



SZÉCHENYI ISTVÁN  
EGYETEM  
GYŐR

# Rezgőmozgások

Horváth András  
SZE, Fizika és Kémia Tsz.

2006. szeptember 29.

Magyarország célba ér



Készült a HEFOP 3.3.1-P.-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával



## Bevezetés

- Bevezetés

### Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

# Bevezetés



Bevezetés

• Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Bevezetés

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ( $\rightarrow$ inga,  $\rightarrow$ bonyolult rezgés)



Bevezetés

• Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Bevezetés

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ( $\rightarrow$ inga,  $\rightarrow$ bonyolult rezgés)

Először a **pontszerű testek egyenes menti rezgését** tárgyaljuk. Ekkor a mozgás egy  $x(t)$  függvényvel jellemezhető.



Bevezetés

• Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Bevezetés

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ( $\rightarrow$ inga,  $\rightarrow$ bonyolult rezgés)

Először a **pontszerű testek egyenes menti rezgését** tárgyaljuk.

Ekkor a mozgás egy  $x(t)$  függvényvel jellemezhető.

Ha van olyan  $x_0$ , melyre  $x(t) = x_0$ -nak sok megoldása van  $t$ -re, akkor rezgőmozgásról beszélhetünk.



Bevezetés

• Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Bevezetés

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ( $\rightarrow$ inga,  $\rightarrow$ bonyolult rezgés)

Először a **pontszerű testek egyenes menti rezgését** tárgyaljuk.

Ekkor a mozgás egy  $x(t)$  függvénnyel jellemezhető.

Ha van olyan  $x_0$ , melyre  $x(t) = x_0$ -nak sok megoldása van  $t$ -re, akkor rezgőmozgásról beszélhetünk.

Ha  $x(t)$  periodikus, akkor periodikus rezgőmozgásról beszélünk. (Vigyázat! Nem minden rezgőmozgás periodikus.)



## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# Rezgések kialakulása



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### ● **Rezgések kialakulása**

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van.



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### ● Rezgések kialakulása

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van.

Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta.



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### ● Rezgések kialakulása

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van.

Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta.

A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy  $\rightarrow$  rezgés.



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### ● Rezgések kialakulása

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van.

Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta.

A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy  $\rightarrow$  rezgés.

Matematikailag:

Egyensúlyi pont:  $F(x_0) = 0$

Visszatérítés jobbról:  $F(x) < 0$ , ha  $x > x_0$  és  $x - x_0 < \delta$

Visszatérítés balról:  $F(x) > 0$ , ha  $x < x_0$  és  $x_0 - x < \delta$



## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

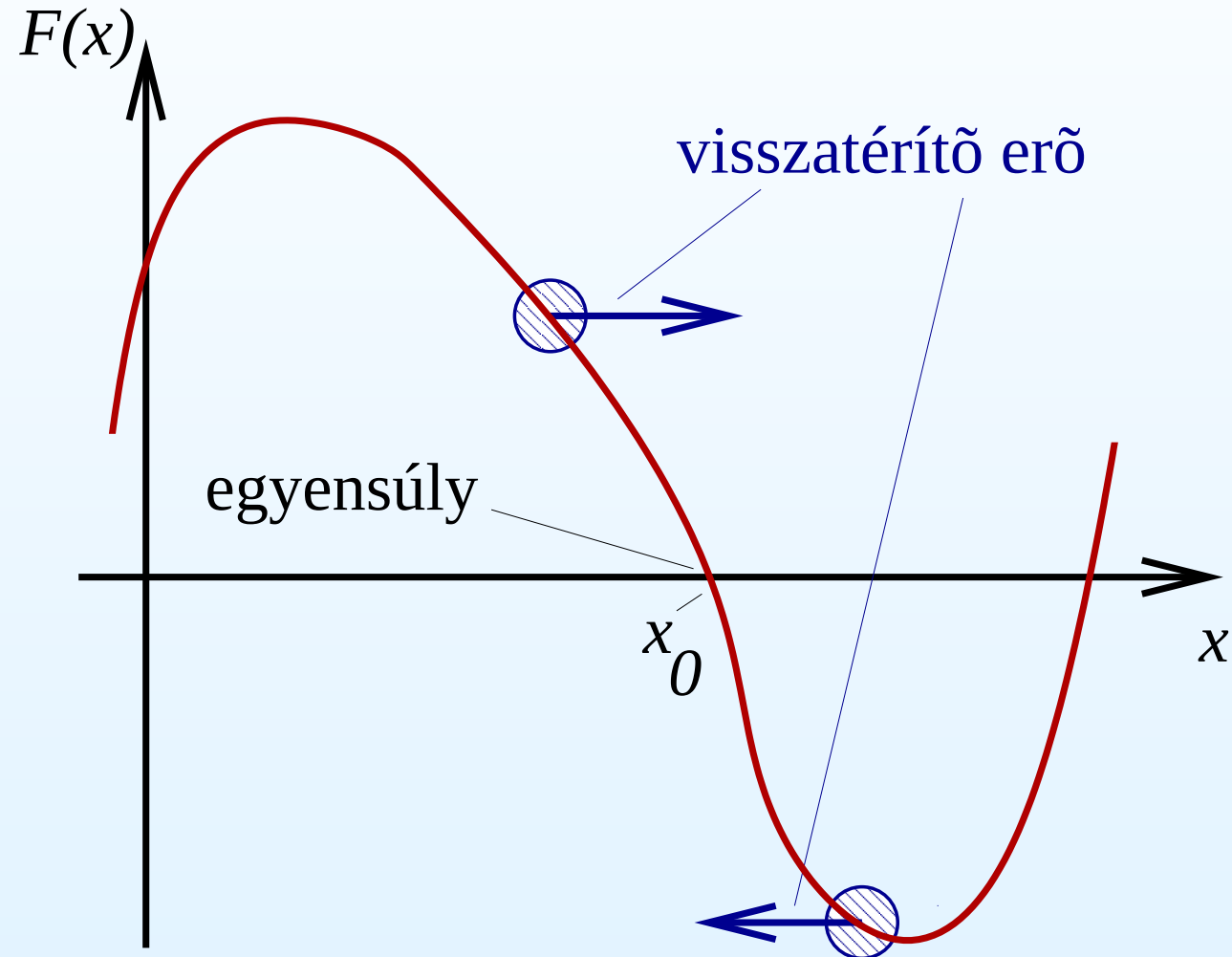
### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# szemléltetés: stabil egyensúly

## Egyensúlyi helyzet rezgéssel:





## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- **szemléltetés: instabil egyensúly**
- összefoglalás

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

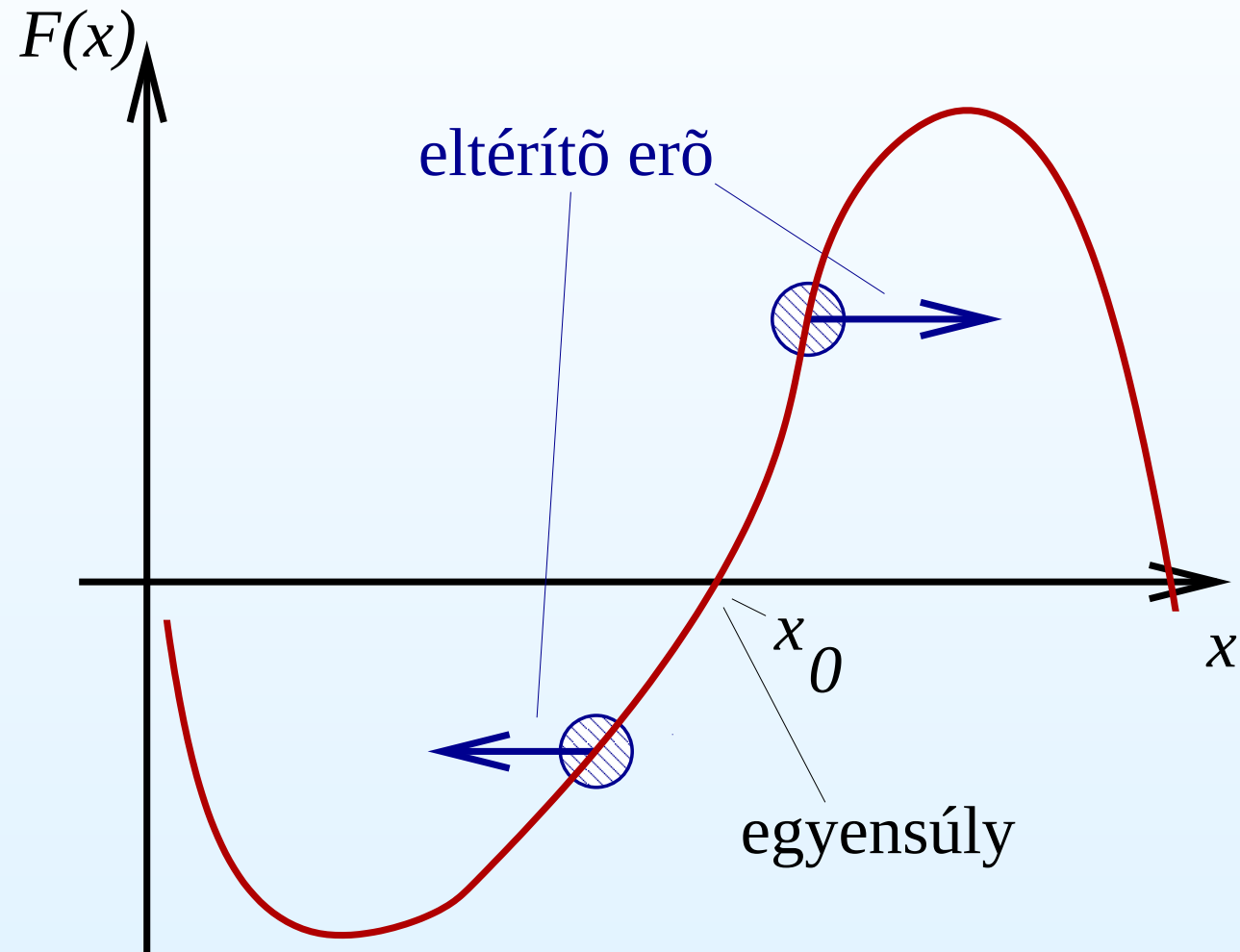
### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# szemléltetés: instabil egyensúly

Egyensúlyi helyzet rezgés nélkül:





## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# összefoglalás

## Tanulság:

Ha egy egyensúlyi helyzet körül  $F(x)$  monoton fogyó, akkor ott stabil egyensúly van, azaz kialakul rezgés, különben nem.



## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

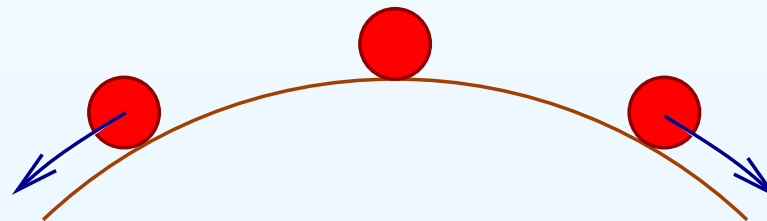
### Egymásra merőleges rezgések eredője

# összefoglalás

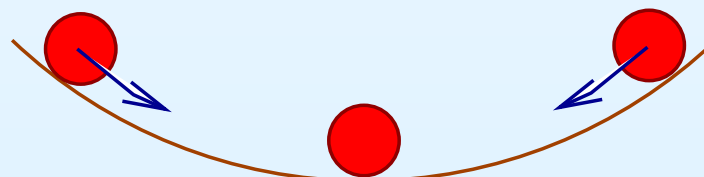
Tanulság:

Ha egy egyensúlyi helyzet körül  $F(x)$  monoton fogyó, akkor ott stabil egyensúly van, azaz kialakul rezgés, különben nem.

Egyszerű példák stabil és instabil egyensúlyi helyzetre: labda dombon és gödörben.



instabil egyensúly



stabil egyensúly



Bevezetés

Rezgések kialakulása

**A harmonikus  
rezgőmozgás**

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

# A harmonikus rezgőmozgás



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- **alapegyenlet**
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- energiaviszonyok

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# alapegyenlet

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

- **alapegyenlet**
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## alapegyenlet

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.

Tegyük az origót az egyensúlyi helyzetbe. Ekkor az erőfüggvény:

$$F(x) = -D \cdot x$$

ahol  $D$  szokásos neve: direkciós állandó vagy rugóállandó.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

- **alapegyenlet**
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## alapegyenlet

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.

Tegyük az origót az egyensúlyi helyzetbe. Ekkor az erőfüggvény:

$$F(x) = -D \cdot x$$

ahol  $D$  szokásos neve: direkciós állandó vagy rugóállandó.  
Ilyen erő hat pl. egy  $\rightarrow$ rugalmasan rögzített testre.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

- **alapegyenlet**
- az alapegyenlet  
megoldása
- összefoglalás
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## alapegyenlet

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.

Tegyük az origót az egyensúlyi helyzetbe. Ekkor az erőfüggvény:

$$F(x) = -D \cdot x$$

ahol  $D$  szokásos neve: direkciós állandó vagy rugóállandó.

Ilyen erő hat pl. egy  $\rightarrow$ rugalmasan rögzített testre.

A mozgás egyenlete:

$$F = -Dx = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{D}{m}x$$

Beírva a gyorsulás jelentését:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'' = -\frac{D}{m}x$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- **az alapegyenlet  
megoldása**
- összefoglalás
- energiaviszonyok

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# az alapegyenlet megoldása

Ez ez olyan egyenlet, melyben csak az  $x(t)$  függvény az ismeretlen. Bár pillanatnyilag nem tudjuk megoldani, mert az ismeretlen deriváltja is szerepel, azért ki tudjuk találni a megoldást. (Később matematikából szerepelni fog a precíz megoldás is.)



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- **az alapegyenlet megoldása**
- összefoglalás
- energaviszonyok

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# az alapegyenlet megoldása

Ez ez olyan egyenlet, melyben csak az  $x(t)$  függvény az ismeretlen. Bár pillanatnyilag nem tudjuk megoldani, mert az ismeretlen deriváltja is szerepel, azért ki tudjuk találni a megoldást. (Később matematikából szerepelni fog a precíz megoldás is.)

