

# Fizikatörténet

## Az ókori matematika főbb eredményei

Horváth András  
SZE, Fizika és Kémia Tsz.

**v 1.5**

## Miért fontos ez nekünk?

**A természet leírásának legeredményesebb kódolása a matematika:**

- számolás (algebra, analízis)
- geometria (hagyományos és koordináta-geometria)

“A természet nagy könyve a matematika nyelvén íródott.”

*Galileo Galilei*

“Azoknak, akik nem ismerik a matematikát, nehézséget okoz keresztüljutni a szépség valódi érzéséhez, a legmélyebb szépséghez, a természethez... Ha a természetről akarsz tanulni, méltányolni akarod a természetet, ahhoz szükség van arra, hogy értsd a nyelvét, amin szól hozzád.”

*Richard Feynman*

# Korlátok

Itt csak a fizika szempontjából fontos részeket, a számunkra lényeges mélységig vizsgáljuk.

Pedig ez is érdekes volna. . . egy külön tantárgyban.

# Alapvető számtípusok

AFKT 1.1.2–1.2.1–1.2.2

A **természetes számok** természetesek. :-)

Csoportok megszámlálása: 8 birka, 10000 katona, 30 ezüstpénz, ...

# Alapvető számtípusok

AFKT 1.1.2–1.2.1–1.2.2

A **természetes számok** természetesek. :-)

Csoportok megszámlálása: 8 birka, 10000 katona, 30 ezüstpénz, ...

A **racióális számok** könnyen eredeztethetők a természetesekből.

Osztozkodási problémák: Pl. van 5 elejtett nyúl és 12 ember, akkor hány nyúl jut egy emberre?

Eredetük ködbe vész. A görögök nagyon szerették őket.

“racióális”=“logosz”=“értelmes” számok.

# Alapvető számtípusok

AFKT 1.1.2–1.2.1–1.2.2

A **természetes számok** természetesek. :-)

Csoportok megszámlálása: 8 birka, 10000 katona, 30 ezüstpénz, ...

---

A **racióális számok** könnyen eredeztethetők a természetesekből.

Osztozkodási problémák: Pl. van 5 elejtett nyúl és 12 ember, akkor hány nyúl jut egy emberre?

Eredetük ködbe vész. A görögök nagyon szerették őket.

“racióális”=“logosz”=“értelmes” számok.

---

Az **irracióális számok** létét a görög pitagóreusok fedezték fel.

## A pitagóreusokról általában

**Pitagorasz** (Püthagorasz), i.e. 582–496? által alapított filozófiai iskola több évszázados történettel.

Alapelvük: **A dolgok lényege a szám.**

Mindenben a számszerűséget keresték: jó eszköz a fizikához.

## A pitagóreusokról általában

**Pitagorasz** (Püthagorasz), i.e. 582–496? által alapított filozófiai iskola több évszázados történettel.

Alapelvük: **A dolgok lényege a szám.**

Mindenben a számszerűséget keresték: jó eszköz a fizikához.

Fő tevékenységi köreik a matematikában:

- számok oszthatósági tulajdonságainak vizsgálata (prímszámok, osztók, stb.)
- a számok geometriai jelentésének tanulmányozása (négyzetszámok, háromszögszámok, stb.)
- geometriai alakzatok kategorizálása (szabályos testek)
- egyéb geometriai eredmények (pl. Pitagorasz-tétel).









# Pitagoreusok: A Pitagorasz-tétel

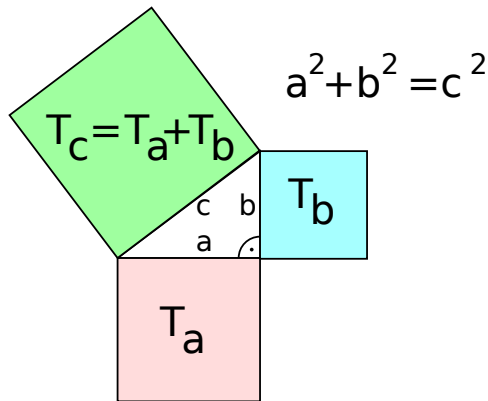
## Nem Pitagorasz fedezi fel!

