

Rezgőmozgások

Horváth András
SZE, Fizika Tsz.

v 0.7

Bevezetés

- Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Bevezetés

Bevezetés

• **Bevezetés**

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Bevezetés

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ($\rightarrow$ inga, $\rightarrow$ bonyolult rezgés)

Bevezetés

• Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Bevezetés

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ($\rightarrow$ inga, $\rightarrow$ bonyolult rezgés)

Először a **pontszerű testek egyenes menti rezgését** tárgyaljuk.

Bevezetés

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ($\rightarrow$ inga, $\rightarrow$ bonyolult rezgés)

Először a **pontszerű testek egyenes menti rezgését** tárgyaljuk. Ekkor a mozgás egy $x(t)$ függvénnyel jellemezhető.

Bevezetés

Bevezetés

• Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ($\rightarrow$ inga, $\rightarrow$ bonyolult rezgés)

Először a **pontszerű testek egyenes menti rezgését** tárgyaljuk.

Ekkor a mozgás egy $x(t)$ függvényvel jellemezhető.

Ha van olyan x_0 , melyre $x(t) = x_0$ -nak egynél több megoldása van t -re, akkor rezgőmozgásról beszélhetünk.

Bevezetés

Bevezetés

• Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgőmozgásnak nevezünk egy mozgást, ha van a térnek egy olyan pontja, amihez a mozgást végző test többször (esetleg végtelen sokszor) visszatér. ($\rightarrow$ inga, $\rightarrow$ bonyolult rezgés)

Először a **pontszerű testek egyenes menti rezgését** tárgyaljuk.

Ekkor a mozgás egy $x(t)$ függvényvel jellemezhető.

Ha van olyan x_0 , melyre $x(t) = x_0$ -nak egynél több megoldása van t -re, akkor rezgőmozgásról beszélhetünk.

Ha $x(t)$ periodikus, akkor periodikus rezgőmozgásról beszélünk.
(Vigyázat! Nem minden rezgőmozgás periodikus.)

Bevezetés

Rezgések kialakulása

- Regzések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulása

Bevezetés

Rezgések kialakulása

● Rezgések kialakulása

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Rezgések kialakulása

Bevezetés

Rezgések kialakulása

● Rezgések kialakulása

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:
Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

● **Rezgések kialakulása**

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:
Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van. Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

● **Rezgések kialakulása**

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van. Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta. A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy $\rightarrow$ rezgés.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

● **Rezgések kialakulása**

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van. Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta. A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy $\rightarrow$ rezgés.

Matematikailag:

Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van. Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta. A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy $\rightarrow$ rezgés.

Matematikailag:

Egyensúlyi pont: $F(x_0) = 0$

Rezgések kialakulása

Bevezetés

Rezgések kialakulása

● Rezgések kialakulása

- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van. Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta. A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy $\rightarrow$ rezgés.

Matematikailag:

Egyensúlyi pont: $F(x_0) = 0$

Visszatérítés jobbról: $F(x) < 0$, ha $x > x_0$ és $x - x_0 < \delta$

Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van. Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta. A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy $\rightarrow$ rezgés.

Matematikailag:

Egyensúlyi pont: $F(x_0) = 0$

Visszatérítés jobbról: $F(x) < 0$, ha $x > x_0$ és $x - x_0 < \delta$

Visszatérítés balról: $F(x) > 0$, ha $x < x_0$ és $x_0 - x < \delta$

Rezgések kialakulása

Rezgések kialakulásának leggyakoribb módja a következő:

Létezik egy olyan pont, ahol a test egyensúlyban van. Ha innét kissé kitérítjük a testet, és ekkor az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta. A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy $\rightarrow$ rezgés.

Matematikailag:

Egyensúlyi pont: $F(x_0) = 0$

Visszatérítés jobbról: $F(x) < 0$, ha $x > x_0$ és $x - x_0 < \delta$

Visszatérítés balról: $F(x) > 0$, ha $x < x_0$ és $x_0 - x < \delta$

szemléltetés: stabil egyensúly

Bevezetés

Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: **stabil egyensúly**
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

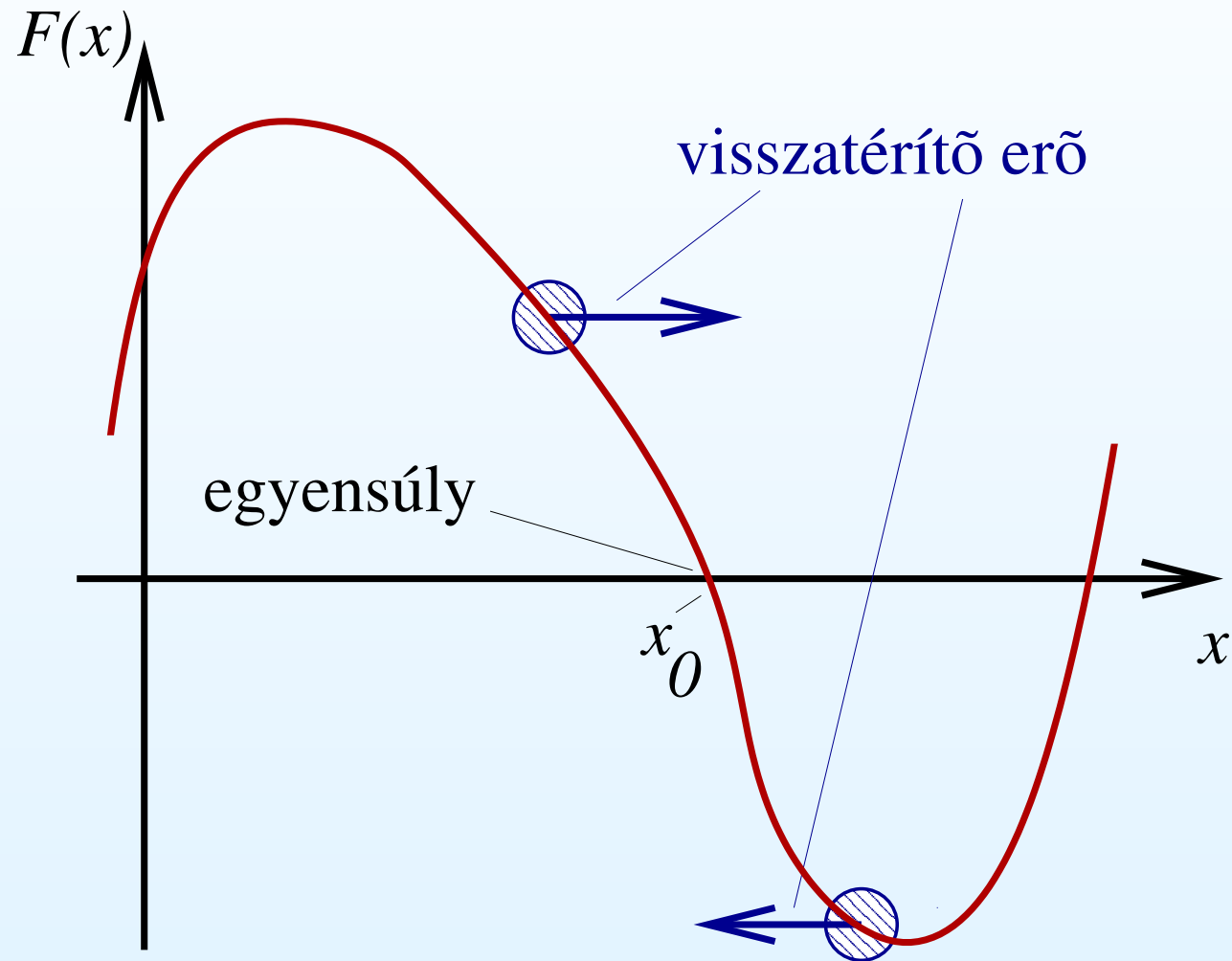
Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egyensúlyi helyzet rezgéssel:



szemléltetés: instabil egyensúly

Bevezetés

Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- **szemléltetés: instabil egyensúly**
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

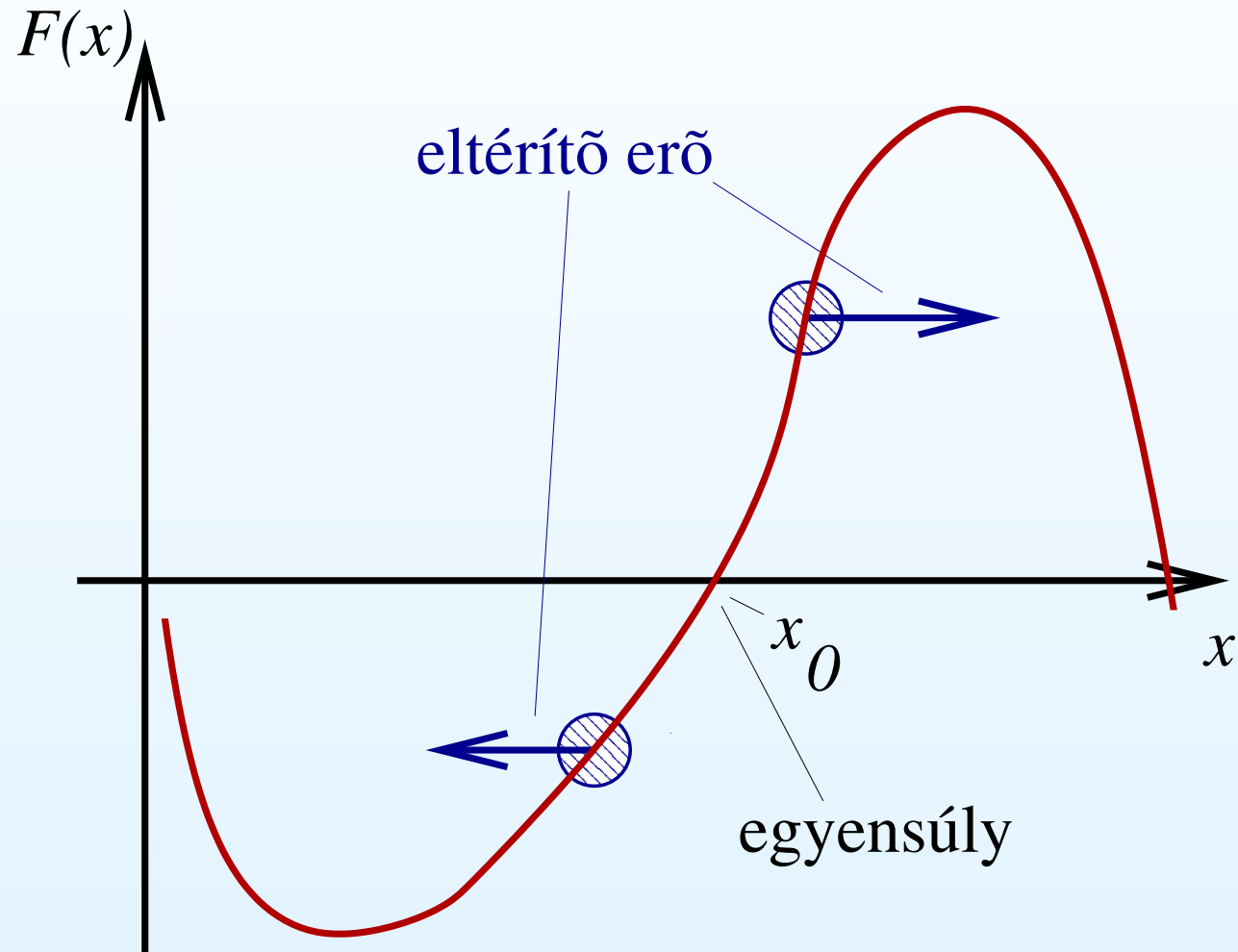
Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egyensúlyi helyzet rezgés nélkül:



összefoglalás

Tanulság:

Bevezetés

Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- **összefoglalás**

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

összefoglalás

Bevezetés

Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Tanulság:

Ha egy egyensúlyi helyzet körül $F(x)$ monoton fogyó, akkor ott stabil egyensúly van, azaz kialakul rezgés, különben nem.

