

Műszaki fizika alapjai / Feladatok a 10. gyakorlatra

(Megoldásokkal)

Dr. Berta Miklós

1. feladat: Két keskeny rés egymástól 0,045 mm távolságban helyezkedik el. A rések mögött 250 cm távolságban egy felfogó ernyőt helyeztünk el. Határozza meg, hogy a központi maximumtól milyen távolságban lehet látni az első vörös ($\lambda_v = 700$ nm) és ibolya ($\lambda_i = 400$ nm) interferenciacsíkokat? (Ha optikai ráccsal és fehér fényel végeznénk el ezt, akkor miben különbözne és miben lenne azonos a kapott eredmény, mintha prizrát alkalmaztunk volna fehér fényel?)

Megoldás:

Az 1. ábra A pontjában az egyes résekből érkező fénycsugarak akkor erősítik egymást, ha teljesül, hogy (Bragg-törvény):

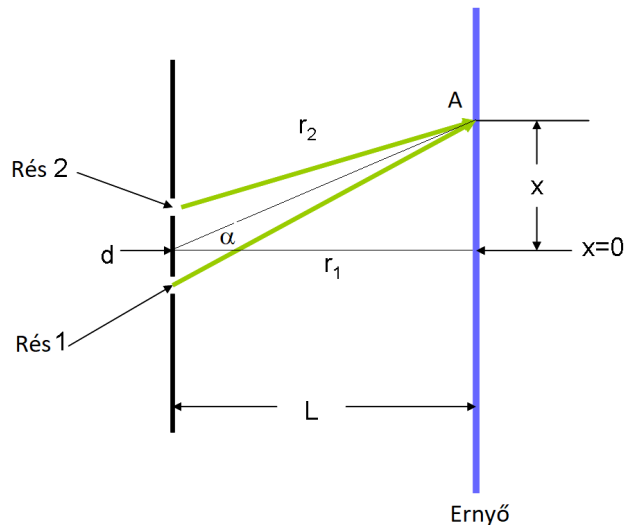
$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{d}, \quad k = \dots -1, 0, 1 \dots \quad (1)$$

Ugyanakkor a megfigyelés geometriai elrendezése alapján:

$$\tan \alpha_k = \frac{x_k}{L}. \quad (2)$$

Mivel $d \gg \lambda$, ezért jó közelítéssel érvényes, hogy:

$$\sin \alpha_k \approx \alpha_k \approx \tan \alpha_k. \quad (3)$$



1. ábra. Kétréses diffrakció

Az (1) és (2) egyenletek jobb oldalainak a (3) egyenletbe való behelyettesítése után kapjuk, hogy:

$$k \frac{\lambda}{d} \approx \frac{x_k}{L}. \quad (4)$$

Az első erősítési helyre $|k| = 1$, tehát:

$$x \approx \lambda \frac{L}{d}. \quad (5)$$

Vörös fény esetében $x_v = 38,9$ mm, míg ibolya színű fény esetében $x_i = 22,2$ mm.

Amennyiben két rés helyett optikai rácsot használnánk, úgy kisebb intenzitású erősítési mellékmaximumokat is látnánk. Ha monokromatikus (egy hullámhosszúságú) fényt helyett fehér fényt használnánk, akkor az erősítési maximumoknál a fehér fényt összetevőire bontva látnánk. Prizmával való színbontás esetén csak az ernyő egy helyén kapnánk erős „szivárványt”.

2. feladat: Egy 545 nm hullámhosszúságú lézervilágítás világít meg merőlegesen egy falfelületet. Azt tapasztaljuk, hogy ha ennek útjába merőlegesen beteszünk egy optikai rácsot, akkor az eredeti folt megmarad, csak halványabb lesz, de mellette alul és felül újabb foltok jelennek meg. Megmérjük, hogy az optikai rács 1,5 m-re van a faltól, az eredeti foltokhoz legközelebb eső két új fénypetty pedig 38,5 cm-re található az eredeti folttól.

- Milliméterenként hány vonal van az optikai rácson?
- Az optikai rács vonalai vízszintesek vagy függőlegesek?
- Milyen messze lesznek az eredeti folttól a következő új fényfoltok?
- A lézert lecseréljük egy másikra és azt tapasztaljuk, hogy a középsőtől 47,6 cm-re vannak a szomszédjai. Mennyi az új lézer hullámhossza?

Megoldás:

Az előző feladat (4) egyenletéből indulunk ki. Most d az optikai rácson belüli két szomszédos rés távolságát jelöli. Határozzuk meg ezt a feladat adatai alapján ($k = 1$):

$$d = k \lambda \frac{L}{x_k} = 2,123 \mu\text{m}, \quad (6)$$

azaz a rácsállandó 470 rés az optikai rács minden milliméterén.