Ismert volt korábban Mezopotámiában, Egyiptomban, Kínában. (Kicsit más formában.)

Pitagorasz:

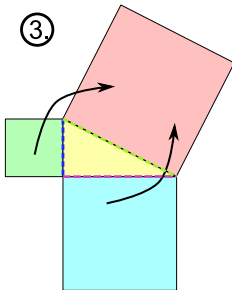
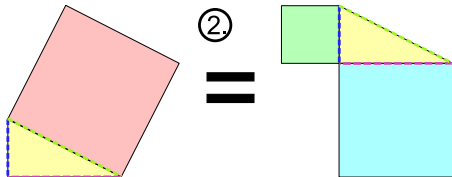
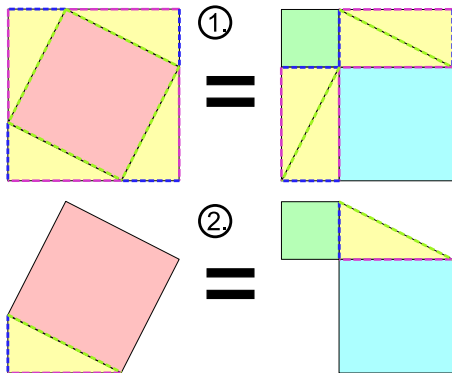
- általános bizonyítás
- széles körű felhasználás

Ókori megfogalmazás: terület-összegekek.  
“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”: több évezreddel későbbi alak!  
(Nem is használtak ilyen jellegű képleteket az ókorban.)



## A Pitagorasz-tétel bizonyítása

Milyen lehetett Pithagorasz eredeti bizonyítása?  
Nem tudjuk biztosan. Valami ilyesmi:



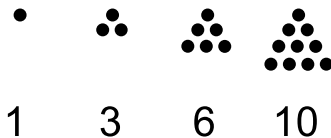
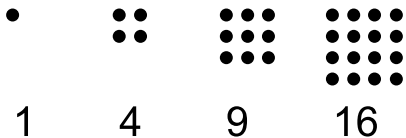
1.: Egy nagy négyzetet kétféleképp bontunk fel. 4 db egybevágó háromszög (sárga) is szerepel az ábrán.

2. Mindegyikről 3 db háromszöget elveszünk, a területek még mindig egyenlőek.

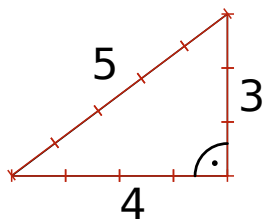
3. De így az átfogón levő piros négyzet és a két befogón levő négyzet területösszege egyenlő kell legyen!

## Pitagóreusok: számok és geometria

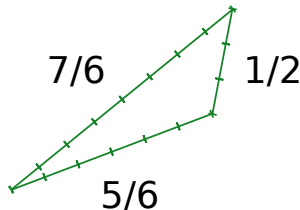
Négyzetszámok, háromszög-számok, ...



Ha egy alakzat oldalainak aránya racionális, akkor elég finom egységet használva egész számú egységgel kirakható! Ezt szerették volna elérni, mert akkor pontosan lehetne szerkeszteni.



1  
egység



1/6  
egység

## Az irracionális számok felfedezése

Nagy kérdés:

“Minden mennyiség kifejezhető racionális számokkal?”

Ez a pitagóreusok fejében azt is jelentette, hogy:

“Van valami elemi egység, melynek többszöröseként minden előáll?”

avagy:

“Számokkal leírható a természet?”

## Az irracionális számok felfedezése

Nagy kérdés:

“Minden mennyiség kifejezhető racionális számokkal?”

Ez a pitagóreusok fejében azt is jelentette, hogy:

“Van valami elemi egység, melynek többszöröseként minden előáll?”

