

Értékünk AZ Ember

Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program



Berta Miklós
Farzan Ruszlán
Giczi Ferenc
Horváth András

Fizika mérnököknek



SZÉCHENYI ISTVÁN
EGYETEM
GYŐR

Magyarország célba ér



Készült a HEFOP 3.3.1-P-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával

Szerzők:

Berta Miklós: 181–221, 585–624, 632–649, 668–689, 764–781. oldalak

Farzan Ruszlán: 364–482. oldalak

Giczi Ferenc: 77–131, 543–584, 650–667. oldalak

Horváth András: 13–76, 132–180, 222–363, 483–542, 625–631, 690–763, 782–788. oldalak

Lektor: **Dr. Kálmán Péter**, egyetemi docens, a fizikai tudomány doktora.

©Berta Miklós, Farzan Ruszlán, Giczi Ferenc, Horváth András, 2006.

Tartalomjegyzék

Előszó	13
1. A mechanika alapjai	14
1.1. Pontszerű testek kinematikája	14
1.1.1. A pillanatnyi sebesség	18
1.1.2. Szemléltetés egyenes menti mozgások esetén	21
1.1.3. A gyorsulás	23
1.1.4. Fontos mozgásfajták	26
1.2. Pontszerű testek dinamikája	31
1.2.1. A Newton-törvények	31
1.2.2. A lendület, a lendületmegmaradás törvénye	36
1.2.3. A tömeg mérése	37
1.2.4. A perdület	38
1.3. A munka és az energia	43
1.3.1. A munkatétel	45
1.3.2. A potenciális energia	48
1.3.3. A mechanikai energiamegmaradás törvénye	49
1.4. A legfontosabb erőfajták	50
1.4.1. Konzervatív erők	50
1.4.2. Nem konzervatív erők	54
1.5. A newtoni mechanika korlátai	58
1.6. Kérdések és feladatok	60
1.6.1. Elméleti kérdések	60
1.6.2. Kidolgozott feladatok	61
1.6.3. Gyakorló feladatok	69
1.7. Pontrendszerek mozgása	70
1.7.1. A tömegközéppont mozgása	71
1.7.2. A pontrendszer lendülete	73
1.7.3. A pontrendszer perdülete	74
1.8. Merev testek síkmozgása	77
1.8.1. A merev test helyzetének meghatározása	77
1.8.2. A merev testek mozgása	77
1.8.3. A merev testre ható erők összetevése	80
1.8.4. Erők forgatónyomatéka	85
1.8.5. Tetszőleges erőrendszer redukálása	87
1.8.6. Merev test súlypontjának fogalma	88

1.8.7.	A merev test egyensúlyának általános feltételei . . .	91
1.8.8.	A merev test dinamikája	91
1.9.	Kérdések és feladatok	100
1.9.1.	Elméleti kérdések	100
1.9.2.	Kidolgozott feladatok	103
1.9.3.	Gyakorló feladatok	106
1.10.	Deformálható testek mechanikája	108
1.10.1.	A nyújtás (összenyomás)	109
1.10.2.	A kompresszió	112
1.10.3.	A nyírás	114
1.10.4.	A csavarás (torzió)	116
1.10.5.	A lehajlás	119
1.10.6.	A rugalmasság határai	122
1.11.	Kérdések és feladatok	124
1.11.1.	Elméleti kérdések	124
1.11.2.	Kidolgozott feladatok	125
1.11.3.	Gyakorló feladatok	129
2.	Rezgőmozgások	132
2.1.	Egyenes menti rezgések	132
2.1.1.	A harmonikus rezgőmozgás	133
2.1.2.	Kis rezgések periódusideje	140
2.1.3.	A csillapított rezgőmozgás	145
2.1.4.	A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés	151
2.2.	Rezgések összetétele	157
2.2.1.	Egyirányú rezgések eredője	157
2.2.2.	Egymásra merőleges rezgések összetétele	164
2.3.	Speciális rezgések	168
2.3.1.	Az inga mozgása	169
2.3.2.	Torziós rezgések	170
2.3.3.	Hajlítási rezgések	171
2.3.4.	Elektromos rezgőkör	172
2.3.5.	Csatolt rezgések	173
2.4.	Kérdések és feladatok	175
2.4.1.	Elméleti kérdések	175
2.4.2.	Kidolgozott feladatok	176
2.4.3.	Gyakorló feladatok	179

3. Hullámmozgás	181
3.1. Egyenes menti hullámok kinematikája	182
3.1.1. Periodikus és harmonikus egyenes menti hullámok	185
3.2. Egyenes menti hullámok dinamikája	187
3.2.1. Hullámok viselkedése közeghatároknál.	189
3.2.2. Energiaterjedés egydimenziós harmonikus hullámokban	191
3.3. Síkbeli és térbeli hullámok kinematikája	193
3.4. Interferenciajelenségek.	195
3.4.1. Állóhullámok	199
3.5. A Huygens-Fresnel elv	203
3.6. Hullámcsomag	208
3.7. Mozgó források esete	211
3.8. Kérdések és feladatok	215
3.8.1. Elméleti kérdések	215
3.8.2. Kidolgozott feladatok	216
3.8.3. Gyakorló feladatok	219
4. Hangtan	222
4.1. Alapfogalmak	222
4.1.1. Távolságmérés és képalkotás hanggal	224
4.2. A hang erősségének mérőszámai	227
4.2.1. A hangintenzitás	227
4.2.2. A hangnyomásszint	227
4.2.3. A fon-skála	230
4.3. A hang terjedése gázokban	233
4.3.1. Bevezetés	233
4.3.2. Alapvető összefüggések	235
4.3.3. A hullámegyenlet	237
4.3.4. A harmonikus hanghullám leírása	241
4.3.5. Összefoglalás	244
4.3.6. Néhány anyag hangtani paraméterei	245
4.4. Hang terjedése folyadékokban	247
4.5. Hullámok terjedése szilárd testekben	249
4.6. A hang gyengülése, elnyelődése	254
4.6.1. Hangvisszaverődés nagyméretű közeghatáron	254
4.6.2. Hangvisszaverődés a gyakorlatban	259
4.6.3. Hangelnyelődés közegek belsejében	262

4.6.4.	Hangelnyelődés zárt térben	272
4.6.5.	Hangelnyelődés falakban	277
4.7.	Kérdések és feladatok	287
4.7.1.	Elméleti kérdések	287
4.7.2.	Kidolgozott feladatok	289
4.7.3.	Gyakorló feladatok	296
5.	Optika	298
5.1.	Bevezetés	298
5.1.1.	A fény és az elektromágneses spektrum	299
5.1.2.	A fény sebessége	302
5.1.3.	A fényhullámok interferenciája	303
5.1.4.	A fény polarizációja	305
5.2.	Hullámoptika	308
5.2.1.	Fény elhajlása kis lyukakon és réseken	308
5.2.2.	Az optikai rács	312
5.2.3.	Fényelhajlás széles résen	313
5.3.	Geometriai optika	316
5.4.	A képképzés alapfogalmai	316
5.5.	Egyszerű képképző eszközök	318
5.5.1.	A lyukkamera	318
5.5.2.	Síktükör képképzése	319
5.5.3.	Lencsék képképzése	320
5.5.4.	Gömbtükörök képképzése	327
5.6.	A képképző eszközök korlátai	329
5.6.1.	Geometriai hibák	329
5.6.2.	Diszperzió	330
5.6.3.	Fényelhajlás	330
5.7.	Egyszerű optikai berendezések	332
5.7.1.	Az emberi szem képképzése	332
5.7.2.	Az egyszerű nagyító	333
5.7.3.	A fényképezőgép	336
5.7.4.	A vetítógép	339
5.7.5.	Optikai háttértárolók optikája	342
5.8.	Összetett képképző eszközök	343
5.8.1.	A távcsövek működése	343
5.8.2.	A távcsövek felbontóképessége	348
5.8.3.	A mikroszkóp működése	352

5.9.	Kérdések és feladatok	355
5.9.1.	Elméleti kérdések	355
5.9.2.	Kidolgozott feladatok	358
5.9.3.	Gyakorló feladatok	362
6.	Elektromos és mágneses terek	364
6.1.	Elektrosztatikai alapfogalmak	364
6.2.	Magnetosztatikai alapfogalmak	376
6.3.	Töltött részecskék mozgása vákuumban	382
6.3.1.	Mozgás homogén elektromos térben	383
6.3.2.	Mozgás homogén mágneses térben	385
6.3.3.	Az elektromos tér munkája. A részecskék gyorsítása	389
6.3.4.	Képcsövek működése	393
6.4.	Elektromos és mágneses tér anyagokban	399
6.4.1.	Elektromos tér dielektrikumban	399
6.4.2.	Ferroelektromosság. Piezoelektromosság	403
6.4.3.	Mágneses tér dielektrikumban	404
6.5.	Töltött részecskék mozgása vezetőkben és félvezetőkben	406
6.5.1.	Elektromos áramlás drift révén	407
6.5.2.	Elektromos áram diffúzió révén	408
6.5.3.	A Hall-effektus	409
6.6.	Váltakozó elektromos és mágneses terek	411
6.6.1.	Az indukció	411
6.6.2.	A rezgőkör	416
6.7.	Maxwell-egyenletek. Elektromágneses hullámok	420
6.7.1.	Maxwell-egyenletek	420
6.7.2.	Elektromágneses hullámok kialakulása	424
6.8.	Kérdések és feladatok	427
6.8.1.	Kidolgozott feladatok	427
6.8.2.	Gyakorló kérdések és feladatok	431
7.	Termodinamika	437
7.1.	Alapfogalmak	437
7.1.1.	Állapothatározók, állapotegyenlet	437
7.1.2.	Hőmérséklet	437
7.1.3.	Hőkapacitás	439
7.1.4.	A termodinamika I. főtétele	440
7.1.5.	Állapotfüggvény	441
7.2.	Az ideális gázok termodinamikája	443

7.2.1.	Az ideális gázok állapotegyenlete	443
7.2.2.	A Maxwell-féle eloszlási függvény	445
7.2.3.	Az ekvipartíció tétele	449
7.2.4.	Az ideális gázok hőkapacitása	452
7.2.5.	A szabadsági fokok „befagyása”	453
7.3.	Szilárdtestek termodinamikája	454
7.3.1.	Hőtágulás	454
7.3.2.	Szilárdtestek hőkapacitása	455
7.4.	Körfolyamat	457
7.4.1.	Fő termodinamikai folyamatok	457
7.4.2.	Körfolyamatok, hatásfok	462
7.4.3.	Hőerőgépek	465
7.5.	A termodinamika II. és III. főtétele	467
7.5.1.	A termodinamika II. főtétele	467
7.5.2.	Entrópia	469
7.5.3.	A termodinamika III. főtétele	472
7.6.	Entalpia. Technikai munka	472
7.7.	Valódi gázok termodinamikája	476
7.8.	Kérdések és feladatok	480
7.8.1.	Kidolgozott feladatok	480
7.8.2.	Gyakorló kérdések és feladatok	481
7.9.	A hőátadás módjai	483
7.9.1.	Alapfogalmak	486
7.10.	A hővezetés	488
7.10.1.	Egyenes menti hővezetés	488
7.10.2.	A Newton-féle lehűlési törvény	502
7.10.3.	Nem stacionárius hővezetés egyenes mentén	512
7.11.	A hősugárzás	516
7.11.1.	Szilárd testek sugárzási törvényszerűségei	516
7.11.2.	A környezet sugárzásának hatása	522
7.11.3.	Testek lehűlése sugárzás útján	531
7.12.	Kérdések és feladatok	535
7.12.1.	Elméleti kérdések	535
7.12.2.	Kidolgozott feladatok	537
7.12.3.	Gyakorló feladatok	542

8. Relativitáselmélet	543
8.1. A relativitás elve a klasszikus mechanikában	543
8.2. A Galilei-transzformáció	544
8.3. A relativitás elve az elektrodinamikában	548
8.3.1. A fény terjedési sebessége egymáshoz képest mozgó rendszerekben	548
8.3.2. Az elektromágnességtan és a relativitás elve	549
8.4. A relativitáselmélet Einstein-féle posztulátumai	551
8.4.1. Az Einstein-féle posztulátumok és a relativitáselmélet	551
8.5. A relativisztikus mechanika	552
8.5.1. A hely- és idő meghatározása	552
8.5.2. Időtartamok relativitása, mozgási- és nyugalmi idő- tartam	554
8.5.3. A távolságok relativitása, mozgási- és nyugalmi hossz	557
8.5.4. Az idődilatació- és Lorentz-kontrakció kísérleti bizo- nyítéka	559
8.5.5. A sebességtranszformáció	560
8.6. A négydimenziós tér-idő	561
8.6.1. Invariáns intervallumnégyzet, négyesvektorok	562
8.6.2. Állapotváltozás a négyes térben, sajátidő	563
8.7. A relativisztikus dinamika alapjai	567
8.7.1. Az impulzus (lendület), a tömeg és a mozgásegyenlet	567
8.7.2. Az energia, a tömeg-energia összefüggés a relativitá- selméletben	570
8.7.3. A nyugalmi energia és a tömeghiány	573
8.7.4. A négyesimpulzus, az energia és az impulzus össze- függései	574
8.8. Kérdések és feladatok	575
8.8.1. Elméleti kérdések	575
8.8.2. Kidolgozott feladatok	578
8.8.3. Gyakorló feladatok	583
9. Bevezetés az atomfizikába	585
9.1. Az abszolút fekete test sugárzási törvénye	585
9.2. A fényelektromos jelenség	588
9.3. A Compton effektus	591
9.4. Hullám-részecske kettősség	594
9.5. Atommodellek	595
9.5.1. A hidrogén színképe és Bohr posztulátumai	598

9.5.2.	A hidrogénatom Bohr-féle modellje	599
9.5.3.	Franck-Hertz kísérlet	604
9.6.	A kvantummechanika alapgondolatai, szemlélete	606
9.6.1.	A hullámfüggvény	606
9.6.2.	Dobozba zárt elektron mozgása.	608
9.6.3.	Az alagút-effektus	610
9.7.	Az elektron állapotai az atomban	613
9.7.1.	A hidrogénatombeli elektron	613
9.7.2.	Heisenberg-féle határozatlansági relációk	616
9.7.3.	A többielektronos atomok és a periódusos rendszer	618
9.8.	Fény és anyag kölcsönhatása	622
9.8.1.	Az indukált átmenetek	622
9.9.	Röntgensugárzás	623
9.9.1.	Az elektronmikroszkóp	626
9.9.2.	A pásztázó alagútmikroszkóp	629
9.10.	Kérdések és feladatok	633
9.10.1.	Elméleti kérdések	633
9.10.2.	Kidolgozott feladatok	634
9.10.3.	Gyakorló feladatok	635
10.	Bevezetés a magfizikába	638
10.1.	Az atommag alkotórészei	638
10.2.	Az atommagot összetartó erők	639
10.3.	Magmodellek	640
10.4.	A természetes radioaktivitás	643
10.5.	Bomlástörvény	647
10.6.	Anyag és sugárzás kölcsönhatása	649
10.6.1.	Az ionizáló sugárzások élettani hatásai	651
10.7.	Kérdések és feladatok	666
10.7.1.	Elméleti kérdések	666
10.8.	Energiatermelés atommagfolyamatok segítségével	668
10.8.1.	Hasadásos energiatermelés	668
10.8.2.	Atomreaktor és atomerőmű	671
10.8.3.	Fúziós energiatermelés	677
10.9.	Radioaktív hulladék	683
10.10.	Kérdések és feladatok	684
10.10.1.	Elméleti kérdések	684
10.10.2.	Kidolgozott feladatok	685

10.10.3. Gyakorló feladatok	689
11. Anyagszerkezet	690
11.1. A molekulák kialakulása	690
11.1.1. Az ionos kötés	691
11.1.2. A kovalens kötés	692
11.2. A molekulák energiaszintjei	700
11.2.1. A molekulák rezgése	700
11.2.2. A molekulák forgása	702
11.2.3. A molekulák energiaszintjei	704
11.2.4. A molekulák színe	706
11.2.5. Másodlagos kötések	706
11.3. A szilárdtestek szerkezete	709
11.3.1. A szilárdtestek kötéstípusai	710
11.4. Elektronok viselkedése szilárdtestekben	714
11.4.1. Szilárdtestek sávszerkezete	714
11.4.2. Az elektronok energia szerinti eloszlása	716
11.4.3. Szigetelők, félvezetők, vezetők közti különbség	718
11.5. Kérdések és feladatok	719
11.5.1. Elméleti kérdések	719
11.5.2. Gyakorló feladatok	721
12. A félvezetők fizikája	723
12.1. A félvezetők fizikájának alapjai	723
12.1.1. Tiszta félvezetők	723
12.1.2. Adalék atomok hatása a félvezetőkre	724
12.1.3. Adalékolt félvezetők sávszerkezete	727
12.1.4. Speciális jelenségek a félvezetőkben	727
12.1.5. Érintkezési jelenségek	730
12.2. A félvezető dióda	737
12.2.1. Az ideális dióda	738
12.2.2. A valódi félvezető diódák	741
12.2.3. A Zener-dióda	743
12.2.4. A fénykibocsátó dióda (LED)	744
12.2.5. A félvezető dióda néhány egyszerű alkalmazása	744
12.3. A tranzisztor	746
12.3.1. A bipoláris tranzisztor	746
12.3.2. A térvezérlésű tranzisztor	751
12.4. A félvezető eszközök gyártásáról	752

12.4.1. Tisztítás	752
12.4.2. Adalékolás	755
12.4.3. Fotolitográfia	756
12.5. Kérdések és feladatok	759
12.5.1. Elméleti kérdések	759
12.5.2. Gyakorló feladatok	762
13. Mézerek és lézerek	764
13.1. Mézerek és alkalmazásaik	765
13.2. Lézerek és alkalmazásaik	767
13.2.1. Lézerek típusai	770
13.2.2. A lézerfény tulajdonságai	775
13.2.3. Általános alkalmazási területek	776
13.2.4. Interferometria	776
13.2.5. Holográfia	778
13.3. Kérdések	780
13.3.1. Elméleti kérdések	780
14. Függelék	782
14.1. A mértékegységekről	782
14.1.1. A mértékegység-rendszer	782
14.1.2. A mértékegységek írásmódja	783
14.1.3. A megengedett előtagok (prefixumok)	783
14.1.4. A mértékegységek használata számítások során	784
14.2. Főbb fizikai állandók	785
14.3. Differenciálszámítás alapfokon	786
14.3.1. Alapösszefüggések	787
14.3.2. Egyszerű példák	788

Előszó

Ez a jegyzet a Széchenyi István Egyetem alapképzési (BSc) szakjai számára, az alapozó fizika tárgyak tanulásához készült. Ezek a tárgyak kettős célkitűzésűek: egyrészt alapozást nyújtanak a leendő mérnököknek, hogy a természettudományok körében egy általános tájékozottságra tegyenek szert, másrészt szaktól függően bizonyos területeken szakmai tárgyak alapozását is megadják.

E sorok írásának idején Egyetemünkön alapozó fizika kurzus 8 szakon folyik 4 különböző tanterv szerint. Az egyes tantervek közt jelentős átfedések vannak, főként az általános természettudományi alapokhoz tartozó témakörök esetén. Az átfedések miatt az tűnt célszerűnek, hogy egyetlen nagy jegyzet íródjék, mely az összes alapozó kurzus tankönyvéül szolgál. Ez azonban azzal jár, hogy mindegyik szak esetén lesznek olyan témakörök, melyek szerepelnek a jegyzetben, de az adott kurzus tantervében nem. Mivel ez a jegyzet elektronikus, ezért a terjesztési költségeket nem befolyásolja számottevően az, hogy a hallgatók így olyan részeket is megkapnak, melyek az ő szakjukon nem tartoznak a számon kért tananyagba. Így, egységes szerkesztéssel viszont lehetőségük nyílik arra is, hogy ha érdeklődnek, bizonyos témaköröket a kötelezőnél mélyebben sajátítsanak el.

A jegyzet írásakor az volt a célunk, hogy az önálló tanulásra is alkalmas legyen. Ezért az elméleti részeket rendszeresen megszakítják olyan kidolgozott számolási példák, melyek az elmélet megértését is könnyítik, és a gyakorlati problémák irányába tett kapcsolódást is megadják. A témakörök végén pedig gyakorló elméleti kérdéseket, kidolgozott feladatokat (ezek az előbb említett példáknál általában összetettebbek) és gyakorló feladatokat tartalmaznak. Az elmélet, a közbeszúrt példák és az elméleti kérdések az előadások, a kidolgozott és gyakorló feladatok a számolási gyakorlatok anyagát jelölik ki. A témakör jellegétől függően azonban az elméleti és számolási részek egymáshoz viszonyított súlya változik.

Győr, 2006. augusztus 28.

Dr. Horváth András
tanszékvezető
SZE, Fizika és Kémia Tanszék

1. A mechanika alapjai

Korábbi tanulmányainkból már ismerhetjük a mechanika alapfogalmait. Mégis célszerű ezeket itt is összefoglalni, hogy a már rendelkezésre álló magasabb matematikai eszközök (differenciál- és integrálszámítás) segítségével egy kissé hatékonyabb megközelítést is megismerjünk.

Itt a legegyszerűbb esettel, a pontszerű testek mechanikájával foglalkozunk csak, először mozgásuk leírásával, majd mozgásuk okának vizsgálatával.

1.1. Pontszerű testek kinematikája

Kinematika:

Kinematikának nevezzük a mechanika azon részét, amely a testek mozgásának leírásával foglalkozik. (Tehát nem vizsgálja a mozgások okait.)

A gyakorlatban végbemenő mozgások nagyon bonyolultak lehetnek. Gondoljunk pl. egy futó ember mozgására: csak az egy időpontbeli helyzet megadásához meg kell adnunk a különböző testrészek méretét, helyzetét, ami nagyon sok adatot jelent. Ráadásul ezt a mozgás leírásához minden időpontban meg kell tennünk, ami elég nehezen kezelhető problémának tűnik. Szerencsére a felmerülő problémák egy jelentős részében a testek részletei nem lényegesek, a méretek elhanyagolhatóak.

Pontszerű test, tömegpont :

Az olyan testeket, melyeknek részletei a vizsgálat szempontjából elhanyagolhatóak pontszerű testnek vagy tömegpontnak nevezzük.

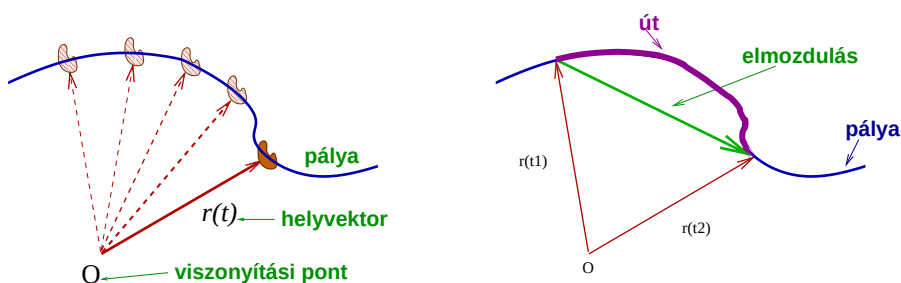
Fontos megjegyezni, hogy egy testet tömegpontnak venni mindig valamilyen közelítést jelent, hisz még egy atomnak is van kiterjedése. A körülmények és a vizsgálati pontosság dönti el, hogy megengedhető-e a tömegponttal való helyettesítés.

Egy maratoni futó például nyugodtan tekinthető pontszerűnek a 42 km-es távhoz képest, és elhanyagolhatóan ritka, hogy csak 1–2 cm döntsön a maratoni távon két futó között, azaz a maratoni futók esetében a test tetszőleges pontjának mozgását elegendő ismerni. Ezzel szemben rövid távon gyakran „mellbedobás” dönt, tehát fontosak a részletek is, azaz itt a pontszerűség feltevése lényeges pontatlanságokhoz vezetne.

Nemcsak a méret számít abban, hogy egy test pontszerűnek tekinthető-e vagy sem. Például a gördülő testek mozgási energiájának egy bizonyos

hányada mindenképp forgásban tárolódik és ez a hányad a mérettől nem, csak az alaktól függ. Így pl. egy jól tapadó lejtőn egy golyó mindenképp gyorsabban gurul le, mint egy henger, még ha méreteik sokkal kisebbek is, mint a lejtőé. Ebben az esetben ugyanis az történik, hogy a gyorsan haladó test gyorsabban is forog, így mérettől függetlenül számottevő a kis részek mozgásának szerepe.

A továbbiakban azonban ennél jóval egyszerűbb esetekkel foglalkozunk, amikor nyilvánvaló lesz a testek részleteinek elhanyagolható volta.



1.1. ábra. Kinematikai alapfogalmak.

A pontszerű testek mozgásának megadásához meg kell adnunk egy pontot, melyhez viszonyítjuk a mozgást és az ebből a pontból a test helyére mutató vektort. Mindkettő meghatározására szükség van.

Vonatkoztatási-, vagy viszonyítási pont:

Az a pont, melyet alappontnak veszünk a mozgások vizsgálatánál.

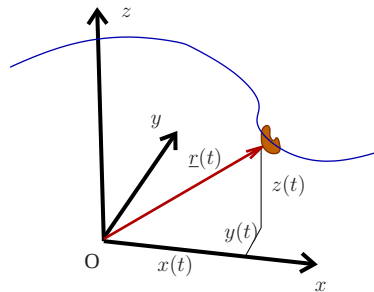
A vonatkoztatási pontot általában (de nem mindig) valamilyen testhez rögzítjük. Egy adott problémában lehet az pl. a szoba egy meghatározott sarka, egy vonat leghátsó ütközője, a Föld tömegközéppontja.

Helyvektor:

A vonatkoztatási pontból a vizsgált test helyére mutató vektor.

Adott vonatkoztatási pont esetén tehát ha minden t időpontra megadjuk a test $\underline{r}(t)$ helyvektorát, akkor ezzel a tömegpont mozgását teljesen leírtuk.

A helyvektor leggyakoribb megadási módja pedig az, hogy a vonatkoztatási pontot origónak véve felvesszünk egy derékszögű **koordináta-rendszert**, és ebben adjuk meg a helyvektor komponenseit, ahogy azt az 1.2. ábra mutatja.



1.2. ábra. A helyvektor derékszögű koordinátái.

A fizikában ún. jobbsodrású koordinátarendszert használunk. Ennek egymásra merőleges x , y és z tengelyeit jobb kezünk hüvelyk-, mutató- és középső ujjának sorrendjében nevezzük el. Az előző ábrán is ilyen, jobbsodrású koordináta-rendszert látunk.

Megadva a viszonyítási pontot és a koordináta-rendszert a helyvektor három koordinátája egyértelműen megadja a tömegpont helyzetét. (Ezt máshogyan úgy is lehet mondani, hogy egy adott **vonatkoztatási rendszerben** a tömegpont helyét három koordinátája egyértelműen meghatározza.) A tömegpontok mozgását tehát megadhatjuk az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ függvények megadásával is. Mivel a koordinátákkal többnyire egyszerűbb számolni, mint magával a helyvektorral, ezért sokszor azokat fogjuk használni, de általános tömör formulák többnyire a vektoros jelöléssel fogalmazhatók meg.

A teljesség kedvéért álljon itt néhány alapvető kinematikai fogalom meghatározása. Ezek részben ismerősek lehetnek a középiskolai tanulmányokból. Ezek többségét az 1.1. ábra jobb oldalán szemléltettük.

Elmozdulás:

Egy $\underline{r}(t)$ függvénnyel jellemezhető mozgás t_1 és t_2 időpontok közötti elmozdulásának nevezzük a

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)$$

vektort.

Pálya:

Egy pontszerű test pályájának nevezzük azon pontok halmazát, amelyeket a test mozgása során érinti.

Út:

Egy $\underline{r}(t)$ függvénnyel jellemezhető mozgás t_1 és t_2 időpontok között megtett útjának nevezzük az ezen időpontok közt befutott pályadarab hosszát.

Érdekes, hogy az út előző fogalma igen szemléletes, matematikai meghatározása mégis meglehetősen bonyolult eszköz használatát, a vonal menti integrálást teszi szükségessé. Ezzel az eszközzel a hallgatóság csak a későbbi tanulmányai folyamán ismerkedik meg, ezért itt csak a teljesség kedvéért írjuk fel a matematikai meghatározást:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d\underline{r}}{dt} \right| dt.$$

Fontos megjegyezni, hogy a köznyelv néha szinonimaként kezeli az út és az elmozdulás fogalmakat, holott igencsak különböznek egymástól. Először is: az elmozdulás vektor, míg az út egy irány nélküli mennyiség. (Az ilyeneket **skalár** mennyiségnek nevezzük.) Nagyságuk sem feltétlen egyezik meg: könnyű belátni, hogy csak egyenes vonalú meg nem forduló mozgások esetében lesz azonos az út és az elmozdulás *nagysága*, minden más esetben az út lesz nagyobb.

Átlagsebesség:

Egy $\underline{r}(t)$ függvénnyel jellemezhető mozgás t_1 és t_2 időpontok ($t_1 \neq t_2$) közötti átlagsebességének nevezzük a

$$\underline{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} \quad (1.1)$$

vektormennyiséget.

Itt és a továbbiakban a felülvonás az átlagot jelenti.

Sokszor mondják tévesen, hogy „sebesség=út/idő”. Ez csak egyenes vonalú, meg nem forduló mozgások esetén van így.

