**Fizika villamosmérnököknek**

# Merev testek mechanikája

**Dr. Giczi Ferenc**
**Széchenyi István Egyetem, Fizika és Kémia Tanszék**
**Győr, Egyetem tér 1.**

# Merev testek helyzete és mozgása

# A merev test helyzete

**A merev test helyzetét a térben egyértelműen meghatározza a merev test három tetszőleges, de nem egy egyenesbe eső pontjának helyzete.**

**A három pont helyzetének megadásához 9 adatra lenne szükség.**

$$(x_A, y_A, z_A) \qquad (x_B, y_B, z_B) \qquad (x_C, y_C, z_C)$$

**A három pont azonban egymástól mindig ugyanolyan távolságban marad, ezért:**

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = d_{AB}^2$$

(és még két hasonló egyenlet) $\Rightarrow$ **A 9 adat közül csak 6 független egymástól.**

# A merev test helyzete

**A merev test helyzetét, ha a test szabadon mozoghat,
6 független adat határozza meg, azaz
a szabad merev testnek 6 mechanikai „szabadsági foka" van.
(3 transzlációs és 3 rotációs)**

# A merev test haladó mozgása

## Transzláció

- A test minden pontja egyidejűleg egymással párhuzamos és egybevágó görbéket ír le.
- A test minden pontjának sebessége ugyanaz.
- **A test térbeli irányítása nem változik.**

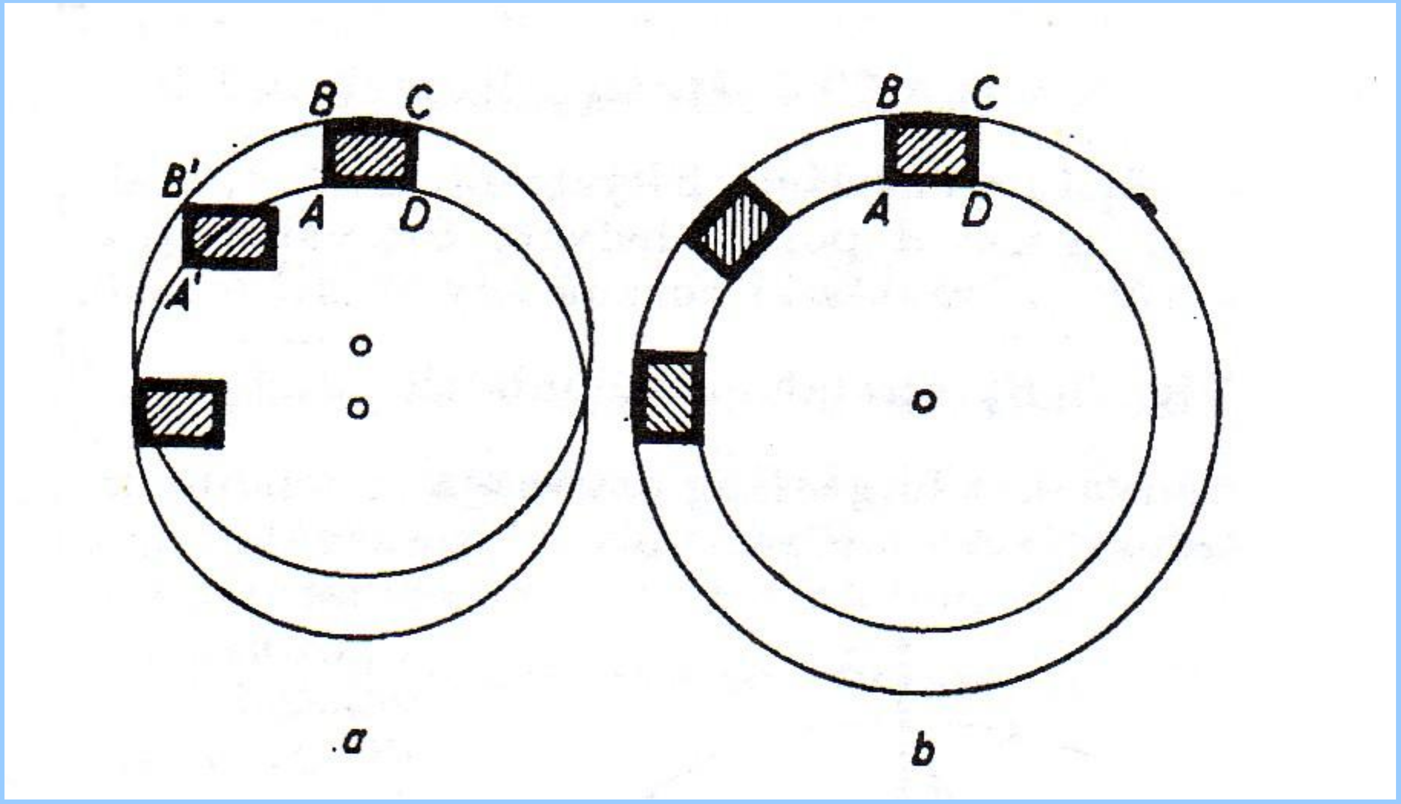
**Haladó mozgásnál elegendő a test egyetlen pontjának mozgását megadnunk.**

# A merev test tengely körüli forgása

## Rotáció (forgás)

- Egy meghatározott egyenesnek, a forgástengelynek pontjai helyzetüket változatlanul megtartják,
- A test többi pontjának pályái pedig a forgástengelyre merőleges síkokban fekvő körívek.