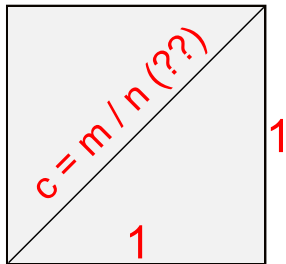
avagy:

“Számokkal leírható a természet?”

Válasz az első kérdésre: **Nem!** (Akkor a többire is “nem” a válasz?)



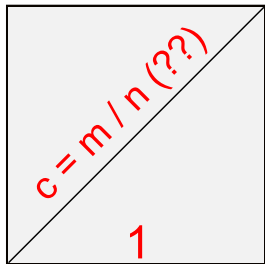
## Az egységnégyzet átlója nem racionális!



**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

$c$ : az átló hossza. A Pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$   
Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

## Az egységnégyzet átlója nem racionális!



**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

$c$ : az átló hossza. A Pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

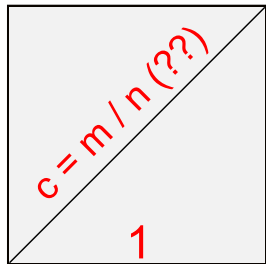
**Indirekt bizonyítás:**

Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül **legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható**.

Ekkor:

$$c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

## Az egységnégyzet átlója nem racionális!



Mai jelölésekkel elmondva az ókori gondolatot:

$c$ : az átló hossza. A Pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

**Indirekt bizonyítás:**

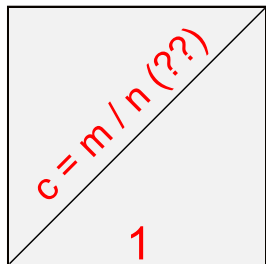
Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható.

Ekkor:

$$c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

Utolsó formula:  $m$  biztosan páros.

## Az egységnégyzet átlója nem racionális!



Mai jelölésekkel elmondva az ókori gondolatot:

$c$ : az átló hossza. A Pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$

Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

**Indirekt bizonyítás:**

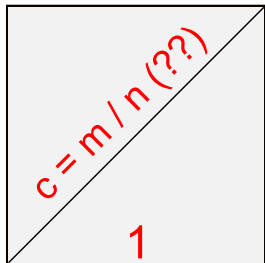
Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható.

$$\text{Ekkor:} \quad c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

Utolsó formula:  $m$  biztosan páros. Ezért  $m^2$  4-gyel osztható.



## Az egységnégyzet átlója nem racionális!



**Mai jelölésekkel** elmondva az ókori gondolatot:

$c$ : az átló hossza. A Pitagorasz-tétel szerint:  $c^2 = 2$   
Lehet-e  $c = \frac{m}{n}$  ahol  $m$  és  $n$  egészek?

### Indirekt bizonyítás:

Tegyük fel, hogy van ilyen  $m, n$  számpár. Egyszerűsítsünk 2-vel, amíg lehet, tehát  $m$  és  $n$  közül legfeljebb az egyik legyen 2-vel osztható.

Ekkor:  $c = \frac{m}{n} \Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 = m^2$

Utolsó formula:  $m$  biztosan páros. Ezért  $m^2$  4-gyel osztható. Ezért  $n$  is osztható 2-vel...

Mégis csak lehetne 2-vel egyszerűsíteni  $m/n$ -et?

Ellentmondásra jutottunk a kezdeti feltevással, tehát kimondhatjuk: az egységnégyzet átlója nem írható fel két egész szám hányadosaként.

## ...következmények

Ez megrázó dolog volt a görögöknek a fenti gondolattársítások miatt. (“Ez azt jelenti, hogy a számok mégsem tudják leírni a természetet?”)

Kicsit hasonlít ez a modern fizika által okozott sokkra: “Akkor nem mehetek gyorsabban, mint a fény?”, “Tehát a természetben szerepet játszik a véletlen?”