Az is nyilvánvaló, hogy az iménti átlagsebesség fogalom nem azonos a hétköznapival, hisz pl. ha egy versenyautó megtesz egy kört a pályán, összes elmozdulása 0 (ugyanoda ér vissza), tehát átlagsebessége is 0 lesz. Amit ilyenkor átlagsebességnek nevez a köznyelv, azt precízen „átlagos sebességnagyság”-nak kellene nevezni, és ez valóban az előzőekben említett út/idő hányadossal egyezik meg. Ez a fogalom ugyan szemléletes és a mindennapi életben informatív, az út pontos matematikai meghatározásának nehézségei (lásd fentebb) miatt azonban nehezen kezelhető és a fizikai alaptörvényekben sem bukkan fel, ezért a fizika alapfogalmai közt nem szerepel.

1.1.1. A pillanatnyi sebesség

A kinematikában nagyon fontos fogalom a **pillanatnyi sebesség** fogalma, ezért ezt részletesebben megvizsgáljuk.

Az átlagsebesség fogalma egy hosszabb-rövidebb időintervallum alatti helyváltozás gyorsaságát jellemzi. Jó lenne olyan mennyiséget találni, ami a mozgás pillanatnyi „gyorsaságát” jellemzi. Ez nem olyan egyszerű: nem mondhatjuk ugyanis azt, hogy az átlagsebesség fenti definíciójában vegyünk 0 hosszúságú intervallumot, azaz $t_1 = t_2$ -t, hisz ekkor a nevezőbe 0 kerülne. Bebizonyítható azonban, hogy a gyakorlatban előforduló esetekben t_2 -t egy rögzített t_1 -hez közelítve az átlagsebesség egy meghatározott értékhez fog közeledni. Azaz egy mozgás t_1 -beli pillanatnyi sebességének nevezzük egy olyan kicsi $[t_1, t_2]$ intervallumra vett átlagsebességet, ami alatt a mozgás nem változik meg lényegesen.

Ez természetesen így nem precíz, de szemléletes és mutatja a pillanatnyi sebesség fogalmának eredetét. Itt valójában a matematikából már megismert **differenciahányados** és **differenciálhányados** fogalmakkal találkozunk.

Észrevehetjük tehát, hogy az $[t_1, t_2]$ intervallumon vett átlagsebesség a hely-idő függvény $t = t_1$ ponthoz tartozó differenciahányados függvényének $\Delta t = t_2 - t_1$ -ben felvett értéke, valamint a t időpontbeli pillanatnyi sebesség a hely-idő függvény t -ben vett differenciálhányadosa.

A szokásos jelölésekkel:

$$\underline{v}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \overline{v}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Vagy másképpen:

$$\underline{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}.$$

A szokásos jelölésekkel összefoglalva:

Pillanatnyi sebesség:

Pillanatnyi sebességen értjük a hely-idő függvény derivált függvényét:

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{r}'(t).$$

A vesszős jelölés tömörebb, a $d\underline{r}/dt$ jelölés viszont tartalmazza azt is, mi a változó, ami szerint a differenciálást végeznünk kell. Utóbbi sokszor hasznos a fizikában, mivel sokszor nem egyértelmű, melyik az a mennyiség, ami szerinti változási gyorsaságot számolnunk kell. (Ezzel szemben a matematika példák többségében x a független változó, így ott a vesszős jelölést szokták használni.)

Nem kell megijedni attól, hogy $\underline{r}$ egy vektor, és ennek kell a differenciálhányadosát számolni. Konkrét példákban mindig komponensenként fogunk számolni, ami azért tehető meg, mert a vektor előáll komponenseinek összegeként, az összeg pedig tagonként deriválható. Az előbbi jelölések azonban tömörebbek és átláthatóbbak, mintha a 3 térkoordináta mindegyikére külön-külön írnánk ki az egyenleteket. Ugyanez vonatkozik az itt következő összefüggésekre is.

A fordított irányú kapcsolat a primitív függvény keresést jelenti:

$$\underline{r}(t) = \int \underline{v}(t) dt + C,$$

ahol C egy integrálási állandó. A hely-idő függvény tehát nem kapható meg a sebesség-idő függvényből, mert a primitív függvény keresés egy integrálási állandó erejéig bizonytalan.

Fizikailag ez annak felel meg, hogy hiába tudjuk, milyen sebességgel mozog egy test, ha nem tudjuk, honnan indult, nem tudhatjuk, hova érkezett meg. Az elmozdulás azonban megmondható, hisz az két időpontbeli

helyvektor különbsége, amiből a bizonytalan kezdőhelyzet (az integrálási állandó) kiesik:

$$\Delta \underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(t) dt. \quad (1.2)$$

Azaz az elmozdulás a sebesség-idő függvény határozott **integráljaként** kapható meg.

Természetesen ha a kezdőhelyzet ismert, akkor a hely-idő függvény is megkapható:

$$\underline{r}(t_2) = \underline{r}(t_1) + \Delta \underline{r} = \underline{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(t) dt. \quad (1.3)$$

1.1. példa: Egy test egyenes mentén mozog. Hely-idő függvénye SI-egységekben $x(t) = 5t^2 - 2t + 4$. Adja meg a sebesség-idő függvényt!

Megoldás: A sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriválásával kapható meg:

$$v(t) = x(t)' = (5t^2 - 2t + 4)' = 5 \cdot 2t - 2 + 0 = 10t - 2.$$

(Korábbi tanulmányainkból esetleg ráismerhetünk arra, hogy ez egy egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás hely-idő függvénye, 10 m/s^2 gyorsulással, -2 m/s kezdősebességgel, az $x_0 = 4 \text{ m}$ helyről indulva.)

1.2. példa: Mekkora az előző feladatban a pillanatnyi sebesség értéke $t_1 = 1 \text{ s}$ és $t_2 = 5 \text{ s}$ időpontokban? Mekkora az átlagsebesség e két időpont között?

Megoldás: A pillanatnyi sebességértékek az előbb megkapott sebesség-idő függvénybe való behelyettesítéssel kaphatók meg: (mivel SI-egységekben számolunk, ezért a mértékegységeket leghagyhatjuk)

$$v(t_1) = 10t_1 - 2 = 8 \quad v(t_2) = 10t_2 - 2 = 48.$$

Az átlagsebesség definícióját (1.1) egyenlet mutatja. Ez alapján:

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5t_2^2 - 2t_2 + 4) - (5t_1^2 - 2t_1 + 4)}{t_2 - t_1} = \frac{119 - 7}{5 - 1} = 28.$$

E feladat érdekessége, hogy az időintervallum alatti átlagsebesség épp az intervallum elején és végén mért pillanatnyi sebességek átlaga. Ez nincs mindig így, csak az állandó gyorsulású mozgásoknál, mint amilyen a mi feladatunk is.

1.3. példa: Egy test sebesség-idő függvénye: $v(t) = 3 \cos(6t + 1)$, és $t = 0$ -kor épp az origóban van. Adja meg a hely-idő függvényét!

Megoldás: Ismerjük a test kezdő helyzetét $t_1 = 0$ -kor, ezért alkalmazhatjuk az (1.3) egyenletet:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = 0 + \int_{t_1}^{t_2} 3 \cos(6t + 1) dt = \left[3 \sin(6t + 1) \frac{1}{6} \right]_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{1}{2} (\sin(6t_2 + 1) - \sin(6t_1 + 1)). \end{aligned}$$

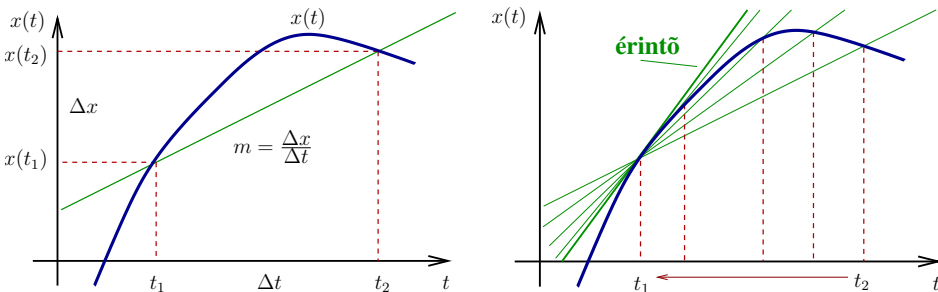
Beírva ide $t_1 = 0$ -t:

$$x(t) = \frac{1}{2} (\sin(6t + 1) - \sin(1)).$$

1.1.2. Szemléltetés egyenes menti mozgások esetén

Az egyenes menti mozgások egyszerűbben áttekinthetők, mint a térbeliek, ezért ezek esetében külön foglalkozunk az eddigi fogalmak szemléletes megértésével. Ráadásul amit elmondunk, az a térbeli mozgások koordinátaíra igaz lesz, így nemcsak az egyenes menti mozgásokra kapunk hasznos információkat.

Vegyünk egy x tengely mentén mozgó testet! Ábrázoljuk ennek hely-idő függvényét, azaz az $x(t)$ grafikont. Keressük meg ezen az eddigi fogalmak szemléletes jelentését.



1.3. ábra. Kinematikai alapfogalmak szemléltetése egyenes menti mozgások esetében.

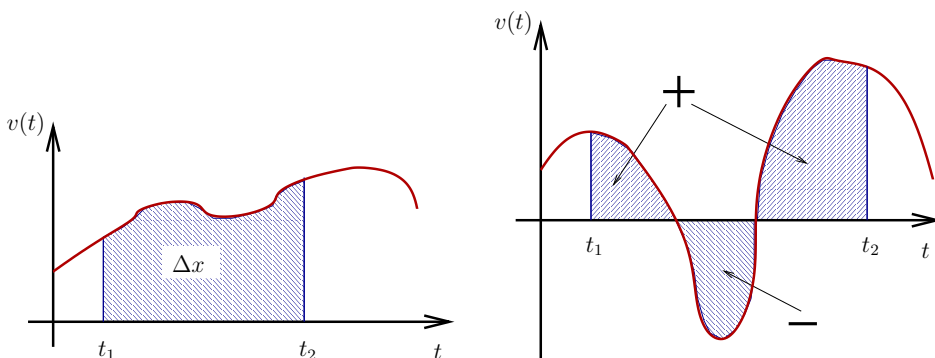
Az 1.3. ábrán látható, hogy a grafikon t_1 és t_2 -höz tartozó pontjait vízszintes tengelyre vetítve a pontok távolsága Δt lesz, míg a függőleges tengelyen való eltérés a Δx elmozdulással egyezik meg. Ez alapján nyilvánvaló,

hogyan a grafikonon t_1 és t_2 -höz tartozó pontjain átmenő egyenes meredeksége $m = \Delta x / \Delta t$, azaz éppen a $[t_1, t_2]$ szakaszon vett átlagsebesség.

Közelítsünk most t_2 -vel t_1 -hez. Ekkor a grafikonhoz húzott szelő egyre inkább hozzásimul a grafikonhoz, elég kis intervallum esetén szinte pontosan egybeesik a grafikonhoz a t_1 pontban húzott érintővel. Ez, és a fent elmondottak alapján azt mondhatjuk, hogy a pillanatnyi sebesség megegyezik a hely–idő grafikonhoz húzott érintő meredekségével.

Mindez valójában már ismert a matematikai tanulmányainkból, hisz a differenciáhányados és a differenciálhányados szemléletes jelentéséről van szó.

A sebesség–idő függvény határozott integrálja az elmozdulás. Ezért a sebesség–idő grafikon és a t -tengely közti terület¹ egy t_1 illetve t_2 időpont között megegyezik a $[t_1, t_2]$ intervallum alatti elmozdulással. (Lásd 1.4. ábra.)



1.4. ábra. Az elmozdulás a sebesség–idő grafikonon.

Pontosabban az integrálszámításnál tanultaknak megfelelően a grafikon és a vízszintes tengely közti területet előjel helyesen kell figyelembe venni, azaz azokon a szakaszokon, ahol $v > 0$, azaz a grafikon a t -tengely felett megy, pozitív az elmozdulás előjele, különben negatív.

¹Ezen „területszámításnál” vegyük figyelembe, hogy a vízszintes tengelyen „s”, a függőlegesen „m/s” a mértékegység, így a grafikon alatti „terület” mértékegysége ezek szorzata, azaz méter.

Ha nem vesszük figyelembe ezeket az előjeleket, és csak a területet számoljuk, akkor egyenes menti mozgás esetén az utat kapjuk meg. Térbeli mozgás komponensei esetében az előjelek nélküli területszámításnak azonban semmilyen fizikai jelentése nincs általában.

1.1.3. A gyorsulás

A sebességvektor tehát a helyvektor változási sebességét jellemzi, a $\underline{v}(t)$ sebesség a fent elmondottak szerint kapható meg az $\underline{r}(t)$ helyvektorból: a sebesség a hely idő szerinti deriváltja.

Természetes az a gondolat, hogy ha a sebességvektor változási gyorsaságáról szeretnénk valamit mondani, akkor azt hasonlóan tehetjük meg, mint ahogy a sebességet származtattuk a helyből.

Átlagos gyorsulás :

Egy $\underline{v}(t)$ függvénnyel jellemezhető mozgás t_1 és t_2 közti átlagos gyorsulásán értjük a

$$\underline{a}(t_1, t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

vektort. Ez nyilvánvalóan jellemzi azt, milyen gyorsan változik a sebesség az adott intervallumon: számértéke megegyezik az egységnyi időre eső sebességváltozás nagyságával.

Pillanatnyi gyorsulás :

Pillanatnyi gyorsulásnak nevezzük a sebesség-idő függvény idő szerinti deriváltját:

$$\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v}'(t).$$

Tehát a gyorsulás a sebesség² idő szerinti deriváltja.

Az előzőekhez hasonlóan igazak az alábbi összefüggések is:

$$\Delta \underline{v} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{a}(t) dt.$$

²Itt és a későbbiekben is a jelző nélküli „gyorsulás” illetve „sebesség” szó a pillanatnyi értéket jelzi a rövidség kedvéért. A gyakorlatban a pillanatnyi értékeket sokkal többször használjuk, mint az átlagértékeket.

$$\underline{v}(t_2) = \underline{v}(t_1) + \Delta \underline{v} = \underline{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \underline{a}(t) dt. \quad (1.4)$$

Ezen kívül a fentiekhez hasonló szemléletes jelentések is teljesülni fognak, tehát pl. egyenes menti mozgásnál az $v(t)$ függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége a pillanatnyi gyorsulást adja, az $a(t)$ függvény grafikon alatti terület a megfelelő előjelekkel a sebességváltozást adja, stb.

Mivel a sebesség a hely idő szerinti deriváltja, a gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltja, ezért a gyorsulás a helyből kétszeri differenciálással kapható.

Ezért azt mondjuk, hogy a gyorsulás a hely idő szerinti második deriváltja, és a következő jelöléssel fejezzük ki:

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \underline{r}''(t).$$

A gyorsulás fogalmát deriválás nélkül sokkal nehezebb felfogni, mint a sebességét. Valódi gyorsulásfogalom ennek megfelelően csak a differenciálszámítás megszületése után születhetett. Mivel enélkül a mechanika alaptörvényei nem írhatók fel, ezért a mechanika tudományos alaposságú formája csak Newton idejében születhetett meg a differenciálszámítással egy időben.

1.4. példa: Határozzuk meg az egyenes vonalú mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényét, ha tudjuk, hogy gyorsulása állandó a érték!

Megoldás: Történjék a mozgás az x tengely mentén. Ekkor $y = z = 0$, továbbá $v_x = v_y = 0$ és $a_x = a_y = 0$.

A gyorsulás-idő függvény: $a_x(t) = a = \text{állandó}$.

Ekkor $t_1 = 0$ -val (1.4) összefüggést alkalmazva:

$$v_x(t_2) = v_x(0) + \int_0^{t_2} a_x dt = v_x(0) + at_2.$$

A szokásos jelölésekkel ($t_2 \rightarrow t$, $v(0) \rightarrow v_x(0) \rightarrow v_{x,0}$) a sebesség-idő függvény:

$$v_x(t) = v_{x,0} + a \cdot t.$$

Hasonlóképpen az (1.3) egyenlet alkalmazásával:

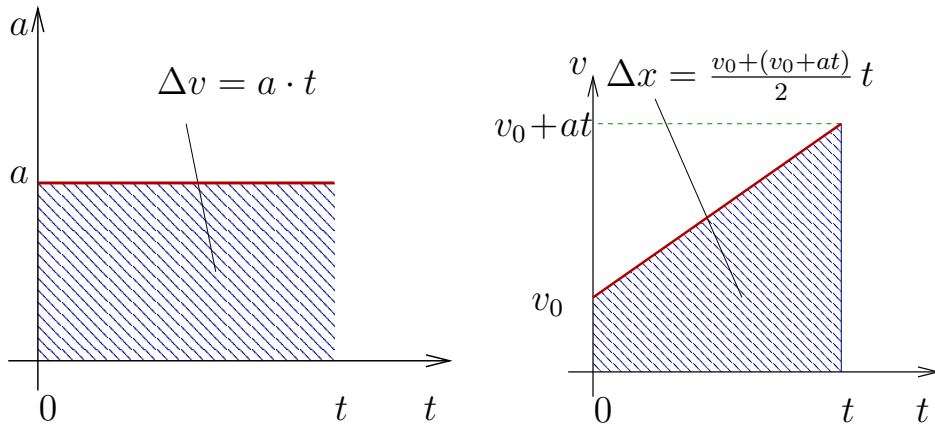
$$x(t_2) = x(0) + \int_0^{t_2} (v_{x,0} + at) dt = x(0) + \left[v_{x,0}t + a \frac{t^2}{2} \right]_0^{t_2} = x(0) + v_{x,0}t_2 + \frac{a}{2}t_2^2.$$

A szokásos jelölésekkel a hely-idő függvény:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t + \frac{a}{2}t^2.$$

Ez a középiskolából már ismert formula.

Tanulságos mindezt szemléletesen is megnézni a fentebb tanult, grafikon alatti területek kiszámításán alapuló megfontolásokkal.



1.5. ábra. Gyorsulás-idő és sebesség-idő függvény állandó gyorsulás esetén.

A sebességváltozást a gyorsulás-idő függvény grafikonja alatti terület adja meg. A 0 és t időpont között (1.5. ábra) a sebességváltozás tehát egy téglalap területe, azaz $\Delta v = at$. Ezért ha a $t = 0$ -beli sebességet v_0 -al jelöljük:

$$v(t) = v_0 + \Delta v = v_0 + at.$$

Rajzoljuk fel most ezt a sebesség-idő függvényt! (Lásd az 1.5. ábra jobb oldala.) Az ez alatti terület adja meg az elmozdulást. A 0 és t időpontok között ez a terület egy trapéz területe, melynek magassága t , két alapja pedig v_0 illetve $v_0 + at$. Így az elmozdulás 0 és t között:

$$\Delta x = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2}t = v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

Ha a 0-beli helyet x_0 -al jelöljük, akkor a hely-idő függvény:

$$x(t) = x_0 + \Delta x = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2.$$

Megjegyzendő, hogy bonyolultabb esetekben a területszámítás nem végezhető el integrálás nélkül. Az integrálási módszer tehát általánosan alkalmazható.

1.1.4. Fontos mozgásfajták

A következőkben néhány fontos mozgásfajtát tekintünk át. Ezek részben ismerősek lehetnek korábbi tanulmányainkból, de tanulságos lehet őket összefoglalóan, az itt tanult eszközök segítségével újra tárgyalni.

Egyenes vonalú, egyenletes mozgás. A teljesség kedvéért említjük meg ezt a legegyszerűbb mozgást. Az előzők alapján a mozgás irányában felvett x -tengely esetén a mozgás egyenletei nagyon egyszerűek:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v \cdot t, \\v(t) &= v = \text{állandó.}, \\a(t) &= 0.\end{aligned}$$

Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás. Ezt az 1.4. példa tárgyalta. A teljesség kedvéért ideírjuk a mozgást leíró egyenleteket:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2, \\v(t) &= v_0 + at, \\a(t) &= a = \text{állandó}.\end{aligned}$$

Egyenletes körmozgás. A gyakorlatban igen fontos mozgásfajta, mivel például forgó gépalkatrészek pontjai sokszor ilyen mozgást végeznek.

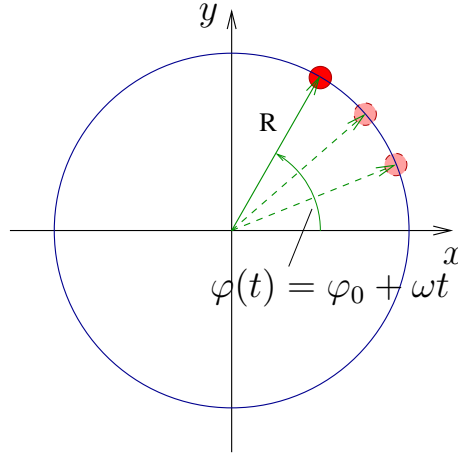
Képzeljünk el egy tömegpontot, mely az xy -síkban az origó köré rajzolt R sugarú körön egyenletes v sebességgel mozog. Az egyenletes sebesség azt jelenti, hogy az eltelt idővel arányos lesz az az ívhossz, amit a kerület mentén megtesz. Ebből viszont következik, hogy a test irányszöge egyenletesen fog változni, azaz a test irányszöge az idő függvényében:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$

lesz. Itt φ_0 a test $t = 0$ -beli irányszöge, ω pedig az irányszög változási gyorsasága, amit **szögsebességnek** nevezünk. (Lásd 1.6. ábra.)

Ekkor a test x és y koordinátái a $\varphi(t)$ szögfüggvényeiből egyszerűen számolhatók:

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos \varphi(t) = R \cos(\omega t + \varphi_0), \\y(t) &= R \sin \varphi(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0).\end{aligned}$$



1.6. ábra. Egyenletes körmozgás. $\varphi(t)$ a körmozgás irányyszöge.

A pillanatnyi sebesség $\underline{v}(t) = \underline{r}'(t)$ definíciója segítségével a sebességkomponensek könnyen meghatározhatók:

$$v_x(t) = x(t)' = -R\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$v_y(t) = y(t)' = R\omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Az x és y koordináták kifejezéseit használva $v_x(t)$ és $v_y(t)$ az alábbi alakú:

$$v_x(t) = -y(t) \cdot \omega, \quad v_y(t) = x(t) \cdot \omega.$$

Ebből az alakból látszik, hogy a sebességvektor a helyvektor ω -szorosának 90° -kal való elforgatottja. Ez nem meglepő, hisz a sebesség mindig érintő irányú, ami körmozgás esetében merőleges a sugárirányú helyvektorra.

Számoljuk ki most a sebesség nagyságát!

$$v = |\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + R^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}.$$

Kihasználva, hogy tetszőleges α szög esetén $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$v = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega. \quad (1.5)$$

A sebesség nagysága tehát –egyezően a korábban mondottakkal– állandó, csak iránya változik folytonosan.

Mit mondhatunk a test gyorsulásáról? A komponenseket egyszerű kiszámítani:

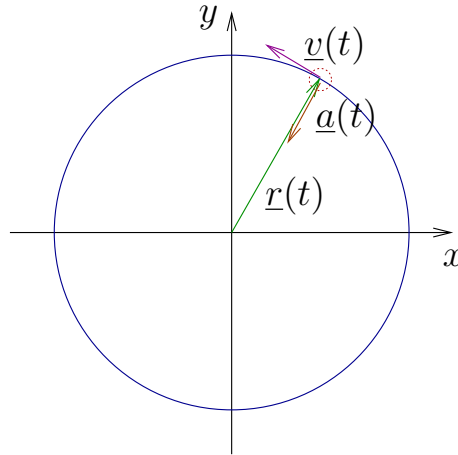
$$a_x(t) = v_x(t)' = -R\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t),$$

$$a_y(t) = v_y(t)' = -R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(t).$$

A gyorsulásvektor tehát a helyvektor $-\omega^2$ -szerese: $\underline{a}(t) = -\omega^2 \underline{r}(t)$. Ez azt jelenti, hogy az egyenletes körmozgás gyorsulása állandó nagyságú

$$a = R\omega^2 \quad (1.6)$$

és mindig a középpont felé (centripetális irány) mutat, ahogy az az 1.7. ábrán látható. Az iránya alapján ezt a gyorsulást szokás **centripetális gyorsulásnak** nevezni.



1.7. ábra. Egyenletes körmozgás sebessége és gyorsulása.

Bár az előző összefüggések az egyenletes körmozgás minden fontos paraméterét leírják, történeti és kényelmi okokból szokás az alábbi jelöléseket bevezetni:

$$\text{frekvencia: } f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \text{periódusidő: } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Az előbbi (1.5) és (1.6) egyenletekből levezethetők az alábbi formulák, melyek használata gyakran egyszerűsíti a számításokat:

$$a = \frac{v^2}{R} = v\omega.$$

1.5. példa: Egy kerékpár 10 m/s sebességgel halad. Mekkora a kerék szögsebessége és kerületi pontjainak gyorsulása, ha a kerék átmérője 64 cm?

Megoldás: Normál haladáskor a kerék tengelye 10 m/s-mal halad, de a kerék alsó pontja áll (hisz nem csúszik a talajon), azaz a kerék körmozgásából adódó kerületi sebesség is $v = 10$ m/s. A kerék sugara a szöveg szerint $R = 0,32$ m.

Ezekből (1.5) alapján a szögsebesség kiszámolható:

$$\omega = \frac{v}{R} = 31,25 \frac{1}{s}.$$

(1.6) alapján a kerületi pontok gyorsulása:

$$a = R\omega^2 = 312,5 \frac{m}{s^2}.$$

Ez meglehetősen nagy gyorsulás, több, mint 30-szor nagyobb a földi nehézségi gyorsulásnál.

A ferde hajítás. A tapasztalat szerint az eldobott testek gyorsulása a földfelszín közelében egy állandó, lefelé mutató $g \approx 9,81$ m/s² nagyságú vektor, amennyiben a levegő fékező hatása elhanyagolható.

Ekkor a mozgás alkalmas koordináta-rendszerben viszonylag egyszerűen írható le. Legyen az y -tengely függőlegesen felfelé mutató, az x pedig vízszintes úgy, hogy a test induló sebességvektora beleessen az xy síkba.

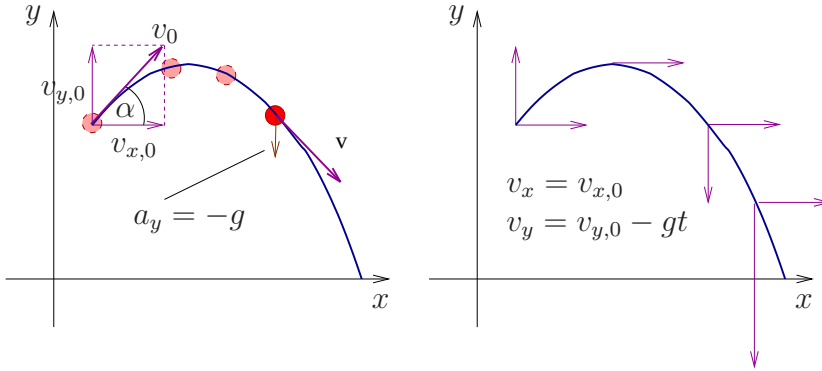
Ekkor z irányú gyorsulása nem lesz, és mivel ebben az irányban kezdeti sebességkomponense sincs, z koordinátája mindig 0 lesz, azaz a mozgás végig az xy -síkban marad.

Mivel a gyorsulásnak x -irányú komponense nincs, ezért az x koordináta egyenes vonalú, egyenletes mozgás szerint fog változni, azaz:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t. \quad (1.7)$$

Az adott koordináta-rendszer választás esetén az y irányú gyorsulás $a_y = -g$ = állandó lesz, ami azt jelenti, hogy ez a koordináta egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás szerint fog változni:

$$y(t) = y_0 + v_{y,0}t - \frac{g}{2}t^2. \quad (1.8)$$



1.8. ábra. Ferde hajítás.

Sokszor nem a kezdősebesség koordinátáit ismerjük, hanem annak nagyságát (v_0) és vízszintessel bezárt α szögét. Ezekből a fenti kezdősebesség-komponensek könnyen számolhatók:

$$v_{x,0} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{y,0} = v_0 \sin \alpha.$$

Az eddig elmondottakat az 1.8. ábra szemlélteti.

Kérdés, milyen görbe mentén történik ez a mozgás. Azaz ha nem érdekel minket a mozgás időbeli lefolyása, hanem csak a pálya alakja, akkor mi mondható erről a mozgásról.

Amennyiben $v_{x,0} = 0$, a mozgás a függőleges hajításba megy át és a pálya egy függőleges egyenes lesz.

Ellenkező esetben az idő kifejezhető (1.7)-ből:

$$t = \frac{x - x_0}{v_{x,0}}.$$

Ezt beírva az (1.8) egyenletbe:

$$y(x) = y_0 + v_{y,0} \frac{x - x_0}{v_{x,0}} - \frac{g}{2} \left(\frac{x - x_0}{v_{x,0}} \right)^2.$$

$y(x)$ -ben x^2 -tel, x -szel arányos és konstans tagok találhatók, azaz y x -nek másodfokú polinomja. A ferde hajítás pályája tehát parabola.

1.6. példa: 5 m magasan levő ablakból 8 m/s sebességgel, a vízszinteshez képest felfelé 35° -os kezdőirányban elhajítunk egy követ. Hány másodperc múlva ér földet? Milyen messzire lesz a ház tővétől a becsapódás helye?

Megoldás: Az eldobott kő függőleges irányban állandó gyorsulással mozog. A függőleges irányba forgatva az y tengelyt, az origót a talaj szintjére helyezve a test mozgásának y irányú komponensei az alábbi paraméterekkel jellemezhetők: (SI-egységekben számolunk, a mértékegységeket elhagyjuk)

$$y_0 = 5, \quad v_{y,0} = v_0 \sin \alpha = 8 \sin 35^\circ = 4,59, \quad a_y = -g = -9,81.$$

Így az y -irányú mozgása:

$$y(t) = 5 + 4,59t - 4,905t^2.$$

A becsapódáskor $y(t) = 0$. Ezt a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva a két gyök:

$$t_1 = -0,645 \quad t_2 = 1,58.$$

A negatív gyök fizikailag nem megoldása a problémának, tehát az első kérdésre a válasz: a kő 1,58 s múlva csapódik a földbe.