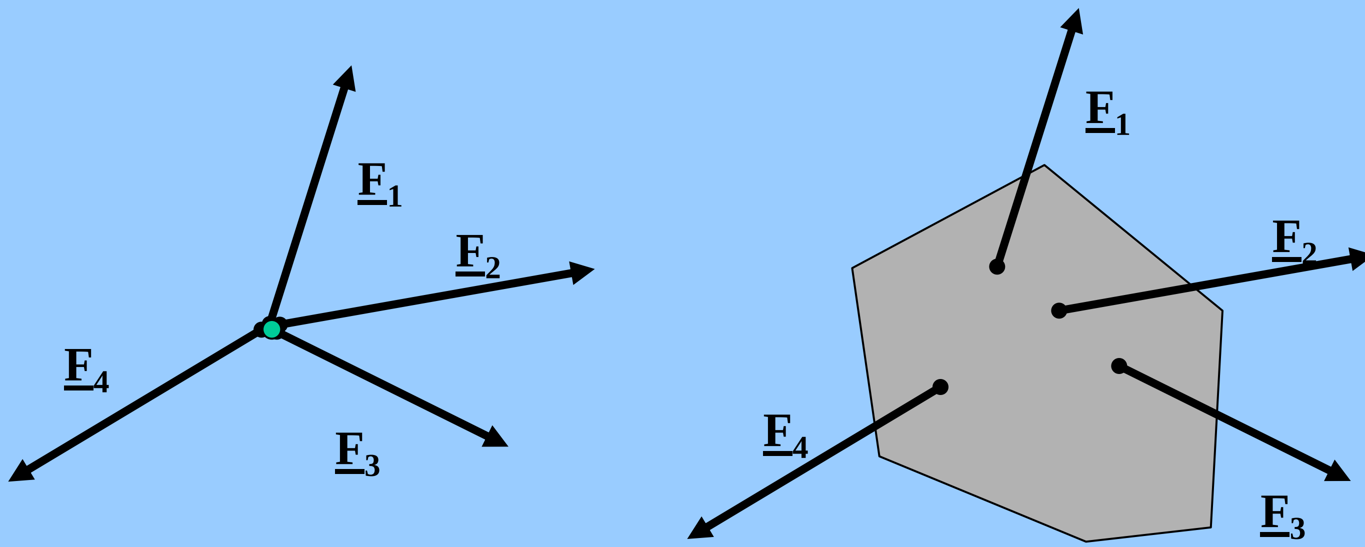
# A merev test tengely körüli forgása




TRANSZLÁCIÓ ROTÁCIÓ

# Merev testre ható erők

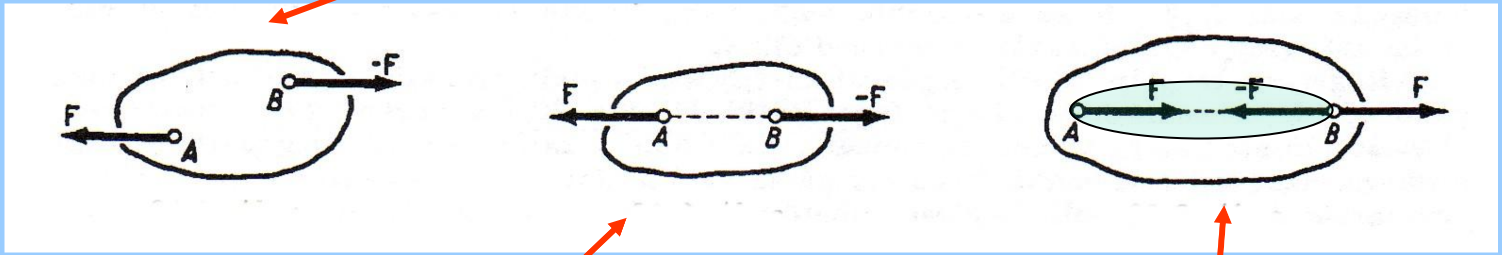
# A merev testre ható erők összetevése




A merev testre ható erők támadáspontja nem mindig ugyanaz.

# Az erővektor eltolhatósága

A merev testre ható erők **támadáspont**ja nem mindig ugyanaz.

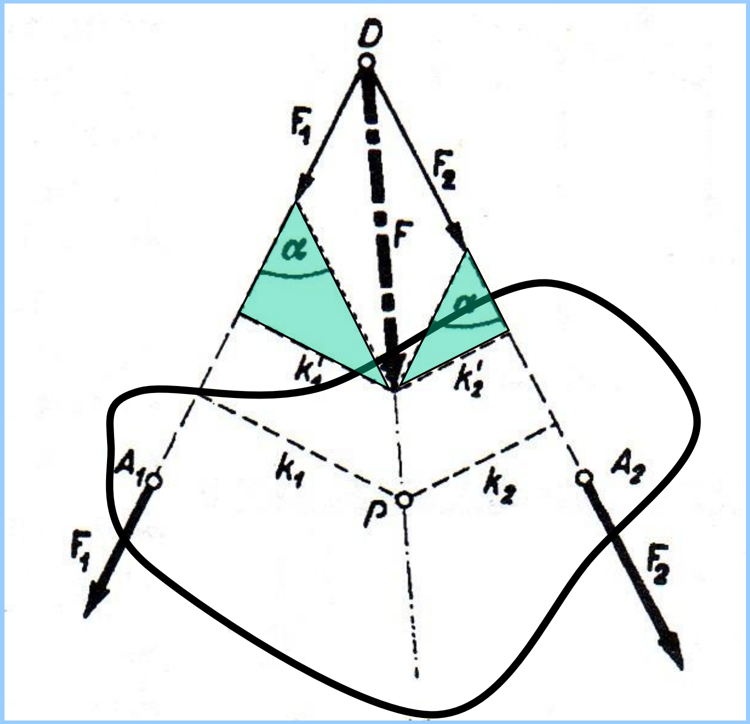



**A merev test két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő hatása alatt akkor van egyensúlyban, ha az erők hatásvonalai egybeesnek.**

