈ	ᦉ	Javanese
٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	Arabic
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	Persian / Dari / Pashto
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	Urdu / Shahmukhi
	א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	Hebrew
〇/零	一	二	三	四	五	六	七	八	九	East Asia
ο/ὀ	Α'	Β'	Γ'	Δ'	Ε'	Ζ'	Η'	Θ'		Modern Greek

Törtjelölés: kezdetek

Sexadecimális jelölés:

Sokáig csak az egészek jelölésére használták a 10-es alapot, a törteknél maradtak a 60-asnál.

Mai számjegyekkel pl. Ptoleimaiosz így adta meg a π -t:

$$\pi \approx 3 \ 8' \ 30'' \quad (= 3,1416666\dots)$$

Előny: sok nevezetes tört pontosan kifejezhető. (Pl. $1/3$, $1/6$, ...)

Hátrány: nehezebb műveletvégzés, mert az egész részek 10-es, a törtek 60-as alapúak.

Törtjelölés: a mai alak

Első tizedes törtek: Kína, i.e. 3. szd. 10 alapú, de nem helyiértékes jelölés.

Tizedes, helyiértékes törtek ötlete: Ghiyath al-Din Jamshid Mas'üd al-Kashi (1380–1429)

Mai alak kialakulása: Európa.

- Simon Stevin (1548–1620)
- John Napier (1550–1617)
- Johannes Kepler (1571–1630)

Sokféle jelölés: 3,1415-re

- $3\textcircled{0}1\textcircled{1}4\textcircled{2}1\textcircled{3}5$; $3(0)1(1)4(2)1(3)5$
- $3\frac{1415}{10000}$; $3\overline{1415}$
- 3.1415 (Napier); $3|1415$ (Kepler)

Tizedespont vagy tizedesvessző? Ez a kettősség azóta is megmaradt. :-(

A számjelölés fontossága

A tizedes törtekkel **egységnyi idő alatt 10–100-szor több művelet végezhető el**, mint az ókori számjelölésekkel.

Sok felfedezés (pl. Kepler bolygópálya-számításai) nélkül meg sem született volna.

Megszületnek **az első mechanikus számológépek**.

Szemléletformálás: **a számok egy egyszerűen kezelhető rendszert alkotnak**.

Csak ez után válik lehetővé a számok és műveletek axiomatikus rendszerbe foglalása.

Bonyolultabb műveletek, függvények értelmezése. (Pl. Napier: logaritmus-táblázatok.)

Trigonometrikus függvények

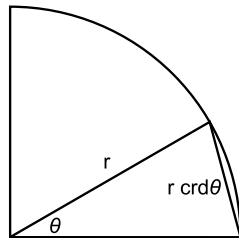
Alapötlet az ókorból: a “húrfüggvény”. A Θ központi szöghöz tartozó ívhossz az egységgörben.

Mai kifejtése: $\text{crd}(\Theta) = 2 \sin(\Theta/2)$

Ptolemaiosz táblázata: fél fokként, sexadecimális jelöléssel.

Mai pontosság: 4–5 tizedesjegy.

Sokáig ezt használják szögfüggvény-táblázatnak.



Trigonometrikus függvények

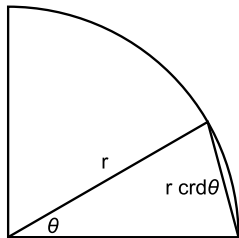
Alapötlet az ókorból: a “húrfüggvény”. A Θ központi szöghöz tartozó ívhossz az egységkörben.

Mai kifejtése: $\text{crd}(\Theta) = 2 \sin(\Theta/2)$

Ptolemaiosz táblázata: fél fokként, sexadecimális jelöléssel.

Mai pontosság: 4–5 tizedesjegy.

Sokáig ezt használják szögfüggvény-táblázatnak.



Színusz és koszinusz függvények: India.

További függvények: inverz színusz, koszinusz, és pár hasonló függvény.

Táblázatok és összefüggések felderítése.

