

Elektron mozgása kristályrácsban

Drude - féle elektrongáz

Dr. Berta Miklós

bertam@sze.hu

2017. október 13.

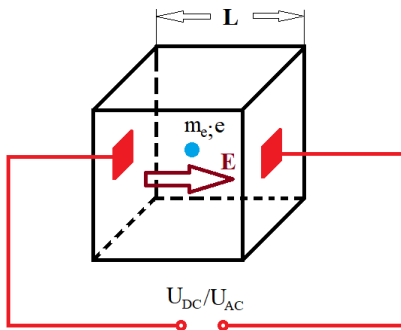
Drude - féle elektrongáz

Tapasztalat alapján a fémekben vannak szabad töltéshordozók. Szintén a tapasztalatból tudjuk, hogy ezek **elektronok**.

$$m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad q_e = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

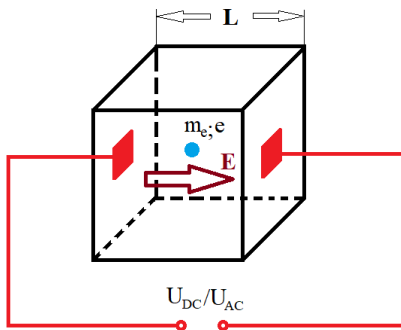
A Drude - féle elektrongázt kristályrácsban a következő két paraméterrel jellemezzük:

- n_e – elektronkoncentráció - megadja, hogy hány darab elektron található egységnyi térfogatban
- τ – a kristályrács rácscentrumaival történt, egymásutáni két ütközés között eltelt **átlagos idő**.



Vizsgáljuk először az egyenáramú esetet! Az elektronra két ütközés között állandó gyorsító erő hat, melynek nagysága:

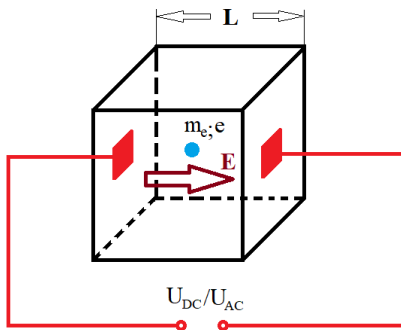
$$F = m_e a = eE = e \frac{U}{L} \rightarrow a = \frac{eU}{m_e L}$$



Vizsgáljuk először az egyenáramú esetet! Az elektronra két ütközés között állandó gyorsító erő hat, melynek nagysága:

$$F = m_e a = eE = e \frac{U}{L} \rightarrow a = \frac{eU}{m_e L}$$

A termodinamikai hőmérsékletet tekintsük először nullának: $T = 0 \text{ K}$



Vizsgáljuk először az egyenáramú esetet! Az elektronra két ütközés között állandó gyorsító erő hat, melynek nagysága:

$$F = m_e a = eE = e \frac{U}{L} \rightarrow a = \frac{eU}{m_e L}$$

A termodinamikai hőmérsékletet tekintsük először nullának: $T = 0 \text{ K}$

Az elektron két ütközés között az elektromos tér hatására:

$$v_v = a\tau = \frac{eU\tau}{m_e L}$$

sebességre gyorsul.

Az elektron két ütközés között az elektromos tér hatására:

$$v_v = a\tau = \frac{eU\tau}{m_e L}$$

sebességre gyorsul.

A két ütközés közötti átlagsebesség, amit **driftsebesség**nek nevezünk:

$$v_d = \frac{v_v}{2} = \frac{eU\tau}{2m_e L}.$$

Az elektron két ütközés között az elektromos tér hatására:

$$v_v = a\tau = \frac{eU\tau}{m_e L}$$

sebességre gyorsul.

A két ütközés közötti átlagsebesség, amit **driftsebesség**nek nevezünk:

$$v_d = \frac{v_v}{2} = \frac{eU\tau}{2m_e L}.$$

$\Delta t \gg \tau$ idő alatt a vezető A keresztmetszetén áthaladó töltés:

$$\Delta Q = en_e V = en_e A v_d \Delta t \rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = en_e A v_d = n_e \frac{e^2 \tau}{2m_e L} U.$$

Az elektron két ütközés között az elektromos tér hatására:

$$v_v = a\tau = \frac{eU\tau}{m_e L}$$

sebességre gyorsul.