**ELTOLÁSI TÉTEL**

**A merev testre ható erő támadáspontja a testben a hatásvonal bármely más pontjába áthelyezhető anélkül, hogy az erő hatása megváltozna.**

# A merev testre ható erők összetevése

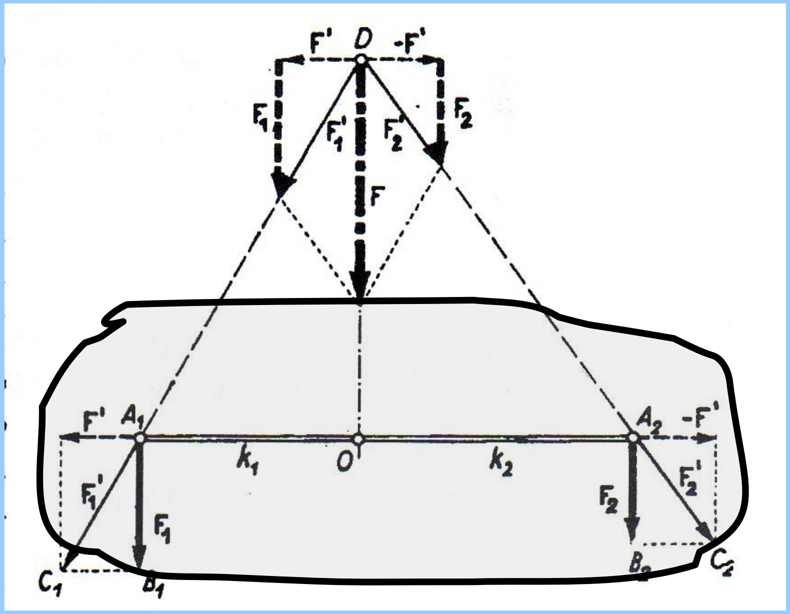



**Az erők támadáspontjait a hatásvonalak D metszéspontjába helyezzük és megszerkesztjük az $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erővektorok eredőjét, amelynek támadáspontja az <u>F</u> hatásvonalának bármelyik pontja lehet.**

Az **<u>F</u>** hatásvonalának bármely P pontjára:

$$F_1 k_1 = F_2 k_2$$

# Párhuzamos erők összetevése



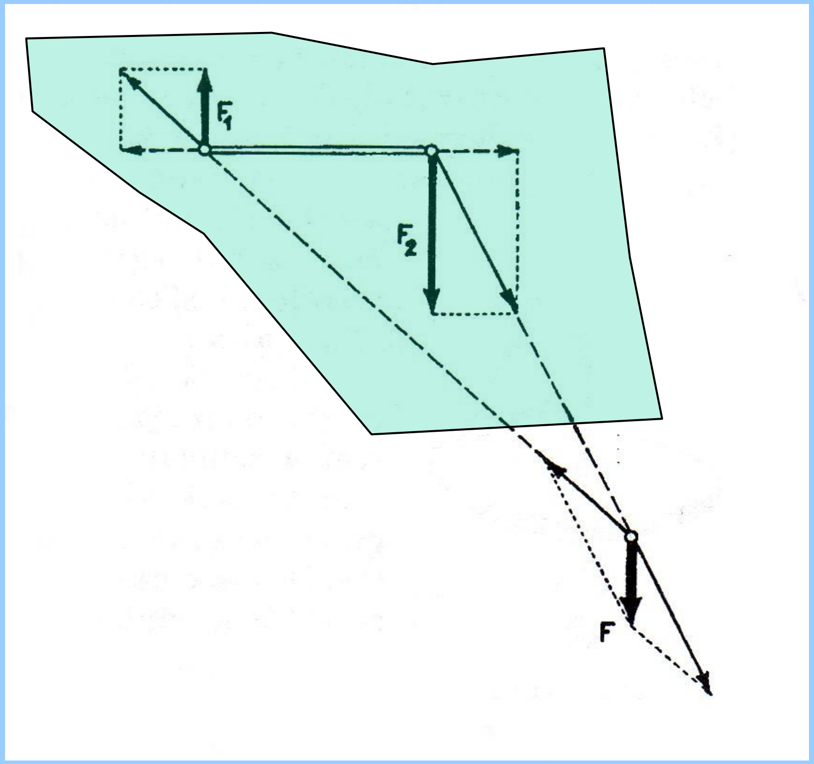

Az $A_1$ és $A_2$ pontokban felvesszük az $A_1A_2$ hatásvonalú, egymás hatását kompenzáló **F**' és –**F**' erőket és ezeket az **F**$_1$-hez és az **F**$_2$-höz hozzáadjuk.

Az erők támadáspontjait a hatásvonalak D metszéspontjába helyezzük és megszerkesztjük eredőjüket.

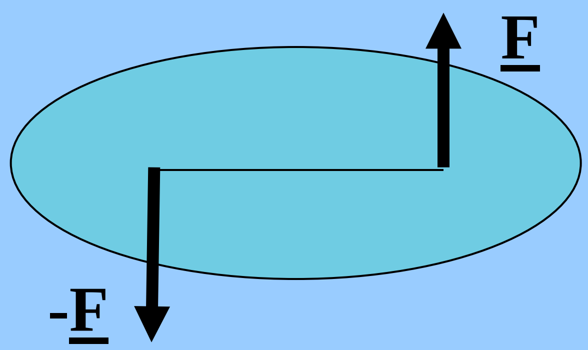
$$\frac{\overline{OD}}{k_1} = \frac{F_1}{F'} \qquad \frac{\overline{OD}}{k_2} = \frac{F_2}{F'}$$