összefoglalás

Bevezetés

Rezgések kialakulása

- Rezgések kialakulása
- szemléltetés: stabil egyensúly
- szemléltetés: instabil egyensúly
- összefoglalás

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

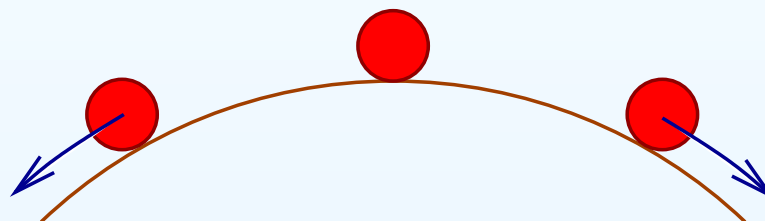
A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

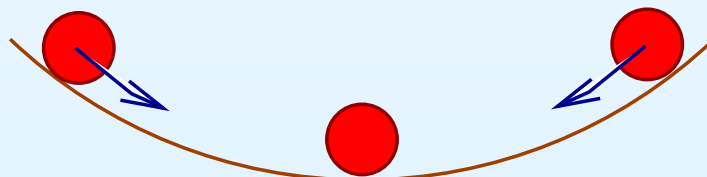
Tanulság:

Ha egy egyensúlyi helyzet körül $F(x)$ monoton fogyó, akkor ott **stabil egyensúly** van, azaz kialakul rezgés, különben nem.

Egyszerű példák stabil és instabil egyensúlyi helyzetre: labda dombon és gödörben.



instabil egyensúly



stabil egyensúly

Bevezetés

Rezgések kialakulása

**A harmonikus
rezgőmozgás**

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

A harmonikus rezgőmozgás

alapegyenlet

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- **alapegyenlet**
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.

- **alapegyenlet**
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

alapegyenlet

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.

Tegyük az origót az egyensúlyi helyzetbe. Ekkor az erőfüggvény:

$$F(x) = -D \cdot x$$

ahol D szokásos neve: direkciós állandó vagy rugóállandó.

alapegyenlet

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- **alapegyenlet**
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.

Tegyük az origót az egyensúlyi helyzetbe. Ekkor az erőfüggvény:

$$F(x) = -D \cdot x$$

ahol D szokásos neve: direkciós állandó vagy rugóállandó.

Ilyen erő hat pl. egy $\rightarrow$ rugalmasan rögzített testre.

- **alapegyenlet**
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

alapegyenlet

Amennyiben az egyensúlyi helyzet közelében az erőfüggvény lineáris, harmonikus rezgőmozgás alakul ki.

Tegyük az origót az egyensúlyi helyzetbe. Ekkor az erőfüggvény:

$$F(x) = -D \cdot x$$

ahol D szokásos neve: direkciós állandó vagy rugóállandó.

Ilyen erő hat pl. egy $\rightarrow$ rugalmasan rögzített testre.

A mozgás egyenlete: ($F = ma$ átrendezve)

$$a = -\frac{D}{m} x$$

Beírva a gyorsulás jelentését:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x'' = -\frac{D}{m} x$$

az alapegyenlet megoldása

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet
megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Ez ez olyan egyenlet, melyben csak az $x(t)$ függvény az ismeretlen. Bár pillanatnyilag nem tudjuk megoldani, mert az ismeretlen deriváltja is szerepel, azért ki tudjuk találni a megoldást. (Később matematikából szerepelni fog a precíz megoldás is.)

- alapegyenlet
- **az alapegyenlet
megoldása**
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

az alapegyenlet megoldása

Ez ez olyan egyenlet, melyben csak az $x(t)$ függvény az ismeretlen. Bár pillanatnyilag nem tudjuk megoldani, mert az ismeretlen deriváltja is szerepel, azért ki tudjuk találni a megoldást. (Később matematikából szerepelni fog a precíz megoldás is.) $x(t)$ tehát olyan függvény, melynek második deriváltja önmagának negatív konstans szorosa. Ilyenek pl. a sin és cos függvények.
 $((\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x).$

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

az alapegyenlet megoldása

Ez az olyan egyenlet, melyben csak az $x(t)$ függvény az ismeretlen. Bár pillanatnyilag nem tudjuk megoldani, mert az ismeretlen deriváltja is szerepel, azért ki tudjuk találni a megoldást. (Később matematikából szerepelni fog a precíz megoldás is.) $x(t)$ tehát olyan függvény, melynek második deriváltja önmagának negatív konstans szorosa. Ilyenek pl. a $\sin$ és $\cos$ függvények. $((\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x)$.

Kis próbálgatással:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ahol A és φ_0 tetszőleges állandók, $\omega = \sqrt{D/m}$.

- alapegyenlet
- **az alapegyenlet
megoldása**
- ellenőrzés
- elnevezések
- energiaviszonyok

az alapegyenlet megoldása

Ez egy olyan egyenlet, melyben csak az $x(t)$ függvény az ismeretlen. Bár pillanatnyilag nem tudjuk megoldani, mert az ismeretlen deriváltja is szerepel, azért ki tudjuk találni a megoldást. (Később matematikából szerepelni fog a precíz megoldás is.) $x(t)$ tehát olyan függvény, melynek második deriváltja önmagának negatív konstans szorosa. Ilyenek pl. a $\sin$ és $\cos$ függvények. $((\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x)$.

Kis próbálgatással:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ahol A és φ_0 tetszőleges állandók, $\omega = \sqrt{D/m}$.
(Érdekesség: a frekvencia $\rightarrow$ nem függ az amplitúdótól, de $\rightarrow$ a tömeg növekedésével csökken.)

ellenőrzés

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- **ellenőrzés**
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Valóban megoldása ez a mozgásegyenletnek? Ellenőrizzük:

ellenőrzés

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- **ellenőrzés**
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Valóban megoldása ez a mozgásegyenletnek? Ellenőrizzük:

$$v(t) = x'(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$$

ellenőrzés

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- **ellenőrzés**
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Valóban megoldása ez a mozgásegyenletnek? Ellenőrizzük:

$$v(t) = x'(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$$

$$a(t) = v'(t) = -A \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega \cdot \omega$$

ellenőrzés

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- **ellenőrzés**
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Valóban megoldása ez a mozgásegyenletnek? Ellenőrizzük:

$$v(t) = x'(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$$

$$a(t) = v'(t) = -A \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega \cdot \omega$$

És így valóban:

$$a(t) = -x(t) \cdot \omega^2 = -x(t) \frac{D}{m}$$

ellenőrzés

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- **ellenőrzés**
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Valóban megoldása ez a mozgásegyenletnek? Ellenőrizzük:

$$v(t) = x'(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$$

$$a(t) = v'(t) = -A \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega \cdot \omega$$

És így valóban:

$$a(t) = -x(t) \cdot \omega^2 = -x(t) \frac{D}{m}$$

Tényleg ez a mozgásegyenlet egy megoldása. Összefoglalva:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ellenőrzés

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- **ellenőrzés**
- elnevezések
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Valóban megoldása ez a mozgásegyenletnek? Ellenőrizzük:

$$v(t) = x'(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$$

$$a(t) = v'(t) = -A \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega \cdot \omega$$

És így valóban:

$$a(t) = -x(t) \cdot \omega^2 = -x(t) \frac{D}{m}$$

Tényleg ez a mozgásegyenlet egy megoldása. Összefoglalva:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Ez a mozgás a középiskolából ismert **harmonikus rezgőmozgás**.

elnevezések

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- **elnevezések**
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- ω : körfrekvencia.

elnevezések

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- **elnevezések**
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- ω : körfrekvencia.
- $T = 2\pi/\omega$: periódusidő.

elnevezések

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- **elnevezések**
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- ω : körfrekvencia.
- $T = 2\pi/\omega$: periódusidő.
- A : amplitúdó.

elnevezések

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- **elnevezések**
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- ω : körfrekvencia.
- $T = 2\pi/\omega$: periódusidő.
- A : amplitúdó.
- φ_0 : kezdőfázis.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- **elnevezések**
- energiaviszonyok

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

elnevezések

- ω : körfrekvencia.
- $T = 2\pi/\omega$: periódusidő.
- A : amplitúdó.
- φ_0 : kezdőfázis.

Vigyázat! Nem minden rezgőmozgás harmonikus!
($\rightarrow$ labdapattogás, $\rightarrow$ kocsi ide-oda gurul)

energiaviszonyok

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- **energiaviszonyok**

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik.

energiaviszonyok

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- **energiaviszonyok**

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik. Ezért változik a mozgási és a helyzeti energia is.

energiaviszonyok

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- **energiaviszonyok**

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik. Ezért változik a mozgási és a helyzeti energia is.

Mozgási energia:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

energiaviszonyok

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- **energiaviszonyok**

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik. Ezért változik a mozgási és a helyzeti energia is.

Mozgási energia:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Helyzeti (potenciális) energia:

$$V(t) = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

energiaviszonyok

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

- alapegyenlet
- az alapegyenlet megoldása
- ellenőrzés
- elnevezések
- **energiaviszonyok**

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

A harmonikus rezgőmozgás közben a sebesség és a rugó megnyúlása folytonosan változik. Ezért változik a mozgási és a helyzeti energia is.

