

A véletlen mérési bizonytalanság jellemzése Valószínűségi változók

Dr. Berta Miklós
Fizika és Kémia Tanszék
Széchenyi István Egyetem

Valószínűség

- Ha egy kísérletnek összesen N lehetséges, véletlen eredménye van és ebből egy adott A eredmény k alkalommal adódik, akkor az A eredmény valószínűsége:

$$p(A) = \frac{k}{N}$$

(Ez a definíció a valószínűség klasszikus definíciója. A továbbiakban ezzel megelégszünk!)

Véletlen hiba

- a véletlen hiba elméleti szempontból *valószínűségi változó*
- egy valószínűségi változó felvehet:
 - *diszkrét* értékeket egy diszkrét halmaz elemei közül, vagy
 - *folytonos* értékeket egy folytonos intervallum elemei közül.
- egy valószínűségi változó összes lehetséges eredményei valószínűségeinek összege mindig 1.
$$\sum_{\forall A} p(A) = 1$$

Eloszlásfüggvény

- Azt az $F(x)$ függvényt, amelyik megadja annak valószínűségét, hogy az A valószínűségi változó x -nél kisebb értéket vesz fel, a valószínűségi változó **eloszlásfüggvényének** nevezzük:

$$F(x) = p(A < x).$$

Sűrűségfüggvény

- A folytonos valószínűségi változó valószínűségi sűrűségfüggvényének nevezzük a

$$\rho(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

függvényt!

- A fenti definícióból következik, hogy:

$$p(a \leq A \leq b) = \int_a^b \rho(x) dx$$

$$\int \rho(x) dx = 1$$

$\forall A$

Momentumok

- Diszkrét eset:

$$M_k = \sum_{\forall i} A_i^k \cdot p(A_i)$$

- Folytonos eset:

$$M_k = \int_{\forall x} x^k \cdot \rho(x) dx$$

Várható érték és szórásnégyzet

- A valószínűségi változó első momentumát *várható érték*nek nevezzük:

$$m = M_1(x) = \langle x \rangle.$$

- A valószínűségi változó várható értéktől való eltéréseinek második momentumát *szórásnégyzet*nek nevezzük:

$$D^2 = M_2(x - m) = \langle (x - m)^2 \rangle.$$

Tétel: $D^2 = M_2(x) - m^2$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} D^2 &= M_2(x - m) = \langle (x - m)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2m\langle x \rangle + m^2 = \\ &= M_2(x) - 2m^2 + m^2 = M_2(x) - m^2. \end{aligned}$$