$$\Rightarrow \quad F_1 k_1 = F_2 k_2$$

# Két párhuzamos, ellentétes irányú és nem egyenlő nagyságú erő összetevése



# Két antiparalel és egyenlő nagyságú erő



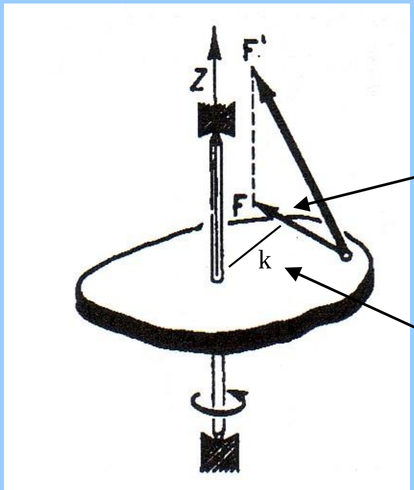

**ERŐPÁR**

**Két antiparalel, egyenlő nagyságú és különböző hatásvonalú erő ERŐPÁR-t képez.**

Az erőpár a legegyszerűbb olyan erőrendszer, amely **nem helyettesíthető egyetlen erővel.**

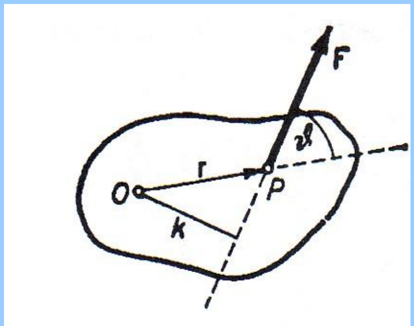
# Merev testre ható erők forgató hatása

# Erők tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka




1.: Csak olyan erő forgathat, amelynek <u>hatásvonala nem párhuzamos a forgástengellyel</u>.

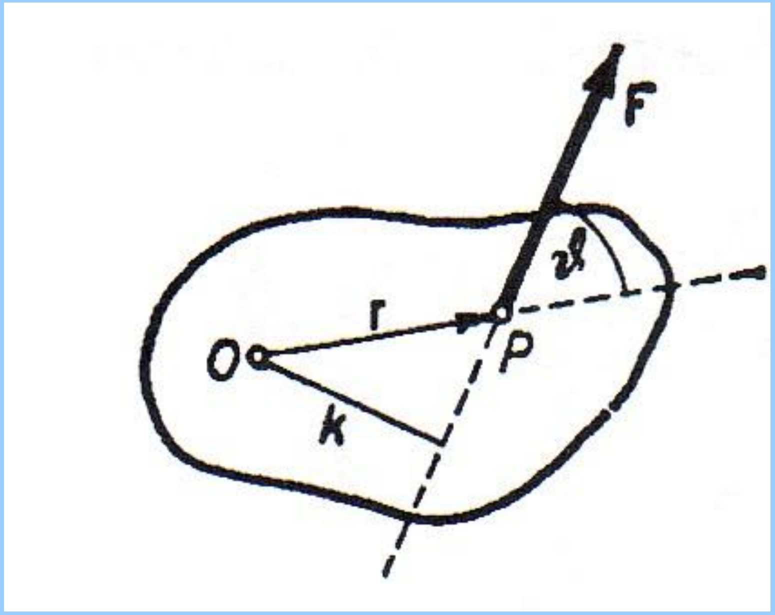
2.: Az F erő csak akkor létesít forgást, ha <u>a támadásvonala nem metszi a tengelyt</u>.




Egy, a Z tengelyre merőleges síkban ható F erő Z tengelyre vonatkozó forgató képessége, **forgatónyomatéka**:

$$M_z = \pm F \cdot k$$

# A forgatónyomaték mint vektor




$$k = r\sin\vartheta$$

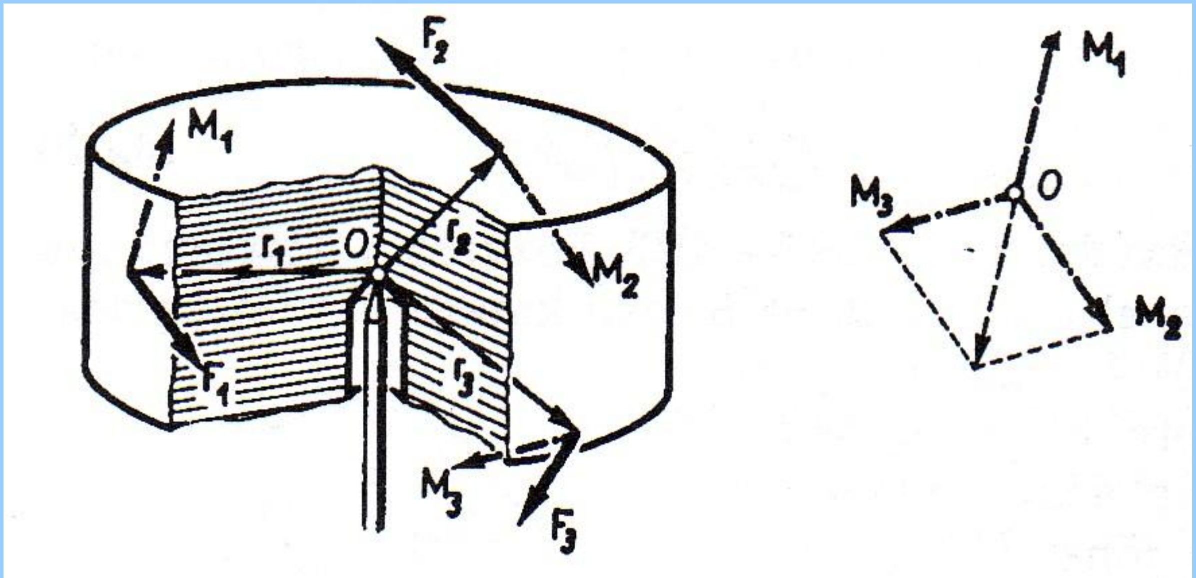
$$M = Fk = rF\sin\vartheta$$

Az r és F vektorszorzatának abszolút értéke.