$x(t)$  tehát olyan függvény, melynek második deriváltja önmagának negatív konstans szorosa. Ilyenek pl. a sin és cos függvények.  
 $((\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x).$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- **az alapegyenlet  
megoldása**
- összefoglalás
- energaviszonyok

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# az alapegyenlet megoldása

Ez ez olyan egyenlet, melyben csak az  $x(t)$  függvény az ismeretlen. Bár pillanatnyilag nem tudjuk megoldani, mert az ismeretlen deriváltja is szerepel, azért ki tudjuk találni a megoldást. (Később matematikából szerepelni fog a precíz megoldás is.)

$x(t)$  tehát olyan függvény, melynek második deriváltja önmagának negatív konstans szorosa. Ilyenek pl. a sin és cos függvények.  
 $((\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x).$

Keressük a megoldást ilyen alakban:  $x(t) = A \sin(B \cdot t + C)$  ahol  $A$ ,  $B$  és  $C$  egyelőre ismeretlen jelentésű állandók.



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- energiaviszonyok

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

A sebesség és a gyorsulás:

$$v(t) = x'(t) = A \cos(B \cdot t + C) \cdot B,$$

$$a(t) = x''(t) = v'(t) = -A \sin(B \cdot t + C) \cdot B^2.$$

Kihasználva  $a(t) = -D/m \cdot x$ -et:

$$-A \sin(B \cdot t + C) B^2 = -\frac{D}{m} A \sin(B \cdot t + C)$$

Ez csak akkor állhat fenn, ha  $B^2 = D/m$ . ( $A$  és  $C$  tetszőleges.)

Elnevezések:

- $B = \omega = \sqrt{D/m}$ : körfrekvencia.
- $T = 2\pi/\omega$ : periódusidő.
- $f = 1/T = \omega/(2\pi)$ : frekvencia.
- $A$ : amplitúdó.
- $C = \varphi_0$ : kezdőfázis.



# összefoglalás

## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- energiaviszonyok

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad f = \frac{1}{T}$$



# összefoglalás

## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

## A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- energiaviszonyok

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad f = \frac{1}{T}$$

Ez a mozgás a középiskolából ismert **harmonikus rezgőmozgás**.  
(Érdekesség: a körfrekvencia  $\rightarrow$  nem függ az amplitúdótól, de  $\rightarrow$  a tömeg növekedésével csökken.)



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# energiaviszonyok

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik.



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# energiaviszonyok

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik. Ezért változik a mozgási és a helyzeti energia is.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## energiaviszonyok

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik. Ezért változik a mozgási és a helyzeti energia is.

Mozgási energia:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# energiaviszonyok

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik. Ezért változik a mozgási és a helyzeti energia is.

Mozgási energia:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Helyzeti (potenciális) energia:

$$V(t) = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# energiaviszonyok

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik. Ezért változik a mozgási és a helyzeti energia is.

Mozgási energia:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Helyzeti (potenciális) energia:

$$V(t) = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

Kihasználva, hogy  $\omega^2 = D/m$ ,  $D$  helyére  $m\omega^2$  írható:

$$V(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

...

Az összes energia tehát:

$$E = E_m + V = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left( \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) =$$

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left( \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left( \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

Amint az várható volt, a harmonikus rezgés összenergiája nem változik.

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left( \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

Amint az várható volt, a harmonikus rezgés összenergiája nem változik.

Az energia a potenciális és a mozgási energia közt vándorol periodikusan:

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left( \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

Amint az várható volt, a harmonikus rezgés összenergiája nem változik.

Az energia a potenciális és a mozgási energia közt vándorol periodikusan:

– maximális kitéréskor  $E_m = 0$ ,  $V = E$

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left( \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

Amint az várható volt, a harmonikus rezgés összenergiája nem változik.

Az energia a potenciális és a mozgási energia közt vándorol periodikusan:

- maximális kitéréskor  $E_m = 0$ ,  $V = E$
- az egyensúlyi helyzeten áthaladva  $V = 0$ ,  $E_m = E$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

## Egy példa

**Példa:** Egy rugón lógó testet rezgésbe hozunk. Azt tapasztaljuk, hogy 10 s alatt 23 rezgést végzett. Mekkora a rezgés periódusideje és körfrekvenciája? Mekkora a rugóállandó, ha a test tömege 0,25 kg?



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

## Egy példa

**Példa:** Egy rugón lógó testet rezgésbe hozunk. Azt tapasztaljuk, hogy 10 s alatt 23 rezgést végzett. Mekkora a rezgés periódusideje és körfrekvenciája? Mekkora a rugóállandó, ha a test tömege 0,25 kg?

**Megoldás:** 10 s alatt 23 rezgés:

$$T = \frac{10 \text{ s}}{23} = 0,435 \text{ s.}$$

A körfrekvencia:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 14,45 \frac{1}{\text{s}}.$$

A kért rugóállandó is meghatározható:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow D = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 52,2 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Még egy példa

**Példa:** Egy  $300 \text{ N/m}$ -es rugóállandójú rugón levő,  $0,2 \text{ kg}$  tömegű testet  $5 \text{ m/s}$ -os kezdősebességgel meglökönk. Milyen lesz a kialakuló rezgés amplitúdója?



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- összefoglalás
- **energiaviszonyok**

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Még egy példa

**Példa:** Egy  $300 \text{ N/m}$ -es rugóállandójú rugón levő,  $0,2 \text{ kg}$  tömegű testet  $5 \text{ m/s}$ -os kezdősebességgel meglökünk. Milyen lesz a kialakuló rezgés amplitúdója?

**Megoldás:** A  $v_0 = 5 \text{ m/s}$ -os sebesség a test maximális sebessége, azaz  $A\omega = v_0 \text{ m/s}$ .

$\omega$  egyszerűen meghatározható:  $\omega = \sqrt{D/m}$ , így azt állíthatjuk, hogy

$$v_0 = A\sqrt{\frac{D}{m}},$$

ahonnét a keresett amplitúdó:

$$A = v_0\sqrt{\frac{m}{D}} = 0,129 \text{ m}.$$

Tehát a test  $12,9 \text{ cm}$ -es amplitúdójú rezgéseket fog végezni.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Kis amplitúdójú rezgések



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

● **kis amplitúdójú  
rezgések**

- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## kis amplitúdójú rezgések

Mi a helyzet, ha a testre ható erő nem lineáris?

Általános esetben bonyolult megadni a rezgés paramétereit.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

• kis amplitúdójú  
rezgések

• egy példa

• egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

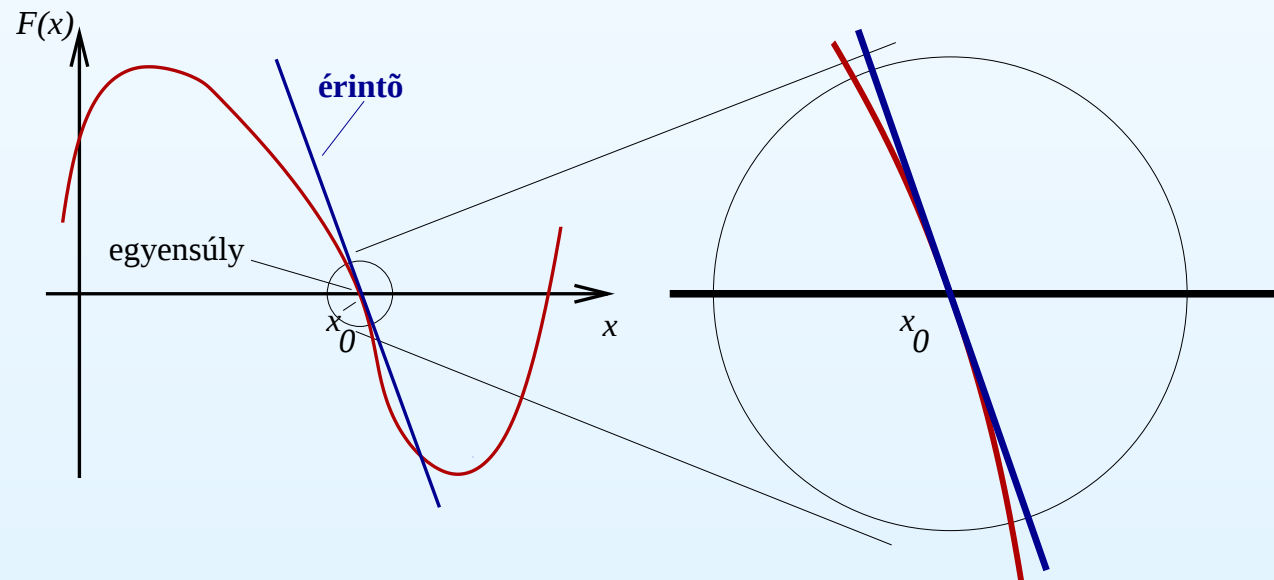
Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## kis amplitúdójú rezgések

Mi a helyzet, ha a testre ható erő nem lineáris?

Általános esetben bonyolult megadni a rezgés paramétereit.

Egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések esetén közel harmonikus rezgést fogunk kapni, hisz sima  $F(x)$  esetén kis szakaszon  $F(x)$  grafikonja jól közelíthető érintőjével.





Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

● kis amplitúdójú  
rezgések

- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

Ezért  $x_0$  körül közel lineáris erőtvény érvényesül.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

● kis amplitúdójú  
rezgések

- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Ezért  $x_0$  körül közel lineáris erőtvény érvényesül.

Mivel az érintő meredeksége  $F'(x)$ , ezért a kis rezgések úgy történnek, mintha  $D = -F'(x)$  rugóállandójú rugón lenne a test.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

• kis amplitúdójú  
rezgések

• egy példa

• egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Ezért  $x_0$  körül közel lineáris erőtvény érvényesül.

Mivel az érintő meredeksége  $F'(x)$ , ezért a kis rezgések úgy történnek, mintha  $D = -F'(x)$  rugóállandójú rugón lenne a test.

Tehát egyensúlyi helyzet körüli **kis amplitúdójú rezgések**  
**frekvenciája:**

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x)}{m}} = \sqrt{-\frac{1}{m} \frac{dF}{dx}}$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

#### • kis amplitúdójú rezgések

- egy példa
- egy másik példa

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Ezért  $x_0$  körül közel lineáris erőtvény érvényesül.

Mivel az érintő meredeksége  $F'(x)$ , ezért a kis rezgések úgy történnek, mintha  $D = -F'(x)$  rugóállandójú rugón lenne a test.

Tehát egyensúlyi helyzet körüli **kis amplitúdójú rezgések**  
**frekvenciája:**

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x)}{m}} = \sqrt{-\frac{1}{m} \frac{dF}{dx}}$$

Nem tévedés! Stabil egyensúly esetén  $F(x)$  monoton fogy  $x_0$  körül, így itt  $F(x_0) < 0$ , ezért  $\omega$  képletében a gyökjel alatt pozitív szám áll.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- **egy példa**
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

*Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?*



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- **egy példa**
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

*Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?*

**Megoldás:** Az egyensúly feltétele:  $F(x_0) = 0$ ,



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- **egy példa**
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

*Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?*

**Megoldás:** Az egyensúly feltétele:  $F(x_0) = 0$ , azaz most  $5/x_0 - 9 = 0$ . Ez egyszerűen megoldható:



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- **egy példa**
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

*Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?*

**Megoldás:** Az egyensúly feltétele:  $F(x_0) = 0$ , azaz most  $5/x_0 - 9 = 0$ . Ez egyszerűen megoldható:

$$x_0 = \frac{5}{9}$$

(Most csak egy megoldásunk van.)



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- **egy példa**
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

*Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?*

**Megoldás:** Az egyensúly feltétele:  $F(x_0) = 0$ , azaz most  $5/x_0 - 9 = 0$ . Ez egyszerűen megoldható:

$$x_0 = \frac{5}{9}$$

(Most csak egy megoldásunk van.)

Stabil-e ez az egyensúlyi helyzet?



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- **egy példa**
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

*Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?*

**Megoldás:** Az egyensúly feltétele:  $F(x_0) = 0$ , azaz most  $5/x_0 - 9 = 0$ . Ez egyszerűen megoldható:

$$x_0 = \frac{5}{9}$$

(Most csak egy megoldásunk van.)

Stabil-e ez az egyensúlyi helyzet? Azaz monoton fogyó-e  $F(x)$   $x_0$  egy kis környezetén?



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

#### Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left( \frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések

- egy példa

- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left( \frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$

az egyensúlyi pontban:

$$F'(x_0) = -\frac{5}{(5/9)^2} = -\frac{81}{5} = -16,2$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

#### Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések

- egy példa

- egy másik példa

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left( \frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$

az egyensúlyi pontban:

$$F'(x_0) = -\frac{5}{(5/9)^2} = -\frac{81}{5} = -16,2$$

Ez valóban negatív, tehát kialakulhat rezgés. A frekvencia:

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{16,2}{2}} \approx 2,85 \frac{1}{s}$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

#### Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left( \frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$

az egyensúlyi pontban:

$$F'(x_0) = -\frac{5}{(5/9)^2} = -\frac{81}{5} = -16,2$$

Ez valóban negatív, tehát kialakulhat rezgés. A frekvencia:

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{16,2}{2}} \approx 2,85 \frac{1}{s}$$

A periódusidő:  $T = (2\pi)/\omega = 2,21 \text{ s}$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- egy példa
- egy másik példa