A kő repülése alatt a vízszintes sebességkomponens végig állandó maradt:

$$v_x = v_{x,0} = v_0 \cos \alpha = 6,55.$$

Ezzel a sebességgel t_2 idő alatt vízszintes irányban

$$\Delta x_2 = t_2 v_x = 10,4$$

távolságot tett meg.

Feltéve, hogy a kő kidobása a ház töve feletti pontról történt, a válasz a második kérdésre: a kő a ház tővétől 10,4 m-re fog a földbe csapódni.

1.2. Pontszerű testek dinamikája

Az eddigiekben nem foglalkoztunk a mozgások okával, csak a leírásukkal. Most megvizsgáljuk a pontszerű testek mozgásának ok-okozati viszonyait is: a mechanika ezen fejezetét **dinamikának** nevezzük.

1.2.1. A Newton-törvények

A dinamika alaptörvényeit **Isaac Newton** fedezte fel a 17. század második felében. Ezekkel a törvényekkel már középiskolában találkoztunk. Most egy kicsit pontosabban mondjuk ki Newton három törvényét, mint a legtöbb középiskolai könyv. Lehet, hogy első hallásra túlságosan körülményes lesz a jelenlegi megfogalmazás, de fontos a pontosság a dinamika korrekt megértéséhez.

Newton I. törvénye :

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog. Az ilyen rendszert **inerciarendszernek** nevezzük.

Magára hagyott test alatt olyan testet értünk, mely nem áll kölcsönhatásban más testtel.

Ez a törvény látszólag ellentmond a tapasztalatoknak, mert a tapasztalat szerint ha egy testet nem mozgatunk, akkor az általában hamar megáll. Az állandó sebességű (egyenes vonalú egyenletes) mozgáshoz tehát látszólag az kell, hogy a test kölcsönhatásban legyen valamivel (a mozgatóval). Ez azonban azért van így, mert mindennapi körülmények közt mindig van súrlódás, légellenállás, stb., így a nem mozgatott test nem magára hagyott, hanem erőt fejt ki rá pl. a talaj vagy a levegő. Azonban ezek a fékezőerők megfelelő körülmények közt tetszőlegesen kicsivé tehetők. (Például jégen csúsztatott fémdarabok esetében, vagy a világűrben a súlytalanság állapotában, légüres térben.)

Fontos azt is megjegyezni, hogy ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, akkor egy hozzá képest állandó sebességgel mozgó, de nem forgó rendszer is az. Ennek ellentéte is igaz: ha egy rendszer gyorsul egy inerciarendszerhez képest, akkor az nem lehet inerciarendszer.

A Föld felszínéhez rögzített vonatkoztatási rendszer jó közelítéssel (de nem tökéletesen pontosan) inerciarendszernek tekinthető.

Newton II. törvénye :

Inerciarendszerből nézve egy nem magára hagyott test mozgása a következők szerint megy végbe: Minden testhez található egy olyan állandó m mennyiség, amit a test **tömegének** nevezünk, és a többi test hatása a vizsgált testre jellemezhető egy $\underline{F}$ úgynevezett **erőfüggvénnyel**, úgy, hogy

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

ahol $\underline{a}$ a test gyorsulása.

Először azt jegyezzük meg, hogy ha $\underline{F} = 0$, akkor $\underline{a} = 0$, azaz a sebesség állandó, ami összhangban van az I. törvénnyel.

Ez a törvény ad lehetőséget a mozgások előre való kiszámítására, ha valahonnét ismerjük a test tömegét és a rá ható erőt is ki tudjuk fejezni a test

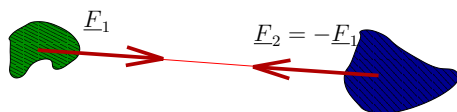
adataival (tömeg, töltés, stb.) és hely- illetve sebességvektorával. Ugyanis ha m és $\underline{F}$ ismert, akkor a II. törvényből megkapható az $\underline{a}$ gyorsulás, és a kinematika módszereivel ebből az egész mozgás meghatározható.

Ez a meghatározás bonyolult matematikai problémák megoldását jelenti, ha az erő bonyolult függvénye a helyvektornak illetve annak deriváltjának, a sebességnek.

A II. törvény tehát csak akkor használható a mozgás „jóslására”, ha már korábbról ismerjük a test tömegét és a kölcsönhatásra jellemző $\underline{F}$ erőt. Ezeket méréssel kaphatjuk meg. Tehát egy testnek valahogy megmérjük a tömegét (lásd később), és megnézzük, hogy bizonyos helyzetekben mekkora lesz a gyorsulása. Ebből megkaphatjuk az egyes konkrét helyzetekben a rá ható erőt. Ezután olyan erőfüggvényt keresünk, ami a mért pontokban visszaadja a mért erőértékeket. Ha találunk ilyen, akkor kipróbáljuk eddig nem mért esetekben is, hogy jó eredményt ad-e. Amennyiben igen, akkor feltehetően megtaláltuk az erőtvényt és ezután alkalmazhatjuk mozgások „jóslására” is.

Newton III. törvénye :

Ha csak két test van egymással kölcsönhatásban, akkor ha az egyikre $\underline{F}_1$ erő hat, akkor a másikra ható erő $\underline{F}_2 = -\underline{F}_1$.



1.9. ábra. Newton III. törvénye.

Ezt a törvényt szokás a **hatás-ellenhatás** törvényének is nevezni.

Bármilyen ésszerűen is hangzik ez, a hétköznapiakban sokszor elfeledkezünk róla. Pl. ha valamit kézzel tolunk, az ugyanakkora erővel visszahat ránk, így csak akkor nem csúszunk hátra, ha megtámaszkodunk valamin vagy a cipőnk jól tapad a talajhoz.

Newton IV. törvénye :

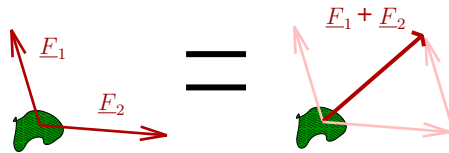
Ha egy testre több erő is hat, akkor a test úgy mozog, mintha rá az erők vektori összege hatna.

Így, ha n db. erő hat egy testre, $(\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots, \underline{F}_n)$, akkor Newton II. törvénye ilyen alakba írható:

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_n = m \cdot \underline{a},$$

vagy a matematikában szokásos $\sum$ jel segítségével:

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i = m \cdot \underline{a}.$$



1.10. ábra. Newton IV. törvénye két erő esetén.

Newton eredetileg nem a mai csoportosításban és alakban írta fel törvényeit. Ezért az is hozzáállás kérdése, hogy a IV. törvényt kimondjuk-e külön törvényben vagy sem. Az biztos, hogy Newton használta az erők összeadhatóságát számításaiban. A mechanikáról szóló mai könyvek egy része –tőlünk eltérően– nem beszél Newton IV. törvényéről, hanem a II. törvényt fogalmazza meg az előbbi módon.

1.7. példa: Egy 5000 kg tömegű kis repülőgép hajtóművei 30 000 N tolóerőt biztosítanak a felszálláskor. Álló helyzetből indulva mennyi idő alatt éri el a 75 m/s-os felszállási sebességet? (Hanyagoljuk el a közegellenállás hatását!)

Megoldás: A repülő gyorsulása:

$$a = \frac{F}{m} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Mivel álló helyzetből indult, ezért a felszállásig a sebességváltozása $\Delta v = 75 \text{ m/s}$. Állandó gyorsulás esetén viszont

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

ahonnan a keresett gyorsulási idő:

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = 12,5 \text{ s.}$$

1.8. példa: Egy 5 kg tömegű testre két erő hat egymásra merőlegesen. Az egyik erő nagysága 6 N, a másiké 9 N. Mekkora lesz a test gyorsulása?

Megoldás: A Pitagorasz-tétel értelmében az eredő erő nagysága:

$$F_e = \sqrt{6^2 \text{ N} + 9^2 \text{ N}} = 10,8 \text{ N.}$$

Ezért a gyorsulás:

$$a = \frac{F_e}{m} = 2,16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

1.9. példa: Egy tömegpontra a következő erők hatnak (SI-rendszerben):

$$\underline{F}_1 = (2,1,2), \quad \underline{F}_2 = (-1,0,1), \quad \underline{F}_3 = (0,1,1).$$

Adja meg a pont gyorsulását, ha a tömege 100 g!

Megoldás: Az erők eredője Newton IV. törvénye szerint az erők vektori összege, ami komponensenként számolható:

$$\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = (1,2,4).$$

Newton II. törvénye alapján $m \cdot \underline{a} = \underline{F}_e$, ezért

$$\underline{a} = \frac{\underline{F}_e}{m} = (10,20,40).$$

A gyorsulás nagysága a térbeli Pitagorasz-tétel szerint:

$$|\underline{a}| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 40^2} = 45,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

1.2.2. A lendület, a lendületmegmaradás törvénye

Lendület :

Lendületnek nevezzük a tömeg és a sebesség szorzatát:

$$\underline{p} = m\underline{v}.$$

A lendület egy igen fontos fogalom a fizikában. Számoljuk ki a lendület idő szerinti deriváltját, felhasználva, hogy a tömeg állandó:

$$\underline{p}' = (m\underline{v})' = m\underline{v}' = m\underline{a} = \underline{F}.$$

A lendület idő szerinti deriváltja tehát az erő. Ezért az erő felfogható a lendület egyik testről a másikra történő átadásának jellemzőjeként. Newton III. törvénye szerint ez az átadás szimmetrikusan zajlik, azaz amilyen ütemben csökken egy test lendülete egy másikkal való kölcsönhatás miatt, a másik test lendülete ugyanilyen ütemben kell növekedjék, azaz a testek összes lendülete nem változik meg azért, mert egymással kölcsönhatásban állnak.

Ezt precízebben az alábbi módon vezethetjük le:

Vizsgáljunk két testet, amik erőt fejtenek ki egymásra, de más test nem hat erre a kettőre. Erre az esetre azt az elnevezést szokás használni, hogy a két test **zárt rendszert** alkot.

A testekre ható erő legyen $\underline{F}_1$ illetve $\underline{F}_2$. Newton III. törvénye értelmében ekkor $\underline{F}_1 = -\underline{F}_2$.

Lendületekkel kifejezve:

$$\underline{p}_1' = -\underline{p}_2',$$

azaz

$$\underline{p}_1' + \underline{p}_2' = 0, \quad \text{tehát} \quad (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)' = 0.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a két test összes lendülete időben állandó, azaz

$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{állandó}.$$

Bebizonyítható, hogy ha n db. test egymással kölcsönhatásban áll, de más (külső) testtel nem, akkor

$$\sum_{i=1}^n m_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^n \underline{p}_i = \text{állandó}.$$

Szavakkal: zárt rendszer össz impulzusa állandó.

1.2.3. A tömeg mérése

Eddig még nem mondtuk meg, hogyan kell a testek tömegét mérnünk, pedig ez nagyon fontos kérdés. A most következő mérési eljárás nagyon ritkán használatos a gyakorlatban, de elvi jelentősége nagy, mert alkalmazásakor nem kell semmit sem tudnunk a testek közt ható erőkről.

A gyakorlatban használt mérési eljárások már úgynevezett származtatott módszerek, azaz korábbi mérések eredményein alapulnak. Pl. a kétkarú mérleggel való mérés azon alapul, hogy valaki egyszer kimérte, hogy a nehézségi erő $m\mathbf{g}$ alakú, ahol $\mathbf{g}$ a felszín közelében konstansnak vehető. Ennek a törvénynek a felismeréséhez viszont kellett már néhány test tömegét ismernünk.

Egy lehetséges mérési eljárás tehát a következő: Tegyük két testet olyan környezetbe, ahol a rájuk ható külső erők összege 0.³ Ezután lökjük meg úgy a testeket, hogy azok ütközzenek egymással. Az ütközés során a testek tehát zárt rendszert alkotnak, így a fentebb elmondottak szerint lendületük azonos mértékben, csak ellenkező irányban változik meg, azaz

$$\Delta(m_1\mathbf{v}_1) + \Delta(m_2\mathbf{v}_2) = 0.$$

Mivel a tömegek állandóak:

$$m_1\Delta\mathbf{v}_1 + m_2\Delta\mathbf{v}_2 = 0$$

amiből:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\Delta\mathbf{v}_2|}{|\Delta\mathbf{v}_1|}.$$

A sebesség változások egyszerűen mérhetők, ebből pedig a tömegarány megkapható. Konkrét tömegértéket (nem arányt) úgy kapunk, hogy egy kiválasztott testet elnevezünk egységnek, és a többi test esetén azt adjuk meg, hogy hogyan aránylik tömegük ezen „etalon” tömegéhez. Az etalont tetszőlegesen választhatjuk, csak az a fontos, hogy mindenki ugyanazt használja. (Az etalonul választott test a mértégegység-rendszerünk egy fontos alappillére. Ezt a „kilogramm-prototípus”-nak nevezett testet a Párizs melletti Nemzetközi Mértékügyi Hivatalban őrzik.)

³Például sima jégen csúsztassuk, vagy tegyük légpárnákra őket. A testekre ható külső erők ekkor sem lesznek pontosan 0-k, de gyakorlatilag akármilyen kicsivé tehetők.

Ez a mérési mód ad lehetőséget arra, hogy az erőtvénnyek ismerete nélkül meghatározhassuk a testek tömegét, hogy az erőtvénnyek meghatározásánál azokat már ismertnek vehessük.

1.10. példa: Egy 1,5 kg tömegű labda 10 m/s sebességgel merőlegesen falnak csapódik és onnan 8 m/s sebességgel pattan el. Gyorsított felvétel alapján megállapítjuk, hogy a labda és a fal érintkezése 0,03 s-ig tartott. Mekkora átlagos erővel hatott a fal a labdára eközben?

Megoldás: A labda sebességváltozása (az előjelek figyelembe vételével) $\Delta v = 18 \text{ m/s}$, ezért lendületváltozása $\Delta p = m\Delta v = 27 \text{ kg m/s}$.

A fal-labda kölcsönhatás $\Delta t = 0,03 \text{ s}$ ideje alatt a lendület átlagos változási gyorsasága $\Delta p/\Delta t = 900 \text{ kg m/s}^2$.

Az előbb tanultak értelmében ez épp a keresett átlagos erővel egyezik meg, tehát az ütközés alatt átlagosan 900 N erővel hatott a fal a labdára.

Nem kell csodálkoznunk ez alapján, miért nem jó a vakolatnak, ha a gyerekek nekirugdossák a labdát.

1.11. példa: Egy 120 kg tömegű csónakból egy 80 kg tömegű ember ugrik a vízbe. Az ember vízszintes sebességkomponense 3 m/s (a vízhez képest). Mekkora sebességgel indul el a csónak, ha kezdetben állt, és nincs lehorgonyozva?

Megoldás: A csónak-ember rendszer kezdeti össz lendülete 0, és ez az elugrás után is 0 kell legyen, mert a külső erők eredőjének vízszintes komponense 0.

Előjel helyesen felírva az elugrás utáni vízszintes lendületkomponenst: (a pozitív irányt az ember ugrásának irányában felvéve)

$$p = 80 \cdot 3 + 120 \cdot v = 0,$$

ahonnan

$$v = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A csónak tehát 2 m/s-mal indul el az ember ugrási irányával ellentétesen.

1.2.4. A perdület

Sok szempontból fontos azt valamiképp jellemezni, hogy egy test mozgásának mennyire van egy origó körüli keringés, forgás jellege. Egy tömegpont esetén ezt az úgynevezett **perdület** vagy más néven **impulzusmomentum** segítségével szoktuk jellemezni, melynek definíciója:

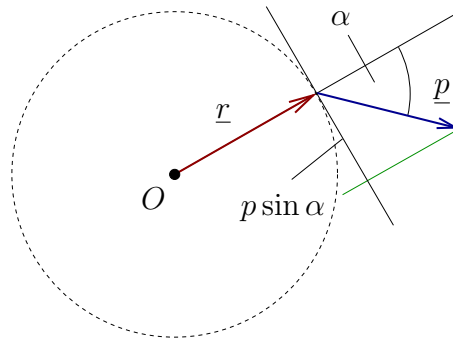
$$\underline{N} = \underline{r} \times \underline{p} = m \underline{r} \times \underline{v}, \quad (1.9)$$

ahol „ $\times$ ” a vektoriális szorzás jele.

Próbáljuk meg szemléletesen megérteni, miért is jellemzi ez az origó körüli keringést, a későbbiekben pedig meglátjuk e fogalom elvi jelentőségét is.

Először nézzünk egy olyan mozgást, mely az origótól távolodik, azaz a hely- és a lendületvektor párhuzamosak. ($\underline{r} \parallel \underline{p}$). Ekkor párhuzamos vektorok vektoriális szorzata lép fel, azaz $\underline{N} = 0$.

Ezután nézzük meg az általános esetet, amikor is $\underline{r}$ és $\underline{p}$ iránya tetszőleges α szöget zár be. (1.11. ábra)



1.11. ábra. A perdület szemléltetése.

A vektoriális szorzat definíciója szerint:

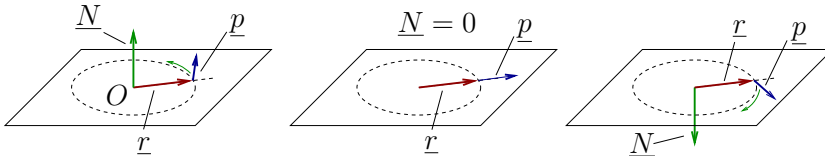
$$N = r \cdot p \cdot \sin \alpha. \quad (1.10)$$

(Vektorjel nélkül a vektor betűje annak nagyságát jelöli.)

Ezt úgy is felfoghatjuk, mint r és $p \sin \alpha$ szorzatát, utóbbi viszont az 1.11. ábra szerint a lendületvektor azon komponense, mely az origó köré r sugárral rajzolt körnek a testen átmenő érintőjével párhuzamos. Adott r és p vektornagyságok esetén ez tehát akkor maximális, ha $\alpha = 90^\circ$, azaz $\underline{r} \perp \underline{p}$.

Mindebből látszik, hogy N valóban azt jellemzi, mennyire olyan a test lendülete, ami az origó körüli mozgást írja le.

Most nézzük a perdület vektor irányát! A perdület definíciójából következően a perdület vektor a helyvektorra és a lendületvektorra is merőleges, azaz $\underline{N} \perp \underline{r}$ és $\underline{N} \perp \underline{p}$. Ha $\underline{r}$ és $\underline{p}$ nem párhuzamosak, akkor ez a két merőlegességi feltétel meghatározza $\underline{N}$ egyenesét, csak az a kérdés, hogy merre mutat. Az 1.12. ábra szerint ez az irány attól függ, merre perdül a test az origó körül.



1.12. ábra. A perdület vektor irányának szemléltetése.

Például ha a mozgás az $x - y$ síkban történik, akkor $\underline{N}$ z -irányú lesz, és $N_z > 0$ azt jelenti, hogy a test az origó körüli mozgásának forgási komponense pozitív forgásirányú.

Fontos eset, amikor a test egy origón átmenő, rögzített tengely körül kering, attól állandó távolságban. Ilyen pl. egy kötel végére kötött, majd gyorsan megforgatott kő esete vagy egy rögzített tengely körül forgó kerék egy pontjának mozgása. Az előzőek alapján látható, hogy a perdület vektor a tengellyel párhuzamos lesz, nagysága pedig:

$$N = rp = rmv = rm(r\omega) = mr^2\omega. \quad (1.11)$$

Egy origó körül megforgatott tömegpont perdülete tehát egyenesen arányos a forgás szögsebességével.

A forgatónyomaték és a perdülettétel. Érdekes kérdés, mi változtatja meg egy test perdületét. Ennek megértéséhez számoljuk ki a perdület idő szerinti deriváltját:

$$\begin{aligned} \underline{N}' &= (\underline{r} \times \underline{p})' = \underline{r}' \times \underline{p} + \underline{r} \times \underline{p}' = \underline{v} \times \underline{p} + \underline{r} \times \underline{F} = \\ &= 0 + \underline{r} \times \underline{F} = \underline{r} \times \underline{F}. \end{aligned}$$

(Kihasználtuk, hogy definíció szerint $\underline{v}$ és $\underline{p}$ párhuzamosak, így vektoriális szorzatuk 0, valamint a fentebb levezetett $\underline{p}' = \underline{F}$ összefüggést.)

Az itt megjelenő

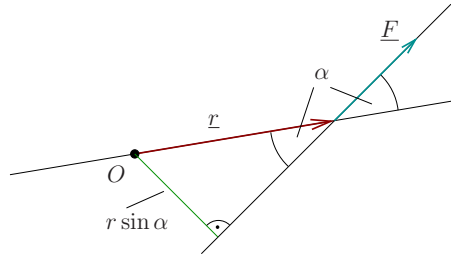
$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} \quad (1.12)$$

mennyiség neve: **forgatónyomaték**.

A perdület idő szerinti deriváltja tehát a forgatónyomaték. Ezt **perdülettételnek** nevezzük:

$$\underline{N}' = \underline{M}. \quad (1.13)$$

Nézzük meg a forgatónyomaték szemléletes jelentését! Legyen $\underline{r}$ és $\underline{F}$ szöge α . A vektoriális szorzat definíciója szerint a forgatónyomaték nagysága: $M = rF \sin \alpha$. Ennek egy szokásos szemléletes felírása az, hogy észrevevesszük: az $r \sin \alpha$ mennyiség nem más, mint $\underline{F}$ erővonalának és az origónak a távolsága, amit szokás az $\underline{F}$ erő **erőkarjának** nevezni. (Lásd 1.13. ábra.)



1.13. ábra. A forgatónyomaték és az erőkar szemléletes jelentése.

Az erőkar fogalmával a forgatónyomaték jelentése érthetőbb lesz, hisz ugyanaz az erő akkor forgat jobban, ha hatásvonala távolabb megy a forgástengelytől. A forgatónyomaték nagysága tehát felírható így is:

$$M = F \cdot k, \text{ ahol } k = r \sin \alpha.$$

Valójában történetileg a forgatónyomaték utóbbi, erőkarral való definíciója alakult ki először, és a középiskolai oktatásban is így találkozhatunk vele. Ennek oka egyrészt az erőkar fogalmának szemléletessége, melyet a hétköznapiakban is könnyen tapasztalhatunk. Például ha egy ajtót valaki be akar csukni úgy, hogy a tengelyhez közel érinti az ajtót és úgy nyomja, egy másik ember pedig azonos nagyságú erővel a kilincs mellett (távol a tengelytől) ki akarja nyitni, akkor az ajtó nyílni fog, mert a tengelytől távoli erő forgatónyomatéka nagyobb. Ezt azonban majd csak később, a merev testek mozgásánál tudjuk precízen megérteni, mert az ajtó nem tekinthető pontszerűnek.

A forgatónyomaték vektorának irányáról hasonlók mondhatók el, mint kicsit korábban a perdületvektorról mondtunk: merőleges a helyvektorra és az erővektorra. Amennyiben tehát síkmozgásról van szó, tehát a test helyvektora és a rá ható erő egy síkban van, akkor biztos, hogy a forgatónyomaték-vektor erre a síkra merőleges lesz. Ugyanez igaz a fentiek szerint a perdület-vektorra is.

Ezért ha a test mozgása nem térbeli, hanem síkbeli, akkor nem kell a forgatónyomaték- és perdületvektorok három koordinátájával számolni, csak a síkra merőlegessel, ami a számításokat nagyban egyszerűsíti.

Általános, térbeli mozgás esetén azonban ilyenről nincs szó: ott $\underline{N}$ és $\underline{M}$ tetszőleges helyzetet felvehet.

A perdületmegmaradás tétele tömegpontra. A perdülettétel fenti alakja ((1.13) egyenlet) alapján, hogyha a testre ható erők forgatónyomatéka 0, akkor a test perdülete állandó:

$$\underline{N} = \text{áll.}, \text{ ha } \underline{M} = 0. \quad (1.14)$$

(1.12) szerint a forgatónyomaték akkor lehet 0, ha r vagy F 0, vagy ha r és F párhuzamosak. Az $r = 0$ és $F = 0$ esetek magától értetődőek, így elemzést az $r \parallel F$ érdemel.

Centrális erő:

Egy tömegpontra ható erőt akkor nevezünk centrálisnak, ha található olyan vonatkoztatási rendszer, melyben a testre ható erőnek és a test helyvektorának egyenese mindig párhuzamos.

A gyakorlatban fellépő erők közül meglepően sok a centrális. Például egy köté végére kötött, majd megpörgetett nehezékre a köté centrális erővel hat, de centrális erő a gravitáció vagy a töltött részecskék közt ható Coulomb-erő is. (Lásd az 1.4.1. fejezetben.)

Centrális erő hatására mozgó testek perdülete tehát állandó.

1.12. példa: Egy sima, súrlódásmentes asztallapon egyik végén egy szöghöz rögzítünk egy gumiszálát, a másikra egy kicsi testet kötünk. A gumiszálát 20 cm hosszúra kifeszítjük, majd a testet 4 m/s sebességgel, merőlegesen a gumiszálra meglökjük. A test nem körpályán fog mozogni, hanem egy olyan pályán, melynek szöghöz legközelebbi pontja 12 cm-re van. Mekkora sebességgel mozog a test, amikor legközelebb van a szöghöz?

Megoldás: A feladat szövege szerint a test centrális erő hatására mozog, tehát perdülete állandó.

A perdület nagysága (1.10) alapján megmondható, hisz a kezdeti pillanatban r és p merőlegesek, azaz $\alpha = 90^\circ$. (Az origót a szög helyén vesszük fel.)

$$N = r_1 \cdot mv_1$$

ahol $r_1 = 20$ cm, $v_1 = 4$ m/s, m pedig a test ismeretlen tömege.

Amikor a test mozgása során a lehető legközelebb halad el a szögtől, akkor is merőleges lesz a hely- és a lendületvektor, hisz ha a test sebességének helyvektor irányú vetülete nem 0 lenne, akkor közeledésről vagy távolodásról lenne szó. Ebben a pillanatban felírva a test perdületét:

$$N = r_2 \cdot mv_2$$

ahol $r_2 = 12 \text{ cm}$.

A perdületmegmaradás miatt $r_1 \cdot mv_1 = r_2 \cdot mv_2$, ahonnan az ismeretlen v_2 sebesség kifejezhető:

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} = 6,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.3. A munka és az energia

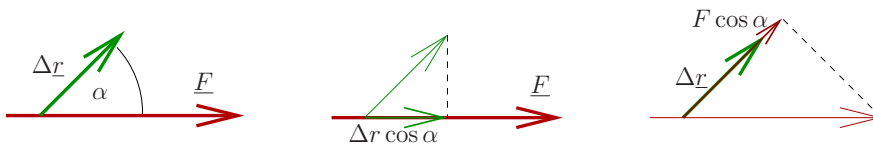
A „munka” szónak a fizikában sokkal körülhatároltabb a jelentése, mint a hétköznapiakban.

Munka :

Ha egy testre állandó $\underline{F}$ erő hat, miközben a test elmozdulása $\Delta \underline{r}$, akkor az erőnek a testen végzett munkája alatt értjük a

$$W = \underline{F} \Delta \underline{r} \quad (1.15)$$

skaláris szorzatot.



1.14. ábra. A munka definíciójához

Az előző meghatározás precíz, de néha szemléletesebb formáit szokás használni. Amennyiben $\underline{F}$ és $\Delta \underline{r}$ bezárt szöge α , a munka kifejezése átírható:⁴

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha = F(\Delta r \cos \alpha) = \Delta r(F \cos \alpha).$$

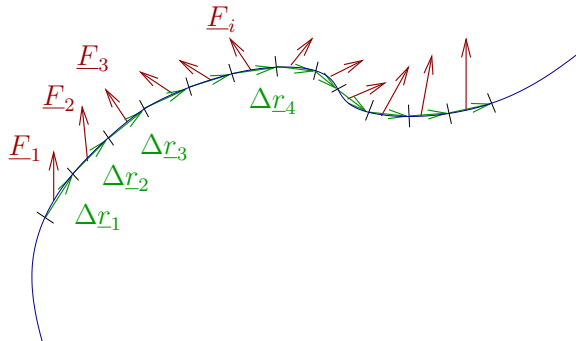
⁴Emlékezzünk: egy vektor betűje vektorjel nélkül a vektor hosszát jelöli.

Bár mindegyik alak egyenértékű matematikai szempontból, fizikailag az alábbi mondatoknak felelnek meg: „A munka az erő és az elmozdulás erő irányú komponensének szorzata”, illetve „A munka az elmozdulás és az erő elmozdulás irányú vetületének szorzata.” (Lásd 1.3. ábra.)

A munka tehát 0, ha a test nem mozog, vagy ha a mozgás pont merőleges az erőre. Így pl. egy inga fonala nem végez munkát a lengő testen, mert a fonál mindig sugárirányú, a sebesség pedig érintőirányú.

Fontos, hogy a munka lehet negatív is, ha az erő és az elmozdulás vektorai tompaszöget zárnak be. A negatív munkavégzést úgy is szokták kifejezni, hogy ilyenkor a vizsgált test végez munkát azon, amelyik őrá hat.

Hogyan számolható ki változó erő munkája? Osszuk fel képzeletben a test pályáját olyan kis szakaszokra, melyek alatt az erő nem változik lényegesen, és számoljuk ki ezen kis szakaszokon a munkát, majd adjuk össze. (1.15. ábra)



1.15. ábra. Változó erő munkájának számolása.