## ...következmények

Ez megrázó dolog volt a görögöknek a fenti gondolattársítások miatt. (“Ez azt jelenti, hogy a számok mégsem tudják leírni a természetet?”)

Kicsit hasonlít ez a modern fizika által okozott sokkra: “Akkor nem mehetek gyorsabban, mint a fény?”, “Tehát a természetben szerepet játszik a véletlen?”

Eredmény:

- A görögök szemében a számítások fontossága leértékelődik.
- Geometriai módszerrel tudták kezelni az irracionális mennyiségeket.
- A geometria erős fejlődése, számítások (“algebra”) kisebb szerepe.



# Számírás az ókorban: vonalak és ábrák

## Egyiptomi számírás:



2	3	4	5	...	9
				...	
20	30	40	50		90
1	1				
	10				
	100				
	1000				
	10000				
	100000				
	1000000				

	$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{10}$
	$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{40}$
	$\frac{1}{276}$		$\frac{2}{3}$

(Voltak más változatok is.)

## Számírás az ókorban: betűk számértéke

A görögök fő számjelölése:

$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$	$\delta'$	$\epsilon'$	$\zeta'$	$\xi'$	$\eta'$	$\theta'$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\iota'$	$\kappa'$	$\lambda'$	$\mu'$	$\nu'$	$\xi'$	$\omicron'$	$\pi'$	$\varsigma'$
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\varrho'$	$\sigma'$	$\tau'$	$\nu'$	$\varphi'$	$\chi'$	$\psi'$	$\omega'$	$\vartheta'$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

$$, \bar{\alpha} \bar{\tau} \bar{\epsilon} \Rightarrow 1305$$

(Más nyelvek betűinek is meg volt határozva a számértéke.)

## Érdekesség: a nevek számértéke

**Minden névnek, szónak volt számértéke.**

(Számírás: betűsorozatot vesszővel fejeznek be:  $\mu\theta'=49$ .)

Számmisztikai megfontolások, rejtvényeknek, burkolt utalások alapja.

Máig is ismert ezek közül:

Jelenések könyve (13, 17–18): (az Antikrisztusról szóló rész) ... *senki ne adhasson-vehessen, ha nem viseli a vadállat jelét: nevét vagy nevének a számát... Akinek van esze, számítsa ki a vadállat számát, hisz emberi szám: **hatszázhatvanhat**.*

“666”: máig is “sátáni szimbólum”. Keletkezésekor ez a jelölés még nem létezett (szövegesen írták le); Feltehetően János apostol csak burkoltan beszélt egy akkoriban közismert személyről.

## Nagy számok írása a görög jelöléssel

“,” egy betű előtt: 1000-szeres szorzó. Pl. “,α”=1000.

A vesszőt nem halmozták, hanem a 10000-nek volt egy jele: “M”=miriád. Amit e fölé írtak, az 10000-rel volt szorozva:

$$\mu\beta' = 42, \quad \begin{matrix} \mu\beta \\ M' = 420\,000 \end{matrix}$$

MM’=“miriád szor miriád”, azaz 100000000=10<sup>8</sup>.

MMM’=10<sup>12</sup>, stb.

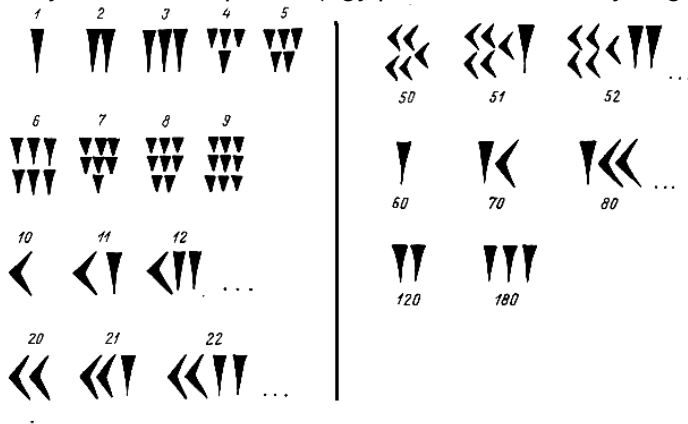
Ezzel, kicsit körülményesen, de akármekkora szám leírható!