### A csillapított rezgőmozgás

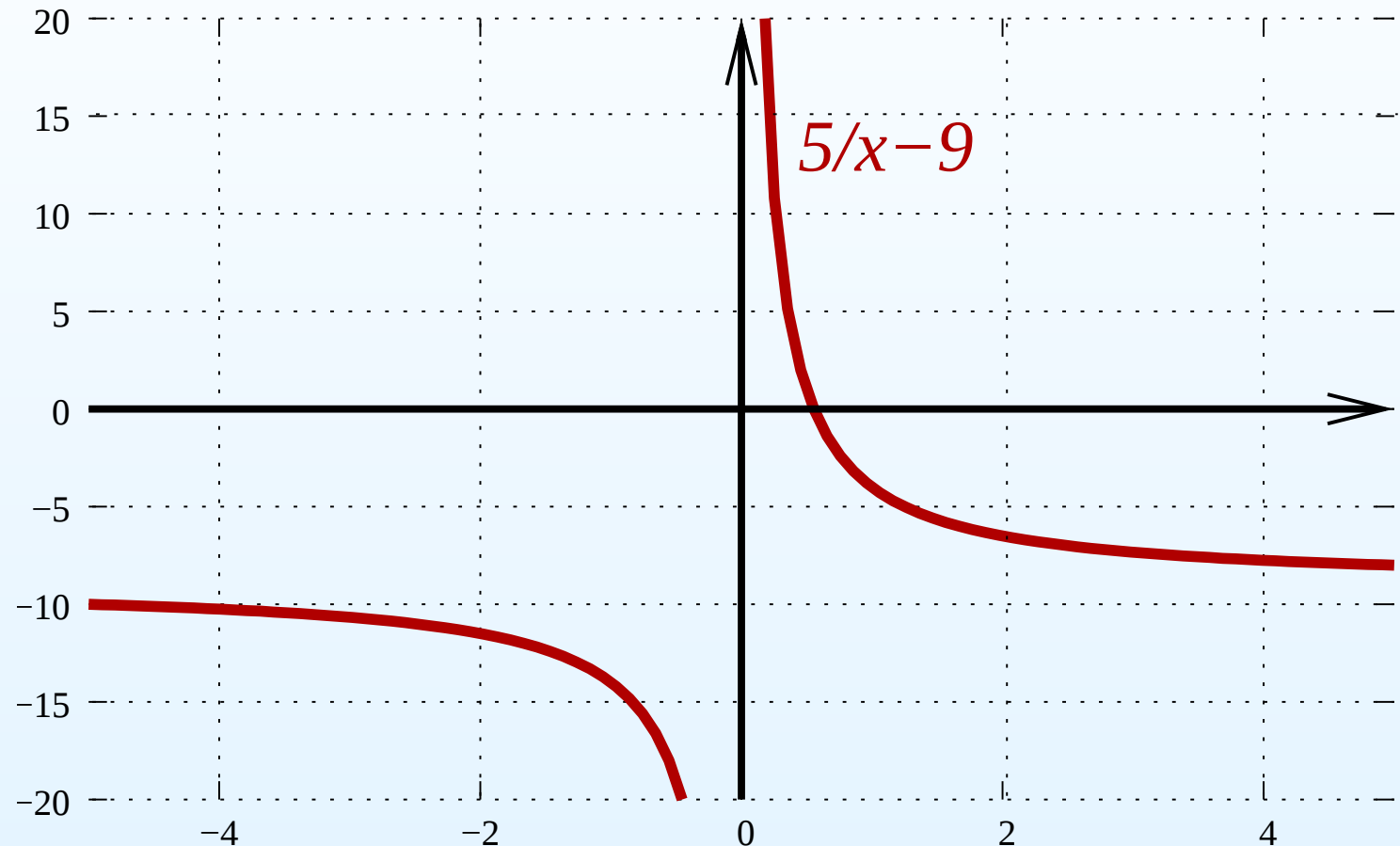
### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Egy kicsit segíthet, ha felrajzoljuk  $F(x)$  grafikonját:



Látszik, hogy egy egyensúlyi helyzet van, mely stabil.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- **egy másik példa**

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy másik példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x$$

*Hol lehet a test egyensúlyban? Hol alakulhat ki rezgés? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 7 kg?*



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- **egy másik példa**

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy másik példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x$$

*Hol lehet a test egyensúlyban? Hol alakulhat ki rezgés? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 7 kg?*

**Megoldás:** Egyensúlyi helyzet feltétele:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x = 0$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- **egy másik példa**

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy másik példa

*Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:*

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x$$

*Hol lehet a test egyensúlyban? Hol alakulhat ki rezgés? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 7 kg?*

**Megoldás:** Egyensúlyi helyzet feltétele:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x = 0$$

Nyilvánvaló megoldás az  $x_1 = 0$ . Az ezen kívüli megoldásokat keresve eloszthatjuk az egyenletet  $x$ -szel:

$$10x^2 + x - 0,2 = 0$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát.

A stabilitást  $F'(x)$  előjeléből állapíthatjuk meg:

$$F'(x) = 30x^2 + 2x - 0,2$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát.

A stabilitást  $F'(x)$  előjeléből állapíthatjuk meg:

$$F'(x) = 30x^2 + 2x - 0,2$$

$$F'(x_1) = -0,2 \quad F'(x_2) = 0,3 \quad F'(x_3) = 0,6$$

Ezek közül csak az első negatív, tehát csak  $x_1 = 0$  körül alakul ki rezgés.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

- kis amplitúdójú  
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát.

A stabilitást  $F'(x)$  előjeléből állapíthatjuk meg:

$$F'(x) = 30x^2 + 2x - 0,2$$

$$F'(x_1) = -0,2 \quad F'(x_2) = 0,3 \quad F'(x_3) = 0,6$$

Ezek közül csak az első negatív, tehát csak  $x_1 = 0$  körül alakul ki rezgés.

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_1)}{m}} \approx 0,169 \frac{1}{s} \quad T = 2\pi/\omega = 37,2 \text{ s}$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

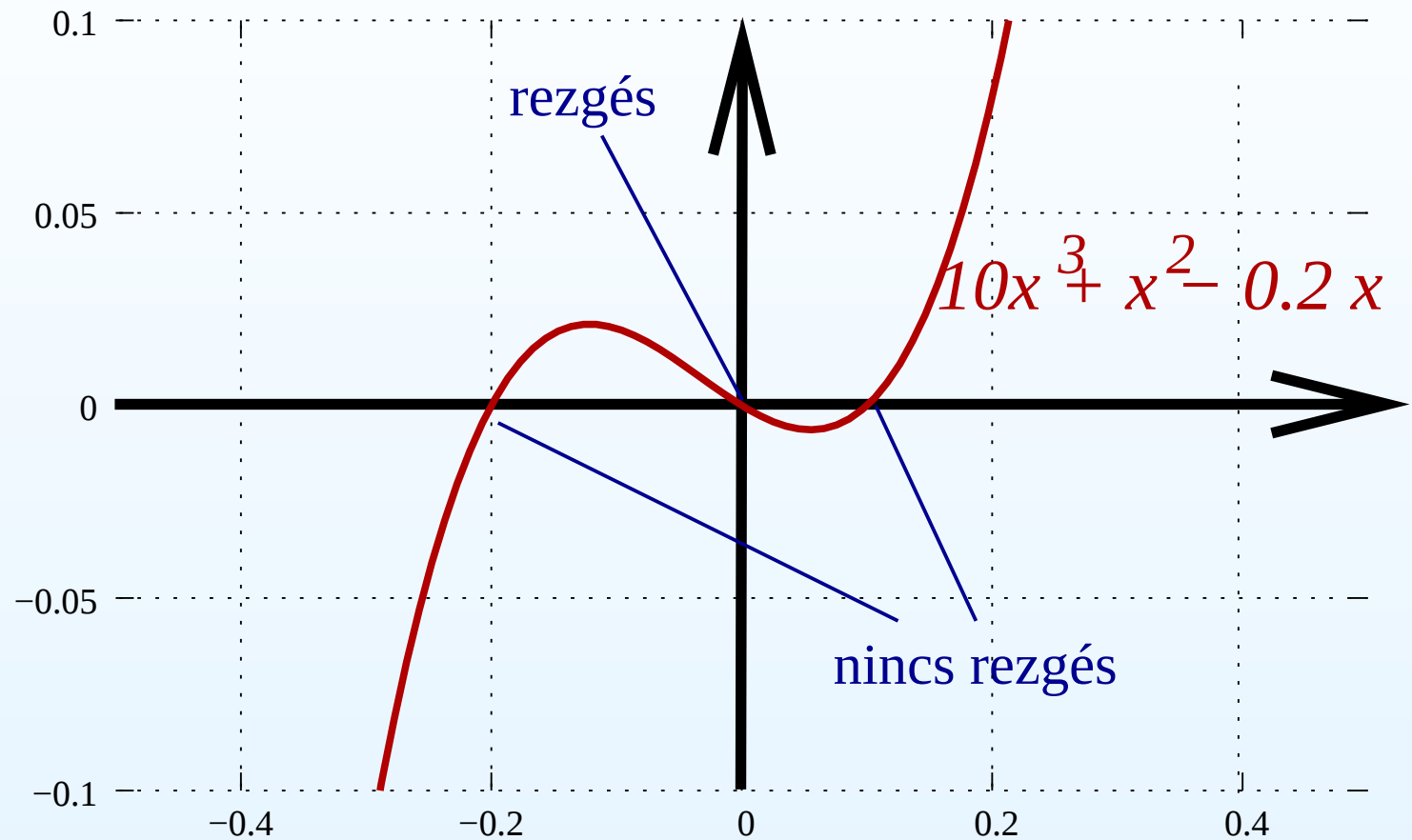
- kis amplitúdójú rezgések
- egy példa
- egy másik példa

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője





Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## A csillapított rezgőmozgás



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

## a csillapodás oka

A közegellenállást, súrlódást és egyéb fékező hatásokat eddig elhanyagoltuk, pedig fontosak: ha egy testet rezgésbe hozok, de magára hagyok, az egyre kisebb amplitúdóval fog rezegni.  
( $\rightarrow$  ritka közegben,  $\rightarrow$  sűrű közegben)



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

● a csillapodás oka

● a csillapított  
rezgőmozgás  
alapegyenlete

● kis csillapítások esete

● egy példa

● még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a csillapodás oka

A közegellenállást, súrlódást és egyéb fékező hatásokat eddig elhanyagoltuk, pedig fontosak: ha egy testet rezgésbe hozok, de magára hagyok, az egyre kisebb amplitúdóval fog rezegni.  
(→ritka közegben, →sűrű közegben)

Vegyük figyelembe a közeg hatását:

$$F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} = m \cdot a$$

Itt  $F_{\text{rugó}} = -Dx$ , a közeg hatását pedig írjuk fel a következő alakban:

$$F_{\text{közeg}} = -C \cdot v$$

Tehát sebességgel arányos fékezőerőt tételezünk fel. Ez pl. kis sebességű mozgásnál jó közelítéssel igaz a közegellenállásra.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított  
rezgőmozgás  
alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított  
rezgőmozgás  
alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

$D/m$ -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájának négyzetét, azaz  $D/m = \omega_0^2$ .



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított  
rezgőmozgás  
alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

$D/m$ -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájának négyzetét, azaz  $D/m = \omega_0^2$ .

$C/m$  valamiképp a fékezés hatékonyságát méri. Jelöljük ezt  $2\beta$ -val.  
 $\beta$  szokásos neve: **csillapítási tényező**.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

$D/m$ -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájának négyzetét, azaz  $D/m = \omega_0^2$ .

$C/m$  valamiképp a fékezés hatékonyságát méri. Jelöljük ezt  $2\beta$ -val.  
 $\beta$  szokásos neve: **csillapítási tényező**.

Így a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

$D/m$ -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájának négyzetét, azaz  $D/m = \omega_0^2$ .

$C/m$  valamiképp a fékezés hatékonyságát méri. Jelöljük ezt  $2\beta$ -val.  
 $\beta$  szokásos neve: **csillapítási tényező**.

Így a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v$$

Másképp:

$$x'' = -\omega_0^2 x - 2\beta x'$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított  
rezgőmozgás  
alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Ennek megoldására jelenleg nincsenek meg a matematikai eszközeink. Ezért a megoldást bizonyítás nélkül közlöm:



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított  
rezgőmozgás  
alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Ennek megoldására jelenleg nincsenek meg a matematikai eszközeink. Ezért a megoldást bizonyítás nélkül közlöm:

A megoldás jellege alapvetően különbözik ha  $\omega_0 > \beta$  (kis csillapítás) illetve ha  $\omega_0 \leq \beta$  (nagy csillapítás).



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított  
rezgőmozgás  
alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Ennek megoldására jelenleg nincsenek meg a matematikai eszközeink. Ezért a megoldást bizonyítás nélkül közlöm:

A megoldás jellege alapvetően különbözik ha  $\omega_0 > \beta$  (kis csillapítás) illetve ha  $\omega_0 \leq \beta$  (nagy csillapítás).

Ezek közül a kis csillapítás fordul elő gyakrabban, így ezt tárgyaljuk részletesen.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## kis csillapítások esete

Amennyiben  $\omega_0 > \beta$ , a csillapított rezgőmozgás az alábbiak szerint zajlik:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

ahol

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## kis csillapítások esete

Amennyiben  $\omega_0 > \beta$ , a csillapított rezgőmozgás az alábbiak szerint zajlik:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

ahol

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Tehát a csillapított rezgés frekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan ( $\omega_{cs} < \omega_0$ ), amplitúdója pedig  $A_0$ -ról exponenciális függvény szerint csökken.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## kis csillapítások esete

Amennyiben  $\omega_0 > \beta$ , a csillapított rezgőmozgás az alábbiak szerint zajlik:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

ahol

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Tehát a csillapított rezgés frekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan ( $\omega_{cs} < \omega_0$ ), amplitúdója pedig  $A_0$ -ról exponenciális függvény szerint csökken.

Maga az amplitúdó időbeli változása:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$



...