A két ütközés közötti átlagsebesség, amit **driftsebesség**nek nevezünk:

$$v_d = \frac{v_v}{2} = \frac{eU\tau}{2m_e L}.$$

$\Delta t \gg \tau$ idő alatt a vezető A keresztmetszetén áthaladó töltés:

$$\Delta Q = en_e V = en_e A v_d \Delta t \rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = en_e A v_d = n_e \frac{e^2 \tau}{2m_e} \frac{A}{L} U.$$

Tehát az ellenállás:

$$R = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{A} = \frac{U}{I} = \frac{2m_e}{n_e e^2 \tau} \frac{L}{A} \rightarrow \sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{2m_e}$$

Az elektron két ütközés között az elektromos tér hatására:

$$v_v = a\tau = \frac{eU\tau}{m_e L}$$

sebességre gyorsul.

A két ütközés közötti átlagsebesség, amit **driftsebesség**nek nevezünk:

$$v_d = \frac{v_v}{2} = \frac{eU\tau}{2m_e L}.$$

$\Delta t \gg \tau$ idő alatt a vezető A keresztmetszetén áthaladó töltés:

$$\Delta Q = en_e V = en_e A v_d \Delta t \rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = en_e A v_d = n_e \frac{e^2 \tau}{2m_e} \frac{A}{L} U.$$

Tehát az ellenállás:

$$R = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{A} = \frac{U}{I} = \frac{2m_e}{n_e e^2 \tau} \frac{L}{A} \rightarrow \sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{2m_e}$$

Differenciális alakba írva (differenciális Ohm-törvény):

$$J = \frac{I}{A} = \sigma_0 \frac{U}{L} = \sigma_0 E.$$

Differenciális alakba írva (differenciális Ohm-törvény):

$$J = \frac{I}{A} = \sigma_0 \frac{U}{L} = \sigma_0 E.$$

A két ütközés között megtett utat **átlagos szabad úthossznak** nevezzük:

$$D = v_d \tau = \frac{eU\tau^2}{2m_e L}.$$

Differenciális alakba írva (differenciális Ohm-törvény):

$$J = \frac{I}{A} = \sigma_0 \frac{U}{L} = \sigma_0 E.$$

A két ütközés között megtett utat **átlagos szabad úthossznak** nevezzük:

$$D = v_d \tau = \frac{eU\tau^2}{2m_e L}.$$

A Drude - féle modell feltételezi, hogy:

$$L \gg D.$$

Differenciális alakba írva (differenciális Ohm-törvény):

$$J = \frac{I}{A} = \sigma_0 \frac{U}{L} = \sigma_0 E.$$

A két ütközés között megtett utat **átlagos szabad úthossznak** nevezzük:

$$D = v_d \tau = \frac{eU\tau^2}{2m_e L}.$$

A Drude - féle modell feltételezi, hogy:

$$L \gg D.$$

A továbbiakban tekintsük, hogy miként viselkedik a Drude - féle modell időben váltakozó elektromos tér hatása alatt!

Differenciális alakba írva (differenciális Ohm-törvény):

$$J = \frac{I}{A} = \sigma_0 \frac{U}{L} = \sigma_0 E.$$

A két ütközés között megtett utat **átlagos szabad úthossznak** nevezzük:

$$D = v_d \tau = \frac{eU\tau^2}{2m_e L}.$$

A Drude - féle modell feltételezi, hogy:

$$L \gg D.$$

A továbbiakban tekintsük, hogy miként viselkedik a Drude - féle modell időben váltakozó elektromos tér hatása alatt!

A rendszerben állandó eE gyorsító erő hat az elektronra, míg átlagosan τ időközönként, egy ütközésben, az elektron elveszíti a gyorsítás során megszerzett impulzusát. Tehát az ütközés felfogható úgy, mint egy $\frac{p}{\tau}$ átlagos fékezőerő. Írjuk fel ezen folyamat dinamikai alapegyenletét:

$$m_e \frac{dv(t)}{dt} = eE(t) - \frac{m_e v(t)}{\tau}.$$

A rendszerben állandó eE gyorsító erő hat az elektronra, míg átlagosan τ időközönként, egy ütközésben, az elektron elveszíti a gyorsítás során megszerzett impulzusát. Tehát az ütközés felfogható úgy, mint egy $\frac{p}{\tau}$ átlagos fékezőerő. Írjuk fel ezen folyamat dinamikai alapegyenletét:

$$m_e \frac{dv(t)}{dt} = eE(t) - \frac{m_e v(t)}{\tau}.$$

Fourier-transzformáció után:

$$i\omega m_e \hat{v}(\omega) + \frac{m_e}{\tau} \hat{v}(\omega) = e\hat{E}(\omega).$$