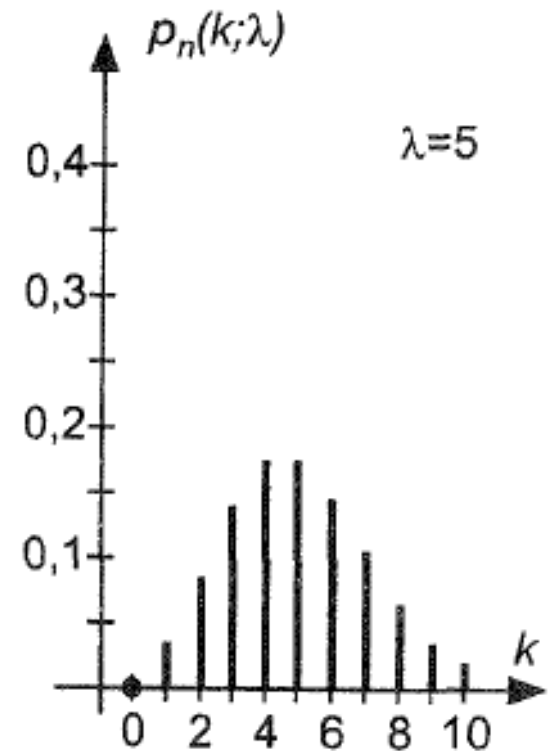
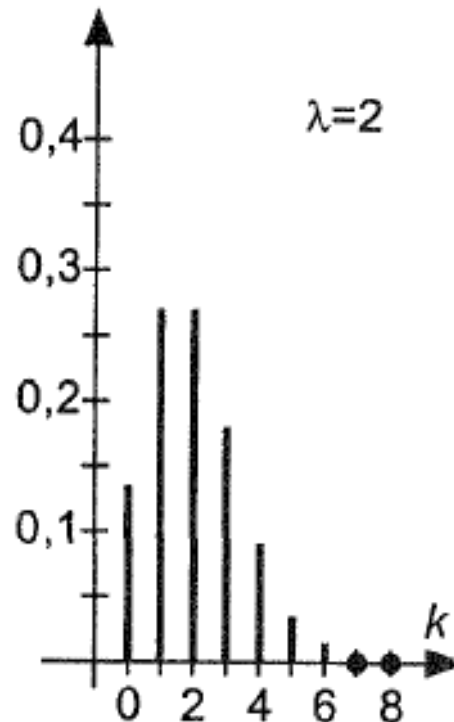
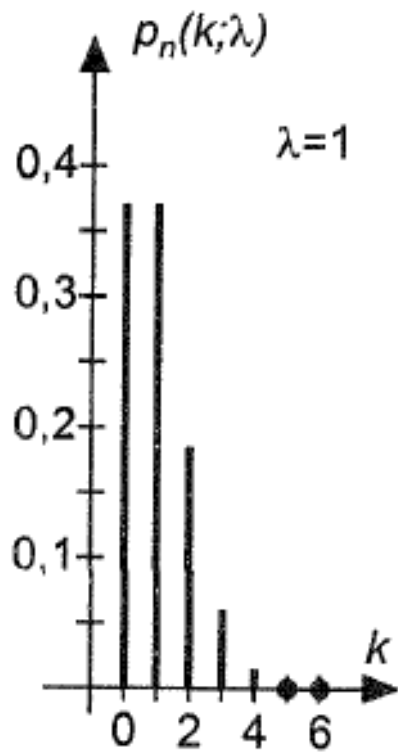
A Poisson – eloszlás

- Ha az X diszkrét valószínűségi változó, amely a $0, 1, 2, \dots, k$ értékeket

$$p(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

valószínűséggel veszi fel ($\lambda > 0$), akkor az X valószínűségi változó **Poisson - eloszlású**.

- Példák: adott térrészre hulló esőcseppek száma, várólista átlagos hossza adott időtartam alatt, radioaktív bomlások száma adott időintervallum alatt stb.



- Függvényanalízisből tudjuk, hogy az exponenciális függvény Taylor – sora:

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Poisson – eloszlás jellemzői

- Tényleg valószínűségi eloszlást ír le?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

- Várható értéke?

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = 0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(k-1)} \cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Poisson – eloszlás jellemzői

- Szórásnégyzete?:

$$D^2 = \langle k^2 \rangle - m^2$$

$$\begin{aligned} \langle k^2 \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{(k-1)} \cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) \frac{\lambda^r \cdot e^{-\lambda}}{r!} \\ &= \lambda \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} r \frac{\lambda^r \cdot e^{-\lambda}}{r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r \cdot e^{-\lambda}}{r!} \right\} = \lambda \cdot \{m + e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}\} = \lambda \cdot (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

$$D^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

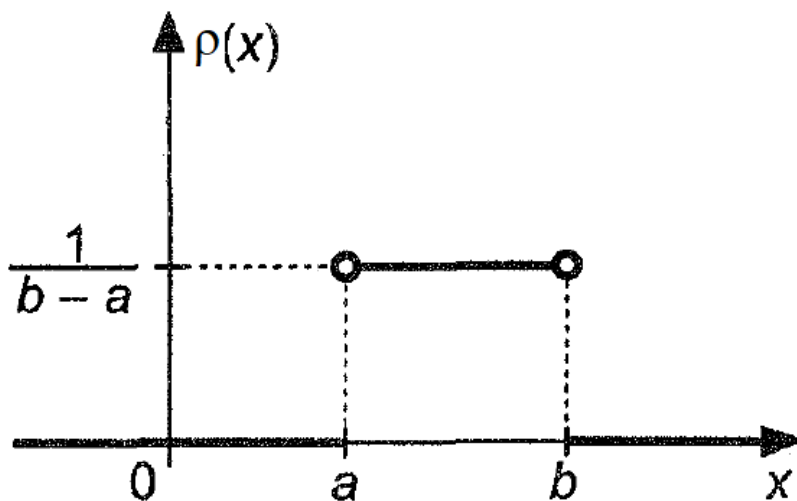
$$m = \lambda$$

$$D^2 = \lambda$$

Egyenletes eloszlás

- Ha az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$\rho(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ ha } a < x < b$$
$$= 0 \text{ egyébként}$$



akkor az X valószínűségi változó **egyenletes eloszlású**.