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

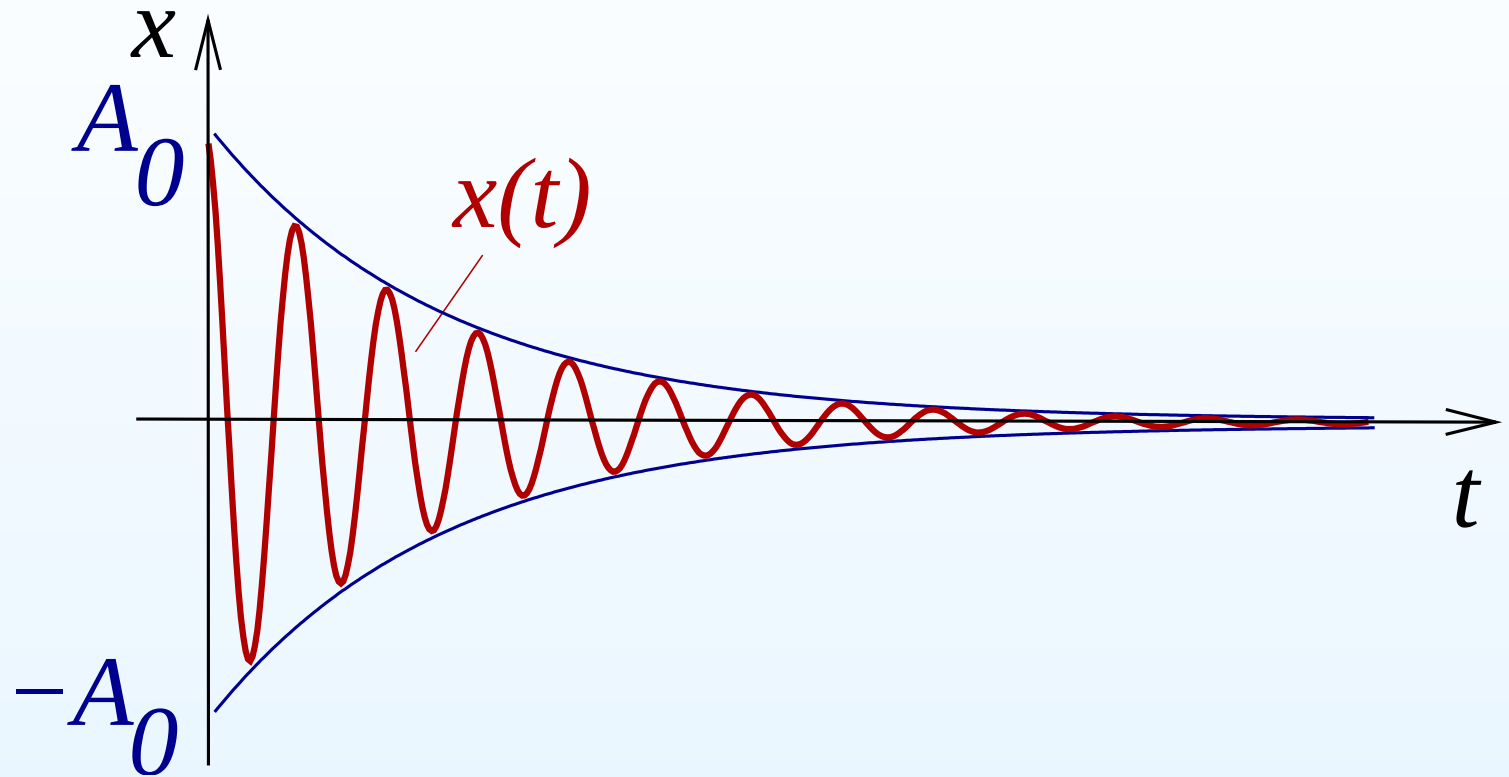
A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított  
rezgőmozgás  
alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője





## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

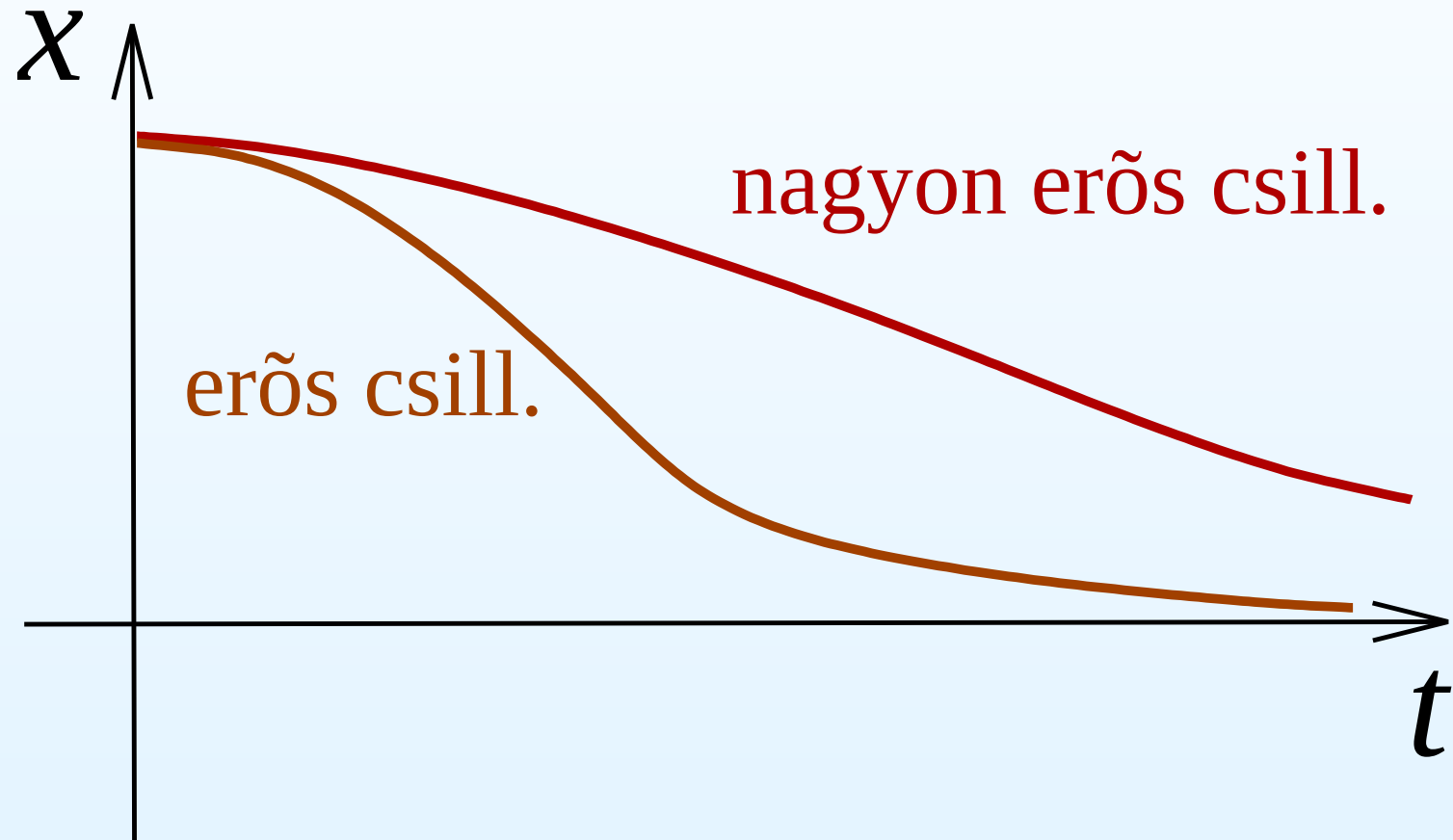
### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

## nagy csillapítások esete

Amennyiben  $\omega_0 \leq \beta$ , nem is alakul ki rezgőmozgás, hanem az  $x(t)$  függvény monoton csökkenően 0-hoz tart.





Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- **egy példa**
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy csillapodó rezgőmozgás amplitúdója 12 s-onként feleződik meg.  
Mekkora a csillapítási tényező értéke?*



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- **egy példa**
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy csillapodó rezgőmozgás amplitúdója 12 s-onként feleződik meg.  
Mekkora a csillapítási tényező értéke?*

**Megoldás:** A szöveg szerint:

$$\frac{A_0}{2} = A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

ahol  $t = 12$  s.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- **egy példa**
- még egy példa

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy csillapodó rezgőmozgás amplitúdója 12 s-onként feleződik meg.  
Mekkora a csillapítási tényező értéke?*

**Megoldás:** A szöveg szerint:

$$\frac{A_0}{2} = A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

ahol  $t = 12$  s.

Innen egyszerű átrendezéssel:

$$\beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,0578 \frac{1}{s}$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# még egy példa

*Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája  $1,3 \text{ Hz}$ , amplitúdója kezdetben  $15 \text{ cm}$ ,  $10 \text{ s}$  múlva már csak  $3 \text{ cm}$ .*

*Mikor lesz amplitúdója kisebb, mint  $1 \text{ mm}$ ? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?*



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# még egy példa

*Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája 1,3 Hz, amplitúdója kezdetben 15 cm, 10 s múlva már csak 3 cm.*

*Mikor lesz amplitúdója kisebb, mint 1 mm? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?*

**Megoldás:** A feladat szerint:

$$A_0 = 0,15 \text{ m} \quad A_1 = 0,03 \text{ m} \quad t_1 = 10 \text{ s} \quad \omega_{cs} = 1,3 \text{ Hz}$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# még egy példa

*Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája 1,3 Hz, amplitúdója kezdetben 15 cm, 10 s múlva már csak 3 cm.*

*Mikor lesz amplitúdója kisebb, mint 1 mm? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?*

**Megoldás:** A feladat szerint:

$$A_0 = 0,15 \text{ m} \quad A_1 = 0,03 \text{ m} \quad t_1 = 10 \text{ s} \quad \omega_{cs} = 1,3 \text{ Hz}$$

Tudjuk, hogy

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# még egy példa

*Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája 1,3 Hz, amplitúdója kezdetben 15 cm, 10 s múlva már csak 3 cm.*

*Mikor lesz amplitúdója kisebb, mint 1 mm? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?*

**Megoldás:** A feladat szerint:

$$A_0 = 0,15 \text{ m} \quad A_1 = 0,03 \text{ m} \quad t_1 = 10 \text{ s} \quad \omega_{cs} = 1,3 \text{ Hz}$$

Tudjuk, hogy

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}$$

innét egyszerű átrendezéssel:

$$\beta = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{A_1}{A_0} = 0,16 \frac{1}{\text{s}}$$

...

Keressük azt a  $t_2$  időpontot, melyre  $A(t_2) = A_2 = 0,001$  m:

...

Keressük azt a  $t_2$  időpontot, melyre  $A(t_2) = A_2 = 0,001$  m:

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2} \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{A_2}{A_0} = 31,1 \text{ s}$$

(Figyelem! Az amplitúdó nem lineárisan csökkent!)

...

Keressük azt a  $t_2$  időpontot, melyre  $A(t_2) = A_2 = 0,001$  m:

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2} \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{A_2}{A_0} = 31,1 \text{ s}$$

(Figyelem! Az amplitúdó nem lineárisan csökkent!)

A csillapítatlan  $\omega_0$  frekvencia a fenti

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

összefüggésből kapható meg:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{cs}^2 + \beta^2} = 1,31 \text{ Hz}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

# A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés



[Bevezetés](#)

[Rezgések kialakulása](#)

[A harmonikus  
rezgőmozgás](#)

[Kis amplitúdójú  
rezgések](#)

[A csillapított  
rezgőmozgás](#)

[A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés](#)

● **gerjesztett rezgések  
alapegyenlete**

- a gerjesztett rezgés időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

[Egyirányú rezgések  
eredője](#)

[Egymásra merőleges  
rezgések eredője](#)

## gerjesztett rezgések alapegyenlete

Mi történik akkor, ha a kezdeti rezgésbe hozáson kívül a testet egy külső erő állandóan „rezgeti”, azaz gerjeszti a rezgést. (Pl. hinta külső állandó lökődéssel.)



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

● gerjesztett rezgések  
alapegyenlete

● a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása

● a rezonancia

● egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## gerjesztett rezgések alapegyenlete

Mi történik akkor, ha a kezdeti rezgésbe hozáson kívül a testet egy külső erő állandóan „rezgeti”, azaz gerjeszti a rezgést. (Pl. hinta külső állandó lökődéssel.)

Legegyszerűbb eset: amikor a gerjesztő erő szinuszosan változik:

$$ma = F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} + F_g$$

ahol

$$F_g = F_0 \sin(\omega_g t)$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

● gerjesztett rezgések  
alapegyenlete

● a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása

● a rezonancia

● egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## gerjesztett rezgések alapegyenlete

Mi történik akkor, ha a kezdeti rezgésbe hozáson kívül a testet egy külső erő állandóan „rezgeti”, azaz gerjeszti a rezgést. (Pl. hinta külső állandó lökődéssel.)

Legegyszerűbb eset: amikor a gerjesztő erő szinuszosan változik:

$$ma = F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} + F_g$$

ahol

$$F_g = F_0 \sin(\omega_g t)$$

A fentiekhez hasonlóan:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v + a_0 \sin(\omega_g t)$$

ahol  $a_0 = F_0/m$ .



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a gerjesztett rezgés időbeli lefutása

Kis csillapítások esetén a megoldás:

$$x(t) = A_g \cdot \sin(\omega_g t + \delta) + A \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

(A bizonyítást mellőzzük, a megoldás helyességét deriválással ellenőrizhető.)



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- **a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása**
- a rezonancia
- egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

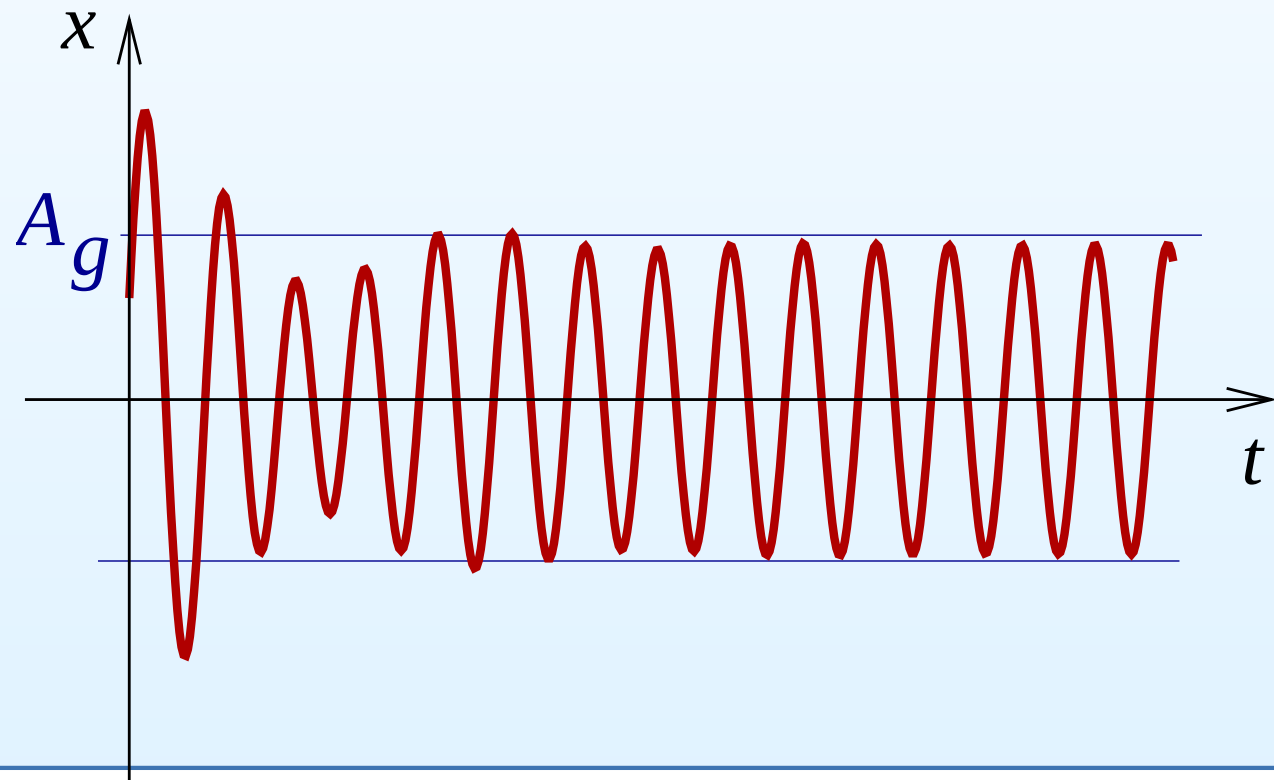
Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a gerjesztett rezgés időbeli lefutása

Kis csillapítások esetén a megoldás:

$$x(t) = A_g \cdot \sin(\omega_g t + \delta) + A \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

(A bizonyítást mellőzzük, a megoldás helyességét deriválással ellenőrizhetők.)





Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- **a rezonancia**
- egy példa

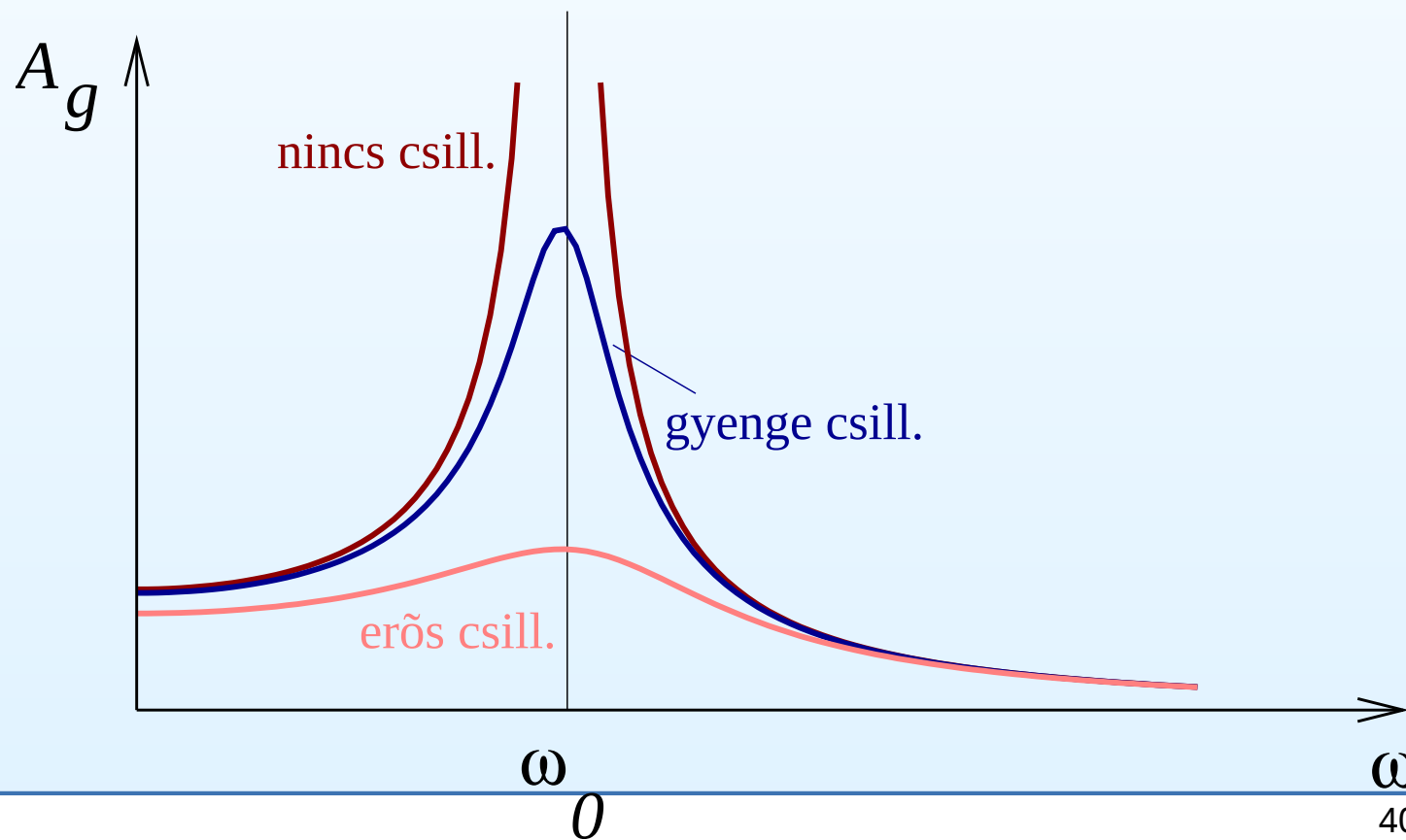
Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## a rezonancia

Hosszú távon tehát  $A_g$  számít. Ennek kifejezése:

$$A_g = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}$$





## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

A sajátfrekvencia környékén tehát a gerjesztett rezgés amplitúdója igen megnőhet, ha a csillapítás kicsi. Ez a **rezonancia** jelensége.



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

A sajátfrekvencia környékén tehát a gerjesztett rezgés amplitúdója igen megnőhet, ha a csillapítás kicsi. Ez a **rezonancia** jelensége.

Egyszerű példa: →rezgetett végű rugón lógó test.

Ez sokszor fellép a gyakorlatban, →néha káros, néha hasznos.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- **egy példa**

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy rezgés sajátfrekvenciája  $\omega_0 = 12,4 \text{ 1/s}$ . A rezgés amplitúdója  $3,2 \text{ s}$  alatt feleződik meg. Hányszor nagyobb amplitúdójú gerjesztett rezgések jönnek létre a sajátfrekvencián, mint igen kis frekvenciákon?*



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy rezgés sajátfrekvenciája  $\omega_0 = 12,4$  1/s. A rezgés amplitúdója 3,2 s alatt feleződik meg. Hányszor nagyobb amplitúdójú gerjesztett rezgések jönnek létre a sajátfrekvencián, mint igen kis frekvenciákon?*

**Megoldás:**

A gerjesztett rezgések amplitúdója:

$$A_g(\omega_g) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- **egy példa**

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## egy példa

*Egy rezgés sajátfrekvenciája  $\omega_0 = 12,4$  1/s. A rezgés amplitúdója 3,2 s alatt feleződik meg. Hányszor nagyobb amplitúdójú gerjesztett rezgések jönnek létre a sajátfrekvencián, mint igen kis frekvenciákon?*

**Megoldás:**

A gerjesztett rezgések amplitúdója:

$$A_g(\omega_g) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}$$

A sajátfrekvencián kialakuló rezgések esetében ez:

$$A_g(\omega_0) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2}} = \frac{a_0}{2\beta\omega_0}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Igen kis frekvencián:

$$A_g(0) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0^2)^2 + 4\beta^2 0^2}} = \frac{a_0}{\omega_0^2}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Igen kis frekvencián:

$$A_g(0) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0^2)^2 + 4\beta^2 0^2}} = \frac{a_0}{\omega_0^2}$$

Ezek arányát kérdezi a feladat:

$$\frac{A_g(\omega_0)}{A_g(0)} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

# Mennyi lesz $\beta$ ?



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- **egy példa**

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

...

Mennyi lesz  $\beta$ ? Mivel a rezgés amplitúdója  $t = 3,2$  s alatt feleződik meg:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,217 \frac{1}{s}$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések  
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés  
időbeli lefutása
- a rezonancia
- **egy példa**

### Egyirányú rezgések eredője

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Mennyi lesz  $\beta$ ? Mivel a rezgés amplitúdója  $t = 3,2$  s alatt feleződik meg:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\beta t} \Rightarrow \beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,217 \frac{1}{s}$$

A kért arány tehát:

$$\frac{A_g(\omega_0)}{A_g(0)} = \frac{\omega_0}{2\beta} = 28,6$$

Tehát a rezonanciafrekvencián kialakuló rezgések amplitúdója 28,6-szor nagyobb a kis frekvenciák mellett kialakuló amplitúdónál. (Ez valóban jelentős különbség: a frekvenciától függően tehát kb. 30-szoros eltérés lehet a gerjesztett rendszer amplitúdójában.)



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

**Egyirányú rezgések  
eredője**

- Bevezetés
- Alapvető  
megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Egyirányú rezgések eredője



## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

#### ● Bevezetés

#### ● Alapvető megfontolások

#### ● megoldási módszer

#### ● két rezgés eredője

#### ● azonos frekvenciájú rezgések eredője

#### ● A lebegés

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# Bevezetés

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor több rezgés együttes hatása jelentkezik egy adott pontban.

Itt csak 2 rezgés eredőjének vizsgálatát végezzük el, melyek külön-külön egyenes menti rezgések.



## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

#### ● Bevezetés

#### ● Alapvető

#### meggondolások

#### ● megoldási módszer

#### ● két rezgés eredője

#### ● azonos frekvenciájú rezgések eredője

#### ● A lebegés

### Egymásra merőleges rezgések eredője

# Bevezetés

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor több rezgés együttes hatása jelentkezik egy adott pontban.

Itt csak 2 rezgés eredőjének vizsgálatát végezzük el, melyek külön-külön egyenes menti rezgések.

Nyilván egész más lesz az eredmény, ha a két rezgés egyirányú, vagy ha merőleges egymásra:



## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

#### ● Bevezetés

#### ● Alapvető megfontolások

- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú rezgések eredője
- A lebegés

### Egymásra merőleges rezgések eredője

## Bevezetés

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor több rezgés együttes hatása jelentkezik egy adott pontban.

Itt csak 2 rezgés eredőjének vizsgálatát végezzük el, melyek külön-külön egyenes menti rezgések.

Nyilván egész más lesz az eredmény, ha a két rezgés egyirányú, vagy ha merőleges egymásra:

**Egyirányú rezgések:** eredőjük egyenes menti rezgés.

**Merőleges rezgések:** eredőjük síkmozgás.



## Bevezetés

### Rezgések kialakulása

#### A harmonikus rezgőmozgás

#### Kis amplitúdójú rezgések

#### A csillapított rezgőmozgás

#### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

#### Egyirányú rezgések eredője

#### ● Bevezetés

#### ● Alapvető megfontolások

#### ● megoldási módszer

#### ● két rezgés eredője

#### ● azonos frekvenciájú rezgések eredője

#### ● A lebegés

#### Egymásra merőleges rezgések eredője

## Bevezetés

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor több rezgés együttes hatása jelentkezik egy adott pontban.

Itt csak 2 rezgés eredőjének vizsgálatát végezzük el, melyek külön-külön egyenes menti rezgések.

Nyilván egész más lesz az eredmény, ha a két rezgés egyirányú, vagy ha merőleges egymásra:

**Egyirányú rezgések:** eredőjük egyenes menti rezgés.

**Merőleges rezgések:** eredőjük síkmozgás.

Sőt! Tovább korlátozzuk a vizsgálatokat harmonikus rezgésekre.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés

- **Alapvető  
meggondolások**

- megoldási módszer

- két rezgés eredője

- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője

- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

# Alapvető meggondolások

Két harmonikus rezgés összege:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés

- **Alapvető  
meggondolások**

- megoldási módszer

- két rezgés eredője

- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője

- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Alapvető meggondolások

Két harmonikus rezgés összege:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Ha semmit nem tudunk az együtthatókról, semmi különös nem állítható a két rezgés összegéről.

Például ha  $\omega_1/\omega_2$  nem racionális, az eredő nem is lesz periodikus.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés

- **Alapvető  
meggondolások**

- megoldási módszer

- két rezgés eredője

- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője

- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Alapvető meggondolások

Két harmonikus rezgés összege:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Ha semmit nem tudunk az együtthatókról, semmi különös nem állítható a két rezgés összegéről.

Például ha  $\omega_1 / \omega_2$  nem racionális, az eredő nem is lesz periodikus.

Gyakorlat szempontjából fontos eset:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

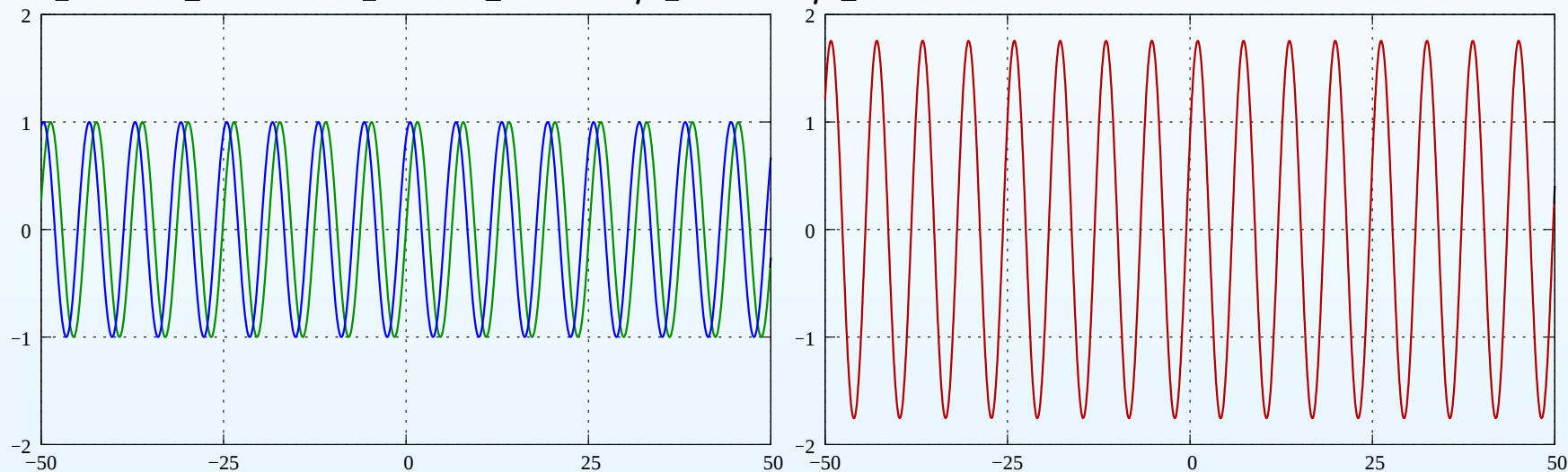
## szemléltetés: azonos frekvenciák

Nézzük meg először bizonyítás nélkül a legjellemzőbb eseteket!

## szemléltetés: azonos frekvenciák

Nézzük meg először bizonyítás nélkül a legjellemzőbb eseteket!