A P pontban támadó F erőnek valamely O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$$

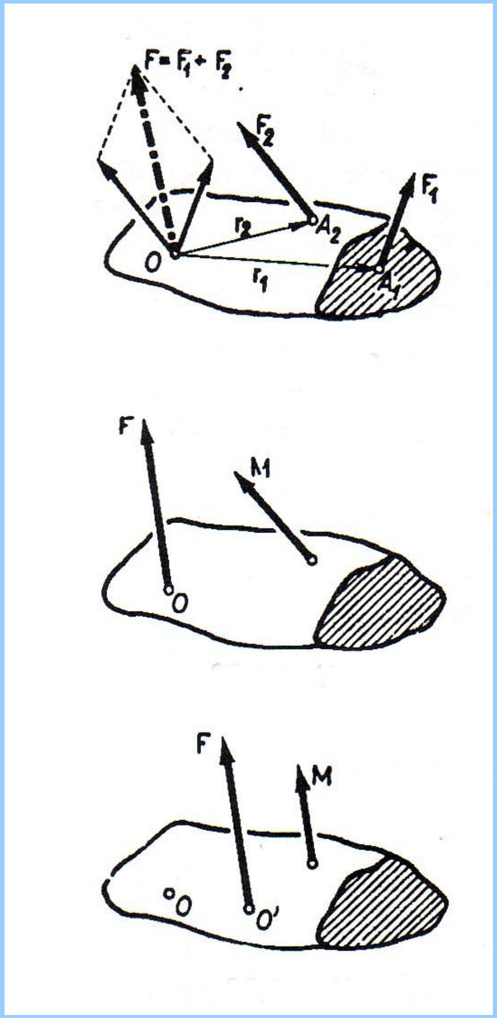
# Pontra vonatkozó forgatónyomaték




Egy rögzített O ponttal rendelkező merev test tetszés szerinti $\underline{\mathbf{F}}_1$, $\underline{\mathbf{F}}_2$, … erők hatása esetén akkor van egyensúlyban, ha az erők O pontra vonatkozó forgatónyomatékainak vektori összege zérus.

$$\sum \underline{M}_i = 0$$

# Tetszőleges erőrendszer redukálása



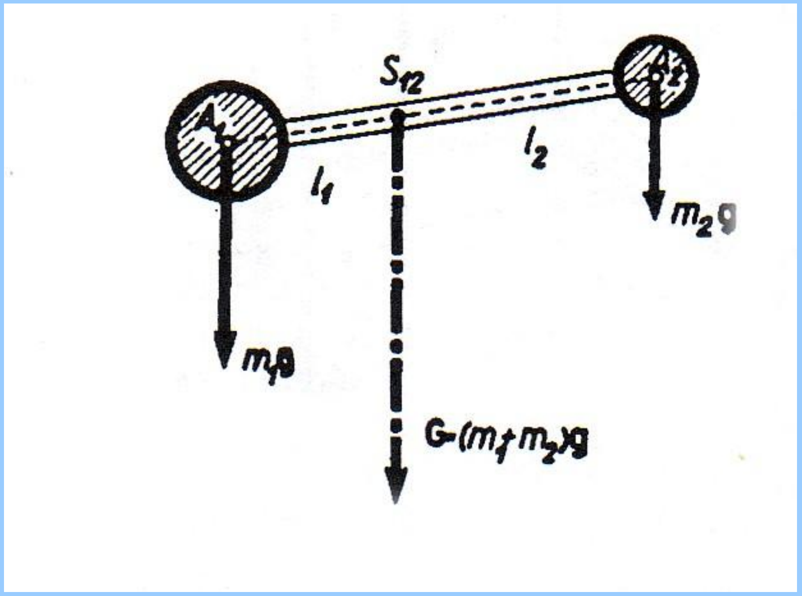

**A merev test $A_1,\ldots,A_n$ pontjaiban támadó $\underline{F}_1,\ldots,\underline{F}_n$ erők rendszere helyettesíthető egy, a test tetszőleges O pontjában támadó erővel és egy M nyomatékú erőpárral.**

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \qquad \underline{M} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i$$

**A merev test egyensúlyának feltétele:**

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = 0 \qquad \underline{M} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i = 0$$

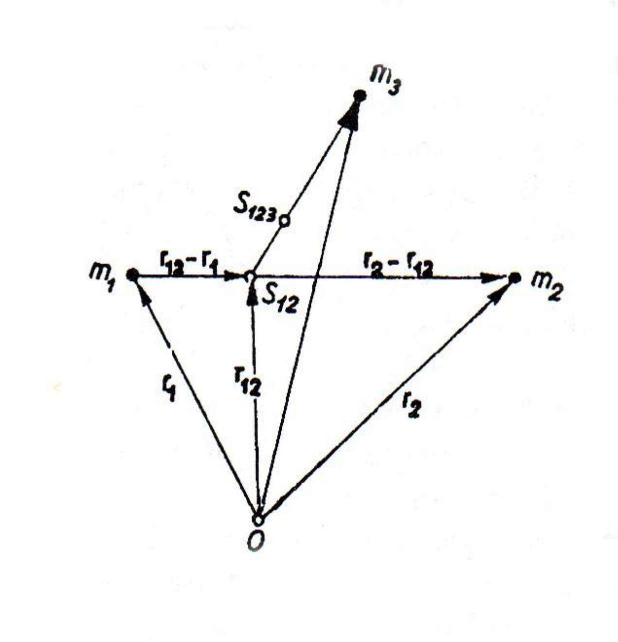
# A merev test súlypontja (tömegközéppontja)




A súlypontjában alátámasztott merev test bármely helyzetben egyensúlyban van.