- Pl.: skálás mérések!

Egyenletes eloszlás jellemzői

- Tényleg valószínűségi eloszlást ír le?

$$\int_{\forall x} \rho(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

- Várható értéke?

$$\mu = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Egyenletes eloszlás jellemzői

- Szórásnégyzete?:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \mu^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\mu = \frac{(a+b)}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Normális-, vagy Gauss– eloszlás

- Ha az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye ($\mu_0 > 0$ és $\sigma_0 > 0$):

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cdot e^{\frac{-(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}},$$

akkor az X valószínűségi változót **normális-**, vagy **Gauss-eloszlás**únak nevezzük.

Pl.: Több, egymástól független, kismértékű, véletlen eltérés a mért értéket Gauss-eloszlásúvá teszi!

Gauss – eloszlás jellemzői

- Tényleg valószínűségi eloszlást ír le?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} dx$$

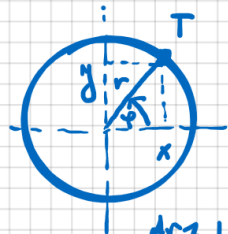
$$t = \frac{x - \mu_0}{\sigma_0}, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sigma_0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = A$$

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dx \cdot dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = A \cdot A = A^2$$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ dx \cdot dy = r dr d\varphi \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r \cdot dr d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{r^2}{2} = u \\ \frac{du}{dr} = -r \end{array} \right\} =$$



$$r \in [0; \infty[$$

$$\varphi \in [0; 2\pi]$$

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

$$= -2\pi \int_0^{\infty} e^u du = -2\pi [e^u]_0^{\infty} =$$

$$= -2\pi (0 - 1) = 2\pi = A^2$$

$$A = \sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}}$$

Gauss – eloszlás jellemzői

- Várható értéke?

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{-(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} dx$$

$$t = \frac{x - \mu_0}{\sigma_0}, x = t \cdot \sigma_0 + \mu_0, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sigma_0}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t \cdot \sigma_0 + \mu_0) e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{\frac{-t^2}{2}} dt + \mu_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 1$$

$$\mu = \mu_0$$

$$G^2 = M_2(x) - \mu^2$$

$$\boxed{M_2(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} dx = \left\{ t = \frac{x-\mu_0}{\sigma_0} \Rightarrow x = \mu_0 + \sigma_0 \cdot t \right. \\ \left. \frac{dx}{dt} = \sigma_0 \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_0 + \sigma_0 t)^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sigma_0 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \underbrace{\mu_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{= \sqrt{2\pi}} + \underbrace{2\sigma_0 \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\text{Integral über zwei Parallelen}} + \right.$$

$$\left. \sigma_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} = \boxed{\mu_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = B$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi ; x^2 + y^2 = r^2 \\ y = r \sin \varphi ; dx dy \rightarrow r dr d\varphi \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^2 \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} r^3 \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{r^2}{2} = u \\ \frac{du}{dr} = u' = -r \end{array} \right\} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} 2u \cdot e^u du = 4\pi \int_0^{\infty} u \cdot e^u du = \left\{ \begin{array}{l} t = u \\ \frac{dt}{u} = e^u \\ u = e^u \end{array} \right\} =$$

$$= 4\pi \left\{ \underbrace{[u \cdot e^u]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} e^u du \right\} = -4\pi [e^u]_0^{\infty} = \boxed{4\pi}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{= B} dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{= B} dx = \underbrace{B \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{= \sqrt{2\pi}} + \underbrace{B \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{= \sqrt{2\pi}} =$$

$$= \boxed{2B \cdot \sqrt{2\pi}}$$

$$2B \sqrt{2\pi} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$$

$$B \sqrt{2\pi} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\boxed{B = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}}$$

$$\boxed{G^2} = M_2(x) - \underbrace{\mu^2}_{\mu_0^2} = \mu_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{= B = \sqrt{2\pi}} - \mu_0^2 = \boxed{\sigma_0^2}$$