Mivel az erősítési maximumokat összekötő egyenes merőleges a rács vonalaira, így ez esetben a rács vonalai vízszintesek.

A következő fényfoltokat a $k = \pm 2$ rendek jellemzik, így:

$$x_2 = 2\lambda \frac{L}{d} = 2x_1 = 77 \text{ cm}.$$

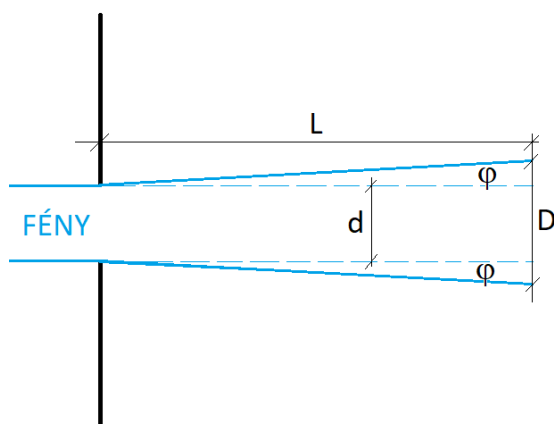
A lézert lecseréltük, de a rács ugyanaz maradt, míg az első fényes pettyek távolsága megváltozott. Tehát az új lézernek más, ismeretlen a hullámhossza. Fejezzük ki most ezt az új, ismeretlen hullámhosszat ($k = 1$):

$$\lambda^{(uj)} = x_1^{(uj)} \frac{d}{L} = 674 \text{ nm}. \quad (7)$$

3. feladat: Egy 2 mm széles rést merőlegesen megvilágítunk egy 500 nm hullámhosszúságú fénnel.

- Mekkora szöggel jellemezhető a fényelhajlás, azaz a továbbmenő fény eredeti iránya és az első kioltási irány közt hány fok van?
- Milyen messzire kell mennünk a réstől, hogy az átmenő fénynyaláb a résméret duplájára szélesedjen?

Megoldás:



2. ábra. Fényelhajlás széles résen

Ha egy d szélességű résen λ hullámhosszúságú fénysugár halad hát, akkor a rés szélein bekövetkező diffrakció miatt a fénysugár kissé széttartóvá válik. Amennyiben teljesül, hogy $d \gg \lambda$, akkor a széttartást jellemző szögre teljesül, hogy:

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{d}. \quad (8)$$

Tehát a feladat adataival:

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{\lambda}{d} \right) = 0,014^\circ$$

A 2. ábra alapján a réstől L távolságban a kis-sé széttartó nyaláb átmérője:

$$D = d + 2L \tan \varphi. \quad (9)$$

Az a kérdés, hogy milyen L_0 távolságban lesz a kissé széttartó nyaláb átmérője $D_0 = 2d$? Tehát:

$$D_0 = 2d = d + 2L_0 \tan \varphi.$$

Ebből L_0 -t kifejezve kapjuk, hogy:

$$L_0 = \frac{d}{2 \tan \varphi} = 4,1 \text{ m.}$$

4. feladat Egy távoli autó fényszóróinak távolsága 1,4 m. Ha egy szemmel nézzük, és a szem pupillájának átmérője 3 mm, akkor milyen távolságból vagyunk képesek a két fényszórót megkülönböztetni? Mekkora ez a távolság, ha éjszaka, a sötétbe alkalmazkodott szemünkkel (pupilla átmérője 8 mm) figyeljük ezt az autót?

Megoldás:

Szemünk a látható fény tartományában a $\lambda = 550 \text{ nm}$ hullámhosszúságú összetevőre a legérzékenyebb, ezért a továbbiakban ezzel az értékkel számolunk.

A szemünk φ_0 elvi felbontási határára adott d pupilla átmérő és λ hullámhosszúságú fény esetében érvényes, hogy:

$$\sin \varphi_0 = 1,22 \frac{\lambda}{d}. \quad (10)$$

φ_0 értéke a feladatbeli $d = 3 \text{ mm}$ és $\lambda = 550 \text{ nm}$ adatokra:

$$\varphi_0 = 0,016^\circ = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

A 3. ábra alapján az F1 és F2 pontokban, tőlünk L távolságban lévő fényszórókat, melyek egymástól D távolságban helyezkednek el, szemünk φ látószög alatt látja, melyre az ábra alapján igaz, hogy:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{D}{2L}. \quad (11)$$

Látható, hogy minél messzebb vannak szemünktől a fényszórók, annál kisebb szög alatt látszanak. Amikor a fényszórók látószöge eléri a szemünk felbontási határát, akkor két fényszóró helyett a szemünk már csak egyet lát, azaz már nem tudja megkülönböztetni egymástól a két fényforrást. Ez a helyzet valamilyen $L = L_0$ távolságban következik be.