Ez a számítás akkor lesz pontos, ha a szakaszokkal tartunk 0-hoz:

$$W = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \Delta \underline{r}_i.$$

Könnyű felismerni a matematikából ismert integrálás fogalmát, csak-hogy itt nem egy változó szerint, hanem általános esetben egy térbeli görbe mentén kell a számítást elvégezni. Így általános esetben t_1 és t_2 időpont

között a munkavégzés így adható meg:

$$W(t_1, t_2) = \int_{\underline{r}(t_1)}^{\underline{r}(t_2)} \underline{F} d\underline{r}. \quad (1.16)$$

Az itt fellépő vonalmenti integrálás fogalma nem része Egyetemünkön az alapképzési szakok matematika anyagának, ezért ez az egyenlet inkább a teljesség kedvéért áll itt, semmint azért, hogy számolós feladatokat végezzünk vele.

1.3.1. A munkatétel

Ha a ΔW munkavégzés Δt idő alatt történik, akkor a munka (1.15)-beli definíciója alapján igaz lesz, hogy

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \underline{F} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}.$$

Ez akármilyen kis időszakra igaz, azaz teljesül a $\Delta t \rightarrow 0$ határesetben is, vagyis:

$$W' = \frac{dW}{dt} = \underline{F} \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{F} \underline{v}. \quad (1.17)$$

Newton II. törvényét felhasználva:

$$W' = m \underline{a} \underline{v} = m \underline{v}' \underline{v} \quad (1.18)$$

Vegyük észre, hogy:

$$\left(\frac{1}{2} \underline{v}^2 \right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \underline{v} \cdot \underline{v}' = \underline{v}' \cdot \underline{v}.$$

Így (1.18) átírható:

$$W' = m \left(\frac{1}{2} \underline{v}^2 \right)' = \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)'. \quad (1.19)$$

(Kihasználtuk, hogy m állandó és hogy egy vektor négyzete megegyezik abszolút értékének négyzetével.)

A munka tehát együtt változik az $(1/2)mv^2$ mennyiséggel. Ez tehát egy fontos mennyiség. Ennek szokásos elnevezése: mozgási energia.

Mozgási energia :

Mozgási energiának nevezzük az

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2$$

mennyiséget.

A mozgási energia és a munka tehát mindig azonos ütemben változnak, ezért egy hosszabb időintervallum alatti megváltozásuk is meg kell egyezzen. Ezt nevezzük **munkatételnek**:

$$\Delta W = \Delta E_m.$$

A munkatétel jelentőségét az adja, hogy míg a munka kiszámításához az egész mozgás végigkövetése szükséges és az esetleg változó nagyságú és irányú erők miatt egy hosszabb időszak alatti munkavégzés nehezen számolható (mivel a fenti (1.16) egyenletet kell alkalmazni), addig a mozgási energia megváltozása pusztán a vizsgált időszak elején és végén vett sebességekből és a test tömegéből megkapható.

Vigyázni kell azonban a munkatétel alkalmazásánál, mert az a testre ható összes erő eredőjének munkájára igaz. Csak azok az erők hagyhatók el a számításokkor, melyek munkája 0. Ilyenek pl. azok az erők, melyek mindig merőlegesek a mozgásra. (Inga fonalának ereje, súrlódásmentes lejtő hatása, stb.)

Fentebb, az (1.19) egyenletben felbukkant egy korábbról már ismert fogalom, melyet fontossága miatt külön kiemelünk:

Teljesítmény :

Teljesítménynek nevezzük a munka idő szerinti deriváltját:

$$P = W'.$$

A teljesítmény nagyon szemléletes jelentésű a gépek esetén: megadja, mekkora munkavégzésre képes időegységenként az adott gép. Áttételek segítségével ugyanis pl. egy motor által hajtott tengely forgatónyomatékát vagy a kifejtett húzóerőt tág határok közt lehet változtatni, de a teljesítménynek felső korlátja van.

1.13. példa: Egy test 50 m magasról szabadon esik. Mekkora sebességgel csapódik a földre, ha a közegellenállás hatásától eltekintünk?

Megoldás: A $h = 50$ m hosszú esés során az m tömegű testre végig mg erő hat mozgásának irányában. Az erő állandó, az erő és az elmozdulás párhuzamos, azaz az összes végzett munka:

$$W = mg \cdot h.$$

Mivel a feladat esésről szól, ezért a test induló mozgási energiája 0 volt. A becsapódáskori mozgási energia tehát egyenlő az előbb kiszámított munkavégzéssel:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

ahonnan a keresett becsapódási sebesség:

$$v = \sqrt{2gh} = 31,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.14. példa: Egy 60 lóerős autó csúcssebessége egyenes pályán 150 km/h. Mekkora fékezőerő hat rá a közegellenállás miatt, ha csúcssebességgel közlekedik? Ha az autó tömege 1000 kg, mekkora gyorsulással fog fékeződni, ha lábunkat hirtelen levesszük a gázzról?

Tegyük fel, hogy a csúcssebesség elérésekor maximális teljesítménnyel működik. A lóerő történeti okokból használt teljesítmény-egység, értéke 736 W-tal egyenlő.

Megoldás: A teljesítmény definíciója és az (1.17) egyenlet szerint:

$$P = W' = Fv.$$

(A vektorjeleket lehangytuk, mert a fékező erő és a mozgás iránya most párhuzamos.)

Innen a kért fékező erő:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{60 \cdot 736}{150/3,6} = 1060 \text{ N}.$$

Newton II. törvénye értelmében az ez által létrejövő gyorsulás nagysága:

$$a = \frac{F}{m} = 1,06 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Hirtelen gázérvételkor ez a gyorsulás lesz az autó fékeződésének üteme. Ekkora gyorsulás jól érzékelhető, ezért van hasonló érzése az embernek nagy sebesség melletti hirtelen gázérvételkor, mint amikor kisebb sebesség mellett fékezni kezdene.

1.3.2. A potenciális energia

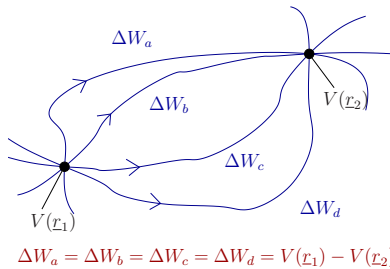
Az előzőekben elmondottak szerint általában nehéz egy erő munkavégzését meghatározni. Szerencsére a gyakorlatban előforduló problémák egy jelentős részében az erőkről bebizonyítható egy érdekes tulajdonság: sok kölcsönhatás olyan, hogy a fellépő erők munkája nem függ a pályától, csak annak kezdő- és a végpontjától.

Potenciál :

Egy $\underline{F}(\underline{r})$ erőt potenciálisnak nevezünk, ha található hozzá egy olyan $V(\underline{r})$ potenciálfüggvény, mely esetén tetszőleges pályára teljesül, hogy az erő munkája t_1 és t_2 időpontok közt az alábbi alakban adható meg:

$$W(t_1, t_2) = V(\underline{r}_1) - V(\underline{r}_2).$$

(Itt $\underline{r}_1 = \underline{r}(t_1)$ a kezdőpont és $\underline{r}_2 = \underline{r}(t_2)$ a végpont helyvektora.)



1.16. ábra. Munka potenciális erő esetén.

Könnyen belátható, hogy ha bármilyen zárt görbe mentén mozgunk, akkor a potenciális erő munkavégzése 0.

Első pillantásra meglepő lehet, hogy egyáltalán van ilyen erő, pedig a gyakorlatban fellépő erők közül számtalan rendelkezik ilyen tulajdonsággal. Például a gravitációs erők, az elektrosztatikus erők vagy a testek rugalmas alakváltozása közben ébredő erők ilyenek.

Általános esetben bebizonyítani egy erőről, hogy rendelkezik potenciállal és mi is a potenciálfüggvény, komolyabb matematikai apparátust igényel, ezért itt ezt nem tesszük meg. A fordított irány, tehát egy potenciálfüggvényről megmondani, milyen erőnek a potenciálja már jóval egyszerűbb.

Ehhez képzeljünk el egy olyan kis elmozdulást, mely x irányban történik, azaz $\Delta \underline{r} = (\Delta x, 0, 0)$, és tegyük fel, hogy ezen a kis szakaszon az erő állandónak tekinthető. A végzett munka ekkor:

$$\Delta W = \underline{F}(\underline{r}) \Delta \underline{r} = F_x(\underline{r}) \Delta x = V(\underline{r}) - V(\underline{r} + (\Delta x, 0, 0)).$$

Ebből:

$$F_x = - \frac{V(\underline{r} + (\Delta x, 0, 0)) - V(\underline{r})}{\Delta x}.$$

Tartsunk Δx -szel 0-hoz. Ekkor a jobb oldalon a potenciálfüggvény első változója szerinti parciális deriváltját ismerhetjük fel:

$$F_x = - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Természetesen hasonló összefüggés igaz a másik két komponensre is, azaz a potenciálfüggvényből az erő egyszerűen számolható:

$$F_x = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1.20)$$

Fontos megjegyezni, hogy a potenciálfüggvényhez egy tetszőleges állandót hozzáadhatunk. A fentebbi összefüggésekben ugyanis mindenhol vagy a potenciál két pontbeli különbsége vagy a deriváltja szerepel, amin egy konstans hozzáadása nem változtat. Ezt úgy szokták kifejezni, hogy a potenciál nullpontját mi határozhatjuk meg, azaz megmondhatjuk, hol legyen a potenciál értéke 0. Ezt mindig úgy szokás meghatározni, ahogy az adott feladatban a legkényelmesebb.

1.3.3. A mechanikai energiamegmaradás törvénye

Az előzők szerint, ha egy testre csak olyan erők hatnak, melyeknek munkavégzése az adott körülmények között 0 vagy pedig ismerjük a potenciálfüggvényüket, akkor a munkatétel egyszerűbb alakban írható fel:

$$W(t_1, t_2) = V(\underline{r}(t_1)) - V(\underline{r}(t_2)) = \Delta E_m = E_m(\underline{r}(t_2)) - E_m(\underline{r}(t_1)).$$

Ezt átrendezve:

$$V(\underline{r}(t_1)) + E_m(\underline{r}(t_1)) = V(\underline{r}(t_2)) + E_m(\underline{r}(t_2)).$$

Ez azt jelenti, hogy ilyen esetekben a mozgási energia és a potenciál összege állandó. Tehát a potenciál egyfajta energijellegű mennyiségnek is tekinthető, ezért szokták „potenciális energiának” is nevezni.

Ez alapján kimondható az alábbi tétel:

Mechanikai energiamegmaradás tétele :

Ha egy testre ható erők egy részének munkavégzése 0, másik részük pedig potenciállal rendelkezik, akkor a test mozgása során a potenciális- és a mozgási energia összege állandó.

Az összes energia megőrződése miatt a potenciális erőket szokás **kon-**
servatív erőknek nevezni.

Ennek a törvénynek sok alkalmazása van. Ha alkalmazható, számtalan mechanikai problémát egyszerűsít, hogy nem kell pontról-pontra végigszámolni a mozgást, hanem csak a kezdő- és végpontbeli sebességek közti kapcsolatot kell megkeresnünk.

1.4. A legfontosabb erőfajták

Az alábbiakban a gyakorlatban felmerülő legfontosabb erőfajták törvényszerűségeit foglaljuk össze, külön csoportosítva a konzervatív és nem konzervatív erőket. Az alfejezet célja az, hogy egy áttekintést kapjunk a gyakran fellépő erőhatásokról, képet kapva így a mechanikai problémák sokféleségéről. Tárgyunk kereteit meghaladná ezek részletes elemzése. Egy helyre összegyűjtve őket átfogó képet kaphatunk a különféle erőkről, és ez az áttekintés segítséget nyújt a későbbi fejezetekben felmerülő problémák, valamint bizonyos szaktárgyak elvi alapjainak megértéséhez.

1.4.1. Konzervatív erők

A leggyakrabban fellépő potenciális erőtereket foglaljuk össze ebben az alfejezetben.

Gravitációs erő a felszín közelében. A Föld felszínének közelében a gravitációs erő $m\vec{g}$, ahol $\vec{g} = (0, 0, -g)$ (amennyiben vonatkoztatási rendszerünk z tengelyét függőlegesen felfelé mutatónak vesszük). A nehézségi gyorsulás vektora, amely tehát lefelé mutat, és nagysága $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

A földközeli gravitációs potenciális energia:

$$V = mgz.$$

A potenciál nullpontja ekkor a $z = 0$ síkban van.

Gravitációs erőter pontszerű testek között. A földfelszín közelét elhagyva a gravitációs gyorsulás értéke nem lesz állandó. Isaac Newton fedezte fel az **általános tömegvonzás törvényét**, mely szerint az origóba helyezett m_1 tömegű pontszerű test által az $\underline{r}$ helyen tartózkodó m_2 tömegű testre

$$\underline{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \quad (1.21)$$

erővel hat. $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI egység, a gravitációs állandó.

Itt az $\underline{r}/r$ egy $\underline{r}$ irányú egységvektor, ami azt fejezi ki, hogy a gravitációs kölcsönhatás mindenképp a testeket összekötő egyenes mentén történik. Mivel a tömegek csak pozitívak lehetnek, az így ébredő erő mindenképp vonzó.

Ennek potenciálja:

$$V = \gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (1.22)$$

Megjegyzendő, hogy ugyanez a törvény igaz nm pontszerű, de gömb-szimmetrikus testek esetén is, ha $\underline{r}$ az m_1 tömegű test tömegközéppontjából az m_2 tömegű test tömegközéppontjába mutató vektor.

A potenciál nullpontja ekkor az origótól végtelen távolságban van.

Töltött részecskék közt ható erő. A töltött részecskék közt ható erő sokban hasonlít a gravitációs erőre. Az erőtvény felfedezőjéről a **Coulomb-törvény** nevet viseli. Eszerint egy origóbeli pontszerű q_1 töltés az $\underline{r}$ helyvektorú pontban levő q_2 töltésre

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

erővel hat. $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ SI egység, a vákuum dielektromos állandója.

A gravitációs erőtvényhez hasonlóan az erő a távolság négyzetével fordítottan arányos és a testek összekötő vonalába esik, de ez lehet vonzó és taszító is, mert a töltések negatívak és pozitívak is lehetnek. Erről majd részletesen tanulunk az elektrosztatikában, de itt szerettük volna egy helyre egybegyűjteni a fontosabb potenciális erőket.

A Coulomb-erő potenciálja:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}.$$

A potenciál nullpontja ekkor az origótól végtelen távolságban van.

Rugalmas erő potenciálja. Kis mértékű rugalmas deformációk esetén az ébredő erő egyenesen arányos a megnyúlással (x) és azzal ellentétes irányú. Tehát ekkor az erőtvény $F = -D \cdot x$ alakú. (Csak egyenes menti megnyúlást feltételezve.)

Ennek potenciálja:

$$V = \frac{1}{2} D x^2. \quad (1.23)$$

A potenciál nullpontja ekkor $x = 0$ -nál, azaz a deformációmentes esetben van.

1.15. példa: Egy játék rugós pisztoly 5 g tömegű lövedéket lő ki. Felhúzásakor egy rugó feszül meg, melynek teljes összenyomódása 12 cm, a benne ébredő maximális erő 20 N.

Mekkora sebességgel lövi ki a lövedéket ez a pisztoly?

Megoldás: A feladat szerint a rugót jellemző D állandó:

$$D = \frac{20 \text{ N}}{0,12 \text{ m}} = 166,7 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Ezért a felhalmozódó rugalmas energia:

$$V = \frac{1}{2} D x^2 = 1,2 \text{ J}.$$

Ideális esetben ez alakul mozgási energiává:

$$V = \frac{1}{2} m v^2,$$

ahonnt a keresett kilövési sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2V}{m}} = 21,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.16. példa: Egy elhanyagolható súrlódással gördülő játékautó lejtőn gurul lefelé. A lejtő hossza 2 m, vízszintessel bezárt szöge 20° . A koci a lejtő tetejénél 3 m/s sebességgel indul.

Mekkora lesz sebessége a lejtő alján?

Megoldás: Vegyük fel vonatkoztatási rendszerünket úgy, hogy a lejtő aljánál legyen 0 a függőleges koordináta. Ekkor a lejtő teteje $z = 2 \text{ m} \cdot \sin 20^\circ = 0,684 \text{ m}$ magasságban van.

A játékautóra csak a potenciális gravitációs erő és a lejtő kényszerereje hat, de utóbbi munkavégzése 0, hisz mindig merőleges a mozgás irányára. Így alkalmazható a mechanikai energiamegmaradás törvénye a lejtő alja és teteje között:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0,$$

ahol m a kiskocsi ismeretlen tömege. $v_1 = 3 \text{ m/s}$, v_2 az ismeretlen végsebesség a lejtő alján.

Innen a keresett sebesség a lejtő alján:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gz} = 4,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.17. példa: Igazolja, hogy a fentebb a pontszerű testek közt ható gravitációs erő és potenciálfüggvény valóban összetartoznak! (Használja az (1.20) összefüggést!)

Megoldás: Azt kell igazolni, hogy az (1.22) által meghatározott potenciálfüggvény hely szerinti deriválásával visszakapjuk az (1.21) erőtvénnyt.

Végezzük számításainkat derékszögű koordinátarendszerben! Ekkor a helyvektort $\underline{r} = (x, y, z)$ alakban adjuk meg. Így a potenciál kifejezése:

$$V(x, y, z) = \gamma \frac{m_1 m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Számoljuk ki először (1.20) alapján az x irányú erőt:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)'_x = \\ &= \gamma m_1 m_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = \\ &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

Ez valóban az általános tömegvonzási törvény (1.21)-beli alakjának x komponense.

A másik két komponensre a számítás ugyanígy végrehajtható, csak x helyett y és z kerül ki a belső függvény deriválásából.

Ezzel igazoltuk, hogy az (1.22) által meghatározott potenciálfüggvény az (1.21)-beli erőtvénnyel felel meg.

1.18. példa: A Föld sugara 6370 km, felszínén a nehézségi gyorsulás értéke $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Ennek ismeretében az általános tömegvonzási törvény felhasználásával számolja ki a Föld tömegét!

Megoldás: Az, hogy a felszínen a nehézségi gyorsulás g azt jelenti, hogy egy m_2 tömegű testet m_2g erővel vonz a Föld. Ugyanezt a vonzóerőt az általános tömegvonzási törvény (1.21)-beli alakjával is kifejezhetjük. Az erők nagyságának egyenlőségét felírva:

$$m_2g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

ahol r a Föld sugarával, m_1 a tömegével egyezik meg.

Innen a Föld tömege:

$$m_1 = \frac{r^2 g}{\gamma} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

1.4.2. Nem konzervatív erők

Ahhoz, hogy egy erőről belássuk, hogy nem konzervatív elegendő egyetlen olyan esetet mutatni, melyben az általa két pont között végzett munka két különböző pálya mentén nem azonos, vagy pedig azt, hogy van olyan zárt görbe, mely mentén az össz munkavégzés nem 0.

Szilárd testek felületén fellépő erők. A mozgások sokszor nem teljesen szabad feltételek mellett zajlanak le, hanem bizonyos szilárd testek mások pályáját bizonyos értelemben behatárolják, az érintkező felületeken erő lép fel. Pl. egy lejtő kényszeríti a rajta csúszó testet, hogy az ő síkjában maradvan mozogjon, vagy a hintát a lánc kényszeríti arra, hogy a felfüggesztéstől nem távolodjon el egy bizonyos mértéken túl.

Ezekben az esetekben a kényszerítő test erővel hat a mozgó testre. Erről az erőről általánosságban csak azt tudjuk, hogy olyan, aminek a kényszerített mozgásgörbére vagy -felületre merőleges komponense épp vektori ellentettje a többi erő ilyen irányú komponensének. Ez szükséges ugyanis ahhoz, hogy a kikényszerített görbéről vagy felületről a test ne váljon le. Ezt az erőkomponenst **kényszererőnek** nevezzük. A felületeken fellépő erő másik, a felülettel párhuzamos komponensét a legtöbb kényszer esetén **súrlódási erőnek** hívjuk.

Egyszerű példa a vízszintes asztallapon csúsztatott test esete. A testre ható gravitációs erő függőleges, de ebben az irányban nem tud elmozdulni, mert az asztal épp a gravitációs erőt kiegyenlítő merőleges komponensű

kényszererővel hat rá. A felülettel párhuzamos mozgást pedig a súrlódási erő befolyásolja.

A gyakorlatban ezen erőkomponenseket külön szokták kezelni.

Kényszererő. Általános erőtvény nem adható meg a kényszererőkre egyszerű matematikai eszközökkel. Annyit azonban tudunk, hogy ezek mindig merőlegesek a kikényszerített mozgási síkra vagy -vonagra, nagyságuk pedig –bizonyos határok között– akkora, hogy a testre ható többi erő ilyen irányú komponensét kioltják.

Mindezek ellenére sokszor könnyű velük számolni, ha tudjuk, hogy a testet az adott feladatban képesek a megadott síkban vagy vonalon tartani, akkor csak a többi erő e síkbeli vagy vonalmenti komponensével kell foglalkoznunk. További egyszerűsítést jelent, hogy a kényszererők mindig merőlegesek a mozgásra, azaz munkavégzésük 0.

Súrlódási erő. A felületek érintkezésekor fellépő erőnek sokszor nem elhanyagolható komponense van a kényszererőn kívül is. Ezt általában az érintkező felületek érdessége miatti súrlódás okozza.

A legtöbb esetben jó közelítéssel teljesül az, hogy egymáson csúszó felületek esetében a **csúszási súrlódási erő** S nagysága a kényszererő konstansszorosa, iránya pedig a mozgás irányával ellentétes:

$$S = \mu K,$$

ahol K a testet a felületen tartó kényszererő (lásd fentebb), μ pedig a (csúszási) súrlódási együttható. μ értéke az érintkező felületek típusától függ.

A súrlódási erő természetesen nem rendelkezik potenciállal. Munkavégzése mégis egyszerűen számolható, ha K állandó, hisz a súrlódási erő mindig a mozgás irányával ellentétes irányban hat, így

$$W_s = -s \cdot \mu K$$

ahol s a test által megtett út.

A súrlódás egy különleges esete a **tapadási súrlódás**: egymáshoz képest nyugvó felületek közti súrlódási erő bizonyos határok közt megakadályozza az elmozdulást. Ha tehát a tapadási súrlódás elég erős, akkor a test nem tud mozdulni. A tapadási súrlódásnak azonban van egy maximális $S_{0,max}$ nagysága, ami a felületeket összenyomó kényszererővel egyenesen arányos:

$$S_{0,max} = \mu_0 K$$

ahol μ_0 a tapadási súrlódási együttható.

Amíg a tapadási súrlódás hat, munkavégzése természetesen 0, hisz a testnek nincs elmozdulása.

Közegellenállási erő. A gyakorlati életben szinte minden mozgás valamilyen folytonos közegben (pl. levegőben, vízben) történik. A közeghez képest sebességgel rendelkező test mozgásba hozza a közeg részecskéit, azaz lendületet ad át nekik, így az övé csökkenni fog. Az erő fogalmát használva ez azt jelenti, hogy a mozgás sebességével ellentétes irányú erő fog a testre hatni.

A közegellenállási erő kialakulásában két fontos hatás játszik szerepet: a folyadék belső súrlódásából származó, úgynevezett viszkózus erők és a test mögött leváló örvények által elvitt lendület (és energia) hatása. Előbbi az alacsony sebességű mozgásoknál jellemző, és jó közelítéssel a sebességgel egyenesen arányos, utóbbi a nagyobb sebességeknél válik lényegessé, és nagysága a sebesség négyzetével arányos. Hogy mi számít „kis”, illetve „nagy” sebességnek, arra pontos, de összetett kritériumok vannak, melyeket csak áramlástani ismeretek birtokában tudnánk megfogalmazni, és az átmenet a két állapot közt nem is éles, hanem fokozatos.

Praktikusan közelítőleg el lehet dönteni, melyik eset alkalmazható inkább, ha tapasztaltuk már az adott jelenséget: ha a mozgó test mögött erős örvényképződés érezhető, a sebesség ebben az értelemben „nagy” (pl. egy gyorsan mozgó autó esetében), ha pedig a közeg csak simán összezárul a test mögött, a „kis” sebesség esete áll fenn (pl. egy rugón levő, lassan rezgő test esetében).

Kis sebességek esetén a közegellenállási erő tehát:

$$\underline{F}_k = -C \cdot v \frac{v}{v} = -C \underline{v}. \quad (1.24)$$

Nagy sebességek esetén pedig:

$$\underline{F}_k = -D \cdot v^2 \frac{v}{v} = -D v \underline{v}.$$

A C ill. D együtthatók a test alakjától, méretétől, a közeg sűrűségétől és belső viszkozitásától függenek. A pontos függés vizsgálata túlmutat tananyagunk céljain, ezért ezt nem tesszük meg itt.

Az látszik, hogy a közegellenállási erő egyik esetben sem lehet potenciális, hisz ha egy test egy bizonyos úton különböző sebességgel végighalad, a közegellenállási erő is más lesz, így a végzett munka is.

1.19. példa: Egy ládát vízszintes talajon meglökünk 5 m/s kezdősebességgel. A csúszási súrlódási együttható a láda és a talaj között 0,15. Hány méter csúszás után áll meg a láda?

Megoldás: Legyen a láda tömege m . Ekkor a fentiek szerint $K = mg$ nagyságú a talaj kényszerereje, mert függőleges irányban a talaj nem engedi elmozdulni a ládát.

Ekkor viszont a súrlódási erő nagysága $|S| = \mu K = \mu mg$ lesz, ami

$$|a| = \frac{|S|}{m} = \mu g = 1,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

nagyságú gyorsulást jelent.

Ezzel az állandó gyorsulással a láda nyilván

$$t = \frac{v_0}{|a|} = \frac{5}{1,47} = 3,40 \text{ s}$$

alatt veszti el v_0 nagyságú kezdősebességét.

A csúszási távolság meghatározásához az origót a láda meglökésének helyén vegyük fel, az x tengely mutasson a meglökés irányába. Ekkor gyorsulása negatív lesz: $a = -\mu g$, kezdősebessége $v_0 = 5 \text{ m/s}$, kezdő helye pedig $x_0 = 0$. Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás hely-idő függvénye ebben az esetben:

$$x = 0 + v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2 = 8,50 \text{ m}.$$

A láda tehát 8,5 m-t csúszik, mielőtt megáll.

Tanulságos ugyanezt munkavégzéssel is meghatározni. A fentiek alapján a súrlódási erő ebben az esetben a mozgással ellentétes irányú és $S = \mu mg$ nagyságú, munkavégzése tehát $W = -x \cdot S = -x\mu mg$.

Ez a munkavégzés emésztette fel a láda kezdeti $E_m = (1/2)mv_0^2$ energiáját: $E_m + W = 0$, azaz

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - x\mu mg = 0$$

ahonnan egyszerűen adódik, hogy a csúszási távolság:

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 8,50 \text{ m},$$

ami természetesen azonos a másik módszerrel kapott eredménnyel.

1.20. példa: Egy autó 50 lóerős motorral 120 km/h végsebességre képes (vízszintes pályán, szélcsendben). Ha kicserélnék a motorját egy ugyanakkora tömegűre, de 100 lóerősre, kb. mekkora lenne a végsebessége? (Tételezzük fel, hogy a végsebességek esetén a kocsira ható fékező erők közül a közegellenállás a leglényegesebb.)

Megoldás: (1.17) szerint bármely erő teljesítménye az erő és a sebesség skaláris szorzatával egyezik meg.

A gyorsan mozgó autó esetén a közegellenállás teljesítménye:

$$P_k = \underline{F}_k \underline{v} = -D \cdot v \underline{v} = -Dv^3.$$

Amennyiben a feladat szövege szerint (és a valóságnak megfelelően) a közegellenállást tekintjük a leglényegesebb fékező erőnek, a motor P_m teljesítménye ennek ellentettje kell legyen, hogy együttes hatásuk eredője 0 legyen, azaz ne változzék a mozgási energia. Tehát:

$$P_m = Dv^3.$$

Ez azt jelenti, hogy a szükséges motorteljesítmény a végsebesség köbével egyenesen arányos, azaz 2-szer nagyobb teljesítmény csak $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ -szor akkora sebességet jelent, ami esetünkben $120 \cdot 1,26 = 151$ km/h.

1.5. A newtoni mechanika korlátai

Az előző fejezetben áttekintettük a newtoni mechanika alapjait. Ezen törvények segítségével a 17. századtól kezdődően nagyon sok fontos jelenséget sikerült megmagyarázni, értelmezni és új dolgok felfedezésére is nyílt lehetőség.

A newtoni elmélet első fő sikereit az égitestek (Hold, bolygók) mozgásának megmagyarázásával aratta, erre ugyanis korábban egy elmélet sem volt képes. Azonban nemcsak a megfigyelt jelenségeket tudta megmagyarázni a Newton-féle mechanika. Az Uránusz mozgásában ugyanis kis eltéréseket fedeztek fel a számított értékekhez képest. Többen feltételezték, hogy ez nem az elmélet hibája, hanem egy eddig ismeretlen bolygó gravitációs ereje módosítja az Uránusz pályáját. A számított és megfigyelt értékek különbségéből (több évi számolással) sikerült megkapni, hol kellene az új bolygónak lennie, ha tényleg az okozza az eltérést. Az új bolygót (a Neptunuszt) valóban a kiszámított helyen találták meg a csillagászok a XIX. század közepén. Hasonlóan sikerült a Plútót is felfedezni a XX. század elején.

A newtoni mechanika ezen kívül tökéletesen működött „földi” körülmények között is (pl. gépek tervezésénél), semmi olyan jelenség nem fordult elő a XX. század elejéig, ami ellentmondani látszott volna az ún. klasszikus mechanikának.

