

Közvetett mérések bizonytalansága Hibaterjedés

Dr. Berta Miklós
Fizika és Kémia Tanszék
Széchenyi István Egyetem

Közvetett mérések

- Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó várható értékét és szórását mérések alapján megbecsültük.
- Mit mondhatunk egy olyan Y valószínűségi változó paramétereiről, amelyekre $Y=f(X)$?

Példa: Mérjük egy csapágygolyó d átmérőjét. Az átmérő alapján a golyó térfogata:

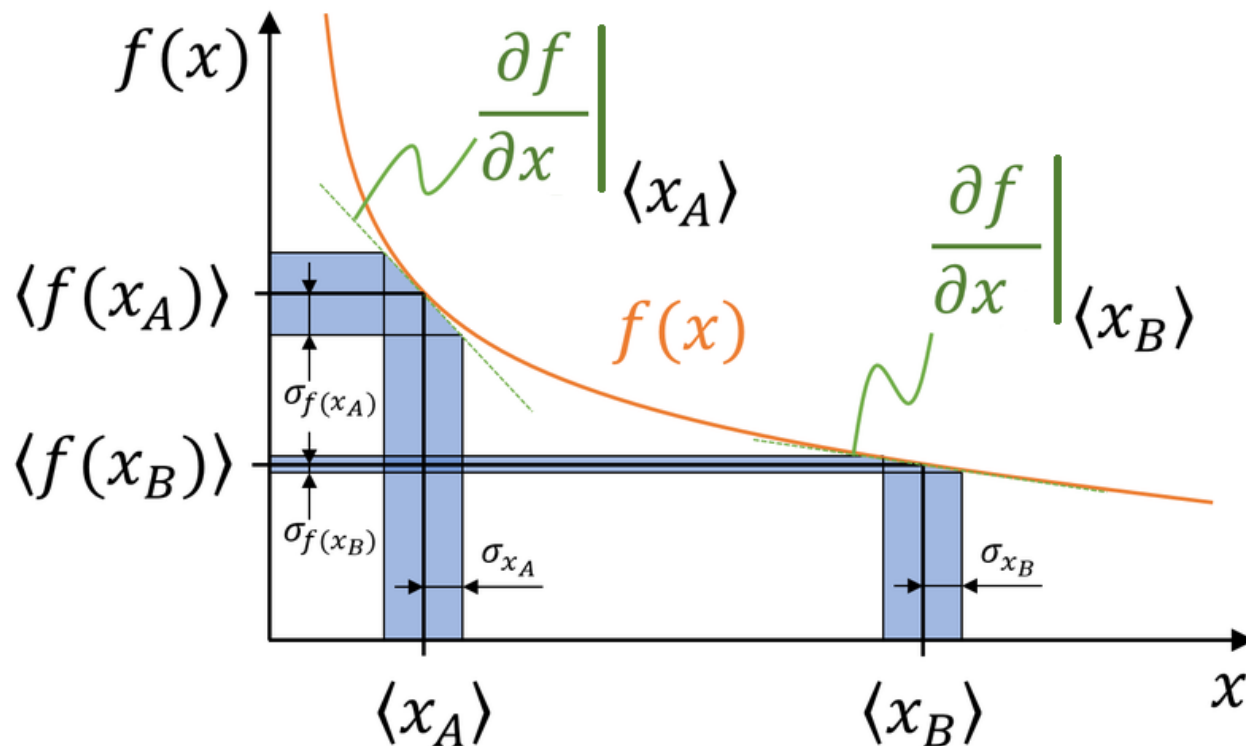
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi d^3$$

Ha ismert az átmérő várható értéke és szórása, akkor mit mondhatunk a térfogat várható értékéről és szórásáról?

Ha $f(x)$ szigorúan monoton függvény a közvetlenül mért érték környezetében, és a közvetlenül mért érték szórása „kicsi”, akkor $f(x)$ -nek „jó” közelítése a linearizált Taylor-sora, és:

$$\mu(f(x)) = f(\mu(x))$$

$$\sigma(f(x)) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mu(x)} \cdot \sigma(x)$$



Közvetett mérések

- Tegyük fel, hogy az $X_1, \dots, X_N$ független valószínűségi változók várható értékeit és szórásait mérések alapján megbecsültük.
- Mit mondhatunk egy olyan Y valószínűségi változó paramétereiről, amelyekre $Y=f(X_1, \dots, X_N)$?