Például Bhramagupta (7. szd.) (mai jelöléssel):

$$1 - \sin^2(x) = \cos^2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Al-Khwarizmi: Hiszab al-dzsebr w'al mukabalah.

Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (790–840): Hiszab al-dzsebr w'al mukabalah.

- Egyenletrendezés szabályai. **al-dzsebr** ⇒ algebra.
- Módszeres gondolkozás. **al-Kharizmi** ⇒ algoritmus.
- Ezen a könyvön keresztül jön be Európába az “**arab számjelölés**”.



A tudománytörténet egyik legnagyobb hatású műve!
Épít a korábbi görög, mezopotámiai, indiai (és talán kínai) eredményekre, de hozzá is tesz.

Algebra és algoritmus

Algebra: “a dolgok rendbe tétele”

A mai egyenletek fogalma megjelenik, de még szövegesen. (“Ha 5 valami és még 2 az 7 valamivel egyezik meg, akkor mennyi a valami?”)

Egyenletrendezési szabályok: mindkét oldalból szabad azonosat elvenni, hozzáadni, stb.

Másodfokú egyenletek pontos, harmadfokú egyenletek közelítő megoldása.

Algoritmus: al-Khwarizmi nevéből.

Módszeres problémamegoldás: írjuk fel az alap összefüggést, nézzük meg, mit ismerünk, mit nem, rendezzük az egyenletet,

Algebra és algoritmus

Algebra: “a dolgok rendbe tétele”

A mai egyenletek fogalma megjelenik, de még szövegesen. (“Ha 5 valami és még 2 az 7 valamivel egyezik meg, akkor mennyi a valami?”)

Egyenletrendezési szabályok: mindkét oldalból szabad azonosat elvenni, hozzáadni, stb.

Másodfokú egyenletek pontos, harmadfokú egyenletek közelítő megoldása.

Algoritmus: al-Khwarizmi nevéből.

Módszeres problémamegoldás: írjuk fel az alap összefüggést, nézzük meg, mit ismerünk, mit nem, rendezzük az egyenletet,

Jelentőség:

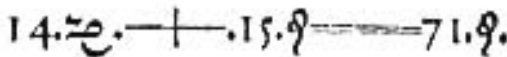
- Eszköz és módszer sokféle probléma megoldására.
- Tanítható, elsajátítható mindenki számára.
- Mai napig használjuk a szabályokat.

További eredmények

Sok-sok középkori matematikai eredményről lehetne beszélni.

Példák:

- harmadfokú egyenletek pontos megoldása (Cardano, 16.szdz.)
- képzetes számok ötlete
- mai egyenletírási forma


$$14x^2 - 54x = 71$$

Az első "egyenlet" 1557-ből

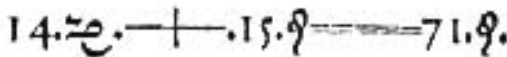
- pontos térképészeti eljárások
- függvény-grafikonok (ld. később)

További eredmények

Sok-sok középkori matematikai eredményről lehetne beszélni.

Példák:

- harmadfokú egyenletek pontos megoldása (Cardano, 16.szdz.)
- képzetes számok ötlete
- mai egyenletírási forma



The image shows a handwritten equation from a 16th-century manuscript. It is written in a cursive script with various symbols and lines. The equation appears to be a cubic equation, possibly related to Cardano's work on solving such equations. The symbols include numbers, lines, and some decorative flourishes.

Az első “egyenlet” 1557-ből

- pontos térképészeti eljárások
- függvény-grafikonok (ld. később)

A középkor végére a matematika sokkal használhatóbbá és szélesebb körben alkalmazhatóvá válik, mint az ókorban volt.

Összefoglalás

A középkori matematikai felfedezések megnyitották az utat:

- bonyolultabb elméletek
- pontosabb mérési és kiértékelési módszerek
- a számítások automatizálása
- absztrakt matematikai fogalmak megjelenése

előtt.

Sok felfedezést a mai napig változatlan formában használunk.