Mozgási energia:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Helyzeti (potenciális) energia:

$$V(t) = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

Kihasználva, hogy $\omega^2 = D/m$, D helyére $m\omega^2$ írható:

$$V(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

...

Az összes energia tehát:

$$E = E_m + V = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left(\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) =$$

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left(\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left(\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

Amint az várható volt, a harmonikus rezgés összenergiája nem változik.

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left(\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

Amint az várható volt, a harmonikus rezgés összenergiája nem változik.

Az energia a potenciális és a mozgási energia közt vándorol periodikusan:

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left(\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

Amint az várható volt, a harmonikus rezgés összenergiája nem változik.

Az energia a potenciális és a mozgási energia közt vándorol periodikusan:

– maximális kitéréskor $E_m = 0$, $V = E$

...

Az összes energia tehát:

$$\begin{aligned} E = E_m + V &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 \left(\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \text{áll.} \end{aligned}$$

Amint az várható volt, a harmonikus rezgés összenergiája nem változik.

Az energia a potenciális és a mozgási energia közt vándorol periodikusan:

- maximális kitéréskor $E_m = 0$, $V = E$
- az egyensúlyi helyzeten áthaladva $V = 0$, $E_m = E$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Kis amplitúdójú rezgések

kis amplitúdójú rezgések

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

● **kis amplitúdójú
rezgések**

- egy példa
- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Mi a helyzet, ha a testre ható erő nem lineáris?

kis amplitúdójú rezgések

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

● **kis amplitúdójú
rezgések**

- egy példa
- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Mi a helyzet, ha a testre ható erő nem lineáris?

Általános esetben bonyolult megadni a rezgés paramétereit.

kis amplitúdójú rezgések

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

• kis amplitúdójú
rezgések

• egy példa

• egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

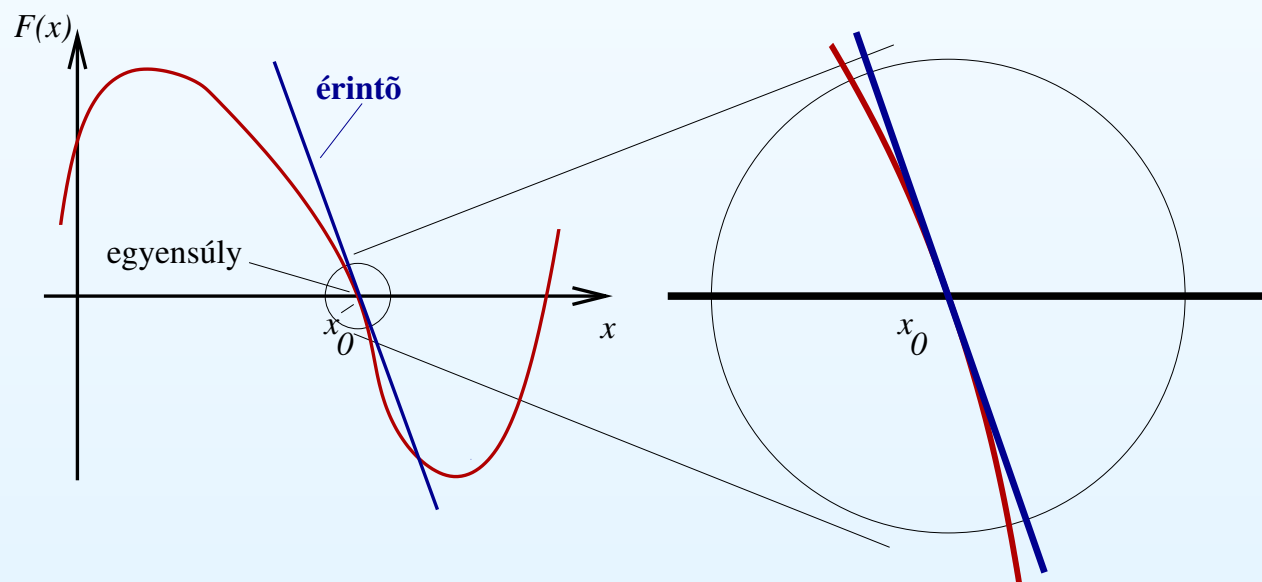
A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Mi a helyzet, ha a testre ható erő nem lineáris?

Általános esetben bonyolult megadni a rezgés paramétereit.

Egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések esetén közel harmonikus rezgést fogunk kapni, hisz sima $F(x)$ esetén kis szakaszon $F(x)$ grafikonja jól közelíthető érintőjével.



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

● kis amplitúdójú
rezgések

- egy példa
- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Ezért x_0 körül közel lineáris erőtvény érvényesül.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

● kis amplitúdójú
rezgések

● egy példa

● egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Ezért x_0 körül közel lineáris erőtvény érvényesül.

Mivel az érintő meredeksége $F'(x)$, ezért a kis rezgések úgy történnek, mintha $D = -F'(x)$ rugóállandójú rugón lenne a test.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

• kis amplitúdójú rezgések

• egy példa

• egy másik példa

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Ezért x_0 körül közel lineáris erőtvény érvényesül.

Mivel az érintő meredeksége $F'(x)$, ezért a kis rezgések úgy történnek, mintha $D = -F'(x)$ rugóállandójú rugón lenne a test.

Tehát egyensúlyi helyzet körüli **kis amplitúdójú rezgések**
frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x)}{m}} = \sqrt{-\frac{1}{m} \frac{dF}{dx}}$$

...

Ezért x_0 körül közel lineáris erőtvény érvényesül.

Mivel az érintő meredeksége $F'(x)$, ezért a kis rezgések úgy történnek, mintha $D = -F'(x)$ rugóállandójú rugón lenne a test.

Tehát egyensúlyi helyzet körüli **kis amplitúdójú rezgések**
frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x)}{m}} = \sqrt{-\frac{1}{m} \frac{dF}{dx}}$$

Nem tévedés! Stabil egyensúly esetén $F(x)$ monoton fogy x_0 körül, így itt $F(x_0) < 0$, ezért ω képletében a gyökjel alatt pozitív szám áll.

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések
- **egy példa**
- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések

- **egy példa**

- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?

Megoldás: Az egyensúly feltétele: $F(x_0) = 0$,

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések

- **egy példa**

- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?

Megoldás: Az egyensúly feltétele: $F(x_0) = 0$, azaz most $5/x_0 - 9 = 0$. Ez egyszerűen megoldható:

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések

- **egy példa**

- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?

Megoldás: Az egyensúly feltétele: $F(x_0) = 0$, azaz most $5/x_0 - 9 = 0$. Ez egyszerűen megoldható:

$$x_0 = \frac{5}{9}$$

(Most csak egy megoldásunk van.)

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések

- **egy példa**

- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?

Megoldás: Az egyensúly feltétele: $F(x_0) = 0$, azaz most $5/x_0 - 9 = 0$. Ez egyszerűen megoldható:

$$x_0 = \frac{5}{9}$$

(Most csak egy megoldásunk van.)

Stabil-e ez az egyensúlyi helyzet?

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések

- **egy példa**

- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = \frac{5}{x} - 9$$

Hol van a test egyensúlyban? Kialakulhat-e rezgés az egyensúly körül? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 2 kg?

Megoldás: Az egyensúly feltétele: $F(x_0) = 0$, azaz most $5/x_0 - 9 = 0$. Ez egyszerűen megoldható:

$$x_0 = \frac{5}{9}$$

(Most csak egy megoldásunk van.)

Stabil-e ez az egyensúlyi helyzet? Azaz monoton fogyó-e $F(x)$ x_0 egy kis környezetén?

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések

- egy példa

- egy másik példa

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left(\frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések

- egy példa

- egy másik példa

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left(\frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$

az egyensúlyi pontban:

$$F'(x_0) = -\frac{5}{(5/9)^2} = -\frac{81}{5} = -16,2$$

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left(\frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$

az egyensúlyi pontban:

$$F'(x_0) = -\frac{5}{(5/9)^2} = -\frac{81}{5} = -16,2$$

Ez valóban negatív, tehát kialakulhat rezgés. A frekvencia:

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{16,2}{2}} \approx 2,85 \frac{1}{s}$$

...

Azt, hogy monoton fogyó-e a függvény, legegyszerűbb az alapján eldönteni, negatív-e a deriváltja.

Számoljuk ki a deriváltat tehát:

$$F'(x) = \left(\frac{5}{x} - 9 \right)' = -\frac{5}{x^2}$$

az egyensúlyi pontban:

$$F'(x_0) = -\frac{5}{(5/9)^2} = -\frac{81}{5} = -16,2$$

Ez valóban negatív, tehát kialakulhat rezgés. A frekvencia:

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{16,2}{2}} \approx 2,85 \frac{1}{s}$$

A periódusidő: $T = (2\pi)/\omega = 2,21 \text{ s}$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