**A merev test súlyának a súlypontra vonatkozó forgatónyomatéka a test bármely helyzetében zérus.**

# A merev test súlypontja




$$F_1 k_1 = F_2 k_2$$

$$m_1 g\left(\underline{r}_{12} - \underline{r}_1\right) = m_2 g\left(\underline{r}_2 - \underline{r}_{12}\right)$$

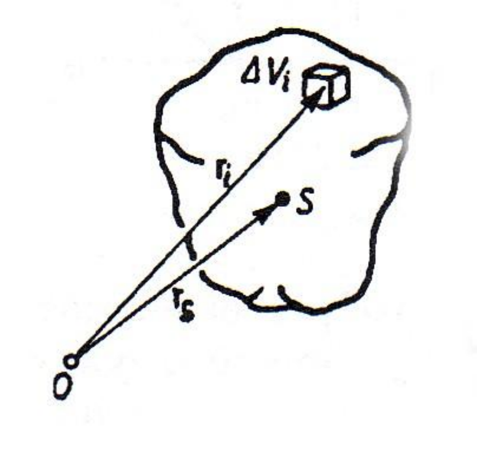
$$\underline{r}_{12} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_{12} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_{12}, \quad z_{12}$$

**Példa:**

**Az x tengely mentén két, elhanyagolható tömegű rúddal összekötött test fekszik, a 0,4 kg tömegű test az x=2 m, míg a 0,6 kg tömegű az x=7 m pontban. Határozzuk meg a súlypont x koordinátáját!**

# A merev test súlypontja




$$\underline{r}_s = \frac{\sum m_i \underline{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \underline{r}_i}{m}$$

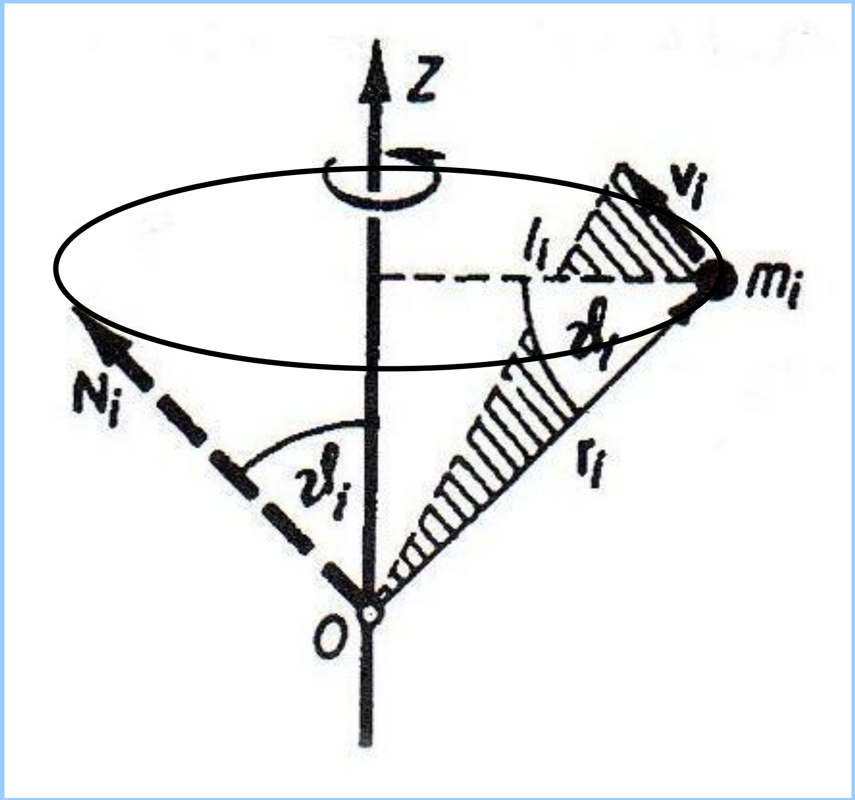
$$\underline{r}_s = \frac{\int \rho \underline{r} dV}{\int \rho dV} = \frac{\int \rho \underline{r} dV}{m}$$

**Példa:**

**Egy L hosszúságú egyenes rúd egyik vége az origóban van, a másik vége pedig az x=L pontban. A rúd hosszegységre eső tömege ρ(x)=Px összefüggés szerint változik, ahol P állandó. Hol van a tömegközéppont?**

# Merev testek dinamikája

# Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete




$$\boxed{N_{iz} = m_i \cdot v_i \cdot l_i}$$

$$N_{iz} = m_i \cdot (\omega l_i) \cdot l_i$$

$$N_{iz} = m_i l_i^2 \omega$$

$$N_z = \sum N_{iz} = \omega \sum m_i l_i^2$$

# Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete

$$N_z = \sum N_{iz} = \omega_z \sum m_i l_i^2$$

$$\Theta = \sum m_i l_i^2$$

A „z” tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\boxed{N_z = \omega_z \Theta}$$

# A tehetetlenségi nyomaték kiszámítása

$$\Theta = \sum m_i l_i^2 \qquad\qquad \Theta = \int \rho l^2 dV$$

**Példa:**

**Egy 0,8 m hosszúságú elhanyagolható tömegű rúd két végére kisméretű 2 kg és 3 kg tömegű testeket erősítünk. Mekkora az így készített merev test tehetetlenségi nyomatéka olyan forgástengelyre vonatkozólag, amely a rúdra merőleges és a 2 kg tömegű testtől 0,2 m távolságra van?**

# Merev test forgása rögzített tengely körül

$$\frac{dN_z}{dt} = M_z \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\Theta\omega_z)}{dt} = M_z \quad \Rightarrow \quad \Theta\frac{d\omega_z}{dt} = M_z$$