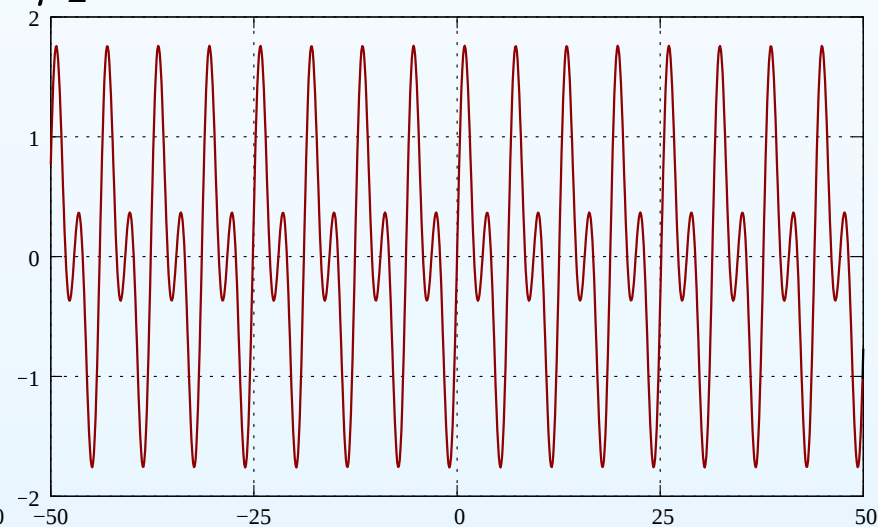
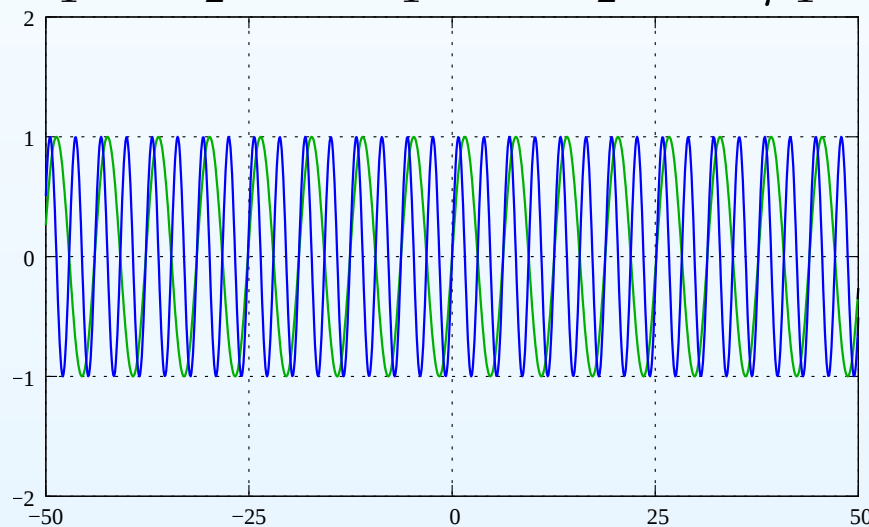
$$A_1 = A_2 = 1, \omega_1 = \omega_2 = 1, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 1$$



(kék, zöld: eredeti rezgések, piros: eredő)

## szemléltetés: racionális frekvenciaarány

$$A_1 = A_2 = 1, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

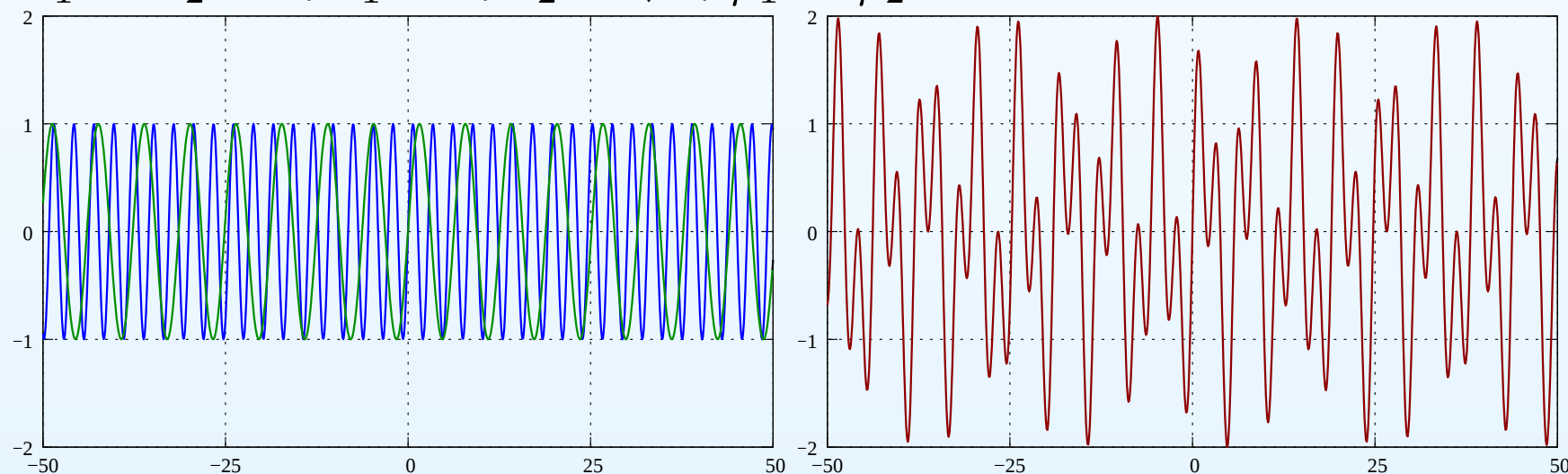


(kék, zöld: eredeti rezgések, piros: eredő)

## szemléltetés: közel irracionális frekvenciaarány

Természetesen nem tudunk egzaktul irracionális frekvenciaarányt bemutatni, csak olyat, mely esetén a frekvenciaarány viszonylag nagy számlálójú és nevezőjű törtként áll elő.

$$A_1 = A_2 = 1, \omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{5}, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$



(kék, zöld: eredeti rezgések, piros: eredő)



# megoldási módszer

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
megfontolások
- **megoldási módszer**
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

**Probléma:** milyen mozgást takar a következő egyenlet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés

- Alapvető  
megfontolások

- **megoldási módszer**

- két rezgés eredője

- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője

- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## megoldási módszer

**Probléma:** milyen mozgást takar a következő egyenlet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Kétféle módszer lehetséges:

- matematikai azonosságokkal (addíciós tételek)
- grafikus szemléltetéssel



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés

- Alapvető  
megfontolások

- **megoldási módszer**

- két rezgés eredője

- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője

- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## megoldási módszer

**Probléma:** milyen mozgást takar a következő egyenlet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Kétféle módszer lehetséges:

- matematikai azonosságokkal (addíciós tételek)
- grafikus szemléltetéssel

Mi az utóbbit választjuk. Módszer neve: **forgóvektoros ábrázolás.**



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető megfontolások
- **megoldási módszer**
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## megoldási módszer

**Probléma:** milyen mozgást takar a következő egyenlet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Kétféle módszer lehetséges:

- matematikai azonosságokkal (addíciós tételek)
- grafikus szemléltetéssel

Mi az utóbbit választjuk. Módszer neve: **forgóvektoros ábrázolás.**

Alapötlet: forogjon egy  $A$  hosszúságú vektor úgy, hogy irányszöge  $\omega t + \varphi$  szerint változzon. Ekkor 2. koordinátája épp egy harmonikus rezgést ír le:

$$A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Szinuszos rezgőmozgás helyett egyenletes körmozgást vizsgálunk.



# a forgóvektoros ábrázolás

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

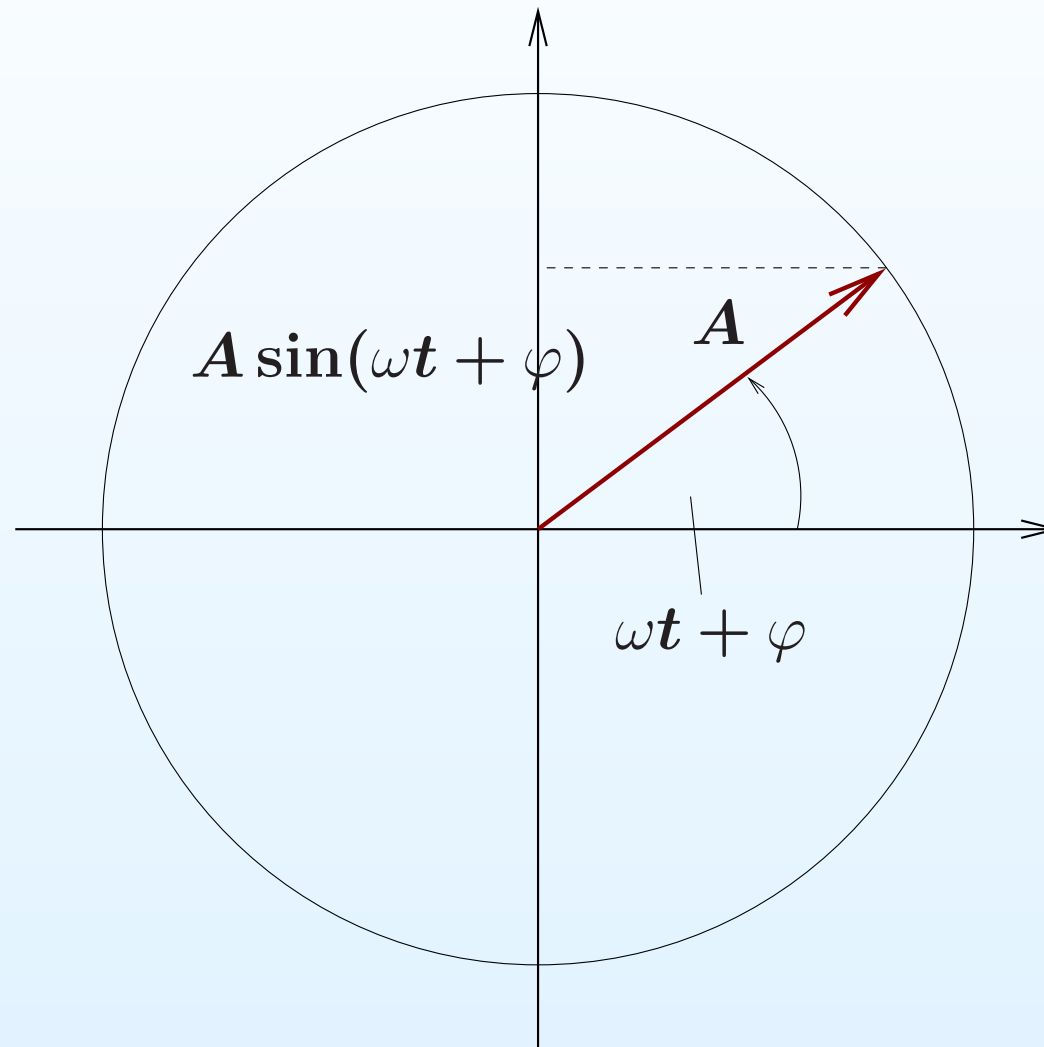
A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető megfontolások
- **megoldási módszer**
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

Szemléltessük az előzőket:





Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## két rezgés eredője

Forgóvektoros ábrázolással két rezgés eredője is kiszámolható.  
Ötlet: a vektorok komponensenként is összeadhatók,



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

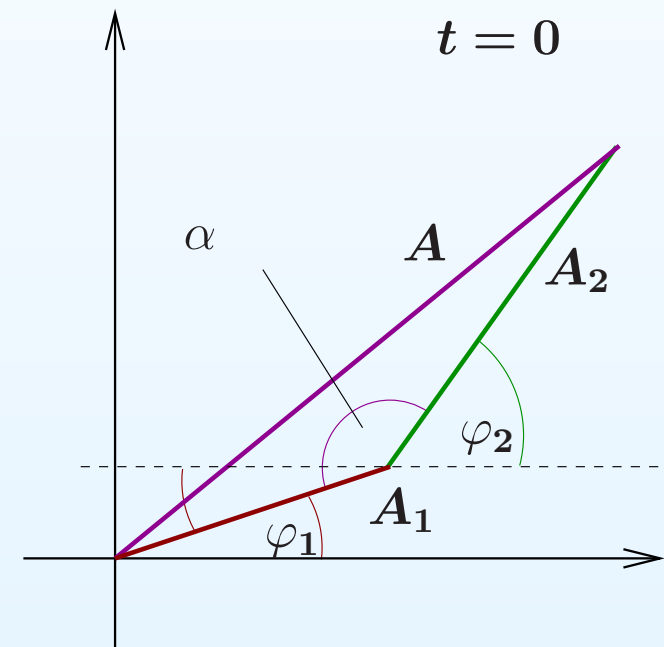
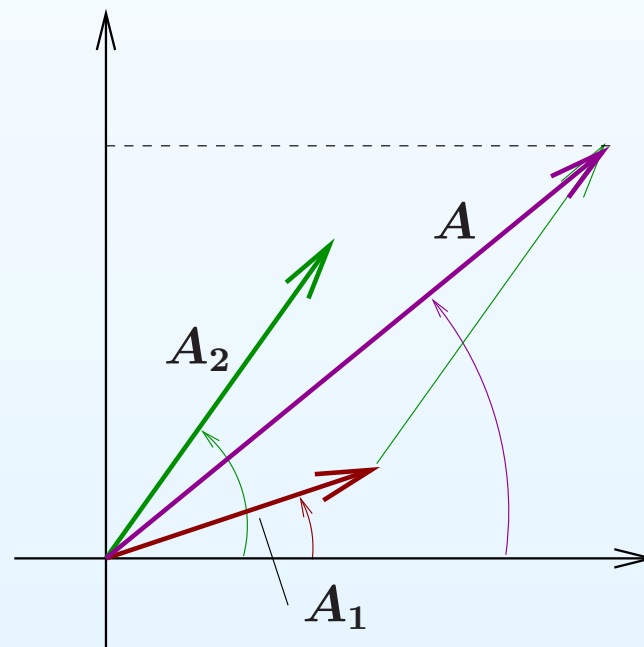
## Egyirányú rezgések eredője

- Bevezetés
- Alapvető megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú rezgések eredője
- A lebegés

## Egymásra merőleges rezgések eredője

# két rezgés eredője

Forgóvektoros ábrázolással két rezgés eredője is kiszámolható. Ötlet: a vektorok komponensenként is összeadhatók, A forgóvektorokat adjuk össze, és az összeg 2. koordinátáját figyeljük.



Könnyű belátni, hogy  $\alpha = \pi - \varphi_2 + \varphi_1$

...

A cosinus-tételből:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$$

...

A cosinus-tételből:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \varphi_2 + \varphi_1) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Innen az eredő amplitúdó:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

...