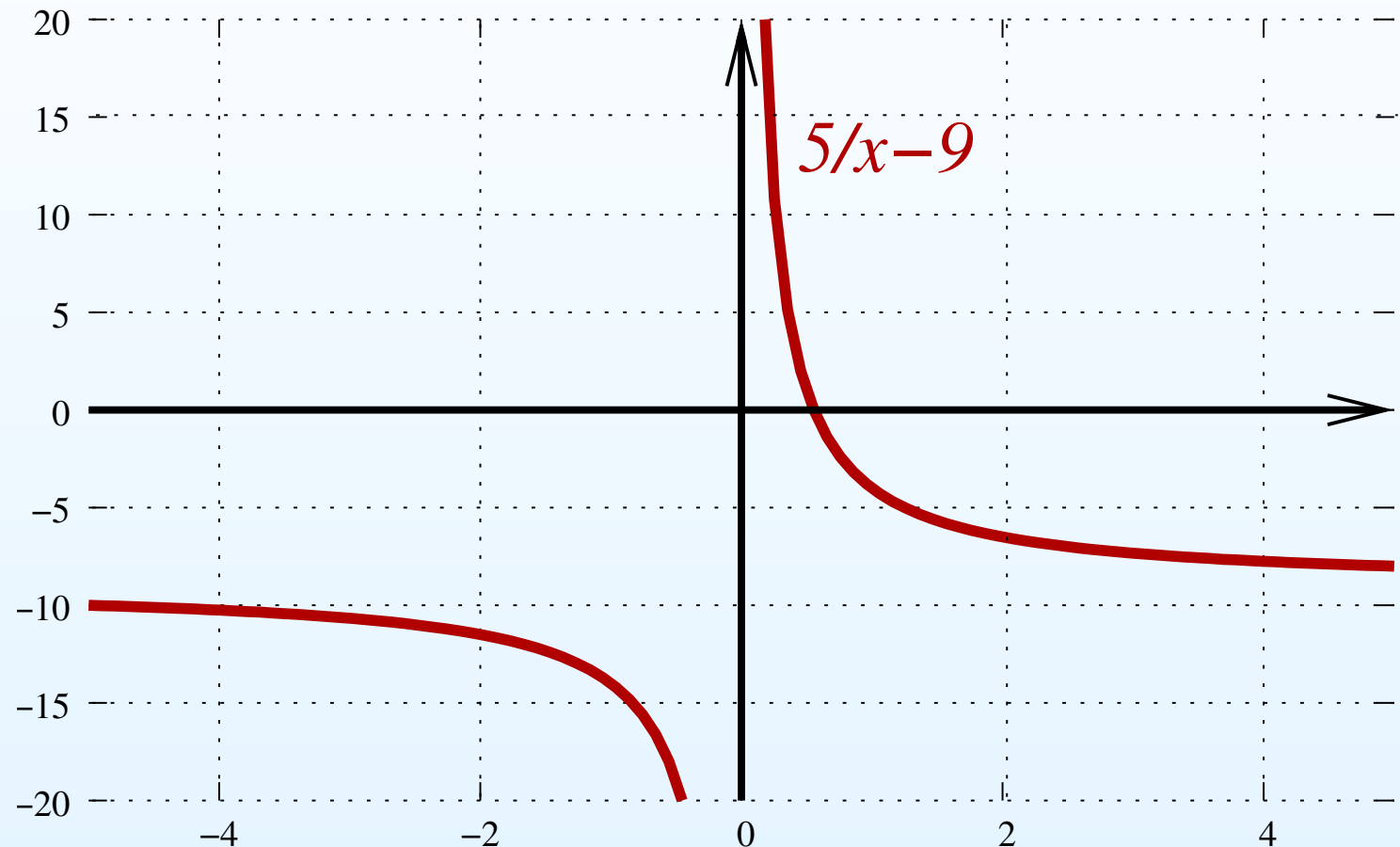
A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Egy kicsit segíthet, ha felrajzoljuk $F(x)$ grafikonját:



Látszik, hogy egy egyensúlyi helyzet van, mely stabil.

egy másik példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések
- egy példa
- **egy másik példa**

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x$$

Hol lehet a test egyensúlyban? Hol alakulhat ki rezgés? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 7 kg?

egy másik példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések
- egy példa
- **egy másik példa**

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x$$

Hol lehet a test egyensúlyban? Hol alakulhat ki rezgés? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 7 kg?

Megoldás: Egyensúlyi helyzet feltétele:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x = 0$$

egy másik példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések

- egy példa

- **egy másik példa**

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy egyenes mentén mozgó testre ható erő SI-egységekben az alábbi alakú:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x$$

Hol lehet a test egyensúlyban? Hol alakulhat ki rezgés? Mennyi a kis rezgések periódusideje, ha a test tömege 7 kg?

Megoldás: Egyensúlyi helyzet feltétele:

$$F(x) = 10x^3 + x^2 - 0,2x = 0$$

Nyilvánvaló megoldás az $x_1 = 0$. Az ezen kívüli megoldásokat keresve eloszthatjuk az egyenletet x -szel:

$$10x^2 + x - 0,2 = 0$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

- kis amplitúdójú
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát.

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát.

A stabilitást $F'(x)$ előjeléből állapíthatjuk meg:

$$F'(x) = 30x^2 + 2x - 0,2$$

- kis amplitúdójú
rezgések
- egy példa
- egy másik példa

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát.

A stabilitást $F'(x)$ előjeléből állapíthatjuk meg:

$$F'(x) = 30x^2 + 2x - 0,2$$

$$F'(x_1) = -0,2 \quad F'(x_2) = 0,3 \quad F'(x_3) = 0,6$$

Ezek közül csak az első negatív, tehát csak $x_1 = 0$ körül alakul ki rezgés.

...

Ennek gyökei: (másodfokú egyenlet megoldásával)

$$x_2 = 0,1 \quad x_3 = -0,2$$

Három egyensúlyi helyzetünk van tehát.

A stabilitást $F'(x)$ előjeléből állapíthatjuk meg:

$$F'(x) = 30x^2 + 2x - 0,2$$

$$F'(x_1) = -0,2 \quad F'(x_2) = 0,3 \quad F'(x_3) = 0,6$$

Ezek közül csak az első negatív, tehát csak $x_1 = 0$ körül alakul ki rezgés.

$$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_1)}{m}} \approx 0,169 \frac{1}{s} \quad T = 2\pi/\omega = 37,2 s$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

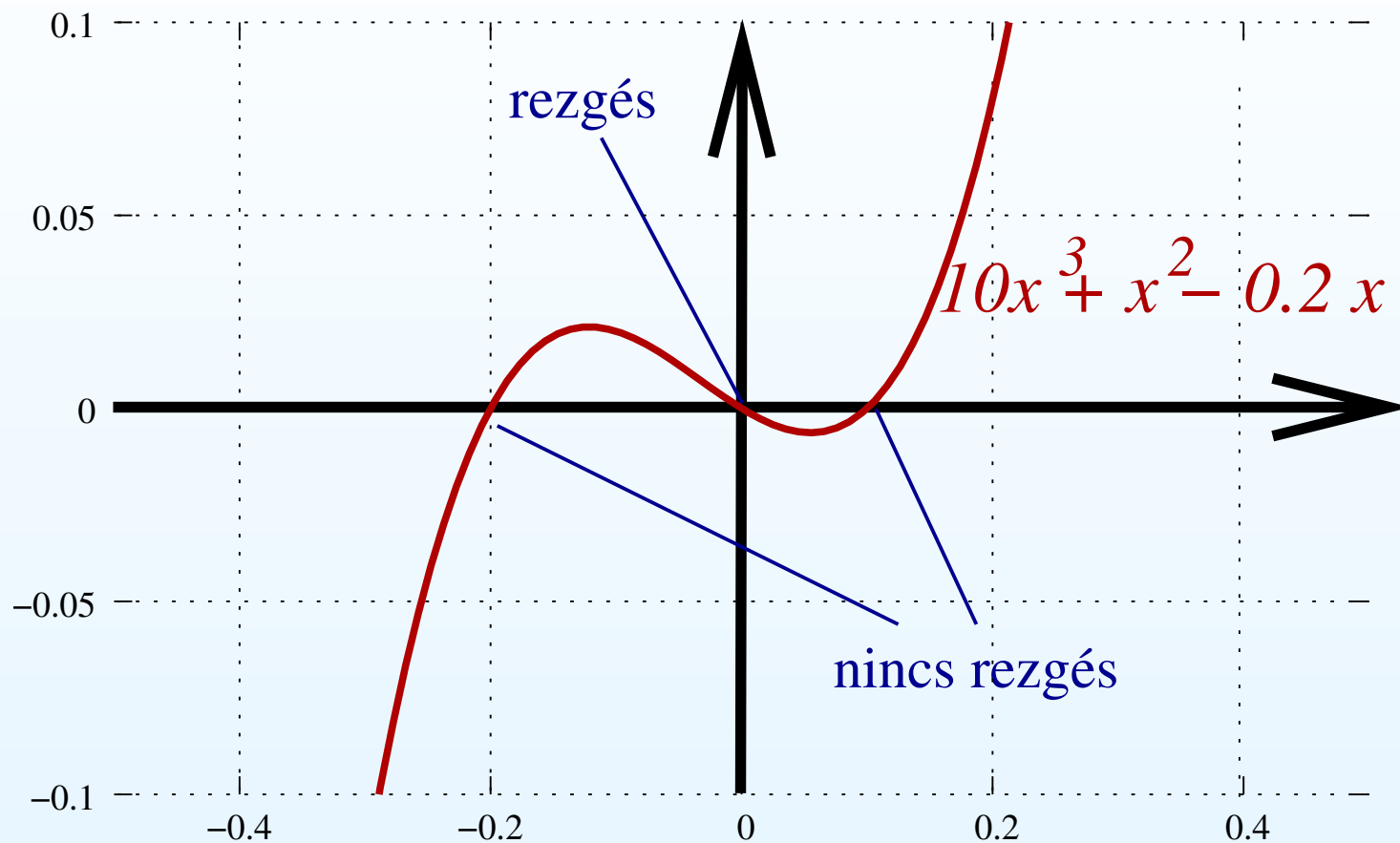
Kis amplitúdójú rezgések

- kis amplitúdójú rezgések
- egy példa
- egy másik példa

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

A csillapított rezgőmozgás

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- **a csillapodás oka**
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

a csillapodás oka

A közegellenállást, súrlódást és egyéb fékező hatásokat eddig elhanyagoltuk, pedig fontosak: ha egy testet rezgésbe hozok, de magára hagyok, az egyre kisebb amplitúdóval fog rezegni.
(→ritka közegben, →sűrű közegben)

a csillapodás oka

A közegellenállást, súrlódást és egyéb fékező hatásokat eddig elhanyagoltuk, pedig fontosak: ha egy testet rezgésbe hozok, de magára hagyok, az egyre kisebb amplitúdóval fog rezegni.

(→ritka közegben, →sűrű közegben)

Vegyük figyelembe a közeg hatását:

$$F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} = m \cdot a$$

a csillapodás oka

A közegellenállást, súrlódást és egyéb fékező hatásokat eddig elhanyagoltuk, pedig fontosak: ha egy testet rezgésbe hozok, de magára hagyok, az egyre kisebb amplitúdóval fog rezegni.

(→ritka közegben, →sűrű közegben)

Vegyük figyelembe a közeg hatását:

$$F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} = m \cdot a$$

Itt $F_{\text{rugó}} = -Dx$, a közeg hatását pedig írjuk fel a következő alakban:

$$F_{\text{közeg}} = -C \cdot v$$

Tehát sebességgel arányos fékezőerőt tételezünk fel. Ez pl. kis sebességű mozgásnál jó közelítéssel igaz a közegellenállásra.

a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- **a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete**
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

D/m -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájának négyzetét, azaz $D/m = \omega_0^2$.

a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka

- a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete

- kis csillapítások esete

- egy példa

- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

D/m -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájának négyzetét, azaz $D/m = \omega_0^2$.

C/m valamiképp a fékezés hatékonyságát méri. Jelöljük ezt 2β -val. β szokásos neve: **csillapítási tényező**.

a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka

- a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete

- kis csillapítások esete

- egy példa

- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

D/m -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájának négyzetét, azaz $D/m = \omega_0^2$.