Pl. Arkhimédész kiszámolta, hogy hány homokszem töltené ki az akkor ismert Univerzumot. (10<sup>63</sup> nagyságrendűt kapott.)

## Számírás az ókorban: kezdetleges helyiértékes rendszer

Babilónia. 60-as számrendszer, de 0 nincs.

“Számjegyek:” több jelből álló csoportok (egyiptomihoz hasonló jellegű).



10-es rendszerű számjegyek 60-as rendszer szerint csoportosítva.

## A babilóniai számjelölés

Gond a “0” hiánya:

- tudni kellett a számok nagyságát fejből
- szerencsére ritkán van rá szükség
- az i.e. 2–3.szd. környékére megjelent egy “helykitöltő” szimbólum

## A babilóniai számjelölés

Gond a “0” hiánya:

- tudni kellett a számok nagyságát fejből
- szerencsére ritkán van rá szükség
- az i.e. 2–3.szdz. környékére megjelent egy “helykitöltő” szimbólum

---

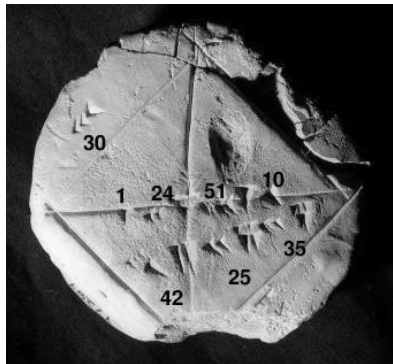
**Idő- és fokjelölés:** ma is 60-as alap! (1 óra = 60 perc, a teljes kör  $6 \cdot 60 = 360$  fok, stb.)

A 60-as rendszer előnye: **sok osztási probléma pontosan jelölhető**, mert 60 osztható a 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 számokkal.

Pl. az  $1/3$  10-es rendszerben 0,33333..., 60-adosban meg 20'. (20 perc)

## A négyzet átlója a babilóniaiak szerint

Egy ókori babilóniai lelet (i.e. 1200–1400): “1, 24, 51, 10” számsor a négyzet átlóján.



$$1 + 24 \cdot \frac{1}{60} + 51 \cdot \frac{1}{(60)^2} + 10 \cdot \frac{1}{(60)^3} = 1,41421295...$$

$$\sqrt{2} = 1,4142136...$$

A  $\sqrt{2}$  igen pontos közelítése!

Sokat kellett hozzá számolni, de nem lehetetlen. (Intelligens próbálkozással is lehet, ha valaki tud szorozni.)



# A számjelölés fontossága

Számjelölés: befolyásolja az elvégezhető számítások jellegét és mennyiségét.

## A számjelölés fontossága

Számjelölés: befolyásolja az elvégezhető számítások jellegét és mennyiségét.

**Egyiptomi:** kicsit terjengős, de könnyű összeadni, kivonni, közepesen nehéz szorozni és osztani.

**Görög betűjelölés:** tömör, de minden művelet elvégzése körülményes.

**Babilóniai:** kicsit terjengős, a "0" jelölés hiánya nehézkessé teszi, de minden alpműveletet könnyű elvégezni vele.

## A számjelölés fontossága

Számjelölés: befolyásolja az elvégezhető számítások jellegét és mennyiségét.

**Egyiptomi:** kicsit terjengős, de könnyű összeadni, kivonni, közepesen nehéz szorozni és osztani.

**Görög betűjelölés:** tömör, de minden művelet elvégzése körülményes.

**Babilóniai:** kicsit terjengős, a "0" jelölés hiánya nehézkessé teszi, de minden alpműveletet könnyű elvégezni vele.

---

Két, eltérő megközelítés:

- Görögök: inkább szerkesztenek, mint számolnak.
- Babilóniaiak: inkább számolnak, mint szerkesztenek.