**Rögzített tengely körül forgó merev test mozgásegyenlete**

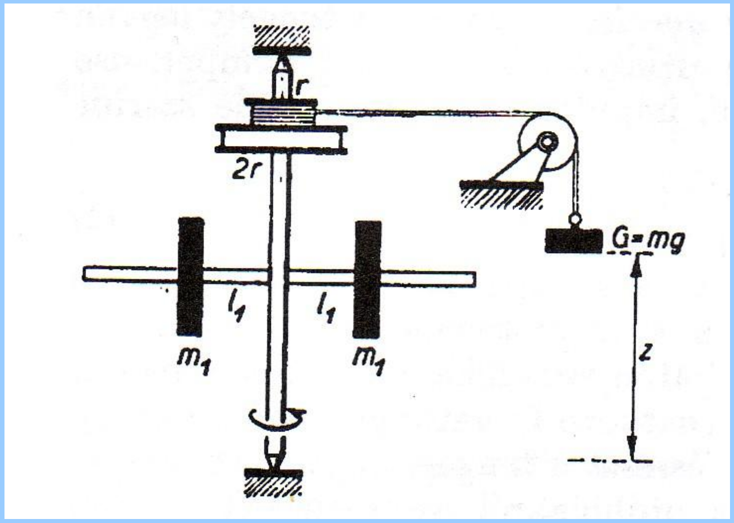
$$\boxed{\Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z}$$

**Ha $M_z$=0, akkor** $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{állandó}$

# Egyenletetesen gyorsuló forgás

**Ha $M_z$=állandó, akkor**

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M_z}{\Theta} = \text{állandó} = \beta$$




**Ha t=0-nál φ=0 és ω=0**

$$\omega(t) = \beta \cdot t$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta \cdot t^2$$

# Egyenletetesen gyorsuló forgás

**Ha $M_z$=állandó, akkor**

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M_z}{\Theta} = \text{állandó} = \beta$$

**Példa:**

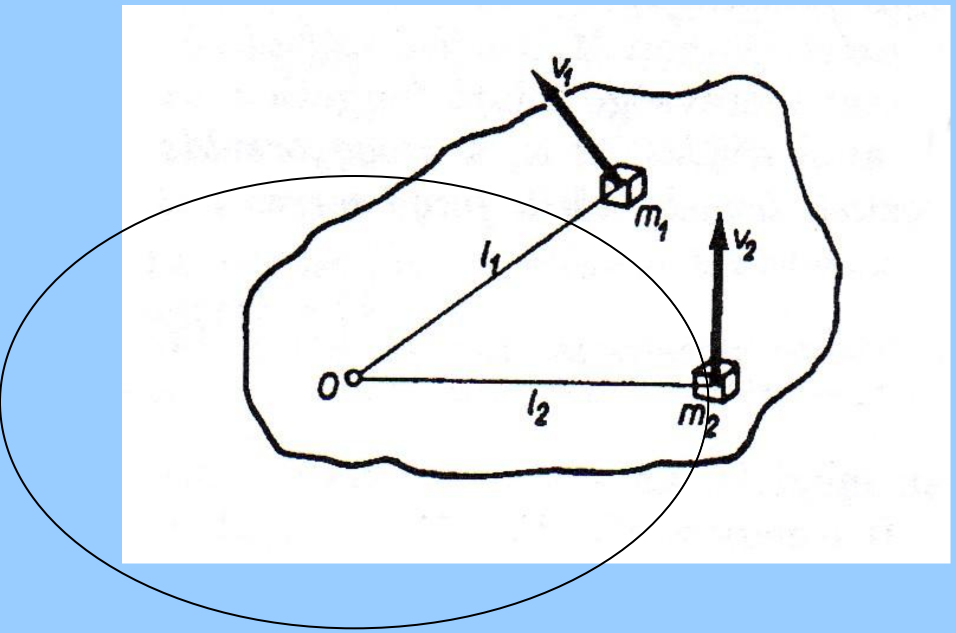
**Egy 0,61 m sugarú, 36,3 kg tömegű korong 360 min$^{-1}$ fordulatszámmal forog. A fékező súrlódás forgatónyomatéka 0,553 Nm. Számítsa ki, mennyi idő alatt áll meg a kerék!**

**Ha t=0-nál φ=0 és ω=0**

$$\omega(t) = \beta \cdot t$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\beta \cdot t^2$$

# Forgó merev test mozgási energiája




$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum m_i \cdot v_i^2$$

$$v_i = \omega l_i$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum m_i \cdot l_i^2 \omega^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i \cdot l_i^2$$

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2}$$

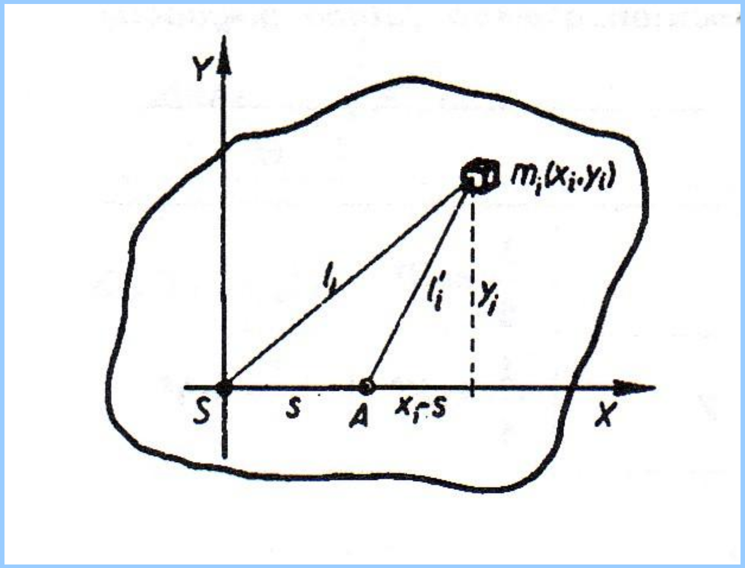
# Forgó merev test mozgási energiája

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

**Példa:**

**Egy 10 kg tömegű, 12 cm átmérőjű henger a tengelye körül 2 $s^{-1}$ szögsebességgel forog. Mekkora a forgási energiája?**