C/m valamiképp a fékezés hatékonyságát méri. Jelöljük ezt 2β -val. β szokásos neve: **csillapítási tényező**.

Így a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v$$

a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka

- a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete

- kis csillapítások esete

- egy példa

- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Az előzőeket folytatva:

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a$$

Átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x - \frac{C}{m}v$$

D/m -ben felismerhetjük a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájának négyzetét, azaz $D/m = \omega_0^2$.

C/m valamiképp a fékezés hatékonyságát méri. Jelöljük ezt 2β -val. β szokásos neve: **csillapítási tényező**.

Így a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v$$

Másképp:

$$x'' = -\omega_0^2 x - 2\beta x'$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Ennek megoldására jelenleg nincsenek meg a matematikai eszközeink. Ezért a megoldást bizonyítás nélkül közlöm:

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Ennek megoldására jelenleg nincsenek meg a matematikai eszközeink. Ezért a megoldást bizonyítás nélkül közlöm:
A megoldás jellege alapvetően különbözik ha $\omega_0 > \beta$ (kis csillapítás) illetve ha $\omega_0 \leq \beta$ (nagy csillapítás).

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

...

Ennek megoldására jelenleg nincsenek meg a matematikai eszközeink. Ezért a megoldást bizonyítás nélkül közlöm:

A megoldás jellege alapvetően különbözik ha $\omega_0 > \beta$ (kis csillapítás) illetve ha $\omega_0 \leq \beta$ (nagy csillapítás).

Ezek közül a kis csillapítás fordul elő gyakrabban, így ezt tárgyaljuk részletesen.

- a csillapodás oka
- a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

kis csillapítások esete

Amennyiben $\omega_0 > \beta$, a csillapított rezgőmozgás az alábbiak szerint zajlik:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

ahol

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

kis csillapítások esete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Amennyiben $\omega_0 > \beta$, a csillapított rezgőmozgás az alábbiak szerint zajlik:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

ahol

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Tehát a csillapított rezgés frekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan ($\omega_{cs} < \omega_0$), amplitúdója pedig A_0 -ról exponenciális függvény szerint csökken.

kis csillapítások esete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Amennyiben $\omega_0 > \beta$, a csillapított rezgőmozgás az alábbiak szerint zajlik:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

ahol

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Tehát a csillapított rezgés frekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan ($\omega_{cs} < \omega_0$), amplitúdója pedig A_0 -ról exponenciális függvény szerint csökken.

Maga az amplitúdó időbeli változása:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

kis csillapítások esete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Amennyiben $\omega_0 > \beta$, a csillapított rezgőmozgás az alábbiak szerint zajlik:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

ahol

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Tehát a csillapított rezgés frekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan ($\omega_{cs} < \omega_0$), amplitúdója pedig A_0 -ról exponenciális függvény szerint csökken.

Maga az amplitúdó időbeli változása:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

...

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

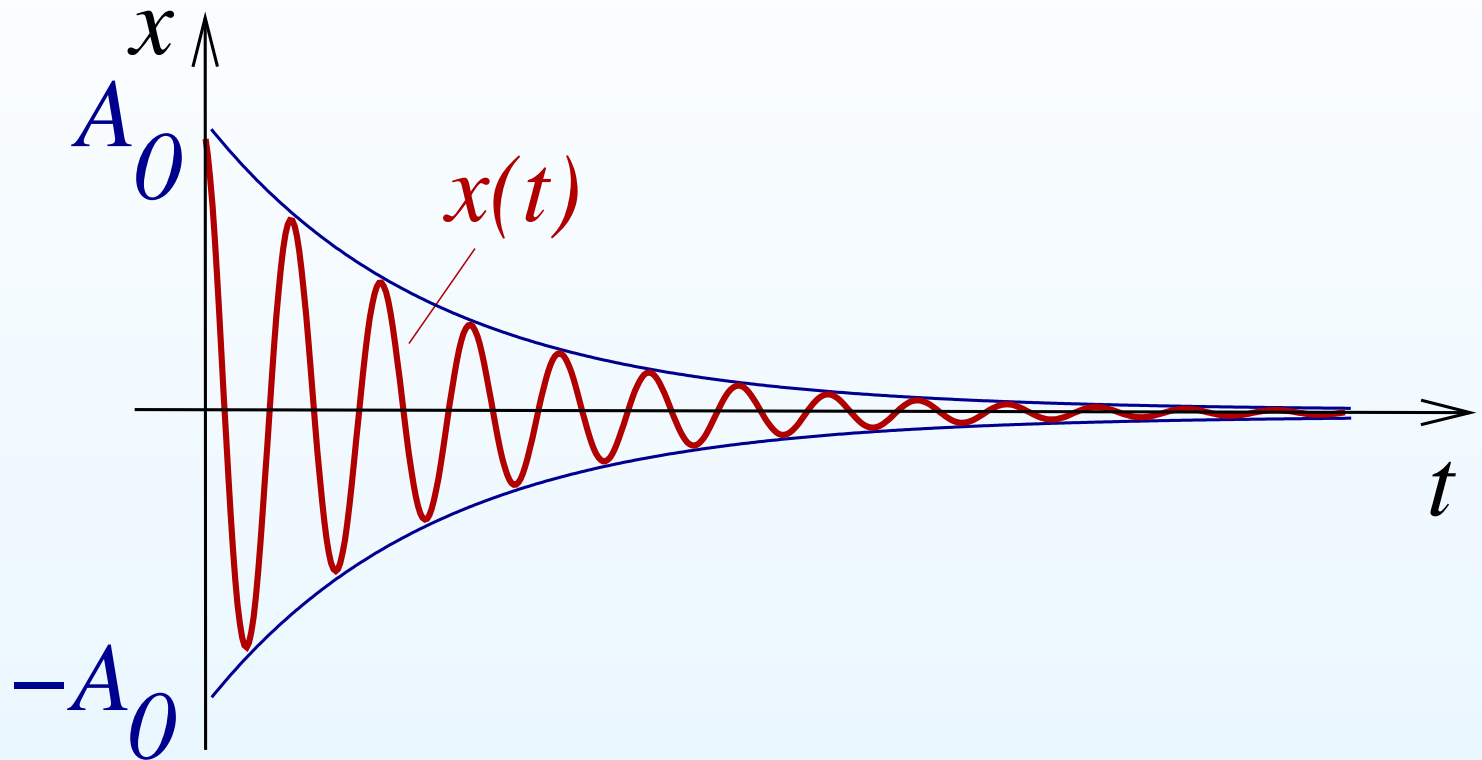
Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele



nagy csillapítások esete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

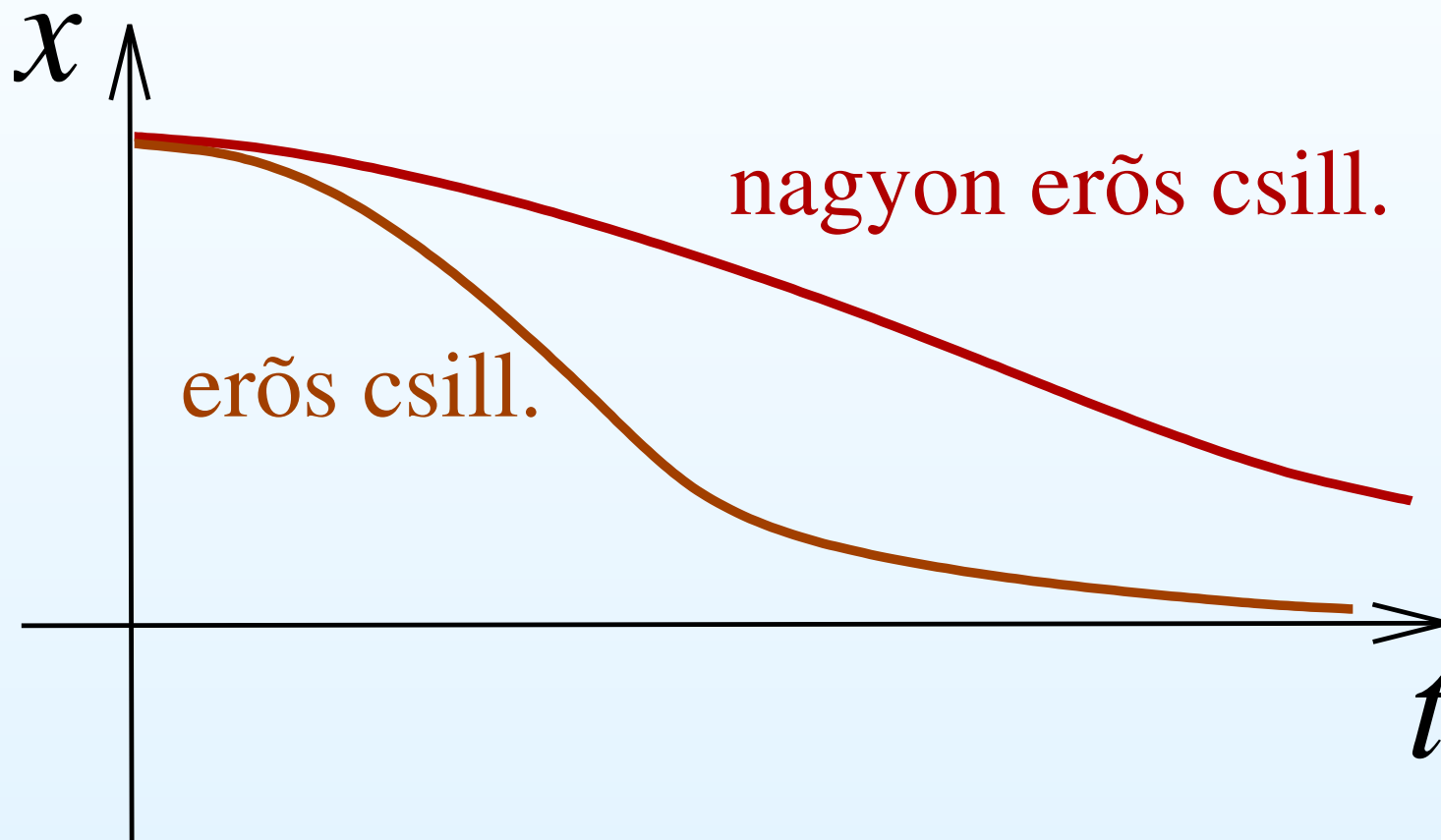
A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- **kis csillapítások esete**
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Amennyiben $\omega_0 \leq \beta$, nem is alakul ki rezgőmozgás, hanem az $x(t)$ függvény monoton csökkenően 0-hoz tart.



egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- **egy példa**
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

*Egy csillapodó rezgőmozgás amplitúdója 12 s-onként feleződik meg.
Mekkora a csillapítási tényező értéke?*

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított
rezgőmozgás
alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- **egy példa**
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

*Egy csillapodó rezgőmozgás amplitúdója 12 s-onként feleződik meg.
Mekkora a csillapítási tényező értéke?*

Megoldás: A szöveg szerint:

$$\frac{A_0}{2} = A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

ahol $t = 12$ s.