Példa: Mérjük egy csapágygolyó d átmérőjét és tömegét. Az átmérő és a tömeg alapján a golyó sűrűsége:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{6m}{\pi d^3}$$

Ha ismertek az átmérő és a tömeg várható értékei és szórásai, akkor mit mondhatunk a sűrűség várható értékéről és szórásáról?

Gauss-féle hibaterjedési törvény

$$\sigma(f(x_1, \dots, x_N)) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2_{x_i = \mu(x_i)} \cdot \sigma^2(x_i)}$$

Megjegyzés: A fenti hibaterjedési törvény alkalmazhatóságának feltétele, hogy az összes benne szereplő parciális derivált értéke nullától különböző.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6} \pi d^3$$

$$\bar{d}_0 = 4,3 \text{ mm}$$

$$\bar{G}_{d_0} = 0,2 \text{ mm}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{6} \pi \bar{d}_0^3 = \frac{1}{6} \pi 4,3^3 \text{ mm}^3 = 41,63 \text{ mm}^3$$

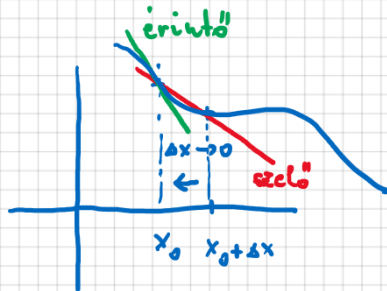
$$\frac{dV}{dd} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \pi d^2 = \frac{1}{6} \pi d^2$$

$$\bar{G}_{\bar{V}} = \left| \frac{1}{6} \pi \bar{d}_0^2 \right| \cdot \bar{G}_{d_0} = 5,81 \text{ mm}^3$$

Numerikus derivált

Δx - elég kicsi

$$f'(x)|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



① $f'(x)|_{x=x_0}$ - n. tizedesre

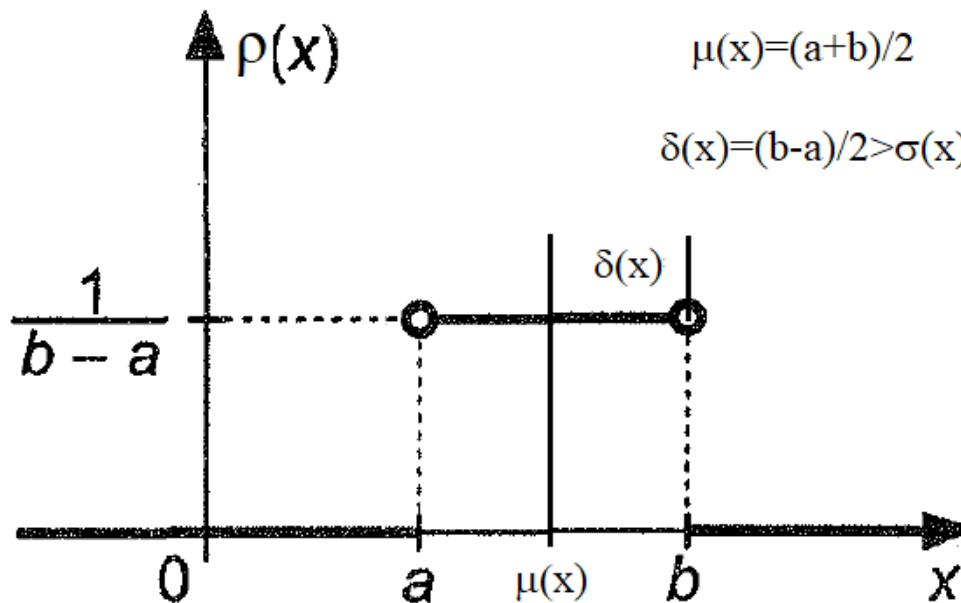
② Δx_1 - szabadon választva

③ $\Delta x_2 < \Delta x_1 \Rightarrow f'(x)|_{x=x_0}$ becslésben
n. tizedes helyen van-e
változás.



A folytonos egyenletes eloszlás speciális esete – hibakorlát fogalma

- Skálás mérések esetében a véletlen hiba sűrűségfüggvénye:



$\delta(x)$ – hibakorlát
vagy abszolút hiba

$$\delta(x) = \frac{b-a}{2} > \sigma(x) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

A hibakorlát mindig felülbecslése a szórásnak!

Hibakorlátos mérések hibaterjedési törvénye

$$\delta(f(x_1 \dots x_N)) = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i = \mu(x_i)} \cdot \delta(x_i)$$

Megjegyzés: A fenti hibaterjedési törvény alkalmazhatóságának feltétele, hogy az összes benne szereplő parciális derivált értéke nullától különböző.