A Newton-féle mechanika majdnem három évszázadon keresztül minden megfigyelhető jelenséget a mérési pontosságon belül meg tudott magyarázni, így a XX. század elejéig sokan azt hitték, hogy abszolút igazak a Newton-törvények. (Ez egyébként a filozófiára is nagy hatással volt.)

A XIX–XX. századforduló környékén azonban több mérés kezdett arra utalni, hogy valami nincs rendben a klasszikus mechanikával. Egyrészt a fény sebességét megközelítő sebességek esetén kiderült, hogy a testeknek megváltozik a tömegük, megváltozik az idő múlási sebessége és még nagyon sok hasonló furcsa dolog történik. Ezeket a jelenségeket **Albert Einstein** magyarázta meg elsőként speciális relativitáselméletében. Kiderült pl. hogy a fénysebességet sem elérni, sem átlépni nem lehet, a testek tömege nő a sebességgel és sok más, a newtoni mechanikának ellentmondó jelenség történik.

Az is bebizonyosodott azonban, hogy a fénysebességet nem megközelítő sebességek esetén az Einstein-féle és a Newton-féle mechanika közti eltérés nagyon kicsi⁵. Ezért használhatjuk továbbra is a köznapokban vagy egy gép tervezésekor a jóval egyszerűbb newtoni mechanikát, annak ellenére, hogy tudjuk: ez az elmélet nem tökéletesen pontos. (Természetesen vannak kivételek: pl. a színes TV-készülékek belsejében az elektronok olyan sebességgel mozognak, hogy a relativitáselmélet és a klasszikus mechanika közti eltérés 5–10%-os, azaz nem elhanyagolható. Színes TV-képcső tervezéskor tehát már a relativisztikus mechanikát kell használnunk.)

A XX. század elején más mérések is utaltak a klasszikus mechanika korlátaira. A newtoni mechanika alapján ugyanis nem sikerült megmagyarázni az atomok viselkedését. Ezek a problémák vezettek el a kvantummechanika kifejlődéséhez. Kiderült: a newtoni mechanika hibája kis méretek esetén nagyon nagy lesz, így az az atomok világában nem használható.⁶ Természetesen bebizonyosodott, hogy nagy méretek esetén a kvantummechanika és a klasszikus mechanika eltérése elhanyagolható, így pl. egy vízerőmű tervezésekor nem kell a kvantummechanika alapján számolnunk. (Azonban kvantummechanikát kell használni pl. a modern mikroelektronikai berendezések tervezésénél.)

Jelenleg nem áll rendelkezésünkre olyan mérési adat, amely ellentmondana a relativitáselméletnek vagy a kvantummechanikának. Ez alapján azonban nem mondhatjuk, hogy ezek az elméletek abszolút értelemben helyesek. Elképzelhető, hogy olyan mérési adatok birtokába jutnak a kutatók, ami nem illeszthető bele ezekbe az elméletekbe, és akkor ezeket is új elméletekkel kell helyettesíteni.

Összegezve: tudnunk kell, hogy a Newton-féle mechanika nem pontos (mondhatnánk azt is, hogy nem igaz), de a fény sebességénél sokkal kisebb

⁵Pl. egy 10 000 m/s sebességű műhold esetén az eltérések a 9. tizedesjegyben jelentkeznek, ami a gyakorlati élet legtöbb területén kimutathatatlanul kicsi.

⁶Erről a jegyzetben részletesen szót ejtünk.

sebességek és az atomi méreteknél sokkal nagyobb méretek esetén nagyon jó, gyakorlati szempontból teljesen kielégítő közelítést ad. Ezért használhatjuk szinte mindig a mindennapi életben és a mérnöki gyakorlatban.

1.6. Kérdések és feladatok

1.6.1. Elméleti kérdések

1. Lehet-e egy test mozgása során az elmozdulás nagysága nagyobb, mint a megtett út? Mikor? Mikor lehetnek egyenlőek?
2. Mit ad meg a gyorsulás-idő függvény grafikonja alatti terület nagysága?
3. Hogyan olvasható le a sebesség-idő grafikonról a test t_1 és t_2 közötti átlagos gyorsulása?
4. Hogyan olvasható le a sebesség-idő grafikonról a test t_1 és t_2 közötti elmozdulása?
5. Hogyan olvasható le a sebesség-idő grafikonról a test helye egy t időpontban?
6. Mit ad meg a sebesség-idő függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége?
7. Milyen művelettel számolható ki egy test sebessége a hely-idő függvényből?
8. Mit nevezünk inerciarendszernek?
9. Két test azonos tömegű, de egy adott pillanatban az első kétszer nagyobb sebességgel megy, mint a második. Mit tudunk ez alapján mondani a rájuk ható erők eredőjének nagyságáról?
10. Két test azonos tömegű, de egy adott pillanatban az első kétszer nagyobb gyorsulással mozog, mint a második. Mit tudunk ez alapján mondani a rájuk ható erők eredőjének nagyságáról?
11. Egy kötélről tudjuk, hogy akkor szakadna el, ha egy kampóra kötve alsó végére egy 100 N súlyú testet akasztanánk, de 99 N esetén még nem szakad el. Elszakad-e, ha kézbe fogva mindkét végét 80 N nagyságú, ellentétes irányú erővel húzzuk? Miért?
12. Egy testre állandóan csak egyetlen, 5 N nagyságú erő hat, sebessége mégis állandóan 3 m/s nagyságú. Hogyan lehetséges ez?
13. Egy 2 kg tömegű testre egy 5 N és egy 7 N nagyságú erő hat. Legalább

és legfeljebb mekkora a gyorsulása?

14. A Föld kb. 81-szer nagyobb tömegű, mint a Hold. Melyik gyakorol nagyobb vonzóerőt a másikra? Miért?
15. Két korcsolyázó ember egymással szembefordulva áll a jégen. A kisebb tömegű ellöki magát a nagyobbikát. Melyiknek lesz nagyobb a kezdősebessége, ha korcsolyájukon csúsznak? (Nem fékeznek be.) Miért?
16. Mi a kapcsolat egy test lendülete és a rá ható erők eredője között?
17. Egy kemény tárgy esik le először puha szivacsra, másodszor ugyanakkora sebességgel merev műpadlóra. Lefékeződése közben melyik esetben fog fellépni a legnagyobb erő?
18. Egy testen egy külső erő munkavégzése negatív. Mit mondhatunk a test mozgási irányának és az erő irányának kapcsolatáról?
19. Egy testnek folytonosan van gyorsulása, mozgási energiája mégsem változik. Hogyan lehetséges ez?
20. Mikor mondjuk, hogy egy erőnek van potenciálja?
21. Egy testet elhajítunk. Repülése közben a közegellenállás elhanyagolható hatású. Sebessége és magassága folytonosan változni fog. Adjon meg egy formulát, mely tartalmazza a test sebességét és magasságát, és amely a test repülése során mégis állandó marad!
22. Mivel magyarázható, hogy a magasról eső testek eleinte gyorsulnak, de egy idő múltán lényegében állandó sebességgel zuhannak tovább?
23. Nagy sebességű mozgások esetén hogyan függ a közegellenállási erő a test sebességétől?
24. Milyen jellegű problémák esetén elfogadhatatlanul nagy a newtoni mechanika eltérése a valóságtól? (Egy példa elég.)

1.6.2. Kidolgozott feladatok

1.1. feladat: Egy léghajó függőlegesen emelkedik 5 m/s sebességgel. Amikor 20 m magasan van, leoldanak róla egy homokzsákot. A leoldástól számítva hány másodperc múlva puffan a földön a homokzsák? Mekkora lesz a sebessége? (A közegellenállást hanyagoljuk el!)

Megoldás: Ha a közegellenállás elhanyagolható, akkor a homokzsák egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez, lefelé mutató g nagyságú gyorsulás-

sal.

Az x tengely legyen függőleges, origója legyen a földön. Ekkor a zsák hely-idő függvénye:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2}t^2,$$

ahol $x_0 = 20$, $v_0 = 5$, $g = 9,81$ SI egység.

A leérés pillanatában $x(t) = 0$, azaz

$$20 + 5t - 4,905t^2 = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$t_1 = -1,57, \quad t_2 = 2,59.$$

Fizikai jelentése itt csak a pozitív gyököknek van, tehát az elengedéstől számítva 2,59 s múlva csapódik a homokzsák a földbe.

A becsapódási sebesség egyszerűen számolható, hisz egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásnál:

$$v(t) = v_0 + at, \quad \text{azaz} \quad v(t) = 5 - 9,81t.$$

Ide a fenti t_2 értéket beírva a becsapódás sebessége:

$$v(t_2) = -20,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehát a homokzsák 20,4 m/s sebességgel csapódik a földbe.

Utóbbi kérdésre a munkatétel alapján is tudtunk volna válaszolni az esési idő kiszámítása nélkül. Mivel viszont a feladat az esési időt is kérdezte, annak ismeretében meg már egyszerű volt erre a kérdésre válaszolni, ezért nem ezt az utat követtük.

1.2. feladat: Egy pontszerű test mozgásának egyenlete (SI-rendszerben)

$$x(t) = t^3 - 6t + 4.$$

Milyen a tömegpont átlagos sebessége $t_1 = 3$ s és $t_2 = 5$ s között? Mekkora a pillanatnyi sebessége és gyorsulása a 4 s időpontban?

Megoldás: Az átlagsebesség képlete

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

A feladatban adott pontok: $t_1 = 3$ s, $t_2 = 5$ s. Könnyen kiszámítható behelyettesítéssel, hogy: $x(t_1) = 13$ m, $x(t_2) = 99$ m. Így az átlagsebesség:

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{99 - 13}{5 - 3} = 43 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A pillanatnyi sebesség kiszámítására az x függvény t szerinti deriváltjára van szükség. Ezt egyszerűen tagonként elvégezhetjük. (Az összeg tagonként deriválható, az egyes tagok az $(t^n)' = nt^{n-1}$ szabály alkalmazásával, illetve a konstans függvény deriváltja 0 szabály felhasználásával deriválhatóak.)

$$v(t) = (x(t))' = (t^3)' - (6t)' + (4)' = 3t^{3-1} - 6 \cdot 1t^{1-1} + 0 = 3t^2 - 6.$$

Ide kell $t = 4$ s-ot behelyettesíteni a kért időpontbeli sebesség meghatározásához:

$$v(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 = 42 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A gyorsulás a sebesség-idő-függvény deriváltja:

$$a(t) = (v(t))' = 3 \cdot 2t^{2-1} - 0 = 6t.$$

A kért $t = 4$ s időpontban:

$$a(4) = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehát a tömegpont átlagsebessége 3 s és 5 s között 43 m/s, pillanatnyi sebessége és gyorsulása 4 s-kor $v = 42$ m/s, $a = 24$ m/s².

1.3. feladat: Egy xy -síkbán mozgó test koordinátáit az alábbi függvények adják meg: $x(t) = 7 \cdot \sin(3,1 \cdot t) - 1$, $y(t) = 5e^{-t/2}$.

Mekkora a test elmozdulásának és átlagsebességének nagysága $t_1 = 2$ s és $t_2 = 5$ s között? Mekkora a pillanatnyi sebességének két komponense t_1 -kor?

Megoldás: Először számoljuk ki a két időpontbeli koordinátákat. Egyszerű behelyettesítéssel (SI-egységekben):

$$x_1 = x(t_1) = -1,582; \quad y_1 = y(t_1) = 1,839,$$

$$x_2 = x(t_2) = 0,445; \quad y_2 = y(t_2) = 0,410.$$

(A radiánban való behelyettesítésre ügyelni kell!)

Ez alapján elmozdulásának nagysága a Pitagorasz-tételből:

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2,48 \text{ m}.$$

Átlagsebességének nagysága pedig:

$$|\bar{\mathbf{v}}| = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = 0,827 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A sebességkomponensek:

$$\begin{aligned}v_x &= x(t)' = 7 \cos(3,1 \cdot t) \cdot 3,1, \\v_y &= y(t)' = 5e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

A t_1 időpontban:

$$v_x(t_1) = 21,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_y(t_1) = -0,92 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.4. feladat: Egy test sebesség-idő függvénye (SI-ben):

$$v(t) = 2,5 \cdot e^{-0,3t} \sin(9t + 1,3)$$

A $t = 0$ időpontbeli hely, sebesség és gyorsulás közül melyik határozható meg ebből a függvényből? Határozza is meg az értéküket!

Megoldás: A sebesség-idő függvényből a pillanatnyi sebesség egyszerű behelyettesítéssel, a gyorsulás deriválással határozható meg, de a hely nem számolható ki. (A grafikon alatti terület az elmozdulást adja, nem a helyet!)

A pillanatnyi sebesség tehát:

$$v(0) = 2,5 \cdot e^{-0,3 \cdot 0} \sin(9 \cdot 0 + 1,3) = 2,5 \cdot 1 \sin(1,3) = 2,41 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(Vigyázat! Mivel nem volt fokjel, ezért radiánban kell behelyettesíteni!)

A gyorsulást a sebesség-idő függvény deriválásával határozhatjuk meg. A sebesség-idő függvény két függvény szorzataként fogható fel: az $f = 2,5e^{-0,3t}$ és a $g = \sin(9t + 1,3)$ függvények szorzataként. A szorzatfüggvény deriválási szabályát $((fg)' = f'g + fg')$ alkalmazva:

$$\begin{aligned}a(t) = v'(t) &= (2,5 \cdot e^{-0,3t} \sin(9t + 1,3))' = \\&= (2,5 \cdot e^{-0,3t})' \cdot \sin(9t + 1,3) + 2,5 \cdot e^{-0,3t} \cdot (\sin(9t + 1,3))' = \\&= 2,5 \cdot e^{-0,3t} 0,3 \cdot \sin(9t + 1,3) + 2,5 \cdot e^{-0,3t} \cdot \cos(9t + 1,3) 9 = \\&= 2,5e^{-0,3t}(0,3 + 9 \cos(9t + 1,3)).\end{aligned}$$

Megjegyzendő, hogy f' és g' kiszámításánál használni kellett az összetett függvények deriválási szabályát.

Ide $t = 0$ -t beírva a kért gyorsulás:

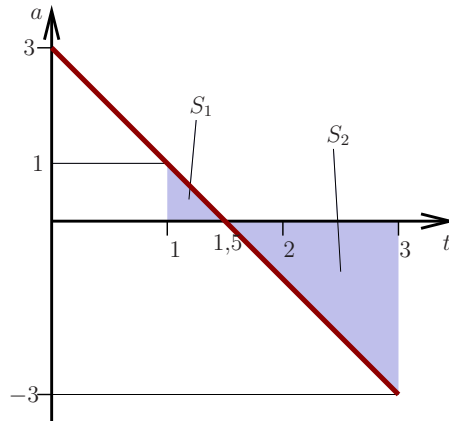
$$a(0) = 2,5e^0(0,3 + 9 \cos(1,3)) = 5,30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehát a test helye nem határozható meg, sebessége $2,41 \text{ m/s}$, gyorsulása pedig $5,3 \text{ m/s}^2$ a kért időpontban.

1.5. feladat: Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő: $a(t) = 3 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$ -kor 5 m/s sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 3$ -kor?

Megoldás: Az érdekesség kedvéért lássuk a grafikus és az integrálásos megoldást is!

A test sebességváltozását az $a(t)$ függvény grafikonja alatti területek előjeles összegéből kaphatjuk meg. (Lásd 1.17. ábra.)



1.17. ábra. Magyarázó ábra az 1.5. példához.

Ez a terület két háromszögre bomlik:

- $t_1 = 1$ és $t_0 = (3/2)$ között egy 1 magasságú háromszög a t tengely felett.
- $t_0 = (3/2)$ és $t_3 = 3$ között egy 3 magasságú háromszög a t tengely alatt.

(Itt t_0 az egyenes t tengellyel való metszéspontja.)

Ezek területei (S_1 és S_2) közül az első pozitív, a másodikat negatív előjellel kell figyelembe venni. Így a sebességváltozás:

$$\Delta v = S_1 - S_2 = \frac{(1/2) \cdot (1/2)}{2} - \frac{(3/2) \cdot 3}{2} = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5$ m/s, ezért: $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3$ m/s.

Ugyanezt automatikusabban megkaphatjuk integrálással:

$$\Delta v = \int_1^3 (3 - 2t) dt = [3t - t^2]_1^3 = (3 \cdot 3 - 3^2) - (3 \cdot 1 - 1^2) = -2,$$

és $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3$ m/s, ami természetesen ugyanaz, mint a grafikus megoldás esetében.

Az előző példa mutatja, hogy az integrálszámítás mennyire hatékony még egyszerű függvények esetére is. A grafikus módszer ugyan szemléletesebb, de körülményesebb (zérushelykeresés, előjelfigyelés), több benne a hibalehetőség. A következő példa viszont grafikusan meg sem oldható.

1.6. feladat: Egy $m = 3$ kg tömegű testre ható erő az idő függvényében: $F(t) = 5 \cdot e^{-2t}$ (SI-egységekben). Mekkora a test sebességváltozása $t_1 = 0$ és $t_2 = 10$ s között?

Megoldás: A test gyorsulás-idő függvénye:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{5}{3} e^{-2t}.$$

A sebességváltozás a gyorsulás-idő függvény integrálásával határozható meg:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt = \frac{5}{3} \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{10} = -\frac{5}{6} (e^{-20} - e^{-0}) \approx \frac{5}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.7. feladat: Egy álló, megrakott, de be nem fékezett vagonnak egy üres vagon ütközik 2,5 m/s sebességgel. Az ütközéstől a megrakott vagon ebben az irányban megindul 0,7 m/s sebességgel, az üres vagon pedig ellenkező irányban mozog 0,6 m/s-mal. Az üres vagon tömege 2500 kg.

Mekkora a megrakott vagon tömege? Mennyi volt a vagonok ütközés előtti és utáni összes mozgási energiája? Hova lett a különbség?

Megoldás: Pozitív iránynak véve az üres vagon eredeti mozgásirányát, 1-essel az üres, 2-essel a megrakott vagon adatait jelölve az ütközés előtti sebességek SI-egységekben:

$$v_1 = 2,5, \quad v_2 = 0.$$

Az ütközés utániak pedig:

$$v_1^* = -0,6, \quad v_2^* = 0,7.$$

A lendületmegmaradás szerint:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^* + m_2 v_2^*.$$

Innen az ismeretlen tömeg:

$$m_2 = m_1 \frac{v_1^* - v_1}{v_2 - v_2^*} = m_1 \cdot 4,43 = 11\,070 \text{ kg}.$$

Az ütközés előtti összes mozgási energia:

$$E_m = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 7\,810\text{ J},$$

az ütközés után pedig:

$$E_m^* = \frac{1}{2}m_1(v_1^*)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2^*)^2 = 3\,160\text{ J}.$$

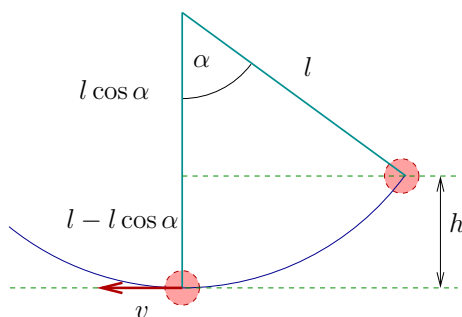
A különbség onnan van, hogy az ütközés közben nem potenciális erőhatás is fellépett, ami feltehetően az ütközők belső súrlódásából adódik.

1.8. feladat: Egy 2,5 m hosszú kötélen levő hintát kitérítünk úgy, hogy a lánc 50° -os szöget zár be a függőleges iránnyal, majd kezdősebesség nélkül elengedjük.

Mekkora sebességgel fog áthaladni a függőleges helyzeten? Mekkora erő feszíti ekkor a láncot, ha egy 30 kg tömegű kisgyerek ül a hintában?

Megoldás: A hintára ható erők: a gravitációs erő, a lánc ereje és a közegellenállás. Utóbbit a maximális kitérés és a függőleges helyzet közti negyed lengés ideje alatt elhanyagolhatónak tekinthetjük. A gravitációs térnek van potenciálja, a lánc ereje pedig mindig merőleges a sebességre, tehát munkavégzése 0, így az energiamegmaradás törvénye alkalmazható.

Vegyük fel a potenciális energia nullpontját a hinta alsó helyzetében. Ehhez képest elengedéskor a hinta valamilyen h magassággal feljebb van. Ez a h az 1.18. ábra alapján: $h = l - l \cos \alpha$, ahol $\alpha = 50^\circ$ a feladat szerint.



1.18. ábra. Magyarázó ábra az 1.8. feladathoz.

Az elengedés pillanatában a hinta potenciális energiája nem mgh , ahol m a hinta tömege, g a nehézségi gyorsulás, és itt mozgási energiája 0. Ezzel szemben az alsó ponton áthaladáskor a potenciális energia 0, a mozgási viszont $(1/2)mv^2$, ahol v a kért sebesség.

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0,$$

ahonnan a kért sebesség:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 4,19 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A feladat szerint a hintában ülő kisgyerek l sugarú körpályán mozog az alsó pontban v pillanatnyi sebességgel. A rá ható erők eredője ekkor

$$F_e = m \frac{v^2}{l} = 2mg(1 - \cos \alpha)$$

nagyságú és függőlegesen felfelé mutató.

Ez az eredő erő a lánc ugyanilyen irányú F_l erejéből és a kisgyerek ezzel ellentétes irányú mg súlyából ($m = 30 \text{ kg}$) származik, azaz:

$$F_e = F_l - mg$$

ahonnan a keresett erő, ami a láncot feszíti:

$$F_l = F_e + mg = mg(3 - 2 \cos \alpha) = 1,71mg = 505 \text{ N}.$$

Ebből az is kiderül, hogy a kisgyerek saját súlyának 1,7-szeresét érzi az függőleges helyzetben áthaladva.

1.9. feladat: Egy ládát vízszintes, csúszós talajon meglökünk. Az csak 8 s múlva, a meglökés helyétől 15 m-nyire áll meg. Mekkora a talaj és a láda között a súrlódási együttható? Mekkora kezdősebességgel löktük meg a ládát?

Megoldás: A láda mg súlyát a talaj K nagyságú kényszerereje függőleges irányban ellensúlyozza, ezért $K = mg$. Ekkor viszont a ládát fékező csúszási súrlódási erő nagysága $S = \mu K = \mu mg$, azaz a láda vízszintes irányú gyorsulásának nagysága:

$$|a| = \frac{S}{m} = \mu g.$$

(Vízszintes irányban csak a súrlódási erő hat a ládára.)

Vegyük fel az x tengelyt a test mozgásának irányában, az origó legyen a meglökés helyén. Ekkor az előzőek szerint az egyenletesen lassuló láda hely-idő függvénye:

$$x(t) = 0 + v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2,$$

a sebesség-idő függvény pedig:

$$v(t) = v_0 - \mu g t.$$

Legyen $t_1 = 8$ s a megállás ideje. Ekkor $x_1 = x(t_1) = 15$ m, $v(t_1) = 0$, tehát egyenleteink a következő alakba írhatók:

$$x_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{\mu g}{2} t_1^2, \quad (1.25)$$

$$0 = v_0 - \mu g \cdot t_1. \quad (1.26)$$

(1.26) alapján $v_0 = \mu g t_1$, amit (1.25)-be beírva:

$$x_1 = \mu g t_1 \cdot t_1 - \frac{\mu g}{2} t_1^2 = \frac{\mu g}{2} t_1^2.$$

Innen a keresett súrlódási együttható:

$$\mu = \frac{2x_1}{gt_1^2} = 0,048.$$

A kezdősebesség az előzőek szerint:

$$v_0 = \mu g t_1 = \frac{2x_1}{t_1} = 3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.6.3. Gyakorló feladatok

1. Egy test hely-idő függvénye (SI-ben):

$$x(t) = \frac{3t}{2 + \cos(2t)}.$$

Határozza meg a test sebességét a $t = 0$ időpontban!

2. Egy test sebesség-idő függvénye SI egységekben a következő: $v(t) = 5 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$ -kor az $x_1 = 3$ pontban tartózkodott. Hol lesz a test a $t_2 = 5$ időpontban? Mekkora lesz ekkor a gyorsulása?
3. Egy test gyorsulás-idő függvénye SI egységekben a következő: $a(t) = 5/(t + 2)$, és $t = 0$ -kor sebessége 3 m/s volt. Adja meg a test sebesség-idő függvényét!
4. Egy Forma-1-es autó a kanyarban legfeljebb $3g$ centripetális gyorsulást képes elviselni megcsúszás nélkül. Mekkora lehet a maximális haladási sebessége itt, ha a kanyar ívének sugara 30 m?

5. Egy 600 kg tömegű autó 7 s alatt gyorsul álló helyzetből 100 km/h sebességre. Mekkora átlagos erő gyorsítja?
6. Egy 150 kg és egy 120 kg tömegű sumo-birkózó egymásnak ugrik 4 m/s sebességgel és összekapaszkodik. Mekkora és milyen irányú lesz közös sebességük (közvetlenül az ütközés után)?
7. Számolja ki, milyen sebességgel keringenek a Föld felszíne felett 500 km-rel levő körpályákon a műholdak! (A Föld sugara 6370 km, tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg.)
8. Egy gumilabda kemény talajjal ütközve mozgási energiájának 5%-át mindig elveszti. Kezdősebesség nélkül elengedve hány pattogás után lesz a felpattanás magassága az eredeti magasság fele? (A közegellenállást elhanyagolhatjuk.)
9. Egy papírlap széle kilóg egy könyvkupac közepéből. Óvatosan megpróbáljuk kihúzni, és azt tapasztaljuk, hogy az 10 N erővel sikerül is. (Kevesebbel nem.) A papír feletti könyvek tömegét 3 kg-ra becsüljük. Becsülje meg az alapján a papír és a könyvek borítója közti tapadási súrlódási együttható értékét!

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- Feynmann, Leighton, Sants: Mai fizika I., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

Felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- Budó Ágoston: Mechanika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.

1.7. Pontrendszerek mozgása

Az előbb tanult ismeretek segítségével a tömegpontok mozgása leírható. Most azt nézzük meg, mi mondható ezek alapján egy olyan rendszer

mozgásáról, mely sok tömegpont összessége. Ez át fog vezetni minket a kiterjedt testek mechanikájára, hisz egy nagyméretű, pontszerűnek nem tekinthető testet elképzelhetünk úgy, mint ami sok pontszerű részből áll össze, melyeket valamilyen köztük ható erő egyben tart.

Valójában a pontrendszerekről szóló alfejezet célja a merev testek mozgásának előkészítése, ezért itt csak elméleti megfontolásokkal fogunk találkozni, ugyanis általános pontrendszerre alkalmazni itteni ismereteinket meglehetősen körülményes és csak speciális területeken van rá szükség, ezért meghaladja jegyzetünk kereteit. A merev testek, mint speciális pontrendszerek mozgása viszont már jóval gyakrabban felbukkanó problémakör, melyben az általános esethez képest sok minden egyszerűbben írható le, de a fogalmak megalapozását a pontrendszereken keresztül lehet megtenni.

Legyen tehát n db. tömegpontunk m_i tömeggel, $\underline{r}_i(t)$ hely-idő függvényvel. Newton II. törvénye mindegyik testre igaz lesz, azaz:

$$\underline{F}_i = m_i \underline{r}_i'',$$

ahol $\underline{F}_i$ az i -edik tömegpontra ható erők eredője.

Ebből kiindulva a teljes pontrendszerre vonatkozóan sok érdekes megállapítás tehető.

1.7.1. A tömegközéppont mozgása

Egy-egy tömegpontra a többi vizsgált tömegpont és külső, a pontrendszerbe nem tartozó erők is hatnak. Ezért $\underline{F}_i$ az alábbi alakba írható:

$$\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \underline{F}_{i,j} \quad (1.27)$$

Itt $\underline{F}_i^{(k)}$ jelöli az i . testre ható külső erők eredőjét, $\underline{F}_{i,j}$ pedig a j . test i -re gyakorolt hatását.

Számoljuk ki az összes testre ható összes erő összegét, vagyis a pontrendszerre ható erőt!

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \sum_{i=1}^n \left(\underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \underline{F}_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{F}_{i,j}. \quad (1.28)$$

Az utóbbi kettős összegzés első pillanatra ijesztőnek tűnik, valójában azonban az eredmény 0, hisz benne van minden test minden másakra

gyakorolt erejének vektori összege. Newton III. törvénye értelmében $\underline{F}_{i,j} = -\underline{F}_{j,i}$, ezért a $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{F}_{i,j} = 0$.

Talán egy konkrét példa segít az említett kettős összegzésben: Fellép mondjuk az 5. test 9.-re gyakorolt ereje, azaz $\underline{F}_{9,5}$, de a 9.-nek az 5.-re gyakorolt ereje, azaz $\underline{F}_{5,9}$ is. Ezek vektori összege viszont Newton III. törvénye szerint 0. Ez bármelyik számpárral megismételhető, mert minden belső erőnek megtalálható az ellenereje is az összegzésben.

Az erők összegzésekor tehát a belső erők kiejtik egymást, így

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i^{(k)}. \quad (1.29)$$

Tehát a pontrendszer eredő erejének számításakor elég csak a külső erőket összegezni.

Másrésztől ugyanez az erőösszeg Newton II. törvényének segítségével az alábbi alakba írható:

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i'' = \left(\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i \right)''. \quad (1.30)$$

(Kihasználtuk, hogy összeg tagonként deriválható, és hogy a tömegek konstansok.)