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- **egy példa**
- még egy példa

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

*Egy csillapodó rezgőmozgás amplitúdója 12 s-onként feleződik meg.
Mekkora a csillapítási tényező értéke?*

Megoldás: A szöveg szerint:

$$\frac{A_0}{2} = A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

ahol $t = 12$ s.

Innen egyszerű átrendezeéssel:

$$\beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,0578 \frac{1}{s}$$

még egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája $1,3 \text{ Hz}$, amplitúdója kezdetben 15 cm , 10 s múlva már csak 3 cm .

Mikor lesz amplitúdója kisebb, mint 1 mm ? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?

még egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája 1,3 Hz, amplitúdója kezdetben 15 cm, 10 s múlva már csak 3 cm.

Mikor lesz amplitúdója kisebb, mint 1 mm? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?

Megoldás: A feladat szerint:

$$A_0 = 0,15 \text{ m} \quad A_1 = 0,03 \text{ m} \quad t_1 = 10 \text{ s} \quad \omega_{cs} = 1,3 \text{ Hz}$$

még egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája 1,3 Hz, amplitúdója kezdetben 15 cm, 10 s múlva már csak 3 cm.

Mikor lesz amplitúdója kisebb, mint 1 mm? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?

Megoldás: A feladat szerint:

$$A_0 = 0,15 \text{ m} \quad A_1 = 0,03 \text{ m} \quad t_1 = 10 \text{ s} \quad \omega_{cs} = 1,3 \text{ Hz}$$

Tudjuk, hogy

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}$$

még egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

- a csillapodás oka
- a csillapított rezgőmozgás alapegyenlete
- kis csillapítások esete
- egy példa
- még egy példa

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája 1,3 Hz, amplitúdója kezdetben 15 cm, 10 s múlva már csak 3 cm.

Mikor lesz amplitúdója kisebb, mint 1 mm? Mennyi lenne a rezgés frekvenciája, ha nem lennének csillapítóerők?

Megoldás: A feladat szerint:

$$A_0 = 0,15 \text{ m} \quad A_1 = 0,03 \text{ m} \quad t_1 = 10 \text{ s} \quad \omega_{cs} = 1,3 \text{ Hz}$$

Tudjuk, hogy

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}$$

innét egyszerű átrendezéssel:

$$\beta = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{A_1}{A_0} = 0,16 \frac{1}{\text{s}}$$

...

Keressük azt a t_2 időpontot, melyre $A(t_2) = A_2 = 0,001 \text{ m}$:

...

Keressük azt a t_2 időpontot, melyre $A(t_2) = A_2 = 0,001 \text{ m}$:

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2} \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{A_2}{A_0} = 31,1 \text{ s}$$

...

Keressük azt a t_2 időpontot, melyre $A(t_2) = A_2 = 0,001 \text{ m}$:

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2} \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{A_2}{A_0} = 31,1 \text{ s}$$

(Figyelem! Az amplitúdó nem lineárisan csökkent!)

...

Keressük azt a t_2 időpontot, melyre $A(t_2) = A_2 = 0,001 \text{ m}$:

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2} \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{A_2}{A_0} = 31,1 \text{ s}$$

(Figyelem! Az amplitúdó nem lineárisan csökkent!)

A csillapítatlan ω_0 frekvencia a fenti

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

...

Keressük azt a t_2 időpontot, melyre $A(t_2) = A_2 = 0,001 \text{ m}$:

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2} \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{A_2}{A_0} = 31,1 \text{ s}$$

(Figyelem! Az amplitúdó nem lineárisan csökkent!)

A csillapítatlan ω_0 frekvencia a fenti

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

összefüggésből kapható meg:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{cs}^2 + \beta^2} = 1,31 \text{ Hz}$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

**A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés**

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

gerjesztett rezgések alapegyenlete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

● **gerjesztett rezgések
alapegyenlete**

- a gerjesztett rezgés időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

Mi történik akkor, ha a kezdeti rezgésbe hozáson kívül a testet egy külső erő állandóan “rezgeti”, azaz gerjeszti a rezgést. (Pl. hinta külső állandó lökődéssel.)

gerjesztett rezgések alapegyenlete

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

● gerjesztett rezgések alapegyenlete

- a gerjesztett rezgés időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

Mi történik akkor, ha a kezdeti rezgésbe hozáson kívül a testet egy külső erő állandóan “rezgeti”, azaz gerjeszti a rezgést. (Pl. hinta külső állandó lökődéssel.)

Legegyszerűbb eset: amikor a gerjesztő erő szinuszosan változik:

$$ma = F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} + F_g$$

ahol

$$F_g = F_0 \sin(\omega_g t)$$

gerjesztett rezgések alapegyenlete

Mi történik akkor, ha a kezdeti rezgésbe hozáson kívül a testet egy külső erő állandóan “rezgeti”, azaz gerjeszti a rezgést. (Pl. hinta külső állandó lökődéssel.)

Legegyszerűbb eset: amikor a gerjesztő erő szinuszosan változik:

$$ma = F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} + F_g$$

ahol

$$F_g = F_0 \sin(\omega_g t)$$

A fentiekhez hasonlóan:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v + a_0 \sin(\omega_g t)$$

ahol $a_0 = F_0/m$.

a gerjesztett rezgés időbeli lefutása

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

Kis csillapítások esetén a megoldás:

$$x(t) = A_g \cdot \sin(\omega_g t + \delta) + A \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

a gerjesztett rezgés időbeli lefutása

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

Kis csillapítások esetén a megoldás:

$$x(t) = A_g \cdot \sin(\omega_g t + \delta) + A \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

(A bizonyítás túl bonyolult, elvileg ellenőrizhetjük a megoldás helyességét deriválással.)

a gerjesztett rezgés időbeli lefutása

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete

- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása

- a rezonancia

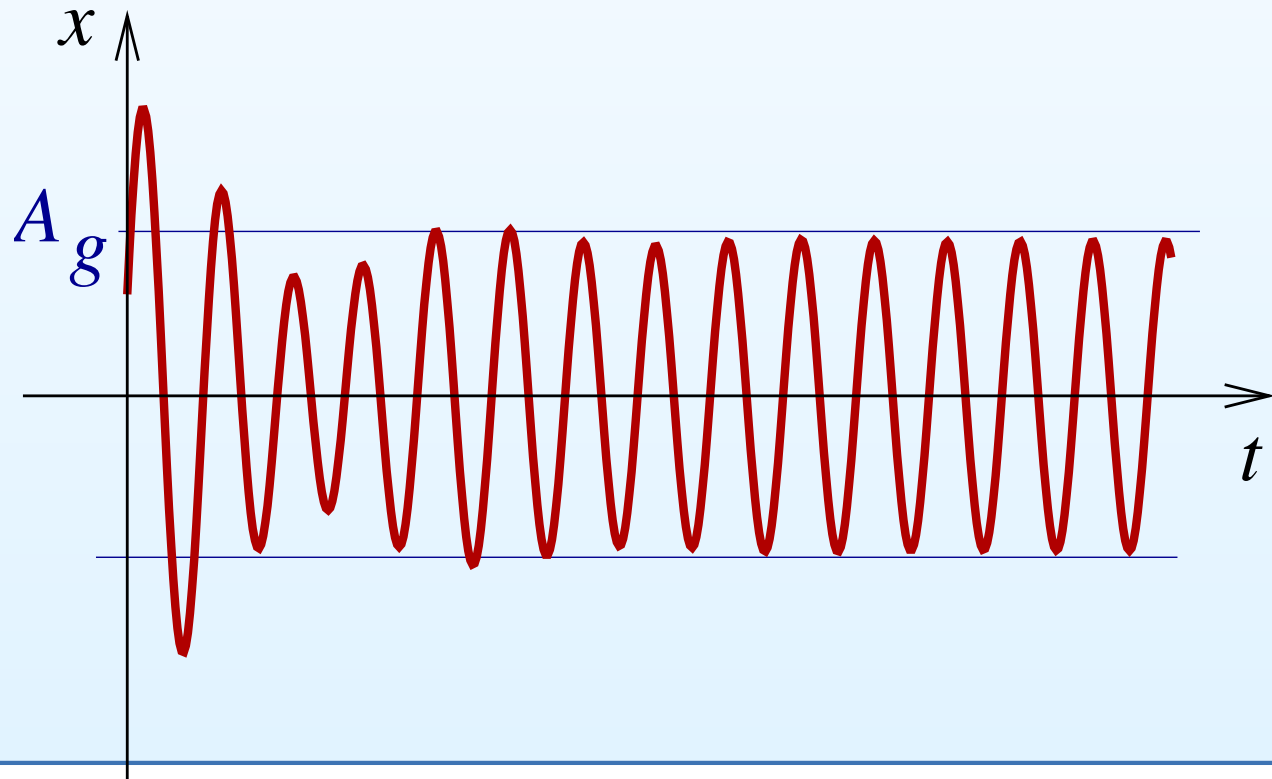
- egy példa

Rezgések összetétele

Kis csillapítások esetén a megoldás:

$$x(t) = A_g \cdot \sin(\omega_g t + \delta) + A \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0)$$

(A bizonyítás túl bonyolult, elvileg ellenőrizhetjük a megoldás helyességét deriválással.)