Máig él ez a kettősség a mérnöki gyakorlatban. (Erőábrák szerkesztése, vagy egyenletek felírása.)

## A számjelölés további története

Arkhimédész sejtette: a babilóniai jelölés lesz a jobb.

Javított rajta, de a mai, tízes számrendszert majd a hinduk dolgozzák ki és arab közvetítésen át jut Európába, ahol elnyeri mai formáját a középkorban.

## A számjelölés további története

Arkhimédész sejtette: a babilóniai jelölés lesz a jobb.  
Javított rajta, de a mai, tízes számrendszert majd a hinduk dolgozzák ki és arab közvetítésen át jut Európába, ahol elnyeri mai formáját a középkorban.

---

Az ókori számjelölések máig tartó hatása:

- római számok (nem szoltunk róluk, mert mindenki ismeri)
- óra, perc, másodperc jelölés
- számmisztika (sajnos még páran komolyan veszik ma is...)
- két eltérő megközelítés: szerkesztés vagy közelítő számolás

# A geometria csúcsa: Görögország

AFKT 1.4.5

Egyiptom, Mezopotámia, ...: sok praktikus ismeret.  
(Piramisok méretei, tájolása, földmérési feladatok, stb.)

**Ókori geometria csúcsa: Görögország.**

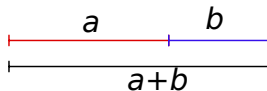
- Mások eredményeinek átvétele, rendszerezése, bizonyítása.
- Igen széles körű alkalmazások.
- Geometria és esztétika kapcsolatának vizsgálata.
- **A teljes geometria egy rendszerben való összefoglalása.**

## Aranymetszés: egy érdekes és jellemző elem

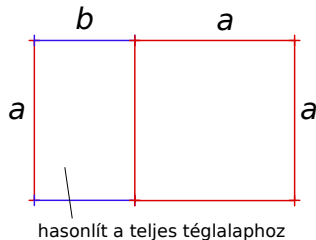
### Aranymetszés:

A kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobb az egészhez.

Használat: szakaszok felosztása, téglalap oldalarányok, stb.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

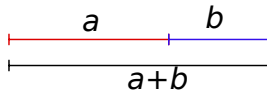


## Aranymetszés: egy érdekes és jellemző elem

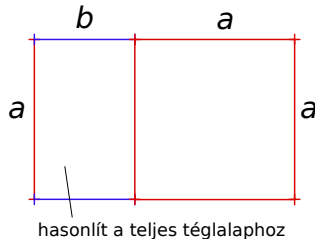
### Aranymetszés:

A kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobb az egészhez.

Használat: szakaszok felosztása, téglalap oldalarányok, stb.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$



Görögök: az aranymetszés “esztétikus”:

- A megfelelő téglalap “arányos”.
- Szobrok, épületek méretarányainál érdemes használni.
- Sok meglepő helyen felbukkan.

Mai megfogalmazás: az aranymetszés egy  $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$  arányú felosztás. A görögök inkább szerkesztették.



## Egy bonyolult feladat

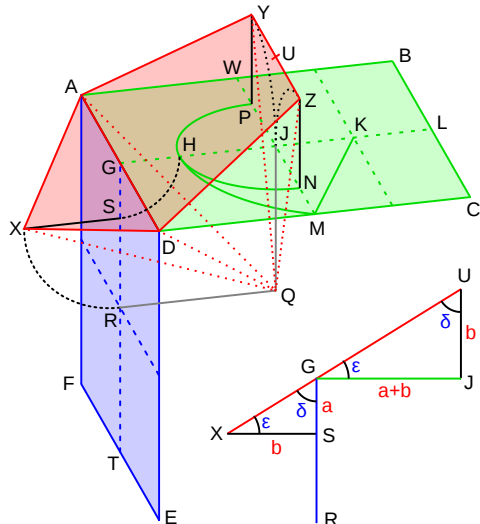
Hogyan szerkesszünk szabályos dodekaédert?