A cosinus-tételből:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \varphi_2 + \varphi_1) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Innen az eredő amplitúdó:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Ha a rezgések frekvenciája egyenlő, a vektorok ugyanolyan ütemben fordulnak körbe, így az előző ábra vektorait csak elforgatni kell.

Ekkor az eredő tiszta szinuszos rezgés lesz a fenti  $A$  amplitúdóval.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
meggondolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## azonos frekvenciájú rezgések eredője

Az előzőek alapján tehát az azonos frekvenciájú rezgések eredője tiszta szinuszos rezgés, melynek amplitúdója:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
meggondolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## azonos frekvenciájú rezgések eredője

Az előzőek alapján tehát az azonos frekvenciájú rezgések eredője tiszta szinuszos rezgés, melynek amplitúdója:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi}$$

Adott  $A_1$  és  $A_2$  esetén ez csak a  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  fáziskülönbségtől függ.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## azonos frekvenciájú rezgések eredője

Az előzőek alapján tehát az azonos frekvenciájú rezgések eredője tiszta szinuszos rezgés, melynek amplitúdója:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi}$$

Adott  $A_1$  és  $A_2$  esetén ez csak a  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  fáziskülönbségtől függ. Ez a függés monoton:  $A$  akkor a legnagyobb, ha  $\Delta\varphi$  a legnagyobb és viszont.



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

## Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Ez alapján a lehető **legnagyobb eredő amplitúdó** esetén

$\Delta\varphi = 0 + k \cdot 2\pi$ , ahol  $k$  tetszőleges egész, hisz ekkor  $\cos \Delta\varphi = 1$ .

A legnagyobb eredő amplitúdó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot 1} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

### A harmonikus rezgőmozgás

### Kis amplitúdójú rezgések

### A csillapított rezgőmozgás

### A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

### Egyirányú rezgések eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

### Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Ez alapján a lehető **legnagyobb eredő amplitúdó** esetén

$\Delta\varphi = 0 + k \cdot 2\pi$ , ahol  $k$  tetszőleges egész, hisz ekkor  $\cos \Delta\varphi = 1$ .

A legnagyobb eredő amplitúdó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot 1} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

Hasonlóan: **legkisebb eredő amplitúdó** akkor lesz, ha

$\Delta\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$ , ekkor  $\cos \Delta\varphi = -1$ .

A legkisebb eredő amplitúdó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot (-1)} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$



## Bevezetés

## Rezgések kialakulása

## A harmonikus rezgőmozgás

## Kis amplitúdójú rezgések

## A csillapított rezgőmozgás

## A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

## Egyirányú rezgések eredője

- Bevezetés
- Alapvető megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú rezgések eredője
- A lebegés

## Egymásra merőleges rezgések eredője

...

Ez alapján a lehető **legnagyobb eredő amplitúdó** esetén

$\Delta\varphi = 0 + k \cdot 2\pi$ , ahol  $k$  tetszőleges egész, hisz ekkor  $\cos \Delta\varphi = 1$ .

A legnagyobb eredő amplitúdó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot 1} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

Hasonlóan: **legkisebb eredő amplitúdó** akkor lesz, ha

$\Delta\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$ , ekkor  $\cos \Delta\varphi = -1$ .

A legkisebb eredő amplitúdó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot (-1)} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$

Az eredő amplitúdó tehát  $A_1 + A_2$  és  $|A_1 - A_2|$  közt bármilyen érték lehet.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Egy példa

**Példa:** Egy áramköri elemre két forrásból is érkezhettek (azonos frekvenciájú) szinuszos jelek. Ha csak az egyik jelforrás működik, 15 V-os, ha csak a másik, akkor 12 V-os, ha mindegyik egyszerre, akkor 5 V-os amplitúdójú jeleket kapunk. Feltéve, hogy a jelek összeadódnak, határozza meg a két forrás fáziseltérését!



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

- Bevezetés
- Alapvető  
megfontolások
- megoldási módszer
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú  
rezgések eredője
- A lebegés

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

## Egy példa

**Példa:** Egy áramköri elemre két forrásból is érkezhettek (azonos frekvenciájú) szinuszos jelek. Ha csak az egyik jelforrás működik, 15 V-os, ha csak a másik, akkor 12 V-os, ha mindegyik egyszerre, akkor 5 V-os amplitúdójú jeleket kapunk. Feltéve, hogy a jelek összeadódnak, határozza meg a két forrás fáziseltérését!

**Megoldás:** Párhuzamos rezgések eredőjéről van szó:  $A_1 = 15\text{ V}$  és  $A_2 = 12\text{ V}$ , az eredő pedig  $A = 5\text{ V}$ .

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

átrendezésével a fáziseltérés koszinusza:

$$\cos \Delta\varphi = \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} = -0,9556.$$

Innen:  $\Delta\varphi = \pm 2,842 + k \cdot 2\pi = \pm 162,9^\circ + k \cdot 360^\circ$ , ahol  $k$  tetszőleges egész.

## A lebegés

Mi történik, ha a két összeadott rezgés frekvenciája csak közelítőleg egyenlő?

## A lebegés

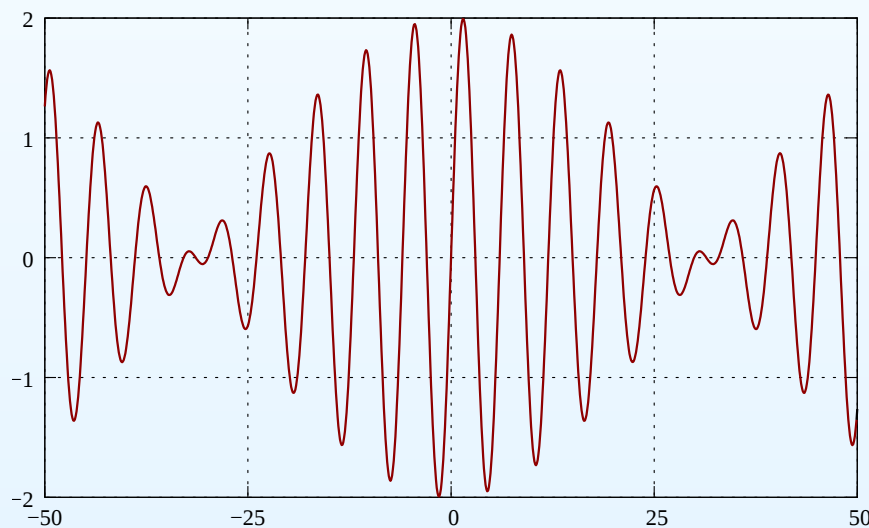
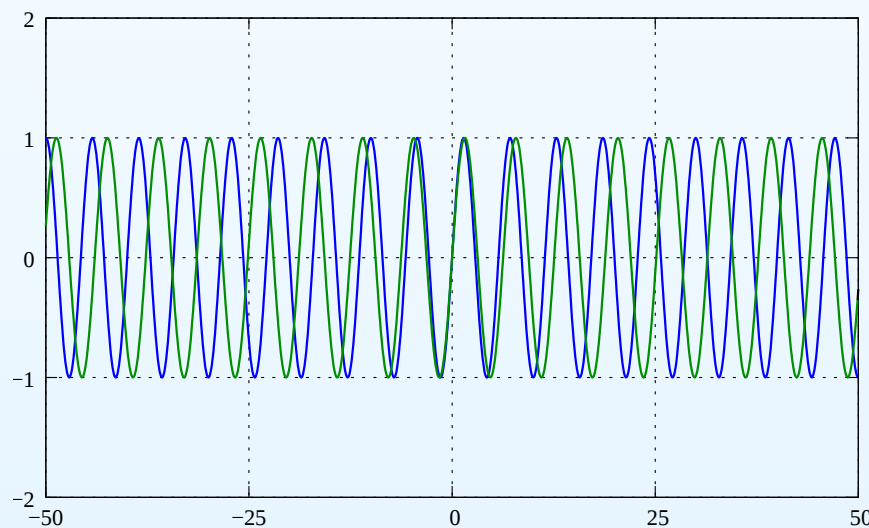
Mi történik, ha a két összeadott rezgés frekvenciája csak közelítőleg egyenlő?  
Úgy képzelhetjük, hogy a két forgóvektor majdnem együtt forog,

## A lebegés

Mi történik, ha a két összeadott rezgés frekvenciája csak közelítőleg egyenlő?  
Úgy képzelhetjük, hogy a két forgóvektor majdnem együtt forog, azaz  $\Delta\varphi$   
lassan változik,

## A lebegés

Mi történik, ha a két összeadott rezgés frekvenciája csak közelítőleg egyenlő?  
Úgy képzelhetjük, hogy a két forgóvektor majdnem együtt forog, azaz  $\Delta\varphi$  lassan változik, azaz az eredő amplitúdó lassan, periodikusan csökken-növekszik.



A jelenség neve: **lebegés**.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

**Egymásra merőleges  
rezgések eredője**

- Merőleges rezgések  
eredője
- azonos frekvenciák  
esete
- 1:2 frekvenciaarány
- 1:3 frekvenciaarány
- 2:3 frekvenciaarány
- 1:1,4142136  
frekvenciaarány

## Egymásra merőleges rezgések eredője



# Merőleges rezgések eredője

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

● Merőleges rezgések  
eredője

● azonos frekvenciák  
esete

● 1:2 frekvenciaarány

● 1:3 frekvenciaarány

● 2:3 frekvenciaarány

● 1:1,4142136  
frekvenciaarány

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- A mozgás minden esetben belül marad egy olyan téglalapon, amelynek  $x$  tengellyel párhuzamos oldala  $2A_1$ ,  $y$  tengellyel párhuzamos oldala pedig  $2A_2$  hosszúságú.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

● Merőleges rezgések  
eredője

● azonos frekvenciák  
esete

● 1:2 frekvenciaarány

● 1:3 frekvenciaarány

● 2:3 frekvenciaarány

● 1:1,4142136  
frekvenciaarány

## Merőleges rezgések eredője

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- A mozgás minden esetben belül marad egy olyan téglalapon, amelynek  $x$  tengellyel párhuzamos oldala  $2A_1$ ,  $y$  tengellyel párhuzamos oldala pedig  $2A_2$  hosszúságú.
- Az amplitúdók megváltoztatása a mozgás képét csak megnyújtja illetve zsugorítja. Ezért elegendő  $A_1 = A_2 = 1$  m esetet tárgyalni.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

● Merőleges rezgések  
eredője

● azonos frekvenciák  
esete

● 1:2 frekvenciaarány

● 1:3 frekvenciaarány

● 2:3 frekvenciaarány

● 1:1,4142136  
frekvenciaarány

## Merőleges rezgések eredője

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- A mozgás minden esetben belül marad egy olyan téglalapon, amelynek  $x$  tengellyel párhuzamos oldala  $2A_1$ ,  $y$  tengellyel párhuzamos oldala pedig  $2A_2$  hosszúságú.
- Az amplitúdók megváltoztatása a mozgás képét csak megnyújtja illetve zsugorítja. Ezért elegendő  $A_1 = A_2 = 1$  m esetet tárgyalni.
- Ha a frekvenciák aránya racionális, akkor a mozgás pályája egy idő után önmagába tér vissza: **Lissajous-görbék**.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

● Merőleges rezgések  
eredője

● azonos frekvenciák  
esete

● 1:2 frekvenciaarány

● 1:3 frekvenciaarány

● 2:3 frekvenciaarány

● 1:1,4142136  
frekvenciaarány

## Merőleges rezgések eredője

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- A mozgás minden esetben belül marad egy olyan téglalapon, amelynek  $x$  tengellyel párhuzamos oldala  $2A_1$ ,  $y$  tengellyel párhuzamos oldala pedig  $2A_2$  hosszúságú.
- Az amplitúdók megváltoztatása a mozgás képét csak megnyújtja illetve zsugorítja. Ezért elegendő  $A_1 = A_2 = 1$  m esetet tárgyalni.
- Ha a frekvenciák aránya racionális, akkor a mozgás pályája egy idő után önmagába tér vissza: **Lissajous-görbék**.
- Ha a frekvenciák aránya irracionális, akkor a pálya sosem záródik.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

- Merőleges rezgések  
eredője

- azonos frekvenciák  
esete

- 1:2 frekvenciaarány

- 1:3 frekvenciaarány

- 2:3 frekvenciaarány

- 1:1,4142136  
frekvenciaarány

## azonos frekvenciák esete

Első tárgyalt eset:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

- Merőleges rezgések  
eredője

- azonos frekvenciák  
esete

- 1:2 frekvenciaarány

- 1:3 frekvenciaarány

- 2:3 frekvenciaarány

- 1:1,4142136  
frekvenciaarány

## azonos frekvenciák esete

Első tárgyalt eset:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi_1) \quad y(t) = \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Ha  $\varphi_1 = \varphi_2$ , akkor  $x(t) = y(t)$ , azaz a mozgás az  $x = y$  egyenletű egyenes mentén fog történni.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

- Merőleges rezgések  
eredője

- **azonos frekvenciák  
esete**

- 1:2 frekvenciaarány

- 1:3 frekvenciaarány

- 2:3 frekvenciaarány

- 1:1,4142136  
frekvenciaarány

## azonos frekvenciák esete

Első tárgyalt eset:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi_1) \quad y(t) = \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Ha  $\varphi_1 = \varphi_2$ , akkor  $x(t) = y(t)$ , azaz a mozgás az  $x = y$  egyenletű egyenes mentén fog történni.

Ha  $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$ , akkor:

$$x(t) = \cos(\omega t + \varphi_2) \quad y(t) = \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Ez egy körmozgás!



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus  
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú  
rezgések

A csillapított  
rezgőmozgás

A gerjesztett  
rezgőmozgás,  
kényszerrezgés

Egyirányú rezgések  
eredője

Egymásra merőleges  
rezgések eredője

- Merőleges rezgések  
eredője

- azonos frekvenciák  
esete

- 1:2 frekvenciaarány

- 1:3 frekvenciaarány

- 2:3 frekvenciaarány

- 1:1,4142136  
frekvenciaarány

## azonos frekvenciák esete

Első tárgyalt eset:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi_1) \quad y(t) = \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Ha  $\varphi_1 = \varphi_2$ , akkor  $x(t) = y(t)$ , azaz a mozgás az  $x = y$  egyenletű egyenes mentén fog történni.