a rezonancia

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

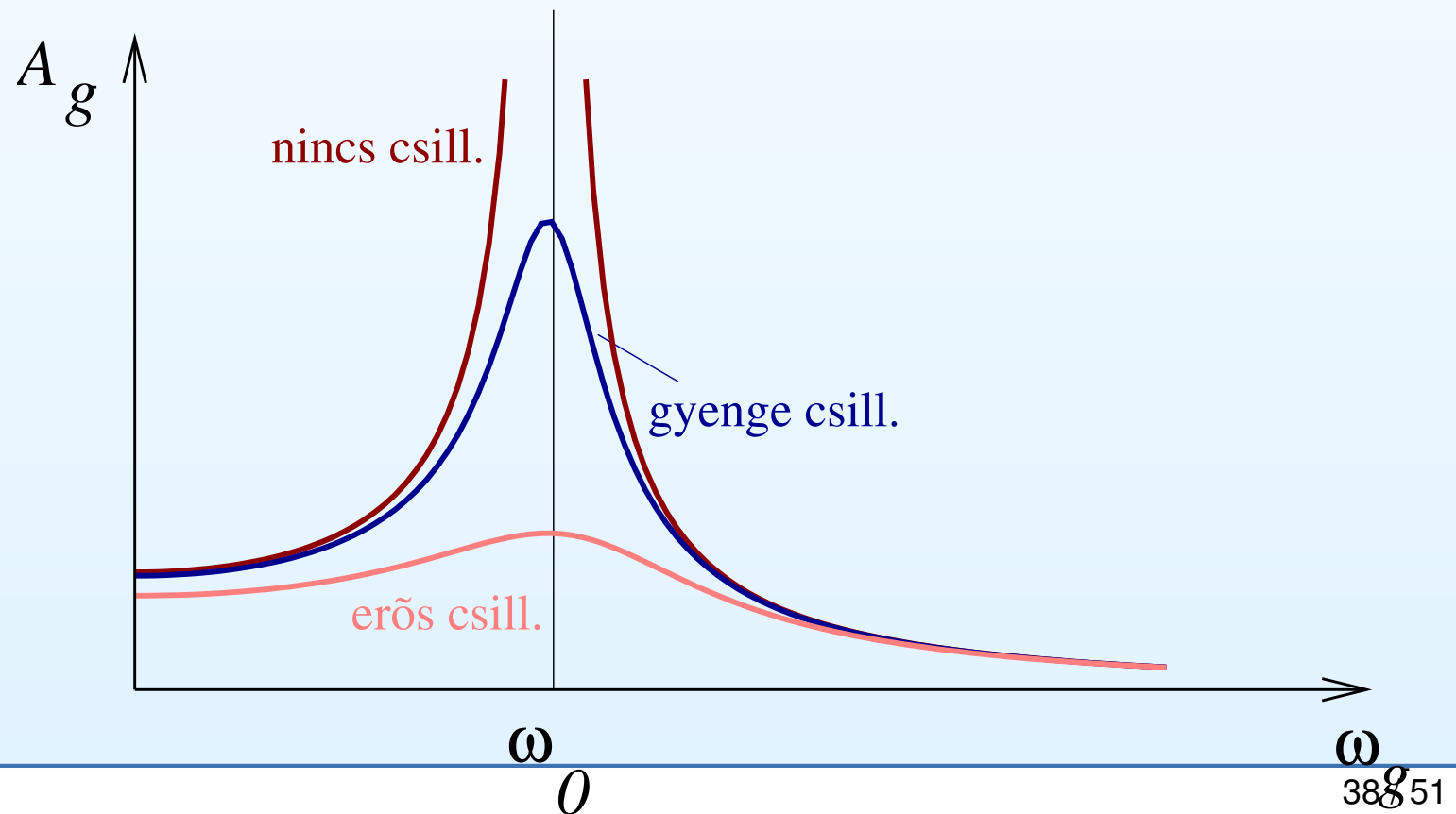
A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- **a rezonancia**
- egy példa

Rezgések összetétele

Hosszú távon tehát A_g számít. Ennek kifejezése:

$$A_g = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}$$



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

...

A sajátfrekvencia környékén tehát a gerjesztett rezgés amplitúdója igen megnőhet, ha a csillapítás kicsi. Ez a **rezonancia** jelensége.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

...

A sajátfrekvencia környékén tehát a gerjesztett rezgés amplitúdója igen megnőhet, ha a csillapítás kicsi. Ez a **rezonancia** jelensége.

Egyszerű példa: →rezgetett végű rugón lógó test.

Ez sokszor fellép a gyakorlatban, →néha káros, néha hasznos.

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- **egy példa**

Rezgések összetétele

Egy rezgés sajátfrekvenciája $\omega_0 = 12,4 \text{ 1/s}$. A rezgés amplitúdója $3,2 \text{ s}$ alatt feleződik meg. Hányszor nagyobb amplitúdójú gerjesztett rezgések jönnek létre a sajátfrekvencián, mint igen kis frekvenciákon?

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- **egy példa**

Rezgések összetétele

Egy rezgés sajátfrekvenciája $\omega_0 = 12,4$ 1/s. A rezgés amplitúdója 3,2 s alatt feleződik meg. Hányszor nagyobb amplitúdójú gerjesztett rezgések jönnek létre a sajátfrekvencián, mint igen kis frekvenciákon?

Megoldás:

A gerjesztett rezgések amplitúdója:

$$A_g(\omega_g) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}$$

egy példa

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- **egy példa**

Rezgések összetétele

Egy rezgés sajátfrekvenciája $\omega_0 = 12,4$ 1/s. A rezgés amplitúdója 3,2 s alatt feleződik meg. Hányszor nagyobb amplitúdójú gerjesztett rezgések jönnek létre a sajátfrekvencián, mint igen kis frekvenciákon?

Megoldás:

A gerjesztett rezgések amplitúdója:

$$A_g(\omega_g) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}$$

A sajátfrekvencián kialakuló rezgések esetében ez:

$$A_g(\omega_0) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2}} = \frac{a_0}{2\beta\omega_0}$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

...

Igen kis frekvencián:

$$A_g(0) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0^2)^2 + 4\beta^2 0^2}} = \frac{a_0}{\omega_0^2}$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

...

Igen kis frekvencián:

$$A_g(0) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0^2)^2 + 4\beta^2 0^2}} = \frac{a_0}{\omega_0^2}$$

Ezek arányát kérdezi a feladat:

$$\frac{A_g(\omega_0)}{A_g(0)} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

Mennyi lesz β ?

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

Rezgések összetétele

...

Mennyi lesz β ? Mivel a rezgés amplitúdója $t = 3,2$ s alatt feleződik meg:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{\beta t} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,217 \frac{1}{s}$$

- gerjesztett rezgések
alapegyenlete
- a gerjesztett rezgés
időbeli lefutása
- a rezonancia
- egy példa

...

Mennyi lesz β ? Mivel a rezgés amplitúdója $t = 3,2$ s alatt feleződik meg:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{\beta t} \Rightarrow \beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,217 \frac{1}{s}$$

A kért arány tehát:

$$\frac{A_g(\omega_0)}{A_g(0)} = \frac{\omega_0}{2\beta} = 28,6$$

Tehát a rezonanciafrekvencián kialakuló rezgések amplitúdója 28,6-szor nagyobb a kis frekvenciák mellett kialakuló amplitúdónál. (Ez valóban jelentős különbség: a frekvenciától függően tehát kb. 30-szoros eltérés lehet a gerjesztett rendszer amplitúdójában.)

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Rezgések összetétele

Bevezetés

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- **Bevezetés**

- Alapvető
megfontolások

- megoldási módszer

- a forgóvektoros
ábrázolás

- két rezgés eredője

- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor több rezgés együttes hatása jelentkezik egy adott pontban.

Itt csak 2 rezgés eredőjének vizsgálatát végezzük el, melyek külön-külön egyenes menti rezgések.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

● Bevezetés

● Alapvető

megfontolások

● megoldási módszer

● a forgóvektoros

ábrázolás

● két rezgés eredője

● azonos frekvenciájú rezgések eredője

Bevezetés

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor több rezgés együttes hatása jelentkezik egy adott pontban.

Itt csak 2 rezgés eredőjének vizsgálatát végezzük el, melyek külön-külön egyenes menti rezgések.

Nyilván egész más lesz az eredmény, ha a két rezgés egyirányú, vagy ha merőleges egymásra:

Bevezetés

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor több rezgés együttes hatása jelentkezik egy adott pontban.

Itt csak 2 rezgés eredőjének vizsgálatát végezzük el, melyek külön-külön egyenes menti rezgések.

Nyilván egész más lesz az eredmény, ha a két rezgés egyirányú, vagy ha merőleges egymásra:

Egyirányú rezgések: eredőjük egyenes menti rezgés.

Merőleges rezgések: eredőjük síkmozgás.

Bevezetés

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor több rezgés együttes hatása jelentkezik egy adott pontban.

Itt csak 2 rezgés eredőjének vizsgálatát végezzük el, melyek külön-külön egyenes menti rezgések.

Nyilván egész más lesz az eredmény, ha a két rezgés egyirányú, vagy ha merőleges egymásra:

Egyirányú rezgések: eredőjük egyenes menti rezgés.

Merőleges rezgések: eredőjük síkmozgás.

Sőt! Tovább korlátozzuk a vizsgálatokat harmonikus rezgésekre.

Alapvető meggondolások

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- **Alapvető meggondolások**
- megoldási módszer
- a forgóvektoros ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú rezgések eredője

Két harmonikus rezgés összege:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Alapvető meggondolások

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés

- **Alapvető
meggondolások**

- megoldási módszer

- a forgóvektoros
ábrázolás

- két rezgés eredője

- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Két harmonikus rezgés összege:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Ha semmit nem tudunk az együtthatókról, semmi különös nem állítható a két rezgés összegéről.

Például ha ω_1 / ω_2 nem racionális, az eredő nem is lesz periódikus.

Alapvető meggondolások

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés

- **Alapvető
meggondolások**

- megoldási módszer

- a forgóvektoros
ábrázolás

- két rezgés eredője

- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Két harmonikus rezgés összege:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Ha semmit nem tudunk az együtthatókról, semmi különös nem állítható a két rezgés összegéről.

Például ha ω_1 / ω_2 nem racionális, az eredő nem is lesz periódikus.

Gyakorlat szempontjából fontos eset: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

megoldási módszer

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- **megoldási módszer**
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Probléma: milyen mozgást takar a következő egyenlet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- **megoldási módszer**
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

megoldási módszer

Probléma: milyen mozgást takar a következő egyenlet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Kétféle módszer lehetséges:

- matematikai azonosságokkal (addíciós tételek)
- grafikus szemléltetéssel

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- **megoldási módszer**
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

megoldási módszer

Probléma: milyen mozgást takar a következő egyenlet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Kétféle módszer lehetséges:

- matematikai azonosságokkal (addíciós tételek)
- grafikus szemléltetéssel

Mi az utóbbit választjuk. Módszer neve: **forgóvektoros ábrázolás**.

megoldási módszer

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
meggondolások
- **megoldási módszer**
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Probléma: milyen mozgást takar a következő egyenlet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Kétféle módszer lehetséges:

- matematikai azonosságokkal (addíciós tételek)
- grafikus szemléltetéssel

Mi az utóbbit választjuk. Módszer neve: **forgóvektoros ábrázolás**.