Eukleidész: egy kocka köré, az ábra szeint.

Az aranymetszés aránya felbukkan!

Sok, hasonló szerkesztési problémát is megoldottak.

De nem ez a legfontosabb, hanem az, hogy **ezt egy tökéletes rendszerbe szervezték!**



# Eukleidész: Elemek

Csúcspont: **Eukleidész** (ie. 325–265?)

Fő mű: **Elemek**.

# Eukleidész: Elemek

Csúcspont: **Eukleidész** (ie. 325–265?)

Fő mű: **Elemek**.

Évezredekig alpmű.

Lényegében csak az 1800-as években sikerül elvileg újat hozzátenni. (Bolyai János)



# Eukleidész: Elemek (geometria)

Logikai felépítés: **Néhány alapvető fogalomból és magától értetődő szabályból vezet le mindent.**

Ízelítő:

*Definíciók:*

1. *Pont az, aminek nincs része.*
2. *A vonal szélesség nélküli hosszúság.*
3. *A vonal végei pontok.*
4. *Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.*
5. ...

*(23 definíció)*

## ... posztulátumok

1. *Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.*
2. *És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.*
3. *És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.*
4. *És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.*
5. *És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.*

## ... axiómák

1. *Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.*
2. *Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.*
3. *Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.*
4. *Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.*
5. *Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.*
6. *Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.*
7. *Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.*
8. *Az egész nagyobb a résznél.*
9. *Két egyenes vonal nem fog közre területet.*

## ... tételek

Ezekből az elemi azonosságokból **a teljes geometria levezethető**.

Eukleidész meg is mutatta ezt és az egész ismert geometriát beleillesztette művébe.

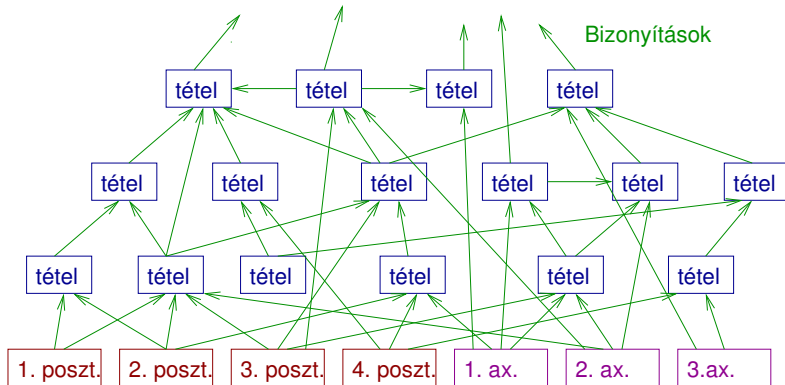


... tételek

Ezekből az elemi azonosságokból a teljes geometria levezethető.

Eukleidész meg is mutatta ezt és az egész ismert geometriát beleillesztette művébe.

Az axiómákból és posztulátumokból először csak egyszerű tételek bizonyíthatók, de azokból bonyolultabbak, majd még bonyolultabbak, ...



## ... tételek

**A legalsó szinteken igen egyszerű tételek vannak.**

Pl.: a csúcsszögek egyenlőek, ha két háromszög oldalai páronként egyenlőek, akkor a szögek is egyenlőek, ...

**Kicsit fentebb már bonyolultak is találhatók.**

Pl. Thálész-tétel, Pitagorasz-tétel.

**A felső szintű tételek már igen bonyolultak.**

Ma is a legfelsőbb szintű matematikus képzésben fordulnak elő.

**Nincs legfelső szint!** Akárhány tétel levezethető. (A kérdés csak az, van-e értelme.)

## ... tételek

**A legalsó szinteken igen egyszerű tételek vannak.**

Pl.: a csúcsszögek egyenlőek, ha két háromszög oldalai páronként egyenlőek, akkor a szögek is egyenlőek, ...