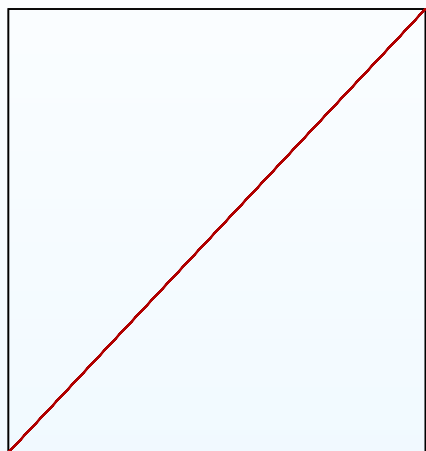
Ha  $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$ , akkor:

$$x(t) = \cos(\omega t + \varphi_2) \quad y(t) = \sin(\omega t + \varphi_2)$$

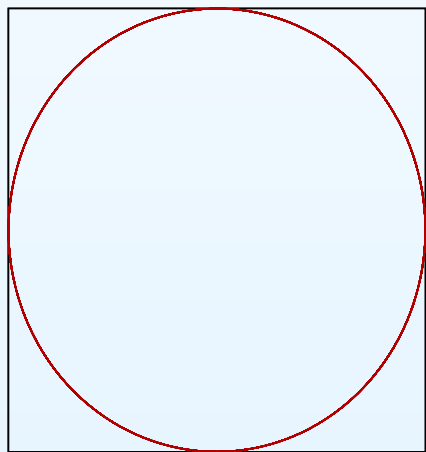
Ez egy körmozgás!

Az előző két eset közti átmenetben a kör és az egyenes átmenetét kapjuk. Bebizonyítható, hogy pontosan ellipszis lesz az alak.

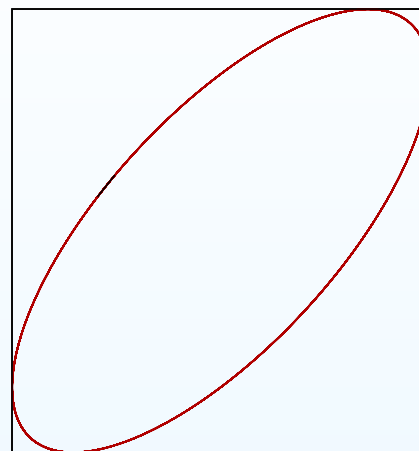
## ...szemléltetés



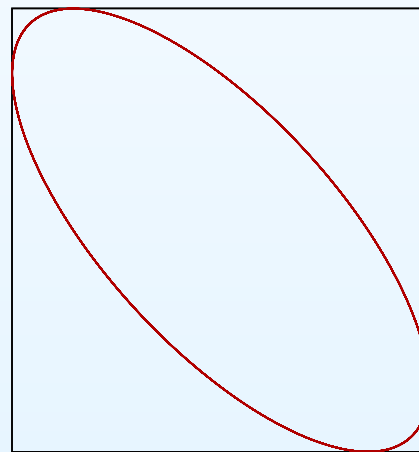
$$\Delta\varphi = 0$$



$$\Delta\varphi = (1/2)\pi$$



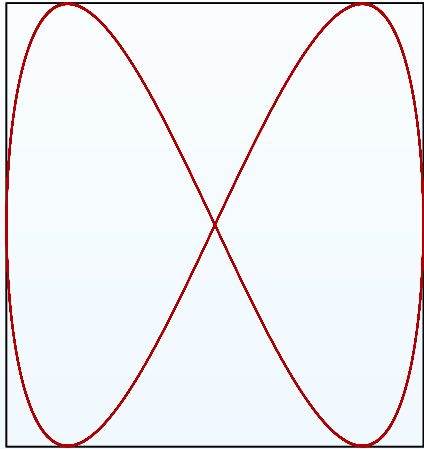
$$\Delta\varphi = (1/4)\pi$$



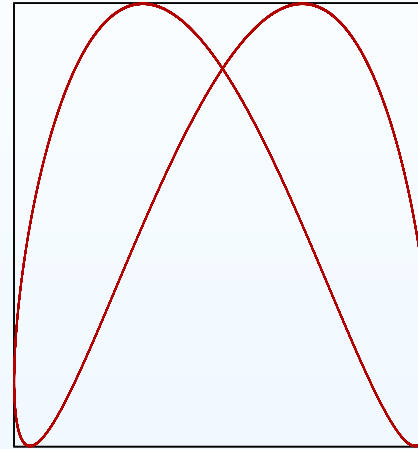
$$\Delta\varphi = (3/4)\pi$$

## 1:2 frekvenciaarány

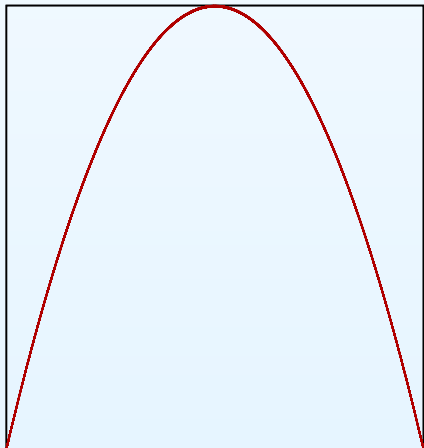
Bizonyítás nélkül, csak szemléltetjük az  $\omega_2 = 2\omega_1$  esetet.



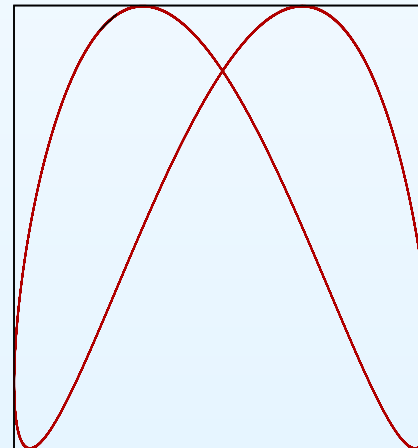
$$\Delta\varphi = 0$$



$$\Delta\varphi = (1/4)\pi$$



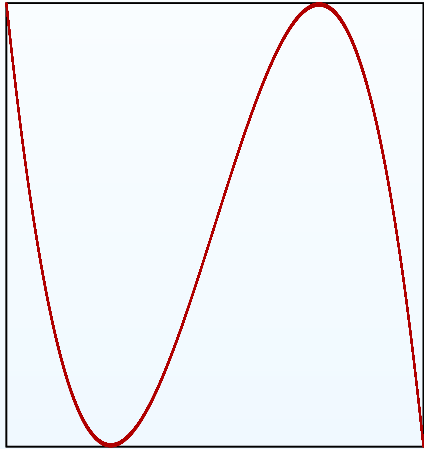
$$\Delta\varphi = (1/2)\pi$$



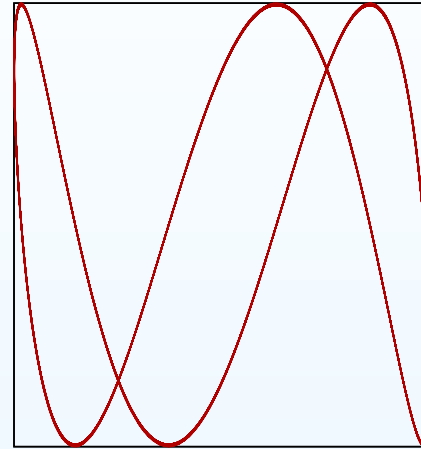
$$\Delta\varphi = (3/4)\pi$$

## 1:3 frekvenciaarány

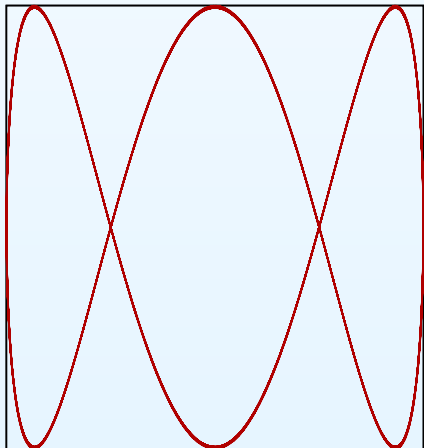
Bizonyítás nélkül, csak szemléltetjük az  $\omega_2 = 3\omega_1$  esetet.



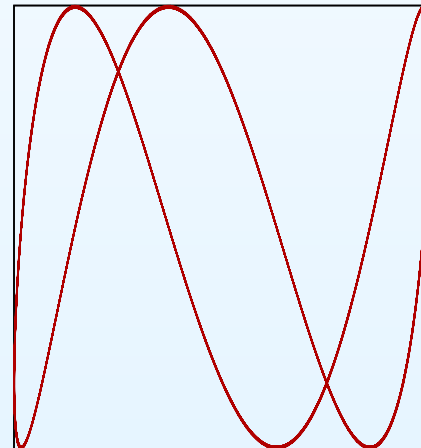
$$\Delta\varphi = 0$$



$$\Delta\varphi = (1/4)\pi$$



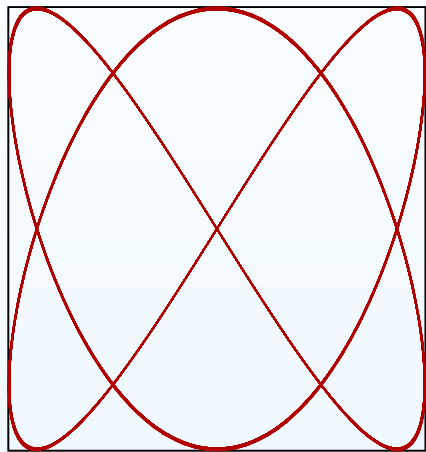
$$\Delta\varphi = (1/2)\pi$$



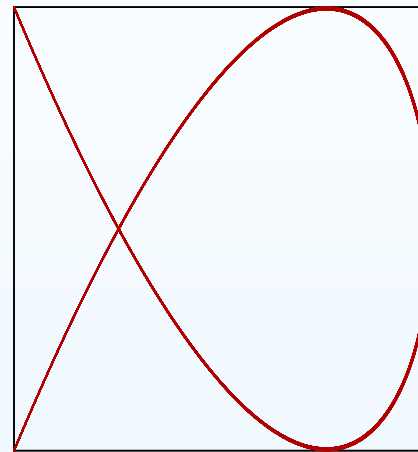
$$\Delta\varphi = (3/4)\pi$$

## 2:3 frekvenciaarány

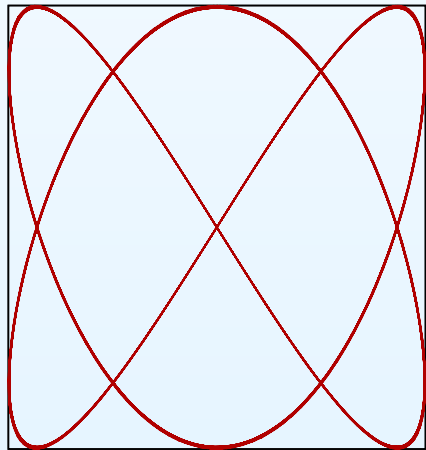
Bizonyítás nélkül, csak szemléltetjük az  $2\omega_2 = 3\omega_1$  esetet.



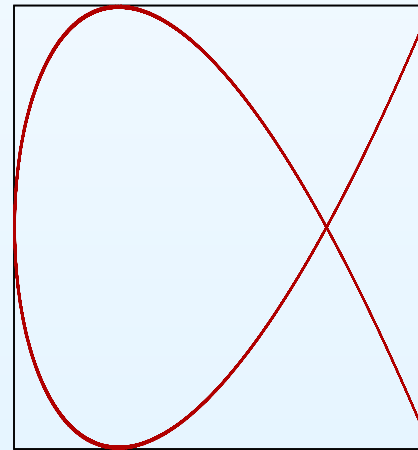
$$\Delta\varphi = 0$$



$$\Delta\varphi = (1/4)\pi$$



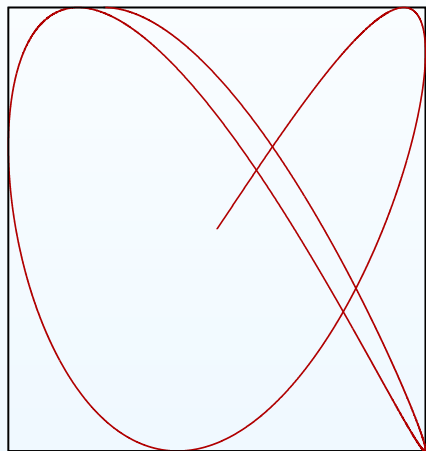
$$\Delta\varphi = (1/2)\pi$$



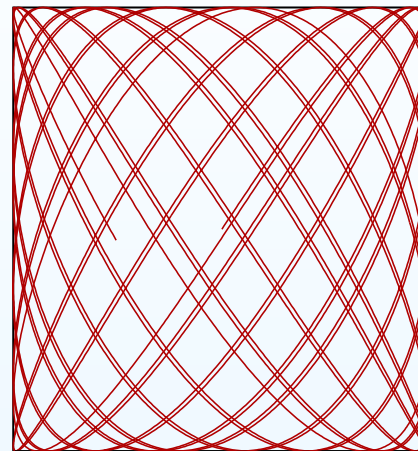
$$\Delta\varphi = (3/4)\pi$$

## 1:1,4142136 frekvenciaarány

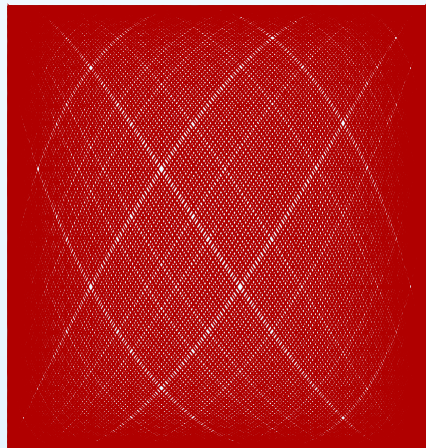
Bizonyítás nélkül, csak szemléltetjük az  $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_1$  esetet.



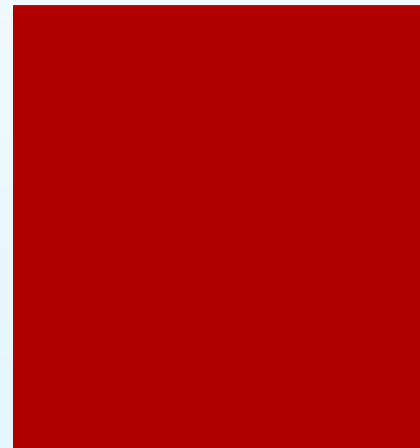
$T = 10$



$T = 100$



$T = 1000$



$T = 10000$

Látható, hogy a pálya nem záródik, ezért a teljes területet betölti a mozgás.