Vezessük be a rendszer össztömegét:

$$m_0 = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (1.31)$$

Ekkor (1.30) a következőképpen írható át:

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i^{(k)} = \sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i'' = m_0 \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i}{m_0} \right)''. \quad (1.32)$$

A pontrendszeren belül tehát bármilyen erők is hatnak, teljesül az, hogy az

$$\underline{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i}{m_0} \quad (1.33)$$

vektor úgy változik az időben, mintha egy m_0 tömegű testre csak a külső erők eredője hatna:

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i^{(k)} = m_0 \underline{r}_0'' \quad (1.34)$$

Érdemes tehát megnézni, mit is jelent ez az $\underline{r}_0$ vektor. (1.33) egyenletbe írjuk be m_0 (1.31) szerinti definícióját:

$$\underline{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1.35)$$

Ez láthatóan a testek $\underline{r}_i$ helyvektorainak tömegekkel súlyozott átlaga. Ezért $\underline{r}_0$ szokásos elnevezése: **tömegközéppont**.

Egy tetszőleges pontrendszer –a következőkben látni fogjuk, hogy ugyanígy egy tetszőleges test– tömegközéppontja tehát úgy mozog, mint egy olyan pontszerű test, melynek tömege a pontrendszer (vagy test) össz-tömegével egyezik meg, a rá ható erő pedig a pontrendszerre ható külső erők összege.

Ez az imént bebizonyított tétel, amit (1.34) fogalmaz meg matematikai alakban, teszi lehetővé sok esetben kiterjedt testek mozgásának leírását pontszerű test dinamikája segítségével. Ezt a tömegközéppont mozgásának tételének nevezzük.

Például egy elhajított kődarabnak van kiterjedése, de ha képzeletben részekre bontjuk, mindegyik részre $m_i g$ külső erő (gravitáció) hat, így az egészre ható külső erők eredője $\sum_{i=1}^n m_i g = m_0 g$. A kő tömegközéppontja tehát úgy mozog, mint egy ugyanúgy elindított m_0 tömegű, pontszerű test. (A közegellenállást elhanyagoltuk.)

1.7.2. A pontrendszer lendülete

Felhasználva az eddigieket számoljuk ki egy pontrendszer össz lendületét:

$$p_0 = \sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i' = \left(\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i \right)' = m_0 \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i}{m_0} \right)' = m_0 \underline{r}_0'.$$

A rendszer össz lendülete tehát az össztömeg és a tömegközéppont sebességének szorzata. Mindebből látszik, hogy ha a külső erők összege 0, akkor a rendszer tömegközéppontjának nincs gyorsulása, tehát sebessége állandó, azaz össz lendülete is állandó. Így tetszőleges sok pontot tartalmazó zárt rendszerre is bebizonyítottuk a lendületmegmaradás tételét, amit korábban csak két testre tettünk meg. (1.2.2. fejezet) Ennek matematikai megfogalmazása: ha $\sum_{i=1}^n \underline{F}_i^{(k)} = 0$, akkor $\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i' = \text{állandó}$.

1.7.3. A pontrendszer perdülete

Pontrendszer perdületén tagjainak össz perdületét értjük:

$$\underline{N} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{p}_i \quad (1.36)$$

Számoljuk ki az össz perdület idő szerinti deriváltját:

$$\underline{N}' = \sum_{i=1}^n (\underline{r}_i \times \underline{p}_i)' = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i' \times \underline{p}_i + \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{p}_i' = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i.$$

(Felhasználtuk, hogy $\underline{r}_i' \parallel \underline{p}_i$, ezért vektoriális szorzatuk 0, továbbá hogy Newton II. törvénye miatt $\underline{F}_i = \underline{p}_i'$.)

A tömegközéppont mozgásához hasonlóan itt is arra vagyunk kíváncsiak, milyen hatásai vannak az össz perdületre a pontrendszer tagjaira ható külső és belső erőknek. (1.27) szerint felbontva az erőket külső- és belső erőkre:

$$\underline{N}' = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_{i,j} = \underline{M}^{(k)} + \underline{M}^{(b)}.$$

Mint várható volt, a pontrendszer perdületének változási gyorsasága a külső erők

$$\underline{M}^{(k)} = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)}$$

és a belső erők

$$\underline{M}^{(b)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_{i,j}$$

forgatónyomatékanak összegeként áll elő.

A belső erők forgatónyomatékanak számításakor gondoljuk meg, hogy itt a pontrendszer bármely két tagjának egymásra hatását oda-vissza figyelembe vesszük, azaz az i . test j -re hatását és a j -nek az i -re gyakorolt hatását is. Newton III. törvénye szerint az erők egy ilyen testpáron belül szimmetrikusak, azaz $\underline{F}_{i,j} = -\underline{F}_{j,i}$. Ezt felhasználva $\underline{M}^{(b)}$ -ből a két adott test egymásra hatásából származó forgatónyomaték-pár átírható:

$$\underline{r}_i \times \underline{F}_{i,j} + \underline{r}_j \times \underline{F}_{j,i} = \underline{r}_i \times \underline{F}_{i,j} - \underline{r}_j \times \underline{F}_{i,j} = (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{F}_{i,j}.$$

Ez az eredő forgatónyomaték a két test között nem szükségszerűen 0, csak akkor, ha a két testet összekötő $\underline{r}_i - \underline{r}_j$ vektor és a j . test i -re gyakorolt

ereje párhuzamosak, azaz ha a testek közti kölcsönhatás centrális erővel jellemezhető. A legtöbb alapvető kölcsönhatás (gravitációs-, elektrosztatikus-, rugalmas- stb. kölcsönhatások) viszont centrálisak, és ekkor minden testpáros egymásra gyakorolt forgatónyomatékaik egymás ellentettjei, azaz kiejtik egymást.

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy ha a pontrendszer tagjai közt csak centrális erők hatnak, akkor a belső erők eredő forgatónyomatéka $\underline{M}_b = 0$, azaz a pontrendszer perdületét csak a külső erők forgatónyomatéka változtatja meg:

$$\underline{N}' = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)} = \underline{M}^{(k)}.$$

Ebből következik, hogy ha a külső erők forgatónyomatéka 0, akkor a pontrendszer össz perdülete időben állandó marad. Ez a **perdület megmaradásának tétele**. Vagyis ha $\underline{M}^{(k)} = 0$ és a pontrendszer tagjai közt csak centrális erők hatnak, akkor a rendszer össz perdülete állandó.

A tömegközéppont perdülete. Az előző megfontolásokhoz teljesen hasonlóan érdekes tételek bizonyíthatók a tömegközéppont mozgására vonatkozóan. Terjedelmi okokból ezeket a bizonyításokat mellőzzük.

A tömegközéppont, melynek $\underline{r}_0$ helyzetét az (1.33) illetve az (1.35) egyenlet definiálja és $\underline{P} = m_0 \underline{r}'_0$ össz lendülettel rendelkezik

$$\underline{N}_{tk} = \underline{r}_0 \times \underline{P}$$

perdülettel bír az origóra nézve. Szokás ezt a mennyiséget a pontrendszer **pályaperdületének** is nevezni.

Ez azonban nem a rendszer teljes perdülete, mert számít a rendszer tagjainak tömegközéppont körüli mozgása is. A pontrendszer **sajátperdületének** nevezzük azt a perdületet, melyet az origó tömegközéppontba helyezésével kapnánk, vagyis az

$$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^n (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times m_i (\underline{r}'_i - \underline{r}'_0)$$

mennyiséget.

Bebizonyítható, hogy a rendszer össz perdülete tömegközéppontjának perdülete és a tömegközéppont körüli mozgás perdületének összege, azaz:

$$\underline{N} = \underline{N}_{tk} + \underline{N}_s.$$

A fogalmak megértéséhez gondoljunk mondjuk egy megcsavart focilabda mozgására. Maga a focilabda adott tömeggel és sebességgel mozogva perdülettel bír mondjuk az egyik szögletzászlóra vonatkoztatva, de ha „megcsavarták”, akkor pörög is saját középpontja körül és ez a perdület is hozzájárul összes perdületéhez. A saját tömegközéppont körüli pörögés iránya teljesen független a labda egészének mozgásából származó perdülettől.

Terjedelmi okokból nem bizonyítjuk, hogy a belső, centrális erők nem befolyásolják sem a pontrendszer pálya-, sem a sajátperdületét.

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó

Felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó
- Budó Ágoston: Mechanika, Tankönyvkiadó

1.8. Merev testek síkmozgása

1.8.1. A merev test helyzetének meghatározása

Merevnek tekinthető az a test, amelynek alakja és térfogata, továbbá a pontjainak egymáshoz viszonyított távolsága az őt érő erők hatására nem változik meg.

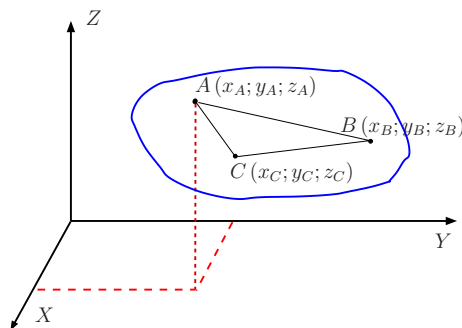
A **merev test** térbeli helyzetét egyértelműen meghatározza három tetszőleges, de nem egy egyenesbe eső pontjának a helyzete (1.19. ábra). A három pont megadásához egy derékszögű koordináta rendszerben kilenc adatra van szükség. A kilenc adat nem független egymástól, mivel a test merevsége miatt a pontok egymástól mindig ugyanolyan távolságra maradnak. Ezeket a távolságokat Pitagorasz-tételével határozhatjuk meg.

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = d_{AB}^2$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = d_{BC}^2$$

$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = d_{CA}^2$$

A fenti három összefüggés miatt egy merev test helyzetét hat független adat határozza meg.



1.19. ábra. A merev test helyzetének megadása

1.8.2. A merev testek mozgása

A merev test mozgásának egyik fajtája a haladó mozgás, vagy transláció. A haladó mozgás során a test minden pontja egymással párhuzamos és egybevágó görbéket ír le, így a test térbeli irányítottsága a mozgás során

nem változik. Ezért a haladó mozgásnál elegendő a test egyetlen pontjának mozgását leírnunk.

Másik fontos mozgástípus a tengely körüli forgás vagy **rotáció**. Ennél a mozgásnál a test forgástengelyen lévő pontjai nem változtatják meg helyzetüket. A test többi pontja pedig a forgástengelyre merőleges síkokban körmozgást végez. ⁷

A mindennapi életben találkozhatunk tisztán transzlációs és tisztán rotációs mozgásokkal is, de a legtöbb mozgás valójában e kétféle mozgásnak a kombinációja. Kerékpározás közben például a bicikli kerekének kerületi pontjai egyaránt végeznek forgó és haladó mozgást. Ha azonban olyan erősen fékezünk, hogy a kerék csúszik a talajon, akkor a forgó mozgás megszűnik és a kerületi pontok is csak haladó mozgást végeznek. Amikor a kerékpárt álló helyzetében megemeljük, és a pedált megtekerjük, akkor pedig a meghajtott kerék tisztán forog.

A merev test pontjainak sebessége Ha a merev test egy OA tengely körül ω szögsebességgel forog és P a testnek az $\underline{r}$ helyvektorral jellemzett pontja (1.20. ábra) akkor P sebességének nagysága a körmozgásnál tanultak szerint:

$$v = \omega \varrho = \omega r \cdot \sin \vartheta .$$

Az egyenlőség jobb oldala formailag megegyezik egy vektorszorzat abszolút értékével. Tekintsük ezért a szögsebességet egy olyan vektornak, melynek nagysága ω és amelyet az OA forgástengelyen O -ból kiindulva mérünk fel, olyan irányítással, hogy $\underline{\omega}$ iránya a forgással jobb menetű csavart képezzen.

Itt használhatjuk az un. jobbkéz-szabályt. Kezünk ujjait a forgás irányába tartva hüvelyk ujjunk mutatja $\underline{\omega}$ irányát.

Az $\underline{\omega}$ **szögsebesség-vektor** bevezetésével a forgó merev test P pontjának sebességét az alábbiak szerint adhatjuk meg:

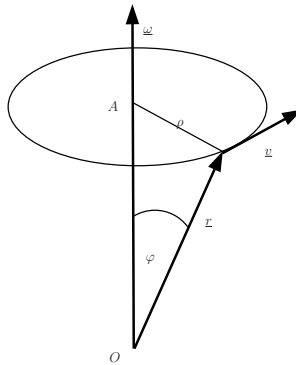
$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} .$$

⁷Ha a forgástengely nem megy át a testen, akkor a test minden pontja a forgástengelyre merőleges síkban fekvő köríveken mozog.

A merev test legáltalánosabb mozgásánál a test tetszőleges P pontjának a sebessége a translációs mozgás sebességének és a forgásból származó sebességének a vektori összege:

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

ahol $\underline{v}_0$ a translációs mozgás sebessége.



1.20. ábra. Sebesség és szögsebesség kapcsolata

A merev test mozgásának néhány speciális esete Kinematikai szempontból a merev test legáltalánosabb mozgása a szabad mozgás. Ebben az esetben a test pillanatnyi helyzetét meghatározó független koordináták (szabadsági fokok) száma a korábban elmondottak szerint hat. A hat szabadsági fok közül három a test egyik pontjának három koordinátáját, a másik három pedig a test térbeli irányítottságát határozza meg.

A merev test bármilyen kényszermozgásánál csökken a szabadsági fokok száma. Ha a testnek egy megadott felületen kell mozognia, akkor a felületre merőleges irányú transláció nem megengedett, így a szabadsági fokok száma ötre csökken.

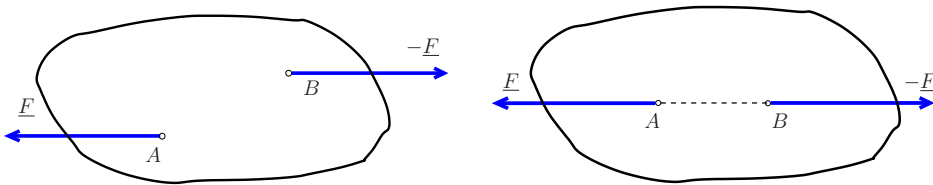
Síkmozgást végez a test, ha pontjainak pályái párhuzamosak egy, a térben állandó helyzetű síkkal. Ebben az esetben a testnek három szabadsági foka van. Ha a test egy meghatározott pontját rögzítjük úgy, hogy a test összes többi pontja ezen nyugvó pont köré írt gömbfelületeken mozoghat, a test mozgását gömbi mozgásnak nevezzük. Ebben az esetben a három rotációs szabadsági fok marad.

Egyetlen **szabadsági foka** van az olyan merev testnek, amely csak egyenes vonalú translációt végez, vagy amelynek két pontja van rögzítve és

így csak rögzített tengely körüli forgás valósulhat meg.

1.8.3. A merev testre ható erők összetevése

Az erővektor eltolhatósága Ha egy anyagi pontra egyidejűleg több erő hat, az erők helyettesíthetők vektori eredőjükkel. Amennyiben az eredő erő zérus, az anyagi pont egyensúlyban van. A nem pontszerű testeknél az erők összegzése és az egyensúly kérdése kicsit bonyolultabb. A probléma abból származik, hogy az egyes erők támadáspontja általában nem ugyanaz.



1.21. ábra. Merev testre ható erők

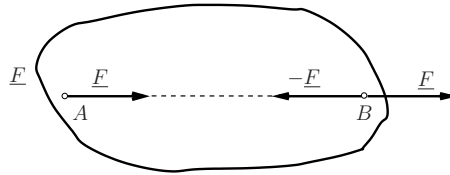
A tapasztalatok alapján egy merev test két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő hatása alatt csak akkor van egyensúlyban, ha az erők támadásvonalai, azaz a támadásponton átmenő és az erő irányába eső egyenesek egybeesnek (1.21. ábra).

Eltolási tétel:

Egy merev testre ható erő támadáspontja a testben a **támadásvonal** bármely más pontjába áthelyezhető anélkül, hogy az erő hatása megváltozna.

Az eltolási tétel könnyen belátható. Az 1.22. ábra szerint hasson a testre az A támadáspontban egy $\underline{F}_A$ erő. Vegyünk fel az $\underline{F}_A$ erő támadásvonalán egy tetszőleges B pontot. A B pontban ható $\underline{F}_B$, (ahol $|\underline{F}_B| = |\underline{F}_A|$) és $-\underline{F}_B$ erők eredője zérus. Az előbb elmondottak szerint azonban $\underline{F}_A$ és a $-\underline{F}_B$ erők együttesen semmilyen hatást nem gyakorolnak a merev testre, így azok elhagyhatók. Végeredményben azt kaptuk tehát, hogy az $\underline{F}_A$ erő helyettesíthető az $\underline{F}_B$ erővel.

Az eltolási tételnek fontos szerepe lesz annál a problémánál, hogy hogyan lehet egy merev testre ható erőket helyettesíteni egy minél egyszerűbb, hatására nézve az eredetivel egyenértékű, ekvivalens erővel.



1.22. ábra. Az erő támadáspontjának eltolhatósága

Az erők összetevése, ha a támadásvonalak egy síkban vannak és nem párhuzamosak (1.23. ábra) A merev test A_1 és A_2 pontjaiban támadó $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erők támadáspontjait a támadásvonalak D metszéspontjába helyezzük és megszerkesztjük az $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ vektorok $\underline{F}$ eredőjét, amelynek támadáspontja az $\underline{F}$ támadásvonalának bármely pontja lehet. Az $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erőket helyettesítő $\underline{F}$ erő támadásvonalának bármely P pontja eleget tesz a következő feltételnek. Ha az $\underline{F}_1$ ill. $\underline{F}_2$ erő támadásvonalának P -től való távolsága k_1 ill. k_2 , akkor $F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$.

Az 1.23. ábrán a k'_1 -et és k'_2 -t tartalmazó két derékszögű háromszög hasonló, hiszen az α -val jelölt szögek a szomszédos paralelogramma miatt egyenlők. A háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

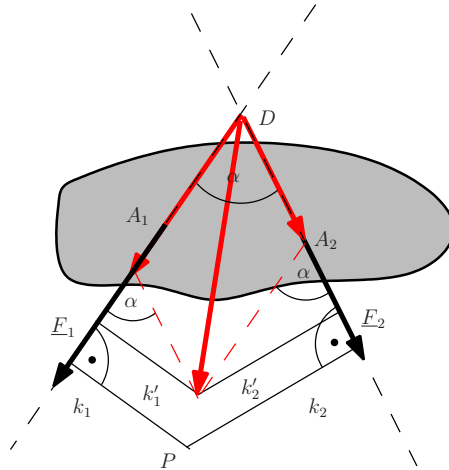
$$k'_1 : k'_2 = F_2 : F_1$$

továbbá, hogy

$$k'_1 : k'_2 = k_1 : k_2$$

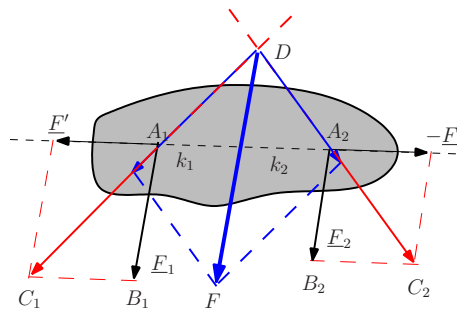
E két aránypárból már következik a fenti állítás.

Párhuzamos és megegyező irányú erők összetevése A két erő támadásvonalai ugyan most nem metszik egymást, a feladat mégis visszavezethető az előző esetre. Vegyünk fel az 1.24. ábra szerinti A_1 és A_2 pontokban két A_1A_2 támadásvonalú, egymás hatását kompenzáló $\underline{F}'$ és $-\underline{F}'$ erőt. Az $\underline{F}'$ erőt adjuk hozzá az $\underline{F}_1$, a $-\underline{F}'$ erőt pedig az $\underline{F}_2$ erőhöz. Az így kapott erőket támadásvonalaik metszéspontjába tolva, megszerkeszthetjük az eredőjüket. Az eredő erő nagysága $F = F_1 + F_2$ lesz, hiszen az $\underline{F}'$ és a $-\underline{F}'$ segéderők kiegyenlítik egymást. Az eredő erő támadásvonala



1.23. ábra. Az erők összetevése, ha a támadásvonalak nem párhuzamosak

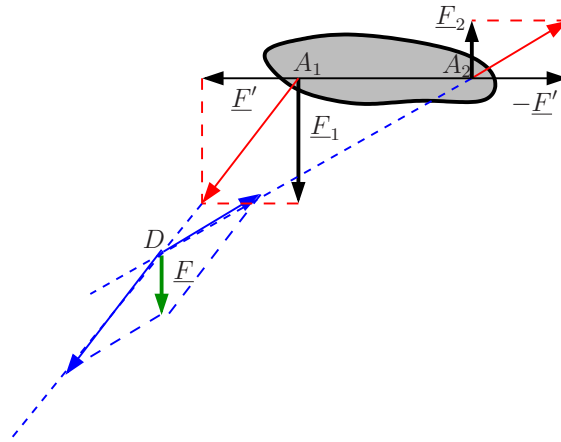
az A_1A_2 távolságot a két erő nagyságával fordított arányban osztja ketté:
 $F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$. (A bizonyítást mellőzzük.)



1.24. ábra. Párhuzamos és megegyező irányú erők összetevése

Két párhuzamos és ellentétes irányú (de nem egyenlő nagyságú) erő összetevése Két párhuzamos és ellentétes irányú, de nem egyenlő nagyságú erő összetevésénél ugyanúgy járhatunk el, mint az előbbi esetben. A szerkesztés az 1.25. ábrán látható. Az adott $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ antiparalel erőket

helyettesítő $\underline{F}$ erő azonos irányú a nagyobbik erővel és támadásvonala az A_1A_2 -n kívül, a nagyobbik erő oldalán fekszik.

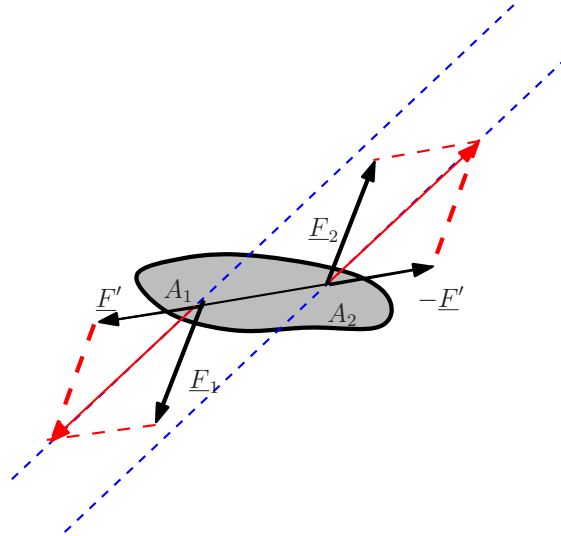


1.25. ábra. Két nem egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő összetevése

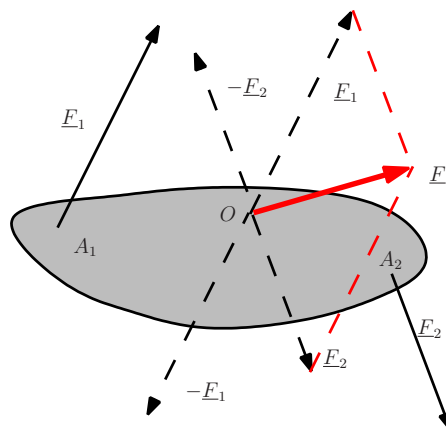
Két antiparalel és egyenlő nagyságú erő összetevése Ha az erők támadásvonalai nem esnek egybe, a segéderők felvétele után kapott támadásvonalak sem metszik egymást (1.26. ábra). Két antiparalel, egyenlő nagyságú és különböző támadásvonalú erő erőpárt képez. Az **erőpár** a legegyszerűbb olyan erőrendszer, amely nem helyettesíthető egyetlen erővel.

Az erők összetevése általános esetben Az 1.27. ábrának megfelelően legyenek a merev test adott $A_1, A_2, \dots$ pontjaiban támadó tetszőleges erők $\underline{F}_1(A_1), \underline{F}_2(A_2), \dots$. Vegyünk fel a testnek egy tetszőlegesen választott O pontjában támadó, egymást kompenzáló $\underline{F}_1, -\underline{F}_1, \underline{F}_2, -\underline{F}_2, \dots$ erőket. Az $\underline{F}_1(O), \underline{F}_2(O), \dots$ erők eredője az O pontban támadó $\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots$ erő. Ezenkívül pedig megmaradnak az $\underline{F}_1(A_1)$ és $-\underline{F}_1(O)$, $\underline{F}_2(A_2)$ és $-\underline{F}_2(O)$, .. erőpárok. Az erőrendszer tehát egy erővel és n db erőpárral helyettesíthető.

Később megmutatjuk, hogy az erőpárok is egyetlen erőpárrá tehetők össze, így a legáltalánosabb erőrendszer is egy erővé és egy erőpárrá redukálható.



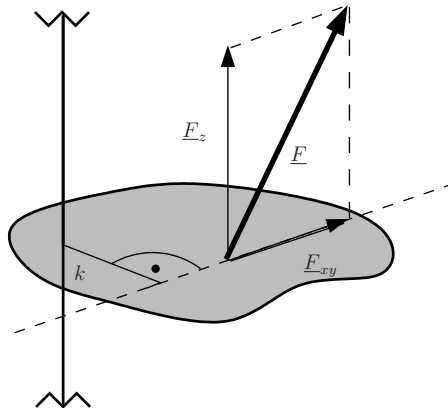
1.26. ábra. Két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erők összetevése



1.27. ábra. Merev testre ható erők összetevése általános esetben

1.8.4. Erők forgatónyomatéka

Erők forgatónyomatéka rögzített tengelyre vonatkozólag Tekintsünk egy z irányú rögzített tengely körül forgatható merev testet (pl. egy ajtót). Mindennapos tapasztalatunk, hogy az ajtót csak olyan erő hozhatja forgásba, amelynek támadásvonala nem párhuzamos a forgástengellyel. Más szóval, egy tetszőleges erőnek csak a forgástengelyre merőleges síkba eső összetevője fejthet ki forgató hatást. Ugyancsak tapasztaljuk, hogy csak az az erő létesít forgást, amelynek a támadásvonala nem metszi a forgástengelyt, vagyis az O -ból a támadásvonalra emelt merőleges k hosszúsága, az $\underline{F}$ erő z -tengelyre vonatkozó erőkarja zérustól különbözik. Az $M = F \cdot k$ mennyiséget **forgatónyomatéknak** hívjuk. A forgatónyomaték mértékegysége Nm (newtonméter), megegyezik a munka mértékegységével.



1.28. ábra. Erők tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka

Pontra vonatkozó forgatónyomaték. A forgatónyomaték mint vektor

Ha az $\underline{F}$ erő P támadáspontjának $\underline{r}$ helyvektora $\underline{F}$ irányával ϑ szöget zár be, akkor $k = r \cdot \sin \vartheta$ miatt

$$M = Fk = Fr \cdot \sin \vartheta.$$

Mivel ez a kifejezés egy vektorszorzatnak az abszolút értéke, ez azt jelenti, hogy a **forgatónyomaték** fogalmát a következőképpen kell általánosítani:

Pontra vonatkozó forgatónyomaték:

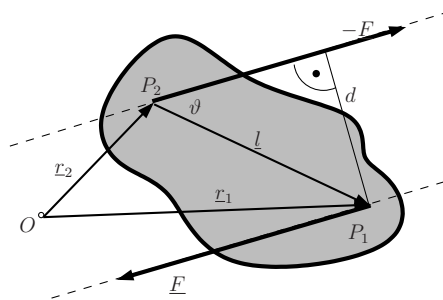
A P pontban támadó $\underline{F}$ erőnek valamely O pontra vonatkozó forgatónyomatékán értjük az $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$ vektormennyiséget. A vektorszorzás szabályainak megfelelően $\underline{M}$ iránya merőleges az $\underline{r}$ és $\underline{F}$ meghatározta síkra.

Az így általánosított $\underline{M}$ forgatónyomaték segítségével egyszerűen megfogalmazható egy olyan merev test egyensúlyának a feltétele, amelynek csak egy pontja rögzített. Egy rögzített O ponttal rendelkező merev test tetszés szerinti $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots$ erők hatása esetén akkor van egyensúlyban, ha az erők O pontra vonatkozó $\underline{M}_1, \underline{M}_2, \dots$ forgatónyomatékainak vektori összege zérus.

Az erőpár forgatónyomatéka Az adott $\underline{F}(P_1)$ és $-\underline{F}(P_2)$ erőkből álló erőpár egy O pontra vonatkozó forgatónyomatékán értjük a két erő O pontra vonatkozó forgatónyomatékainak vektori összegét.

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \times \underline{F} + \underline{r}_2 \times (-\underline{F}) = \underline{r}_1 \times \underline{F} - \underline{r}_2 \times \underline{F} = (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underline{F} = \underline{l} \times \underline{F}.$$

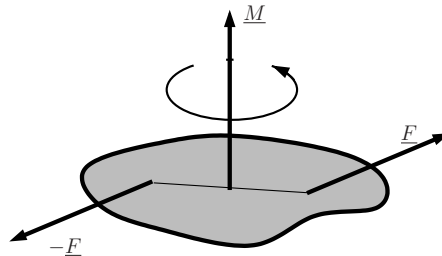
Az erőpár forgatónyomatéka független az $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$ helyvektoroktól, következésképpen az O vonatkoztatási pont helyétől, iránya merőleges az erőpár síkjára, nagysága pedig $M = Fl \cdot \sin \vartheta = Fd$, vagyis az egyik erő nagyságának és a támadásvonalak d távolságának a szorzata.