**Kicsit fentebb már bonyolultak is találhatók.**

Pl. Thálész-tétel, Pitagorasz-tétel.

**A felső szintű tételek már igen bonyolultak.**

Ma is a legfelsőbb szintű matematikus képzésben fordulnak elő.

**Nincs legfelső szint!** Akárhány tétel levezethető. (A kérdés csak az, van-e értelme.)

A felépítés végigvitele igen absztrakt gondolkodást igényel. Ma is csak a speciális matematikai képzésekben tanítják.

## A axiomatikus felépítés előnyei

- Ha az alapelvek igazak és nem hibázunk, az egész elmélet helyességében biztosak lehetünk.
- Olyan tételekhez is eljutunk, amelyek magunktól nem jutottak volna eszünkbe.
- Egyértelmű igazságkritérium: levezethető-e az állítás az axiómákból vagy az ellenkezője vezethető le?

Azóta is ez a felépítés a végső célja a tudományos elméleteknek.  
(Kevés esetben érhető el...)

## Néhány további eredmény

**Arkhimédész** (i.e. 287–212)

Terület- és térfogatszámítás: az integrálszámítás előfutára.

- Általános módszer.
- Parabola területének meghatározása.
- Gömb és kúp térfogatának meghatározása.

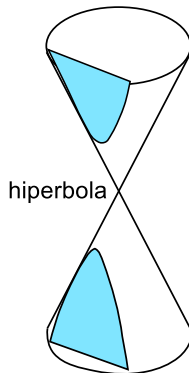
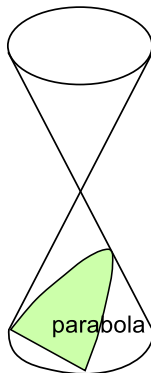
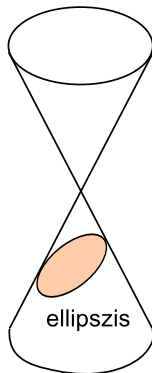
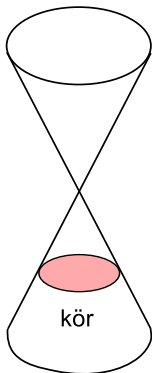
$\pi$  értékének addig legpontosabb közelítése:

- Nagyon sok oldalú szabályos sokszöggel közelíti a kört.
- Eredmény:  $\pi$  legalább  $3 + 10/71 \approx 3,1408$ , de legfeljebb  $3 + 1/7 \approx 3,1428$

Tízest helyiértékes rendszer előfutára.

## Néhány további eredmény

**Apollóniosz** (i.e. 265–190)  
Kúpszeletek tanulmányozása.



## Néhány megoldatlan probléma eukleidészi módszerrel

Eukleidészi módszer: Csak egyenes vonalzó, körző és ceruza használható.

### Kocka térfogat kettőzés.

Adott egy kocka élhossza. Szerkesszük meg azt az élhosszat, mely a kétszer ekkora térfogatú kockához tartozik! (Mai nyelven:  $\sqrt[3]{2}$  megszerkesztése.)

### Szögharmadolás.

Adott egy szög. Szerkesszük meg azt a szöget, aminek háromszorosa az eredeti szög.

### Kör négyszögesítése.

Szerkesszük meg adott körhöz a vele egyező területű négyzetet!

Ezek a látszólag egyszerű problémák **nem oldhatók meg** eukleidészi módszerekkel!  
Ezt csak az 18–19. században bizonyítják be.

# Értékelés

Az ókori matematika nagy érdemei:

- Megjelentek a nagy, egybefüggő gondolati rendszerek.
- Több példán kiderült, hogy a matematika jól alkalmazható a valóság leírására.
- Sok gyakorlati alkalmazás. (Tervrajzok, szerkesztés, elemi számítások.)

Hiányosságok:

- Hiányzik a könnyen használható számjelölés, ezért nem tudnak sokat számolni.
- Szűk réteg ismeri a matematikát.