

Fizika villamosmérnököknek

Pontrendszerek mechanikája

Dr. Giczi Ferenc

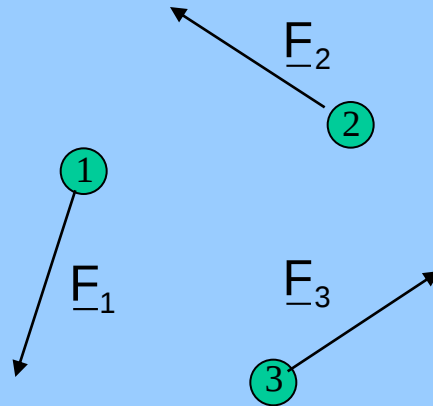
Széchenyi István Egyetem, Fizika és Kémia Tanszék

Győr, Egyetem tér 1.

Pontrendszerek

Vegyünk egy 3 tömegpontból álló pontrendszert!

$$m_1 \frac{d^2 \underline{r}_1}{dt^2} = \underline{F}_1$$
$$\frac{d\underline{p}_1}{dt} = \underline{F}_1$$



$$m_2 \frac{d^2 \underline{r}_2}{dt^2} = \underline{F}_2$$
$$\frac{d\underline{p}_2}{dt} = \underline{F}_2$$

$$m_3 \frac{d^2 \underline{r}_3}{dt^2} = \underline{F}_3$$
$$\frac{d\underline{p}_3}{dt} = \underline{F}_3$$

Pontrendszerek

Vegyünk egy n tömegpontból álló pontrendszert!

**A pontrendszer mozgását
meghatározó dinamikai
egyenletek:**

$$m_i \frac{d^2 \underline{r}_i}{dt^2} = \underline{F}_i$$

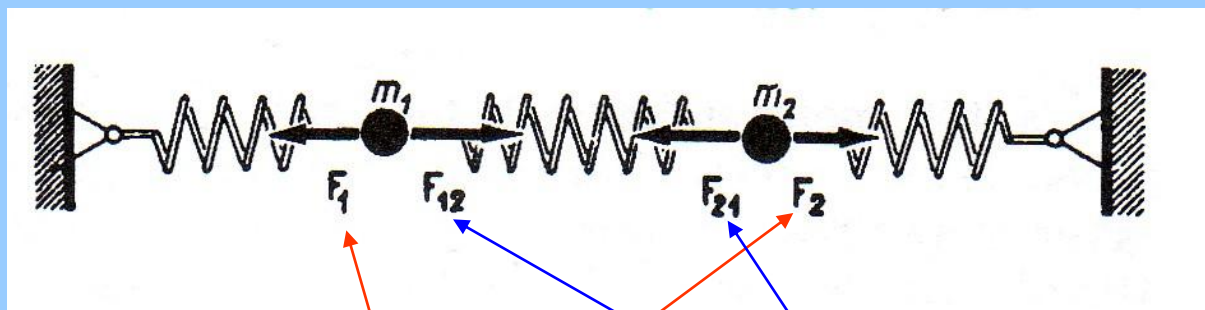
$$\frac{d\underline{p}_i}{dt} = \underline{F}_i$$

Szabad pontrendszer: pl. naprendszer

Kötött pontrendszer: pl. merev test

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Pontrendszerre ható erők



Külső erők

Belső erők

$$\frac{dp_{\underline{1}}}{dt} = \underline{F}_1 + \underline{F}_{12}$$

$$\frac{dp_{\underline{2}}}{dt} = \underline{F}_2 + \underline{F}_{21}$$

Impulzustétel

Diagram illustrating the derivation of the center of mass acceleration:

$$\frac{dp_1}{dt} = F_1 + F_{12}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = F_2 + F_{21}$$

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = F_1 + F_2 + (F_{12} + F_{21})$$

$$F_{12} = -F_{21}$$

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = F_1 + F_2$$

Két tömegpontból álló mechanikai rendszer impulzusának idő szerinti differenciál-hányadosa egyenlő a rendszerre ható külső erők eredőjével.

Impulzustétel általánosítása

Egy mechanikai rendszer össz-impulzusának idő szerinti differenciál-hányadosa egyenlő a rendszerre ható külső erők eredőjével.