A rendszerben állandó eE gyorsító erő hat az elektronra, míg átlagosan τ időközönként, egy ütközésben, az elektron elveszíti a gyorsítás során megszerzett impulzusát. Tehát az ütközés felfogható úgy, mint egy $\frac{p}{\tau}$ átlagos fékezőerő. Írjuk fel ezen folyamat dinamikai alapegyenletét:

$$m_e \frac{dv(t)}{dt} = eE(t) - \frac{m_e v(t)}{\tau}.$$

Fourier-transzformáció után:

$$i\omega m_e \hat{v}(\omega) + \frac{m_e}{\tau} \hat{v}(\omega) = e\hat{E}(\omega).$$

Innen:

$$\hat{v}(\omega) = \frac{e\tau}{m_e(1 + i\omega\tau)} \hat{E}(\omega).$$

Vegyük figyelembe, hogy:

$$J = \frac{en_e}{2}!$$

Tehát:

$$\hat{J}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \hat{E}(\omega) = \hat{\sigma}(\omega) \hat{E}(\omega)$$

Látható, hogy most is teljesül a differenciális Ohm-törvény!

Tehát:

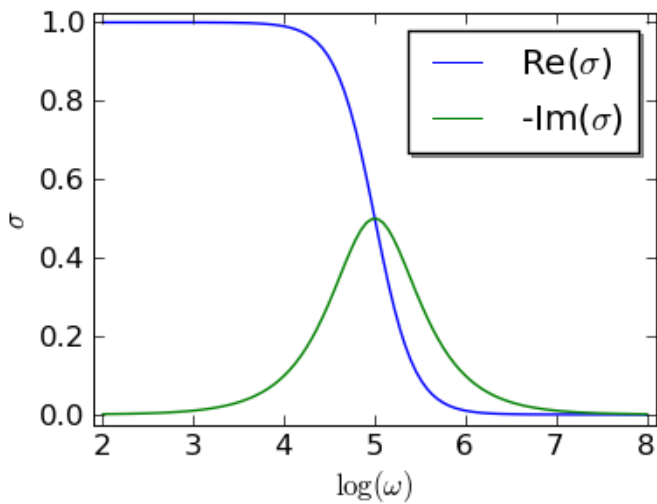
$$\hat{J}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \hat{E}(\omega) = \hat{\sigma}(\omega) \hat{E}(\omega)$$

Látható, hogy most is teljesül a differenciális Ohm-törvény!

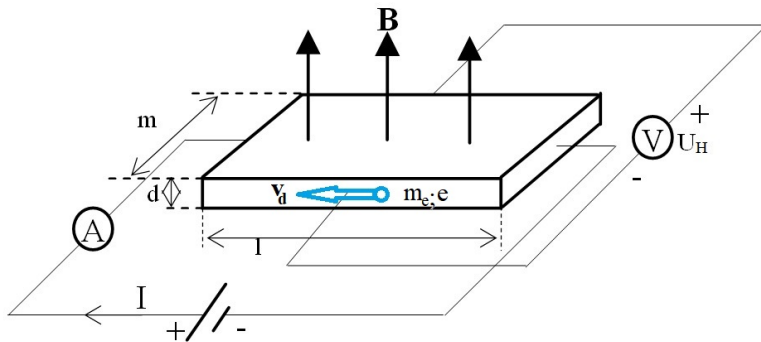
A komplex fajlagos vezetőképesség:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1 + i\frac{\omega}{\omega_{co}}}$$

ahol $\omega_{co} = \frac{1}{\tau}$ a levágási (cut-off) frekvencia.



Hall - effektus



Az elektromos tér hatására a lapkában található elektronok $\mathbf{v_d}$ sebességgel driftelnek. Sebességük merőleges a $\mathbf{B}$ homogén mágneses térre, így az elektromos térre és a mágneses térre is merőleges Lorentz-erő hat rájuk. A Lorentz-erő a töltéseket az áram irányára merőleges oldalak irányába sodorja, így ezen oldalak feltöltődnek $\mathbf{U_H}$ Hall-feszültségre. A folyamat mindaddig tart, amíg a Hall-feszültség hatása ki nem kompenzálja a Lorentz-erő hatását:

$$\begin{aligned} F_{\text{Lorentz}} &= F_{\text{Hall}}. \\ ev_d B &= e \frac{U_H}{m}. \end{aligned}$$

Vegyük figyelembe, hogy:

$$v_d = \frac{I}{en_e md},$$

így

$$U_H = \frac{1}{en_e} \frac{IB}{d} = R_H \frac{IB}{d}.$$

Az $\mathbf{R_H}$ Hall-állandóból meghatározható a lapkában a töltéshordozók koncentrációja, míg az $\mathbf{U_H}$ polaritásából a töltés előjele!

Köszönöm a figyelmet!