# Tehetetlenségi nyomatékok egymással párhuzamos tengelyekre



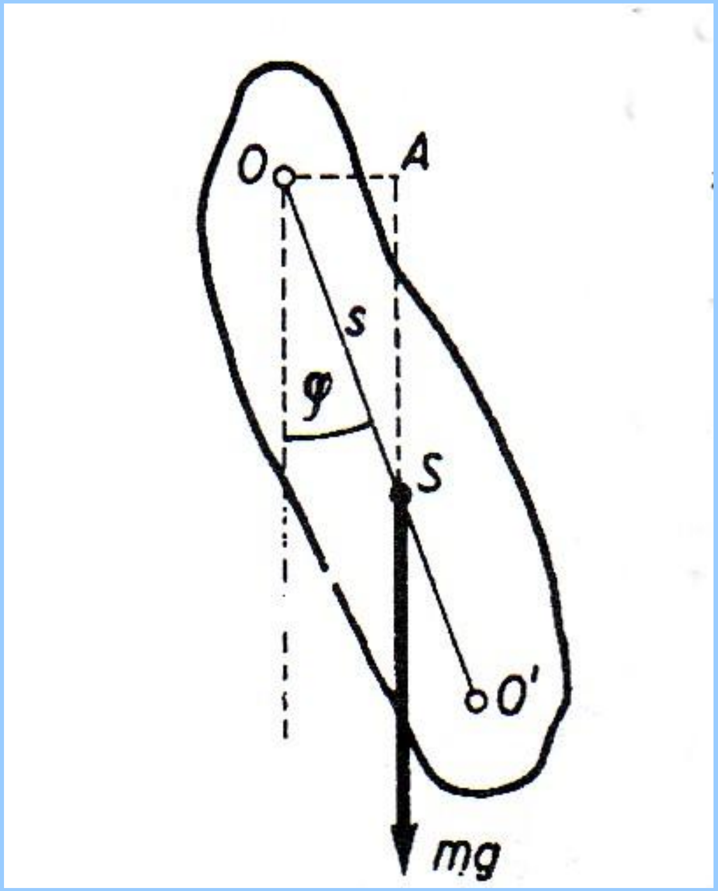

$$\Theta_A = \Theta_S + m \cdot s^2$$

**Steiner tétele**

**Példa:**

**Egy 2 m hosszú vékony rúd tömege 8 kg. Mennyi a rúd tehetetlenségi nyomatéka az egyik végén átmenő tengelyre számolva, ha a rúd tömegközéppontján átmenő, a rúd síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatva $\Theta = 1/12 mL^2$.**

# A fizikai inga

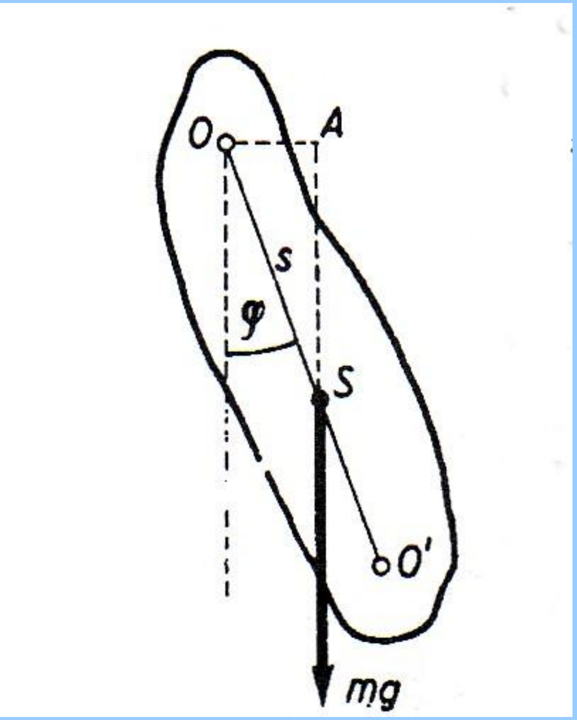



$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \cdot s \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgs}{\Theta} \sin\varphi$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}$$

# A fizikai inga




$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \cdot s \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgs}{\Theta}\sin\varphi$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}$$

**Példa:**

**Egy 60 cm hosszúságú homogén rudat egyik végén átmenő, a rúdra merőleges tengely körül lengetünk. Mennyi a lengésidő?**

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

**Koordináta (út)** | **Szög (szögelfordulás)**

$x$ | $\varphi$

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

**Sebesség**

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

**Szögsebesség**

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$$

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

**Gyorsulás**

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

**Szöggyorsulás**

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

**Mozgásegyenlet**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad \Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z$$

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

**Tömeg**

$$m$$

**Tehetetlenségi nyomaték**

$$\Theta = \sum m_i l_i^2$$

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

| | |
|---|---|
| **Erő** | **Forgatónyomaték** |
| $F_x$ | $M_z$ |

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

**Impulzus**
lendület

$$p_x = mv_x$$

**Impulzusmomentum**
perdület

$$N_z = \Theta\omega_z$$

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

**Impulzustétel**

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x$$

**Impulzusmomentum tétel**

$$\frac{dN_z}{dt} = M_z$$

# Megfelelések a haladó és forgó mozgás között

## Kinetikai energia

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad E_{kin} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$


more fun @ Funtooo.com