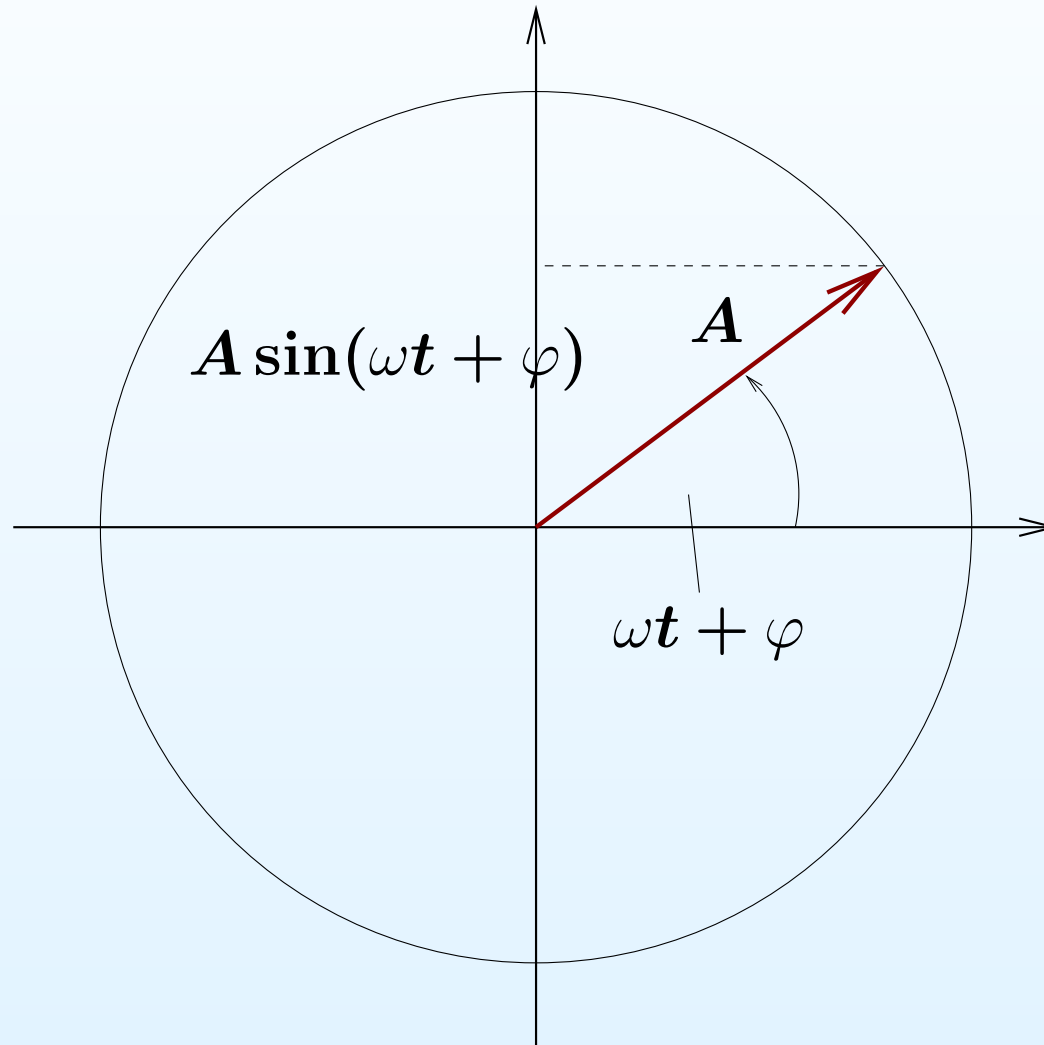
Alapötlet: forogjon egy A hosszúságú vektor úgy, hogy irányszöge $\omega t + \varphi$ szerint változzon. Ekkor 2. koordinátája épp egy harmonikus rezgést ír le:

$$A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Szinuszos rezgőmozgás helyett egyenletes körmozgást vizsgálunk.

a forgóvektoros ábrázolás

Szemléltessük az előzőket:



Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

két rezgés eredője

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Forgóvektoros ábrázolással két rezgés eredője is kiszámolható.
Ötlet: a vektorok komponensenként is összeadhatók,

két rezgés eredője

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

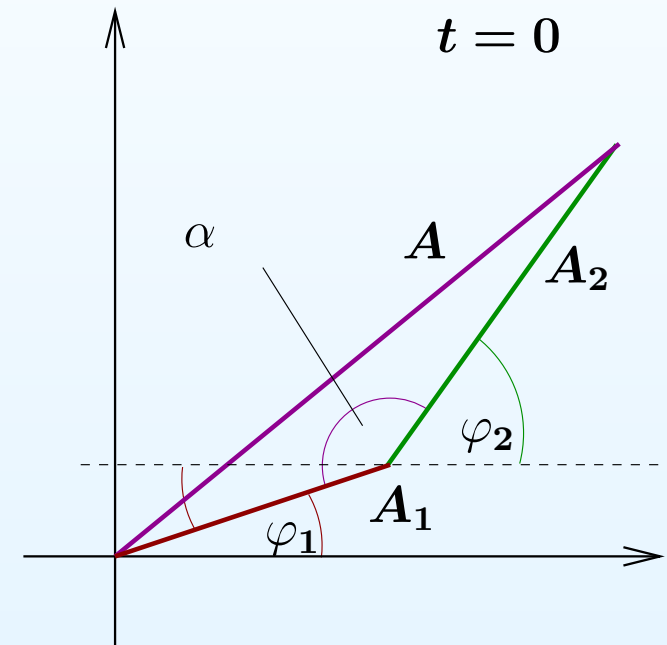
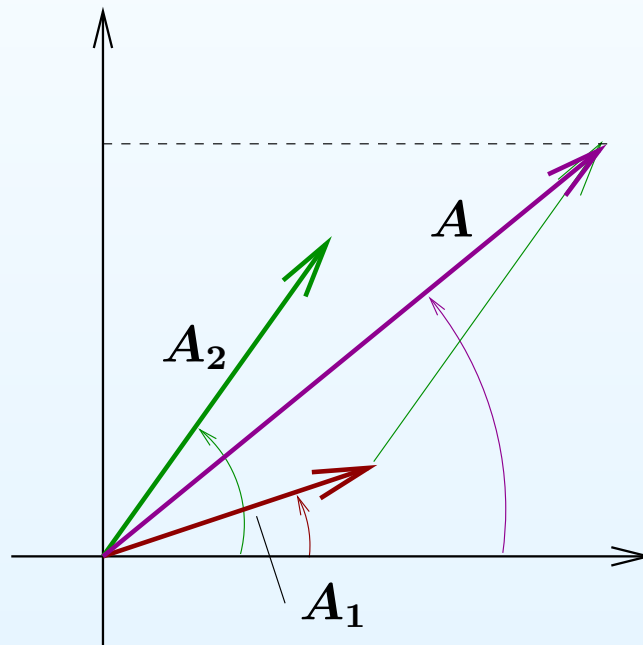
A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú rezgések eredője

Forgóvektoros ábrázolással két rezgés eredője is kiszámolható. Ötlet: a vektorok komponensenként is összeadhatók, A forgóvektorokat adjuk össze, és az összeg 2. koordinátáját figyeljük.



Könnyű belátni, hogy $\alpha = \pi - \varphi_2 + \varphi_1$

...

A cosinus-tételből:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$$

...

A cosinus-tételből:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \varphi_2 + \varphi_1) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Innen az eredő amplitudó:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

...

A cosinus-tételből:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \varphi_2 + \varphi_1) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Innen az eredő amplitudó:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Ha a rezgések frekvenciája egyenlő, a vektorok ugyanolyan ütemben fordulnak körbe, így az előző ábra vektorait csak elforgatni kell.

Ekkor az eredő tiszta szinuszos rezgés lesz a fenti A amplitudóval.

azonos frekvenciájú rezgések eredője

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Az előzőek alapján tehát az azonos frekvenciájú rezgések eredője tiszta szinuszos rezgés, melynek amplitudója:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

azonos frekvenciájú rezgések eredője

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus
rezgőmozgás

Kis amplitúdójú
rezgések

A csillapított
rezgőmozgás

A gerjesztett
rezgőmozgás,
kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Az előzőek alapján tehát az azonos frekvenciájú rezgések eredője tiszta szinuszos rezgés, melynek amplitudója:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

Adott A_1 és A_2 esetén ez csak a $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ fáziskülönbségtől függ.

azonos frekvenciájú rezgések eredője

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

Az előzőek alapján tehát az azonos frekvenciájú rezgések eredője tiszta szinuszos rezgés, melynek amplitudója:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

Adott A_1 és A_2 esetén ez csak a $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ fáziskülönbségtől függ. Ez a függés monoton: A akkor a legnagyobb, ha $\Delta\varphi$ a legnagyobb és viszont.

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

...

Ez alapján a lehető **legnagyobb eredő amplitudó** esetén $\Delta\varphi = 0 + k \cdot 2\pi$, ahol k tetszőleges egész, hisz ekkor $\cos \Delta\phi = 1$.

A legnagyobb eredő amplitudó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot 1} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

Bevezetés

Rezgések kialakulása

A harmonikus rezgőmozgás

Kis amplitúdójú rezgések

A csillapított rezgőmozgás

A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Rezgések összetétele

- Bevezetés
- Alapvető
meggondolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

...

Ez alapján a lehető **legnagyobb eredő amplitudó** esetén $\Delta\varphi = 0 + k \cdot 2\pi$, ahol k tetszőleges egész, hisz ekkor $\cos \Delta\phi = 1$.

A legnagyobb eredő amplitudó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot 1} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

Hasonlóan: **legkisebb eredő amplitudó** akkor lesz, ha $\Delta\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$, ekkor $\cos \Delta\phi = -1$.

A legkisebb eredő amplitudó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot (-1)} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$

- Bevezetés
- Alapvető
megfontolások
- megoldási módszer
- a forgóvektoros
ábrázolás
- két rezgés eredője
- azonos frekvenciájú
rezgések eredője

...

Ez alapján a lehető **legnagyobb eredő amplitudó** esetén $\Delta\varphi = 0 + k \cdot 2\pi$, ahol k tetszőleges egész, hisz ekkor $\cos \Delta\phi = 1$.

A legnagyobb eredő amplitudó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot 1} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

Hasonlóan: **legkisebb eredő amplitudó** akkor lesz, ha $\Delta\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$, ekkor $\cos \Delta\phi = -1$.

A legkisebb eredő amplitudó tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot (-1)} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$

Az eredő amplitudó tehát $A_1 + A_2$ és $|A_1 - A_2|$ közt bármilyen érték lehet.