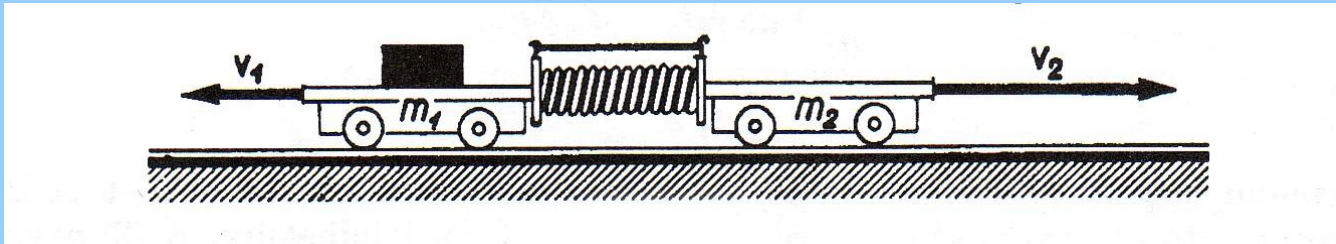
$$\frac{d}{dt} \sum \underline{p}_i = \sum \underline{F}_i$$

Az impulzus megmaradásának tétéle

$$\sum \underline{F}_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum \underline{p}_i = \text{állandó}$$

Ha a rendszerre nem hatnak külső erők, vagy ha ezek eredője zérus (zárt rendszer), akkor a rendszer impulzusa állandó.

Példa az impulzus megmaradás tételének alkalmazására



$$\frac{d(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)}{dt} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{áll.}$$

$$m_1 \cdot \underline{v}_1 + m_2 \cdot \underline{v}_2 = 0$$

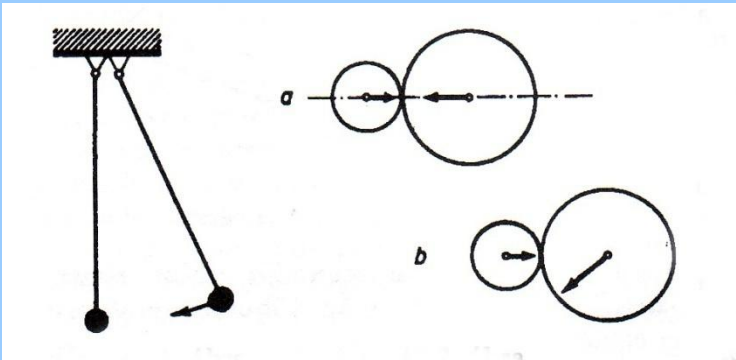
Gyakorló feladat

Sík talajon álló $m_1=0,2$ kg, illetve $m_2=0,3$ kg tömegű kiskocsik közé összenyomott rugót helyezünk, és a kocsikat fonállal egymáshoz kötjük. Az összekötő fonalat elégetve, a rugó a kocsikat szétlöki, és ezek egymástól $t=5$ s alatt $l=0,6$ m távolságra jutnak. Mekkora sebességhez jutottak a kocsik? Mennyi energia tárolódott a rugóban?

A mechanikai energia megmaradásának tétele

**Konzervatív rendszer mozgási és
helyzeti energiájának összege állandó.**

Tökéletesen rugalmas ütközés



Bármely ütközésnél fennáll az impulzus megmaradás tétele.

$$m_1 \underline{v_1'} + m_2 \underline{v_2'} = m_1 \underline{v_1} + m_2 \underline{v_2}$$

Tökéletes rugalmas ütközésnél a rendszer kinetikus energiája megmarad.

$$\frac{1}{2} m_1 \underline{v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 \underline{v_2'}^2 = \frac{1}{2} m_1 \underline{v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \underline{v_2}^2$$

Tökéletesen rugalmas ütközés utáni sebességek

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Speciális esetek:

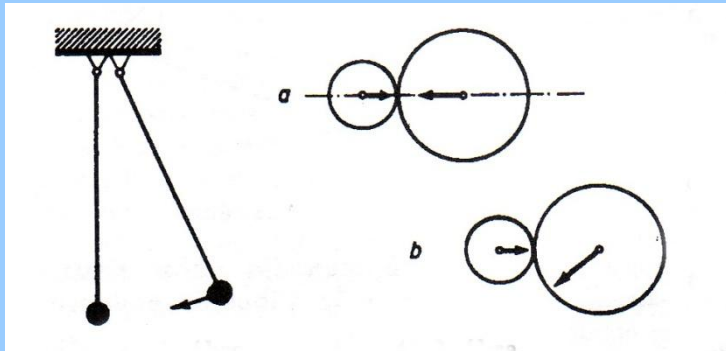
$$\text{Ha } m_1 = m_2 \quad v_1' = v_2 \quad v_2' = v_1$$

$$\text{Ha } m_2 = \infty \text{ és } v_2 = 0 \quad v_1' = -v_1 \quad v_2' = 0$$

Probléma

Két tökéletesen rugalmas golyó egymással szemben mozog. Az egyik tömege 2 kg, sebessége 8 m/s, a másik tömege 3 kg, sebessége 6 m/s. Határozza meg az ütközés utáni sebességüket.

Tökéletesen rugalmatlan ütközés



Bármely ütközésnél fennáll az impulzus megmaradás tétele.

$$m_1 \underline{v}_1' + m_2 \underline{v}_2' = m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2$$

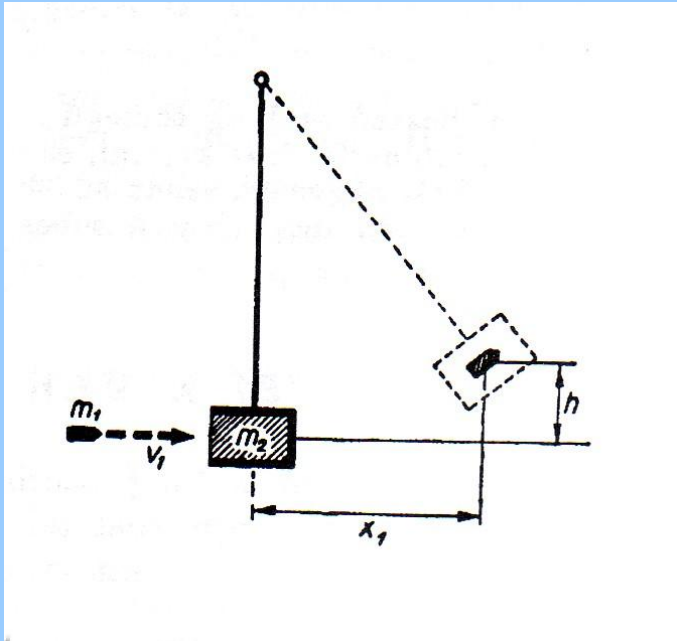
$$\underline{v}_1' = \underline{v}_2'$$

$$\underline{v}_1' = \underline{v}_2' = \frac{m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Gyakorló feladat

Kocsi rendezésnél m_1 tömegű, v_1 sebességgel haladó vasúti kocsi m_2 tömegű nyugvó kocsiba ütközik. Az ütközésnél az automatikusan működő kapcsoló a két kocsit összekapcsolja. Milyen sebességgel mozog az összekapcsolódott két kocsi? Mennyi az ütközés során fellépő energiaveszteség? ($m_1=m_2$, $v_1=1,2$ m/s).

A ballisztikus inga



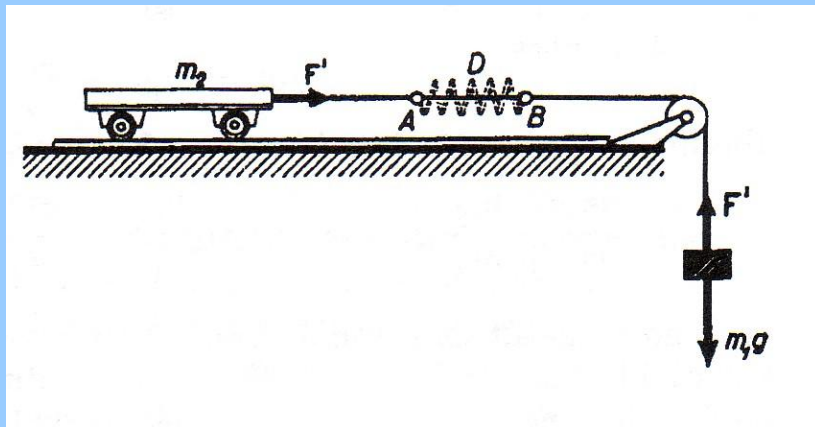
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_0$$