1.29. ábra. Erőpár forgatónyomatéka

Az erőpár $\underline{M}$ forgatónyomaték-vektora önmagával párhuzamosan tetszés szerint eltolható, vagyis $\underline{M}$ kezdőpontja a merev test bármely pontjába helyezhető. Ebből következik az a kísérletileg is igazolható tétel, hogy

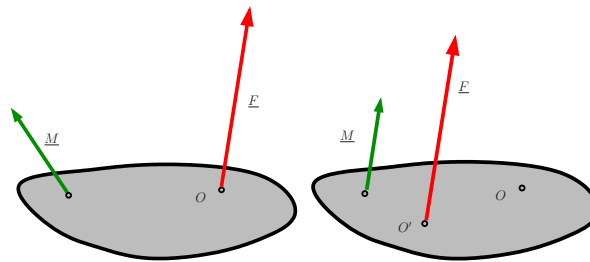
egy merev testre ható két vagy több erőpár összetehető egyetlen erőpárrá, amelynek $\underline{M}$ forgatónyomatéka az egyes erőpárok egy közös pontból felmérhető $\underline{M}_1, \underline{M}_2, \dots$ nyomatékainak az eredője.



1.30. ábra. Erőpár forgatónyomatéka

1.8.5. Tetszőleges erőrendszer redukálása

Az eddig elmondottak alapján egy merev test $A_1, A_2, \dots$ pontjaiban ható $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots$ **erők rendszere** helyettesíthető egy, a test tetszőleges pontjában támadó $\underline{F}$ erővel és egy $\underline{M}$ forgatónyomatékú erőpárral.

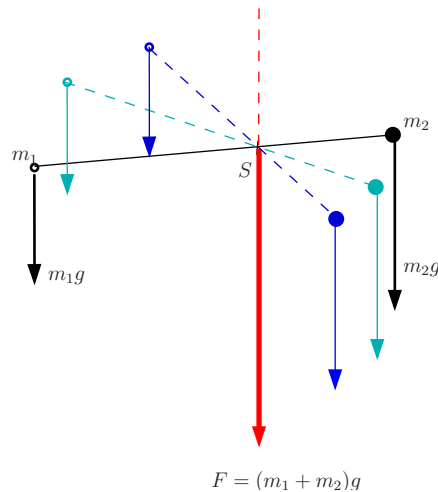


1.31. ábra. Tetszőleges erőrendszer redukálása

Kimutatható, hogy mindig található olyan vonatkoztatási pont, hogy az eredő M forgatónyomaték egyirányú az eredő F erővel. Az ilyen erőrendszert, amelynél tehát az eredő erő merőleges az eredő erőpár síkjára, **erőcsavarnak** hívjuk. Az elnevezés arra utal, hogy a merev test az $\underline{F}$ erő hatására az erőpár síkjára merőlegesen translációt, az $\underline{M}$ hatására pedig az $\underline{F}$ -re merőleges síkban rotációt végez, egyszerre.

1.8.6. Merev test súlypontjának fogalma

Tekintsünk két tömegpontot, amelyet elhanyagolható tömegű merev rúd köt össze. Erre a legegyszerűbb, idealizált merev testre hatnak az m_1g és m_2g nehézségi erők. E két párhuzamos erő helyettesíthető egy $(m_1 + m_2)g$ nagyságú erővel, amelynek támadásvonala a két tömegpont közötti távolságot az m_1g és m_2g erőkkel fordított arányban osztja ketté. Az eredő erő támadásvonalának és a tömegpontokat összekötő szakasznak a metszéspontját jelöljük S -sel. Az eredő erő támadáspontja, az eltolási tétel szerint, S helyett a támadásvonal más pontja is lehet. Ha azonban a testet elforgatással más helyzetbe hozzuk, az eredő erő támadásvonala minden esetben az S ponton megy keresztül. Az S pont az a pont, amelyet a test minden helyzetében a test teljes súlya támadáspontjának tekinthetjük. Ezért az S pontot a test **súlypontjának** nevezzük.



1.32. ábra. A „súlyzómodell” súlypontja

A fenti megfontolások általánosíthatók bármilyen merev testre. Így egy merev test súlypontja az a pont, amelyen a test súlyának támadásvonala a test minden helyzetében átmegy. Ha egy merev testet a súlypontjában alátámasztjuk, a test súlyának hatását az alátámasztásból származó kényszererő éppen kiegyenlíti. A súlypontjában alátámasztott, egyébként csak a nehézségi erő hatása alatt levő merev test bármely helyzetben egyensúlyban van. Ez egyben azt jelenti, hogy a merev test súlyának súlypontra vonatkozó forgatónyomatéka a test bármely helyzetében zérus.

A súlypont kísérleti meghatározása Egy test súlypontjának kísérleti meghatározása céljából a testet egymás után két különböző pontjában felfüggesztünk. Mindkét alkalommal a test olyan nyugalmi helyzetet foglal el, amelyben a súlypont a felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenesen fekszik. Az így kapott két, a súlypontot tartalmazó egyenesnek, az s_1 és s_2 súlyvonalnak a metszéspontja a súlypont. Homogén testek súlypontjának helyzetét gyakran egyszerű szimmetriamegfontolások alapján is megadhatjuk. Amint azt a körgyűrű példája mutatja, a súlypont a testen kívül is lehet.

A súlypont helyzetének kiszámítása Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel először, hogy a merev test az $m_1, m_2, \dots, m_n$ tömegű, különálló anyagi pontokból áll. Határozzuk meg először az m_1 és m_2 tömegű pontok $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ helyvektorú S_{12} súlypontját. Használjuk ki, hogy a merev test súlyának súlypontra vonatkozó forgatónyomatéka a test bármely helyzetében zérus. Az $\underline{r}_1 - \underline{r}_{12}$ a súlyponttól az m_1 -hez, $\underline{r}_2 - \underline{r}_{12}$ a súlyponttól az m_2 -höz mutató vektor. Mivel az $m_1 \underline{g}$ és $m_2 \underline{g}$ erőknek a súlypontra való forgatónyomatéka nulla kell legyen, ezért

$$(\underline{r}_1 - \underline{r}_{12}) \times m_1 \underline{g} + (\underline{r}_2 - \underline{r}_{12}) \times m_2 \underline{g} = 0$$

azaz

$$[m_1 (\underline{r}_1 - \underline{r}_{12}) + m_2 (\underline{r}_2 - \underline{r}_{12})] \times \underline{g} = 0$$

A vektoriális szorzat akkor nulla, ha vagy az egyik tényezője nulla, vagy a két vektor párhuzamos. Mivel a fenti egyenlet akármilyen koordináta-rendszer választásakor igaz, ezért

$$[m_1 (\underline{r}_1 - \underline{r}_{12}) + m_2 (\underline{r}_2 - \underline{r}_{12})] = 0$$

Innen az m_1 és m_2 tömegű pontok S_{12} súlypontjának helyvektora:

$$\underline{r}_{12} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

8

⁸A súlypont tehát megegyezik a tömegközépponttal.

1.21. példa: Az x tengely mentén két, elhanyagolható tömegű rúddal összekötött test fekszik, a $0,4\text{ kg}$ tömegű test az $x = 2\text{ m}$, míg a $0,6\text{ kg}$ tömegű az $x = 7\text{ m}$ pontban. Határozzuk meg a súlyközéppont x koordinátáját!

Megoldás: A súlyközéppont x koordinátája az elmondottak szerint:

$$x_{12} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,4\text{ kg} \cdot 2\text{ m} + 0,6\text{ kg} \cdot 7\text{ m}}{0,4\text{ kg} + 0,6\text{ kg}} = 5\text{ m}.$$

Ezután az ismertetett módszerrel határozzuk meg az S_{12} súlypontba helyezett $m_1 + m_2$ tömegpontnak és az m_3 tömegpontnak az S_{123} súlypontját, melynek helyvektora $\underline{r}_{123}$. Részletes bizonyítás nélkül az új súlypont helyvektora:

$$\underline{r}_{123} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 + m_3 \underline{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Az eljárást folytatva adódik, hogy az $m_1, m_2, \dots, m_n$ tömegű pontokból álló rendszer súlypontjának helyvektora:

$$\underline{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i \quad (1.37)$$

Az 1.37. összefüggésből is látható, hogy a súlypont helyzetét kizárólag a tömegeloszlás szabja meg, és a súlypont megegyezik a korábban bevezetett **tömegközépponttal**.

A merev testek általában folytonos tömegeloszlásúak. Ebben az esetben a súlypont (tömegközéppont) meghatározásánál úgy járunk el, hogy a testet ΔV_i térfogatelemekre bontjuk. Egy $\underline{r}_i$ helyvektorú térfogatelem tömege $\rho_i \Delta V_i$, ahol ρ_i a test átlagos sűrűsége a ΔV_i térfogatelemben. Ennek megfelelően (1.37) az alábbi összefüggéssé alakítható:

$$\underline{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \underline{r}_i \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i},$$

ami a $\Delta V_i \rightarrow 0$ határesetben az alábbi integrálba megy át:

$$\underline{r}_s = \frac{\int \rho(\underline{r}) \underline{r} dV}{\int \rho(\underline{r}) dV}. \quad (1.38)$$

1.22. példa: Egy L hosszúságú egyenes rúd egyik vége az origóban van, a másik vége pedig az $x = L$ pontban. A rúd hosszegységre eső tömege $\rho(x) = Ax$ összefüggés szerint változik, ahol A állandó. Hol van a tömegközéppont?

Megoldás: Az (1.38) összefüggést alkalmazva az x koordinátákra:

$$x_s = \frac{\int_0^L \rho(x)x dx}{\int_0^L \rho(x) dx},$$

$$x_s = \frac{\int_0^L Ax^2 dx}{\int_0^L Axdx} = \frac{L^3/3}{L^2/2} = \frac{2}{3}L.$$

1.8.7. A merev test egyensúlyának általános feltételei

A merev testre ható erők rendszere a korábban elmondottak értelmében mindig redukálható a test egy tetszőleges O pontjában támadó $\underline{F} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i$ erőre és az $\underline{M} = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i$ nyomatékú erőpárra.

A merev test akkor van egyensúlyban, ha a testre ható összes erő eredője és az erők egy tetszés szerint választható pontra vonatkozó forgatónyomatékainak eredője is zérus:

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i = 0$$

$$\underline{M} = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i = 0$$

A testre ható erők közé kell számítani a szabaderőket kívül az olyan kényszererőket is, amelyek pl. a test alátámasztásánál ill. felfüggesztésénél fellépnek.

1.8.8. A merev test dinamikája

A merev test mozgása általában haladó és forgó mozgásból tevődik össze. A haladó mozgások a tömegközéppont tétel szerint az anyagi pont mechanikájába sorolhatók. A forgó mozgások tanulmányozását a legegyszerűbb esettel, a rögzített tengely körüli forgással kezdjük.

A rögzített tengely körül forgó test impulzusmomentumának forgástengellyel párhuzamos komponense Az 1.33. ábra szerint a merev test tetszőleges tömegpontjának **impulzusmomentuma**:

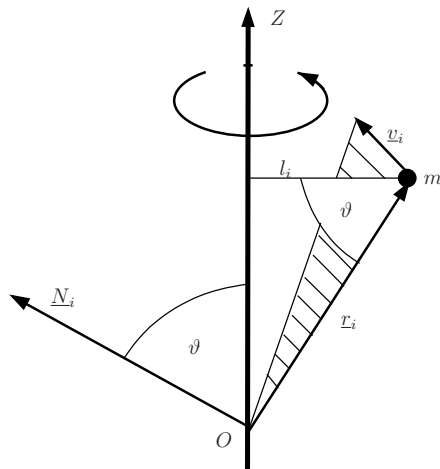
$$\underline{N}_i = (\underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i) .$$

$\underline{N}_i$ merőleges az $\underline{r}_i$ és a $\underline{v}_i$ által kifeszített síkra. A tengely körüli forgás miatt $\underline{r}_i$ és $\underline{v}_i$ minden helyzetben merőleges egymásra, ezért abszolút értéke $N_i = m_i r_i v_i$. Ha az $\underline{N}_i$ vektor ϑ szöget zár be a forgástengellyel, akkor a forgástengelyre eső vetületének a nagyságát a következőképpen számíthatjuk ki:

$$N_{i,z} = m_i r_i v_i \cdot \cos \vartheta .$$

Ha észrevesszük, hogy $r_i \cos \vartheta = l_i$ a tömegpontnak a forgástengelytől mért távolsága, továbbá $v_i = \omega_z l_i$, ahol ω_z a z tengely körüli forgás szögsebessége, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$N_{i,z} = m_i l_i^2 \omega_z .$$



1.33. ábra. Rögzített tengely körül forgó test impulzusmomentuma

Végül végezzük el az összegzést a merev testet felépítő összes tömegpontra:

$$N_z = \sum_{i=1}^n N_{i,z} = \omega_z \sum_{i=1}^n m_i l_i^2 .$$

A test tömegeloszlásától függő

$$\Theta = \sum_{i=1}^n m_i l_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) .$$

menyiséget a merev test Z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának nevezzük.

A Θ annál nagyobb, minél nagyobb tömegű részek vannak a forgástengelytől minél nagyobb távolságban.

Ezek szerint a Z tengely körül ω_z szögsebességgel forgó merev test forgástengellyel párhuzamos impulzusmomentuma

$$N_z = \Theta \cdot \omega_z .$$

1.23. példa: Határozzuk meg a Föld tengely körüli forgásából származó impulzusmomentumot! Tegyük fel, hogy a Föld egyenletes tömegeloszlású gömb.

Megoldás: A Föld tengely körüli forgásából származó impulzusmomentumát a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség szorzata adja. (A tehetetlenségi nyomaték számítását lásd később.):

$$N_z = \Theta \cdot \omega_z .$$

Az egyenletes tömegeloszlású, gömb alakú Föld tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_F = \frac{2}{5} \cdot M_F \cdot R_F^2 = \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 ,$$

$$\Theta_F = 0,984 \cdot 10^{38} \text{ kgm}^2 .$$

Az impulzusmomentum:

$$N_z = \Theta \cdot \omega_z = 0,984 \cdot 10^{38} \text{ kgm}^2 \cdot \frac{1}{86400} \frac{1}{\text{s}} ,$$

$$N_z = 17,1 \cdot 10^{33} \text{ kgm}^2/\text{s} .$$

Ha a rendszer több, a Z tengely körül $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \dots$ szögsebességgel forgó merev testből áll, amelyeknek a Z -tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai rendre $\Theta_1, \Theta_2, \dots$, akkor

$$N_z = \Theta_1 \omega_{1,z} + \Theta_2 \omega_{2,z} + \dots .$$

A rögzített tengely körül forgó merev test mozgásegyenlete A rögzített tengely legyen a Z tengely, a forgásszög pedig legyen φ , a forgás szögsebessége $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$. A test impulzusnyomatékának z komponense a korábban tanultak alapján $N_z = \Theta \omega_z = \Theta d\varphi/dt$. Az impulzusnyomaték tétele szerint fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{d(\Theta \omega_z)}{dt} = M_z , \quad (1.39)$$

ahol Θ a test tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva, M_z pedig a testre ható összes külső erő forgatónyomatékának z komponense.

Az (1.39) bal oldala, mivel Θ a test merevsége miatt független az időtől, a $\Theta d\omega_z/dt = \Theta d^2\varphi/dt^2$ alakban írható, ahol $d^2\varphi/dt^2 = \beta_z$ a szöggyorsulás. Így a rögzített tengely körül forgó merev test mozgásegyenlete az alábbiak szerint írható:

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z . \quad (1.40)$$

Az (1.40) formailag hasonló az egyenes vonalú mozgás $m d^2x/dt^2 = F_x$ alapegyenletéhez. Az $M_z = 0$ esetben (1.40)-ból a $d\varphi/dt = \omega_z = \text{állandó}$ következik. Tehát, ha a külső erők forgatónyomatéka zérus, akkor a merev test állandó szögsebességgel forog a rögzített tengely körül.

Ha az M_z **forgatónyomaték** állandó, akkor a szöggyorsulás is állandó:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M_z}{\Theta} = \beta . \quad (1.41)$$

Az ilyen mozgást egyenletesen gyorsuló forgásnak nevezzük. Ha a $t = 0$ időpillanatban a szögsebesség is és a szög is zérus, a $d^2\varphi/dt^2 = \beta$ egyenletből következik, hogy

$$\omega_z = \beta t ,$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \beta t^2 = \frac{1}{2} \frac{M_z}{\Theta} t^2 .$$

1.24. példa: Egy 0,61 m sugarú, 36,3 kg tömegű korong 360 1/min fordulatszámmal forog. A fékező súrlódás forgatónyomatéka 0,553 Nm. Számítsa ki, mennyi idő múlva áll meg a korong.

Megoldás: A korongra ható fékező forgatónyomaték állandó, ezért (1.41) értelmében a szöggyorsulás (pontosabban lassulás) is állandó. A szöggyorsulás értékének meghatározásához szükség van a korong tehetetlenségi nyomatékára. Ha a korongot egy homogén tömegeloszlású hengernek tételezzük fel, akkor ennek tehetetlenségi nyomatéka (számítását lásd később):

$$\Theta = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2} \cdot 36,3 \text{ kg} \cdot (0,61 \text{ m})^2 ,$$

$$\Theta = 6,75 \text{ kgm}^2 .$$

Ebből a szöggyorsulás nagysága

$$\beta_z = \frac{M_z}{\Theta} = \frac{-0,553 \text{ Nm}}{6,75 \text{ kgm}^2} = -0,0819 \frac{1}{\text{s}^2} .$$

A szögsebesség időbeli változását az

$$\omega_z(t) = \omega_0 + \beta t$$

összefüggés határozza meg. A korong megállásakor

$$0 = \omega_0 + \beta t ,$$

$$\omega_0 = 6 \frac{1}{\text{s}} ,$$

Így a korong megállásáig eltelt idő:

$$t = -\frac{\omega_0}{\beta} = -\frac{2\pi \cdot 6 \text{ s}^{-1}}{-0,082 \text{ s}^{-2}} = 460 \text{ s} .$$

A rögzített tengely körül forgó merev test forgási energiája az $E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$ általános definícióból és a tengely körüli forgásra érvényes $v_i = \omega_z l_i$ összefüggés alapján:

$$E_{forg} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i l_i^2 \omega_z^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i l_i^2 \right) \omega_z^2 ,$$

vagyis

$$E_{forg} = \frac{1}{2} \Theta \omega_z^2 .$$

1.25. példa: 10 kg tömegű, 12 cm átmérőjű henger a tengelye körül 2 s^{-1} szögsebességgel forog. Mekkora a forgási energiája?

Megoldás: A feladat egyszerűen megoldható. A tengelye körül forgó henger tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \cdot (0,06 \text{ m})^2 ,$$

$$\Theta = 0,018 \text{ kgm}^2 .$$

Helyettesítsük a számadatokat a forgó merev test forgási energiáját meghatározó képletbe:

$$E_{forg} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega_z^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,018 \text{ kgm}^2 \cdot (2 \text{ s}^{-1})^2 ,$$

$$E_{forg} = 0,036 \text{ J} .$$

A tehetetlenségi nyomaték kiszámítása Egy merev test z tengelyre vonatkozó **tehetetlenségi nyomatéka** definíció szerint:

$$\Theta = \sum_{i=1}^n m_i l_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (1.42)$$

A tehetetlenségi nyomaték a forgó mozgásoknál azt a szerepet tölti be, mint a haladó mozgásoknál a tömeg. Θ a test tömegeloszlásától és a forgástengelynek a testhez viszonyított helyzetétől függ. Értéke mérésekkel meghatározható, de egyszerűbb esetekben ki is számítható.

1.26. példa: Egy 0,8 m hosszúságú elhanyagolható tömegű rúd két végére kisméretű 2 kg és 3 kg tömegű testeket erősítünk. Mekkora az így készített merev test (súlyzómodell) tehetetlenségi nyomatéka olyan a rúdon átmenő forgástengelyre vonatkozólag, amely a rúdra merőleges és a 2 kg tömegű testtől 0,2 m távolságra van?

Megoldás: A tehetetlenségi nyomatékat (1.42) segítségével határozhatjuk meg:

$$\Theta = \sum_{i=1}^2 m_i l_i^2 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = 2 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2 + 3 \text{ kg} \cdot (0,6 \text{ m})^2 = 1,16 \text{ kgm}^2 .$$

A számításoknál sokszor a merev testet különálló tömegpontok rendszere helyett folytonos tömegeloszlású testnek tekintjük. Ebben az esetben az m_i -nek a $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$ tömegelem felel meg. Így (1.42) helyébe a

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i^2 \Delta V_i$$

a $\Delta V_i \rightarrow 0$ határesetben pedig a

$$\Theta = \int \rho l^2 dV = \int (x^2 + y^2) \rho dV$$

kifejezés lép. Az integrálást a test egész térfogatára el kell végezni.

Ennek a formulának a segítségével kaphatjuk meg egy R sugarú gömb tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva ($\frac{2}{5}mR^2$, lásd 1.23 feladat), és az R sugarú korong tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva ($\frac{1}{2}mR^2$, lásd 1.24 feladat).

1.27. példa: 2 m hosszú vékony rúd tömege 8 kg. Mennyi a középpontjára számított tehetetlenségi nyomatéka?

Megoldás: A rúd folytonos tömegeloszlása miatt a tehetetlenségi nyomatékot a $\Theta = \int \rho l^2 dV$ integrál segítségével határozzuk meg.

A rúd sűrűsége:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{L \cdot A}.$$

ahol L a rúd hossza, A pedig a keresztmetszetének a területe. A térfogatelem pedig a $\Delta V = A \Delta l$ alakban írható fel.

A homogén rúd tömegközéppontja (szimmetria megfontolások alapján) egybeesik annak geometriai középpontjával. Mivel a tehetetlenségi nyomatékot a tömegközéppontra kell kiszámolni, az integrálást $-L/2$ -től $+L/2$ -ig kell elvégezni:

$$\Theta = \int_{-L/2}^{+L/2} \rho l^2 dV = \Theta = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{m}{L \cdot A} l^2 A dl.$$

Az egyszerűsítések elvégzése után:

$$\Theta = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} l^2 dl = \frac{1}{12} m L^2.$$

A számértékeket behelyettesítve:

$$\Theta = \frac{1}{12} 8 \text{ kg} \cdot (2 \text{ m})^2 = 2,67 \text{ kgm}^2.$$

Az m tömegű testnek az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkozó Θ_S tehetetlenségi nyomatékából az előzővel párhuzamos és attól s távolságra lévő A tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát úgy kapjuk meg, hogy Θ_S -hez hozzáadunk ms^2 -et:

$$\Theta_A = \Theta_S + ms^2.$$

Ezt a tételt **Steiner-tételének** nevezzük.

1.28. példa: 2 m hosszú vékony rúd tömege 8 kg. Mennyi a rúd tehetetlenségi nyomatéka az egyik végén átmenő tengelyre számolva?

Megoldás: Az előző feladatban meghatároztuk a rúd tehetetlenségi nyomatékát a tömegközéppontján átmenő, a rúd síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan, ez:

$$\Theta = \frac{1}{12}mL^2.$$

Alkalmazzuk Steiner-tételt:

$$\Theta_A = \Theta_S + ms^2.$$

A két forgástengely távolsága $s = L/2$. Ennek megfelelően:

$$\Theta_A = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2.$$

A számadatokat behelyettesítve:

$$\Theta = 10,68 \text{ kgm}^2.$$

A csavarási inga forgási rezgései Csavarási vagy **torziós ingát** úgy hozhatunk létre, ha egy merev testet, pl. egy korongot a súlypontjában egy vékony, rugalmas drótra felfüggesztünk. Ha a merev testet egyensúlyi helyzetéből φ fokkal kitérítjük, akkor az elforgatáshoz szükséges forgatónyomaték nagysága nem túl nagy szögek esetén arányos a szöggel. Ez azt jelenti, hogy a φ szöggel elcsavart testre a drót az egyensúlyi helyzetbe visszatérítő

$$M_z = -D^*\varphi$$

forgatónyomatékokat gyakorol.

A pozitív D^* arányossági tényezőt, vagyis a $\varphi = 1$ rad elforduláshoz szükséges forgatónyomatékokat **direkciós nyomatéknak** nevezzük.

Legyen a drót végén függő test tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva Θ . Ha a Θ mellett a drót tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolható, a testnek a forgatónyomaték hatására létrejövő mozgását az alábbi egyenlet határozza meg:

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D^*\varphi, \text{ ebből}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D^*}{\Theta}\varphi = -\omega^2\varphi.$$

Ezek az egyenletek alakilag azonosak a csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvényét meghatározó differenciálegyenlettel. Következésképpen megállapíthatjuk, hogy az egyensúlyi helyzetéből kimozdított csavarási inga olyan harmonikus forgási rezgéseket végez, amelynek lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}. \quad (1.43)$$

A fenti összefüggés módot nyújt a tehetetlenségi nyomaték kísérleti meghatározására. A kérdéses testet a súlypontjánál torziós szárla függesztjük. A testet az egyensúlyi helyzetéből kitérítve megmérjük a rugalmas lengések T lengésidejét. A D^* direkciós nyomaték ismeretében a tehetetlenségi nyomaték (1.43) segítségével kiszámolható: $\Theta = T^2 D^* / 4\pi^2$.

A fizikai inga Vegyünk egy merev testet, amely rögzített, vízszintes tengely körül foroghat a nehézségi erő hatása alatt. Ha a testet (az ún. fizikai ingát) az egyensúlyi helyzetéből φ szöggel kitérítjük, a nehézségi erő $M_z = -mgs \cdot \sin \varphi$ forgatónyomatékot gyakorol az ingára. Így (1.40) alapján a mozgásegyenlet:

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgs \cdot \sin \varphi,$$

vagy

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgs}{\Theta} \sin \varphi. \quad (1.44)$$

Ha (1.44)-et összehasonlítjuk a matematikai inga korábban megismert $d^2\varphi/dt^2 = -(g/l) \sin \varphi$ mozgásegyenletével, akkor megállapíthatjuk, hogy a **fizikai inga** ugyanúgy leng, mint egy $l_r = \Theta/ms$ hosszúságú matematikai inga. Következésképpen kis amplitúdóknál a fizikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}.$$

1.29. példa: Egy 60 cm hosszúságú homogén rudat egyik végén átmenő, a rúdra merőleges tengely körül lengetünk. Mennyi a lengésidő?

Megoldás: A fizikai inga lengésidejét meghatározó képletbe helyettesítsük be a forgástengelynek és a rúd tömegközéppontjának $s = L/2$ távolságát illetve a korábban (1.28 példa) meghatározott

$$\Theta = \frac{1}{3} \cdot mL^2$$

tehetetlenségi nyomatékot.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{g}},$$

ha $g = 10 \frac{m}{s^2}$, akkor

$$T = 1,256 \text{ s}.$$

1.9. Kérdések és feladatok

1.9.1. Elméleti kérdések

1. Mikor tekinthetünk egy testet merev testnek?
2. Hány ponttal lehet egyértelműen meghatározni egy merev test térbeli helyzetét?
3. Hány független adat határozza meg egy merev test térbeli helyzetét?
4. Mik a legfontosabb jellemzői a transzlációs mozgásnak illetve a rotációnak?
5. Haladó vagy forgó mozgást végzünk egy körhintán, egy óriáskeréken és egy hajóhintán?
6. Egy rögzített tengely körül egyenletes forgómozgást végző test pontjai egyenletes körmozgást végeznek. Hol támad és milyen irányba mutat a szögsebesség vektor?

7. Miből tevődik össze a merev test legáltalánosabb mozgásánál egy tetszőleges pontjának sebessége?
8. Mit értünk a mechanikában szabadsági fokok alatt?
9. Mekkora egy szabadon mozgó merev test szabadsági fokainak száma?
10. Mondjon példát a merev test olyan mozgásaira, ahol a szabadsági fokok száma különböző kényszerfeltételek miatt csökken!
11. Mikor van egy merev test két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő hatására egyensúlyban?
12. Mi az eltolási tétel és hogyan bizonyítható az érvényessége?
13. Hogyan lehet egy merev testre ható két olyan erő eredő hatását meghatározni, amelyek támadásvonalai egy síkban vannak, azonban nem párhuzamosak?
14. Hogyan kell felvenni a segéderőket egy merev testre ható két párhuzamos és azonos irányú erők eredőjének meghatározásához?
15. Mekkora és milyen irányú lesz egy merev testre ható két párhuzamos és egyenlő irányú erő eredője?
16. Hol helyezkedik el egy merev testre ható két egymással párhuzamos, ellentétes irányú és nem egyenlő nagyságú erő eredőjének támadásvonala?
17. Hol helyezkedik el egy merev testre ható két egymással párhuzamos, ellentétes irányú és egyenlő nagyságú erő eredőjének támadásvonala?
18. Mit nevezünk erőpárnak?
19. Ábra segítségével mutassa meg, hogy mivel helyettesíthető egy merev testre ható erőrendszer!
20. Egy rögzített tengely körül forgatható merev testre erőt gyakorolunk. Milyen irányú erő hozhat létre forgó mozgást?
21. Egy rögzített tengely körül forgatható merev testre erőt gyakorolunk. Hogyan számítjuk ki az erő forgatónyomatékát? Hogyan tudjuk növelni a forgatónyomaték nagyságát?
22. Hogyan definiáltuk egy merev testre ható, P pontban támadó $\underline{F}$ erőnek egy O pontra vonatkozó forgatónyomaték vektorát?
23. Hol van egy merev testre ható erőpár forgatónyomatékának támadáspontja?