Mivel kis szögek esetében ($\varphi < 5^\circ \sim 0,09 \text{ rad}$) jó közelítéssel érvényes, hogy:

$$\sin \varphi \approx \varphi \approx \tan \varphi,$$

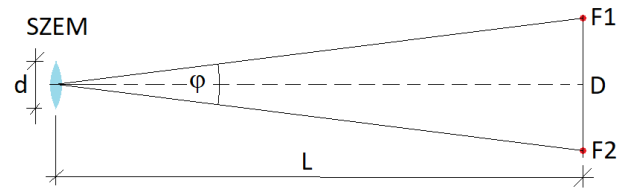
ezért írhatjuk:

$$\varphi \approx \frac{D}{L_0} \approx \varphi_0. \quad (12)$$

A (12) egyenletből:

$$L_0 \approx \frac{D}{\varphi_0} = \frac{1,4}{2,8 \cdot 10^{-4}} = 5 \text{ km.}$$

Éjszaka, mivel a pupillánk kitágul, hogy több fényt gyűjthessünk a szemünkkel, a szemünk elvi felbontási határa is javul. A fenti gondolatmenettel $d = 8 \text{ mm}$ -es pupillaátmérőre $L_0 \approx 16,7 \text{ km}$ -es értéket kapunk.



3. ábra. Két fényszóró egy szemmel

5. feladat Mekkora objektívátmérő kellene egy kém-műholdra, ha azt akarnánk, hogy 500 nm hullámhosszon a felszínen 1 cm-es felbontást érjünk el vele? Tegyük fel, hogy a műhold 300 km magasan kering. (Miért nem ilyen egyszerű ez a gyakorlatban? Azaz a szükséges átmérőjű egyszerű optika esetén miért nem működne az ilyen felbontású képalkotás?)

Megoldás:

A feladat, az előző feladathoz hasonlóan, azt kérdezi, hogy a $D = 1$ cm-es távolság látószöge $L = 300$ km magasból nézve, mikor lesz egyenlő a használt, d átmérőjű objektív felbontóképességével?

Az előző feladatban ezt az egyenlőséget a (12) összefüggés fejezi ki. Ide φ_0 kifejezését helyettesítve a (10) egyenletből kapjuk, hogy:

$$\frac{D}{L} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{d}.$$

Ebből a d átmérőt kifejezve kapjuk, hogy a szükséges objektív minimális átmérője:

$$d = 1,22 \cdot \lambda \frac{L}{D} = 18,3 \text{ m}.$$

Egy ilyen méretű objektív kellő pontosságú legyártása, valamint Föld-körüli pályára állítása nagyon nehezen kivitelezhető, ezért költséges, továbbá egy ilyen méretű objektív nagyon könnyen repedne be, vagy törne össze saját súlya alatt! Ha sikerülne is ilyen méretű objektívet legyártani és orbitális pályára állítani, még mindig megghiúsítaná ezt a felbontást a Föld légkörének „remegése”, ami a hőmérséklet ingadozásából ered.

6. feladat Egy „Full HD” TV képernyőjének felbontása 1920x1080 pixel, átlója 42 inches (1 inch = 2,54 cm). Milyen messziről nézhetjük ezt merőleges rálátás esetén, ha nem akarjuk, hogy észrevegyük a pixelezettséget? Mi lenne az eredmény a „4K” képernyők esetén, melyek ennél mindkét irányban kétszer annyi pixelt tartalmaznak? (Számoljunk úgy, hogy az emberi szem felbontóképessége $1' = 1^\circ/60$. Feltehetjük, hogy a pixelek négyzet alakúak.)

Megoldás:

Jelölje a a négyzet alakú pixel oldalhosszúságát! Ekkor a TV-képernyőjének hosszabbik oldala $1920a$ méretű, míg a rövidebbik oldal $1080a$ méretű. Ezeket felhasználva a TV-képernyő átlójának hosszára igaz, hogy:

$$(42 \cdot 0,0254)^2 = (1920)^2 a^2 + (1080)^2 a^2,$$

azaz $a = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

Itt is az a kérdés, hogy a TV-től milyen L_0 távolságban kell ülni, hogy az a hosszúság látószöge éppen megegyezzen a szemünk φ_0 felbontóképességével?

$$\frac{a}{L} = \varphi_0 = \frac{\pi}{60 \cdot 180} = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Innen L_0 kifejezhető:

$$L_0 = \frac{a}{\varphi_0} = \frac{4,8 \cdot 10^{-4}}{2,9 \cdot 10^{-4}} = 1,6 \text{ m}.$$

Mivel a „4K” felbontás mindkét irányban a pixelméret feleződését jelenti, így ebben az esetben:

$$L_0 = \frac{a}{2\varphi_0} = \frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{2,9 \cdot 10^{-4}} = 0,8 \text{ m}.$$