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_0 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Gyakorló feladat

$l=1$ m hosszú fonálon $m=2,5$ kg tömegű homokkal töltött doboz függ. A dobozba oldalról $m_1=5$ g tömegű lövedéket lövünk. A lövedék behatol a dobozba és benn marad. A doboz kilendül nyugalmi helyzetéből annyira, hogy a fonál eredeti függőleges helyzetével $\alpha=18,2^\circ$ -os szöget zár be. Mekkora volt a lövedék sebessége?

Súlyal mozgatott kocsi



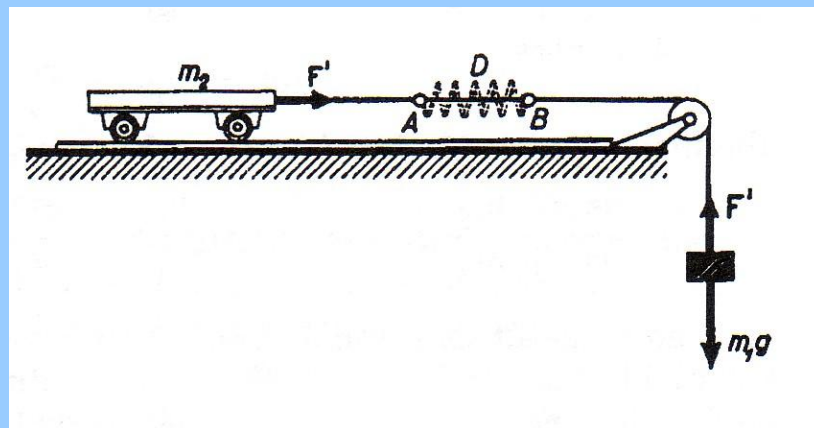
$$m_1 a = m_1 g - F'$$

$$m_2 a = F'$$

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$F' = m_1 g \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

Gyakorló feladat

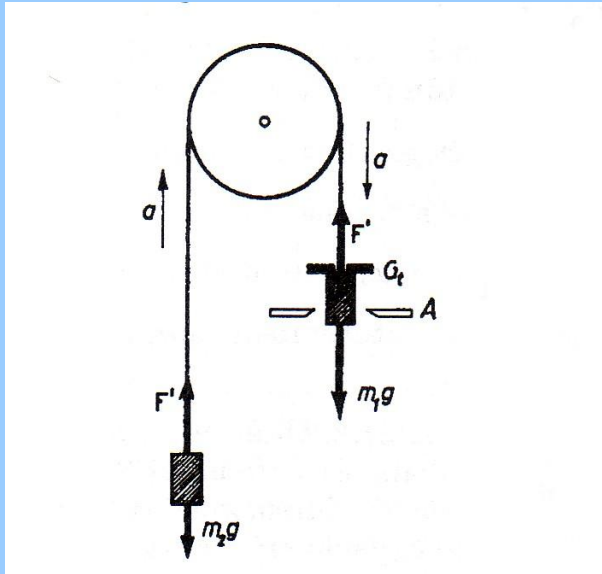


Két testet nyújthatatlan fonal közbeiktatásával kötünk össze. A kötélen végén 2 kg tömegű test függ.

a./ Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a 10 kg tömegű kiskocsit az asztalhoz rögzítjük?

b./ Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a rendszer súrlódás nélkül mozog?

Állócsigán átvetett fonál



$$m_1 a = m_1 g - F'$$

$$m_2 a = F' - m_2 g$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$F' = m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

Gyakorló feladat

Csigán átvetett fonal végeire 2 kg illetve 1,2 kg tömegű testet függesztünk. A fonal nem nyúlik és a csiga elhanyagolható tömegű. Írjuk le a rendszer mozgását! Mekkora erő feszíti a fonalat?