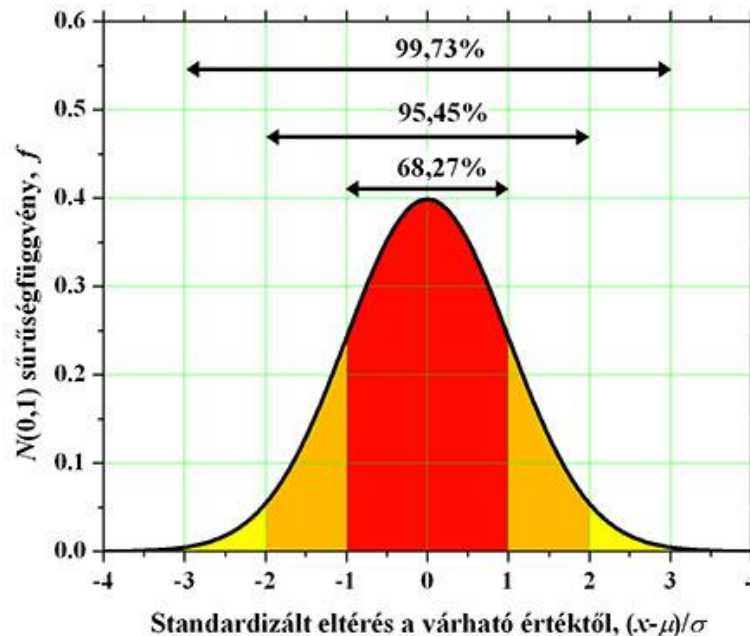
Gauss – eloszlás jellemzői

- Szórásnégyzete?

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \mu^2$$

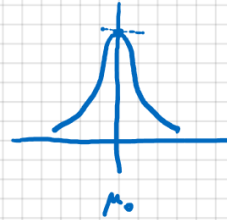
$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} dx = \sigma_0^2 + \mu_0^2$$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2$$



$$\mu = \mu_0$$
$$\sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$



$$\textcircled{1} \quad p(x=\mu_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \quad \sigma_0 \uparrow \rightarrow p(x=\mu_0) \downarrow$$

$$\textcircled{2} \quad p(x=\mu_0 \pm \sigma_0) \Rightarrow p(x) = \frac{p(x=\mu_0)}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \cdot e^{-\frac{(\mu_0 \pm \sigma_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{e} \cdot \sigma_0} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0 \cdot 2}$$

$$\textcircled{3} \quad p(x=\mu_0 \pm \sigma_0) \Rightarrow p(x) = \frac{p(x=\mu_0)}{e}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0 \cdot e}$$

$x = \mu_0 \pm \sigma_0$ pontok a Gauss-függvény inflexiós pontjai

$$p'(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \right]' = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \cdot \left(-\frac{2(x-\mu_0)}{2\sigma_0^2} \right) \cdot 1 =$$

$$= -\frac{(x-\mu_0)}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0^3} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$p''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0^3} \left[(x-\mu_0) \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \right]' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0^3} \left[e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} + (x-\mu_0) \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \cdot \left(-\frac{2(x-\mu_0)}{2\sigma_0^2} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0^3} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \left[1 - (x-\mu_0) \frac{(x-\mu_0)}{\sigma_0^2} \right] = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{(x-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} = 0$$

$$\sigma_0^2 - (x-\mu_0)^2 = 0 \Rightarrow (x-\mu_0)^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow |x-\mu_0| = \sigma_0 \Rightarrow x = \mu_0 \pm \sigma_0$$

Centrális határeloszlás tétele

- N független, azonos valószínűségi eloszlású változó (μ_0, σ_0) összege $N \rightarrow \infty$ határesetben normális eloszlású valószínűségi változó, melynek *várható értéke* $\mu = N \cdot \mu_0$, *szórásnégyzete* pedig $\sigma^2 = N \cdot \sigma_0^2$.