24. Mit nevezünk egy merev test súlypontjának ill. tömegközéppontjának? Különbözik a kettő?
25. Hogyan tudná mérésekkel meghatározni egy szabálytalan alakú fémlemez súlypontjának helyét?
26. Mi egy merev test egyensúlyának általános feltétele?
27. Mitől függ egy rögzített tengely körül forgó merev test impulzusmomentuma forgástengellyel párhuzamos komponensének nagysága?
28. Hogyan határozható meg egy forgó merev test forgási energiája?
29. Van két homogén tömegeloszlású, ugyanakkora tömegű hengerünk. Mindkettő alaplapjainak sugara ugyanakkora, azonban az egyik henger magassága 5 cm-rel nagyobb a másiknál? Melyiknek nagyobb az alaplapok középpontján átmenő forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?
30. Fogalmazza meg Steiner-tételét!
31. Ismerjük egy merev test súlyponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. Ez alapján kiszámítjuk az előzővel párhuzamos, attól s távolságra levő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot. Kisebb vagy nagyobb értéket kapunk?
32. Erőpár hatására nyugalomban van-e a merev test?
33. Egyensúlyban van-e a merev test, ha a ráható erők eredője 0?
34. Egy merev testre egyetlen erő hat. Lehet-e nyugalomban?
35. Milyen feltételek mellett lehet a merev test három erő hatására nyugalomban?
36. Ha van olyan pont, amelyre vonatkoztatva a merev testre ható erők forgatónyomatéka nulla, akkor az elegendő feltétele az egyensúlynak?
37. Milyen adatokból számolható ki az, hogy a kerekes kúttal mekkora erővel húzhatunk fel egy vödör vizet?
38. Nő vagy csökken a léggömb telhetetlenségi nyomatéka felfúvás közben?
39. A Földre évente ezer tonna kozmikus por hull. Növekszik vagy csökken emiatt a napok hossza?
40. Mire következtethetünk abból, ha egy mereven forgó test szögsebességét változni látjuk?

41. Fogalmazza meg Newton II. törvénye forgómozgásra vonatkozó megfelelőjét!
42. Adja meg a pontszerűnek tekinthető test tehetetlenségi nyomatékát!
43. Hogyan számolható ki egy kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka?
44. Függ-e egy test tehetetlenségi nyomatéka attól, hogy nyugalomban van, egyenletesen vagy változó szögsebességgel forog?
45. Azonos tömegű, sugarú és hosszúságú két henger közül az egyik tömör fahenger, a másik üres fémhenger. Mindkettő ugyanolyan színű papírral van bevonva, látszólag semmi különbség sincs közöttük. Hogyan lehetne kísérlettel eldönteni, hogy melyik a tömör és melyik az üres?
46. Forgózsámolyon ülő kísérleti személy a kezében tartott súlyzót a forgástengely felé húzza. Változik-e és hogyan a rendszer energiája?

1.9.2. Kidolgozott feladatok

1.10. feladat: Tekintsük a szén-monoxid molekulát, mint egy súlyzót. Határozzuk meg a szén-monoxid molekula tömegközéppontjának a szénatomtól való távolságát a szén és az oxigénatom d távolságának függvényében. A szénatom relatív atomtömege 12, az oxigénatomé 16

Megoldás: Egy adott atom relatív atomtömege egy viszonyszám, amely azt mondja meg, hogy az illető atom tömege hányszorosa az atomfizikában használatos m_0 tömegegységnek. Ennek megfelelően a szénatom és az oxigénatom tömege $12m_0$ illetve $16m_0$. A tömegközéppontot a szénatomhoz rögzített koordináta rendszerben kell meghatároznunk. Ebben a koordináta rendszerben a szénatom x koordinátája 0, az oxigénatomé pedig d . Ezután felhasználva a tömegközéppont számításának szabályát:

$$x_{12} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{12m_0 \cdot 0 + 16m_0 \cdot d}{12m_0 + 16m_0} = \frac{4}{7}d.$$

Tehát a szén-monoxid molekula tömegközéppontjának távolsága a a szénatomtól a szén és oxigénatom távolságának $4/7$ -ed része.

1.11. feladat: Határozzuk meg a Föld-Hold rendszer tömegközéppontjának a Föld középpontjától mért távolságát! A Föld-Hold távolság $3,8 \cdot 10^5$ km és a Föld 81,3-szor nagyobb tömegű, mint a Hold.

Megoldás: Az előző feladat megoldásához hasonlóan:

$$x_{FH} = \frac{m_F x_F + m_H x_H}{m_F + m_H} = \frac{81,3m_H \cdot 0 + m_H \cdot d}{81,3m_H + m_H},$$

$$x_{FH} = \frac{m_H \cdot 3,8 \cdot 10^5 \text{ km}}{82,3m_H} = \frac{3,8 \cdot 10^5 \text{ km}}{82,3} = 4,617 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

Mivel a Föld sugara $6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$, ezért a Föld-Hold rendszer tömegközéppontja a Föld felszíne alatt található.

1.12. feladat: Mennyi a 60 cm átmérőjű, 80 kg-os tömör henger tehetetlenségi nyomatéka?

Megoldás: A tömör hengert képzeljük el Δr vastagságú egymásba illesztett csöveknek. Számítsuk ki ezeknek a csöveknek a tehetetlenségi nyomatékát. A tömör henger tehetetlenségi nyomatéka az egyes csövek tehetetlenségi nyomatékainak az összege lesz.

Vegyük azt a Δr vastagságú csövet, amelynek r a külső sugara. A tehetetlenségi nyomatékának a kiszámításához meg kell határoznunk a tömegét. Mivel $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$, ezért figyelmünket fordítsuk a ΔV meghatározására. Ha ezt a csövet gondolatban kiterítjük a síkban, akkor egy olyan hasábot kapunk, amelynek a vastagsága éppen a Δr , alaplapjának a másik oldala pedig egy r sugarú kör kerülete, tehát $2r\pi$, magassága pedig a henger magassága, amit jelöljünk L -el. Ezek után írjuk fel a cső térfogatát

$$\Delta V = \Delta r \cdot (2r\pi) \cdot L,$$

majd a tömegét

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot \Delta r \cdot (2r\pi) \cdot L.$$

Ha a cső Δr vastagságát nagyon kicsire választjuk, akkor a csőnek a teljes tömege r távolságra van a forgástengelytől, ezért a tehetetlenségi nyomatékát a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\Delta \Theta = r^2 \cdot \Delta m = 2\pi L \rho r^3 \Delta r.$$

A tömör hengert felépítő minden elemi csőre elvégezhetjük ezt a számolást. A henger tehetetlenségi nyomatéka a csövek elemi tehetetlenségi nyomatékainak összege lesz:

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \Delta \Theta = \sum_{i=1}^n 2\pi L \rho r^3 \Delta r.$$

Ha a Δr értékével nullához tartunk, akkor a fenti összeg az alábbi határozott integrálba megy át:

$$\Theta = \int_0^R 2\pi L \rho r^3 dr = 2\pi L \rho \cdot \frac{R^4}{4}.$$

Használjuk még ki, hogy a henger sűrűsége

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{R^2 \pi \cdot L},$$

a tehetetlenségi nyomatékra a következő összefüggést kapjuk:

$$\Theta = \frac{1}{2} \cdot m R^2.$$

A számértékeket behelyettesítve

$$\Theta = \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ kg} \cdot (0,6 \text{ m})^2 = 14,4 \text{ kgm}^2.$$

1.13. feladat: 10 cm átmérőjű gömb 3 kg, és másodpercenként 5 fordulattal forog. Mekkora a forgási energiája?

Megoldás: A gömb tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = \frac{2}{5} \cdot m R^2 = \frac{2}{5} \cdot 3 \text{ kg} \cdot (0,1 \text{ m})^2,$$

$$\Theta = 0,012 \text{ kgm}^2.$$

Ezért a forgási energia

$$E = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,012 \text{ kgm}^2 \cdot (2\pi \cdot 5 \text{ 1/s})^2 \text{ qve}$$

$$E = 5,9 \text{ J}.$$

1.14. feladat: Tömör henger csúszás nélkül gördül le a lejtőn. Energiájából mennyi jut a haladásra és mennyi a forgásra?

Megoldás: Írjuk fel a haladásra és a forgásra jutó energiákat:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m v^2,$$

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot \Theta \omega^2.$$

Csúszás nélkül gördülő henger tömegközéppontjának haladási sebessége és a tömegközéppont körüli forgás szögsebessége között fennáll a

$$v = \omega \cdot R .$$

A henger tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = \frac{1}{2} \cdot mR^2 .$$

Ezek felhasználásával alakítsuk át a forgási energia képletét:

$$E_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot mR^2 \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} \cdot mv^2 .$$

E_m és E_f összehasonlításával megállapíthatjuk, hogy a tisztán gördülő henger teljes energiájának egyharmada a forgási, kétharmada pedig a haladási energia.

1.9.3. Gyakorló feladatok

1. Egy mérleghinta egyik végén egy 45 kg tömegű fiú ül. a tőle 4 m távol lévő másik végén egy 15 kg tömegű kislány. Milyen távolságra van a kislánytól a tömegközéppont. A hinta tömege elhanyagolható.
2. A sósav molekulában a hidrogén- és klóratom távolsága közelítőleg 0,13 nm. Milyen távolságra van a molekula tömegközéppontja a hidrogénatom tömegközéppontjától? A hidrogén és a klór relatív atomtömege 1 és 35.
3. Egy 0,5 m oldalú, egyenlő oldalú háromszög csúcaiban rendre 2 kg, 4 kg és 6 kg tömegű testek találhatók. Határozza meg ezen elrendezés tömegközéppontjának koordinátáit, ha a 2 kg tömegű test az origóban, a 4 kg tömegű test pedig az x tengely pozitív felén található.
4. Egy L hosszúságú egyenes rúd egyik vége az origóban van, a másik vége pedig az $x = L$ pontban. A rúd hosszegységre eső tömege $\rho(x) = Ax + B$ összefüggés szerint változik, ahol A és B állandó. Hol van a tömegközéppont?
5. Mennyi a 10 kg-os, 30 cm átmérőjű tömör gömb tehetetlenségi nyomatéka egy, a középpontján átmenő tengelyhez viszonyítva?
6. Mekkora a lejtőn 3 m magasságból csúszás nélkül leguruló 50 cm átmérőjű, 1 kg tömegű golyó sebessége a lejtő alján?
7. Számítsuk ki egy 60 cm-es homogén rúd lengésidejét, ha a forgástengely a rúd végétől 20 cm távolságban megy át a rúdon!

8. Egy 50 kg tömegű, 50 cm sugarú korong 10 s^{-1} szögsebességgel forog. Mekkora sugárirányú erővel kell a féktuskót a kerékhez szorítani, hogy 20 s alatt lefékezzük. A féktuskó és a korong pereme között a súrlódási együttható 0,5.
9. Egy 2 m hosszúságú homogén rúd vízszintes talajon függőleges helyzetben áll. A rúd eldől úgy, hogy eközben az alsó vége nem csúszik meg a talajon. Mekkora sebességgel csapódik a talajhoz a rúd felső vége? Van-e a rúdnak olyan pontja, amely akkora sebességgel csapódik a talajhoz, mintha a megfelelő magasságból szabadon esett volna?
10. Középpontján átmenő tengely körül forgatható korong kerületére csavart fonalat 0,157 N erővel húzzuk. A korong tömege 1 kg, sugara 10 cm. Mekkora a szöggyorsulás? Mekkora szöggel fordul el a korong 2 s alatt? Mekkora szögsebességet ér el ekkor a korong? A fonál tömege elhanyagolható.
11. Egy 2h hosszúságú rúd felső végénél rögzített tengelyen függ. Legalább mekkora szögsebességgel kell a függőleges helyzetéből kimozdítani, hogy a felfüggesztési pontja körül a függőleges síkban teljes körülfordulást tegyen?
12. Egy 3 kg tömegű, R sugarú korong függőleges tengely körül forog $4\pi\text{ s}^{-1}$ szögsebességgel. Ha a forgó korongon egy kisméretű, 0,5 kg tömegű test a középpontból a korong kerületéig csúszik, mennyivel változik a szögsebesség?
13. Egy R sugarú, m tömegű tekegolyót v_0 kezdősebességgel úgy löknek el, hogy nem hozzák forgásba. A golyó a pályán csúszva indul. Az indulástól mekkora távolságban kezd el a golyó tisztán gördülni? A csúszási súrlódási együttható μ .
14. Hány perccel változna meg a nap hossza, ha a Föld forgási energiája 20 %-kal csökkenne?
15. Legfeljebb mekkora vízszintes F erővel lehet az 5 cm sugarú, 1 kg tömegű, tömör hengerre tekert fonalat húzni, hogy a henger a talajon ne csússzon meg? A tapadási súrlódási együttható 0,3.

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó
- Holics László: Fizika, Műszaki Könyvkiadó

Felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó
- Holics László: Fizika, Műszaki Könyvkiadó

1.10. Deformálható testek mechanikája

Az előző fejezetben áttekintettük a merev testek síkmozgását. A továbbiak szempontjából fontos hangsúlyozni, hogy a merev testek egy ideális határ-
esetet jelentenek, a valódi testek elegendően nagy erők hatására mindig
megváltoztatják alakjukat.

A testek alakváltozásának, idegen szóval **deformációjának** leírása általá-
nos esetben nagyon bonyolult lehet (gondoljunk csak pl. egy karambolkor
„összegyűrődő” autókarosszériára). Sokszor már magának az alakválto-
zásnak a leírása is körülményes, a fellépő erők számítása pedig különösen
bonyolult.

Ezért a továbbiakban csak a szabályos alakú testek (téglatest, henger)
legegyszerűbb deformációival fogunk foglalkozni. Feltételezzük azt is,
hogy a testek anyaga a test térfogatán belül mindenhol azonos minőségű (a
test homogén), továbbá **izotróp**, azaz rugalmas tulajdonságaik függetlenek
az iránytól.

Rugalmas deformáció:

Egy deformációt akkor nevezünk rugalmasnak, ha az alakváltozást létre-
hozó erő megszűnte után a test visszanyeri eredeti alakját. A tapasztalat
szerint szilárdtestek esetén az elegendően kicsi alakváltozások mindig ru-
galmasak. Az, hogy mit jelent az „elegendően kicsi”, anyagfüggő. Később
pontosabban tudunk majd valamit mondani erről a kérdésről.

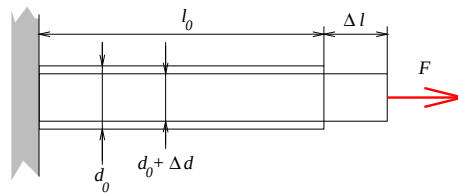
Az elegendően kicsi deformációk esetén a deformáció mértéke egye-
nesen arányos az őt létrehozó hatással. Ezt a törvényszerűséget **általános**
Hooke-törvénynek nevezzük. Ez a törvény a konkrét deformációk esetén
más és más alakot ölt, ahogy azt a következőkben látni fogjuk.

1.10.1. A nyújtás (összenyomás)

Vegyünk egy homogén, egyenletes A keresztmetszetű, l_0 kezdeti hosszúságú rudat. Rögzítsük egyik végét, és a másik végére F erőt gyakorolva nyújtsuk meg egy kicsit. A tapasztalat (és az általános Hooke-törvény) szerint a Δl megnyúlás egyenesen arányos F -fel, (ha Δl elég kicsi):

$$F = D \cdot \Delta l .$$

Itt F az általunk kifejtett erő, és nem a rúd által ránk kifejtett erő. Ezzel magyarázható az, hogy nincs negatív előjel a jobb oldalon, mint ahogy a rugók esetére érvényes összefüggés középiskolából ismert felírásánál.



1.34. ábra. Nyújtás

A D arányossági tényezőt a test **direkciós állandójának** szokás nevezni. Az nyilvánvaló, hogy D egyenesen arányos az A keresztmetszettel, hisz pl. két egyforma rudat egymás mellé téve azonos megnyújtás esetén a fellépő erő kétszeres lesz. Az is könnyen kitalálható, hogy D fordítottan arányos l_0 -lal. Kössünk ugyanis egymás után két egyforma rudat, és nyújtsuk meg őket $2 \cdot \Delta l$ -lel. Ekkor az egyes rudak külön-külön megnyúlása Δl lesz és ezért bennük $D \cdot \Delta l$ nagyságú erő ébred. (D egy rúd **direkciós állandója**.) Ezek az erők nem adódnak össze, a megnyújtáshoz csak az egyik rúd végén fellépő $D \cdot \Delta l$ erőt kell biztosítanunk. A kétszer olyan hosszú tehát $D \cdot \Delta l$ nagyságú erő hatására $2\Delta l$ -nyit nyúlt meg, így ezen hosszú rúd **direkciós állandója** $D/2$, azaz fele egy rúdénak.

Az eddigieket összegezve:

$$F = E \cdot \frac{A}{l_0} \cdot \Delta l . \quad (1.45)$$

Ezt a szokásos alakra hozva:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{F l_0}{A} . \quad (1.46)$$

Szokás ezt **szűkebb értelemben vett Hooke-törvénynek** nevezni. E egy, a rúd anyagára jellemző állandó, amit **Young-modulusznak** nevezünk.

Rendezzük át az előbbi egyenletet:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l_0} .$$

A bal oldalon álló tört azt jellemzi, mennyire van a rúd „megfeszítve”, hisz számértéke az egységnyi keresztmetszetre jutó erővel egyezik meg. Ezt, azaz a

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

mennyiséget **mechanikai feszültségnek** nevezzük.

A $\Delta l/l_0$ tört pedig azt jellemzi, mennyire van a rúd eredeti hosszához képest megnyújtva, ezért a

$$\varepsilon = \Delta l/l_0$$

mennyiséget **relatív megnyúlásnak** nevezzük.

Új jelöléseinkkel a Hooke-törvény így alakul:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon . \quad (1.47)$$

Mivel ε mértékegység nélküli viszonyszám, σ mértékegysége pedig a N/m^2 , ezért a Young-modulusz mértékegysége a N/m^2 , amely megegyezik a pascallal (Pa), azaz a nyomás mértékegységével. ⁹ Pl. az acél esetén $E_{\text{acél}} = 2,15 \cdot 10^{11} N/m^2$, ólomra pedig kb. $E_{\text{ólom}} \approx 1,5 \dots 2 \cdot 10^{10} N/m^2$.

Az eddigi átalakítások nemcsak bűvészkedések voltak a jelölésekkel. Ez utóbbi alak ugyanis a rúd anyagának tetszőlegesen kis részére igaz, hisz homogén rúdban σ és ε tetszőlegesen kicsi darabra is ugyanaz. Ez viszont azt jelenti, hogy a megnyúlás mikéntje kis méretekben dől el, azaz E valóban anyagi állandó, nem függ a rúd bármiféle geometriai adatától. A Young-moduluszt mikrofizikai adatok (a kristálysíracson adatok) határozzák meg. Ez a fentebbi alakban nem látszik.

A tapasztalat szerint egy rúd nyújtásakor nemcsak a hossz változik, hanem a keresztmetszet is, meghozzá csökken. (Lásd az 1.34. ábrát.) Jelölje

⁹Ezért a Young-modulusz értékét gyakran pascalban illetve gigapascalban (GPa) adják meg.

d_0 a rúd nyújtatlan állapotbeli keresztmetszetének méretét.¹⁰ A mérések szerint a testek nyújtásra merőleges méretének $\Delta d/d_0$ relatív megváltozása egyenesen arányos a relatív megnyúlással:

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \cdot \varepsilon . \quad (1.48)$$

A μ arányossági tényező neve **Poisson-szám**. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy pozitív ε (azaz nyújtás) esetén Δd negatív (azaz a keresztirányú méret csökken.)

A Poisson-szám is egy mértékegység nélküli viszonyszám. Később be fogjuk bizonyítani, hogy ennek értéke csak 0 és 0,5 közötti lehet. A leggyakrabban használt fémek esetén ez az érték általában 0,3 és 0,4 között van.

A hosszúság-növekedésből és a keresztmetszet csökkenéséből származó térfogatváltozások nem egyenlítik ki egymást. A test térfogata nyújtáskor nő.

Elegendően kicsi összenyomás esetén a relatív hosszváltozásra ugyanazok az összefüggések és anyagi állandók alkalmazhatók, mint a relatív megnyúlásra. Ilyen jellegű ún. „egyirányú” összenyomásnak vannak kitéve a függőleges helyzetű rudak, tartóoszlopok. Ha a terhelés mértéke eléri egy kritikus értéket, a terhelt rúd kihajlik.

1.30. példa: Mennyivel nyúlik meg az 5,652 m hosszú, 1,2 mm átmérőjű acéldrót $F = 120 \text{ N}$ húzóerő hatására? Mennyi a drót relatív megnyúlása? Mekkora húzófeszültség lép fel a drótban?

Megoldás: Az acéldrót megnyúlása az (1.46) összefüggésbe való behelyettesítéssel határozható meg:

$$\Delta l = \frac{1}{2,15 \cdot 10^{11} \text{ N/m}} \cdot \frac{120 \text{ N} \cdot 5,652 \text{ m}}{(1,2 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2 / 4 \cdot \pi} ,$$

$$\Delta l = 0,0027 \text{ m} = 2,7 \text{ mm} .$$

Az acéldrót relatív megnyúlása:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,0027 \text{ m}}{5,652 \text{ m}} = 4,8 \cdot 10^{-4} .$$

Az acéldrótban fellépő húzófeszültség pedig:

¹⁰Ez a „jellemző méret” kör keresztmetszet esetén lehet mondjuk az átmérő, téglatest keresztmetszetnél valamelyik oldal hossza, stb.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{120 \text{ N}}{(1,2 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2 / 4 \cdot \pi} \text{ qve}$$

$$\sigma = 1,06 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 106 \text{ N/mm}^2 .$$

1.10.2. A kompresszió

Szilárdtestet nemcsak egy irányban lehet deformálni, hanem a környezet p nyomását változtatva minden irányból ható erővel is lehet hatni rá. Az ilyen típusú erővel való deformációt **kompresszió**nak nevezzük. Ilyen eset lép fel pl. nagy külső nyomásnak kitett alkatrészek esetében.

Az általános Hooke-törvény értelmében kis térfogatváltozásokra igaz lesz, hogy:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\kappa \cdot \Delta p , \quad (1.49)$$

ahol κ anyagi minőségre jellemző állandó, szokásos elnevezése: **kompresszibilitás**. Értéke nagyon kis szám, pl. a vas térfogata a légköri nyomás ezerszeresének hatására csupán 0,6 ezrelékkal csökken. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy növekvő nyomás csökkenti a térfogatot.

A kompresszibilitás mértékegysége a m^2/N . Nyilvánvaló, hogy κ csak pozitív lehet. Képzeljünk el ugyanis egy olyan testet, amire $\kappa < 0$. Növeljük meg az erre a testre ható nyomást, azaz legyen $\Delta p > 0$. Ekkor $\Delta V > 0$ lesz, azaz a test térfogata nő. Ez pedig lehetetlen, hisz a nagyobb külső nyomásból származó erő inkább összepréseli a testet.

Az eddig tanult három rugalmas anyagi állandó (E, μ, κ) nem független egymástól: kettő megadása a harmadik értékét rögzíti. Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk:

Vegyünk egy szilárd anyagú kezdetben a_0 élű kockát. Fejtsünk ki valamilyen Δp nyomást két szemben levő oldallapjára. Ez $F = \Delta p \cdot a_0^2$ nyomóerőt jelent az a_0^2 nagyságú keresztmetszetre, azaz a kockában $\sigma = |\Delta p|$ nagyságú mechanikai feszültség ébred. Fentebb a mechanikai feszültséget húzóerő esetén vettük pozitívnak, ezért az előző egyenlet előjel helyesen: $\sigma = -\Delta p$. Jelölje Δa_p a nyomással párhuzamos, Δa_m a nyomás irányára merőleges méretváltozást. Alkalmazzuk az összenyomás irányában az (1.47) egyenletet, és rendezzük át:

$$\frac{\Delta a_p}{a_0} = -\frac{1}{E} \Delta p . \quad (1.50)$$

Másrészt:

$$\frac{\Delta a_p}{a_0} = \varepsilon ,$$

és (1.48) szerint a nyomásra merőleges irányban:

$$\frac{\Delta a_m}{a_0} = -\mu\varepsilon .$$

Innét:

$$\Delta a_m = -\mu\varepsilon a_0 .$$

A test térfogata az összenyomás után

$$\begin{aligned} V_1 &= (a_0 + \Delta a_p)(a_0 + \Delta a_m)(a_0 + \Delta a_m) = \\ &= a_0(1 + \varepsilon)a_0(1 - \mu\varepsilon)a_0(1 - \mu\varepsilon) \end{aligned}$$

lesz. (Az 1-es index azt jelenti, hogy még csak egy irányból történt az összenyomás.) Bontsuk fel a zárójeleket:

$$V_1 = a_0^3 (1 + (1 - 2\mu)\varepsilon + (\mu^2 - 2\mu)\varepsilon^2 + \mu^2\varepsilon^3) .$$

Itt több helyen feltűnnek a relatív megnyúlás (azaz $\varepsilon = \Delta a_p/a_0$) különböző hatványai. Mivel kis megnyúlásokat vizsgálunk, ezért $\varepsilon \ll 1$. Ekkor viszont a kis ε érték második és harmadik hatványa sokkal kisebb lesz magánál ε -nél, így nem követünk el nagy hibát, ha az előbbi egyenlet utolsó két tagját elhanyagoljuk.¹¹

Vegyük még figyelembe, hogy $V_0 = a_0^3$. Így az egyirányú nyújtás hatására bekövetkező relatív térfogatváltozás az alábbi alakba írható:

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V_1}{V_0} = (1 - 2\mu)\varepsilon = (1 - 2\mu)\frac{\Delta a_p}{a_0} .$$

Ide(1.50) egyenletet beírva:

$$\frac{\Delta V_1}{V_0} = -(1 - 2\mu)\frac{\Delta p}{E}$$

adódik.

Ezen nyomás fenntartása mellett gyakoroljunk ugyanekkora nyomást először az egyik, majd a másik jelenleg még nem nyomás alatt levő lap-párra is. Mivel a relatív méretváltozások kicsik, ezért a keresztmetszet

¹¹Reális esetekben $\varepsilon < 0,02$. Ekkor $\varepsilon^2 = 4 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon^3 = 8 \cdot 10^{-6}$, azaz a két utolsó tag szorzói igen kicsik, tehát nyugodtan elhanyagolhatjuk őket.

a második összenyomás irányából is alig fog eltérni az eredeti a_0^2 értéktől, így mindent az előzőek szerint mondhatunk el.¹² A három irányból végzett összenyomás hatására ezért ugyanazon térfogatváltozások következnek be, így minden irányból történő Δp nyomás hatására bekövetkező térfogatváltozás az előző ΔV_1 érték 3-szorosa, azaz:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -3 \cdot (1 - 2\mu) \frac{\Delta p}{E}.$$

Vessük össze ezt (1.49) egyenlettel. Csak akkor állhat fenn a két egyenlet egyszerre, ha

$$\kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}.$$

Ez a keresett összefüggés az eddig megismert három anyagi állandó között.

Ez az összefüggés nagyon fontos. Egyrészt segítségével E , μ és κ közül bármely kettőből kifejezhető a harmadik, így elég közülük kettőt megmérnünk. Másrészt fentebb mondtuk, hogy tetszőleges anyagra $\kappa > 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy $1 - 2\mu > 0$ (mivel az E Young-modulus mindenképpen pozitív), tehát $\mu < 0,5$. Bebizonyítottuk tehát, hogy a Poisson-szám nem lehet nagyobb 0,5-nél.

1.10.3. A nyírás

Hasson egy szilárd testre két egyforma nagyságú, de ellentétes irányú erő, amelyeknek hatásvonala nem esik egybe. Ilyen terhelésnek vannak kitéve pl. a lemezeket összetartó szegecsek és csavarok. Hasábok nyíró igénybevételénél a test hosszmérete nem fog megváltozni, hanem a test eltorzul, ahogy azt téglatest esetén az 1.35. ábra mutatja.

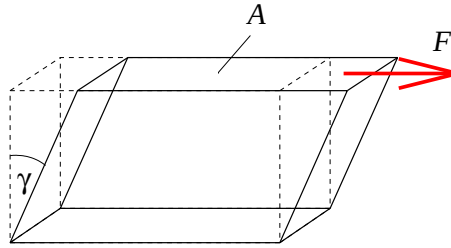
A testek ilyen jellegű deformációját **nyírásnak** nevezzük.¹³

A nyírás mértékét az előbbi ábrán feltüntetett γ szöggel jellemezzük, γ szokásos neve: nyírási szög. A tapasztalat (és az általános Hooke-törvény) szerint:

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{A},$$

¹²Ha pontosan végigszámolnánk mindhárom egymás utáni összenyomást, akkor azt kapnánk, hogy a keresztmetszet változásának elhanyagolása ε^2 -tel arányos nagyságú hibát jelent, amit a fentiekhez hasonlóan el lehet hanyagolni.

¹³Az elnevezés oka az, hogy ilyen igénybevétel lép fel pl. az olló szárai közé kerülő anyagok esetében.



1.35. ábra. Nyírás

ahol G a **nyírási-** vagy **torziómodulusz** nevű anyagi állandó, F a nyíró erő, A a nyírással párhuzamos keresztmetszet.

Szokás a fenti F/A mennyiséget **nyírási feszültségnek** nevezni és σ_{ny} -nyel jelölni. Ezzel a jelöléssel a fenti egyenlet másik szokásos alakját is felírhatjuk:

$$\sigma_{ny} = \gamma G ,$$

ami formálisan nagyon hasonlít a $\sigma = \varepsilon E$ kifejezésre. (Ez egyrészt könnyítheti az összefüggés megjegyzését, másrészt jelzi, hogy mindkét összefüggés ugyanannak a törvénynek, azaz az általános Hooke-törvénynek következménye.)

A nyírási modulusz mértékegysége a N/m^2 . Értéke pl. acél esetén $G_{\text{acél}} = 8,14 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, ólomra pedig $G_{\text{ólom}} = 5,4 \dots 6,4 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

Fontos tudni, hogy ez az anyagi állandó sem független az előzőektől: a korábbi levezetéshez hasonló (bár kissé bonyolultabb) módon bebizonyítható, hogy

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} .$$

1.31. példa: Legalább mekkora legyen a vonórúd csapjának átmérője, ha vontatás közben a vonórúd maximálisan 15700 N erőt visz át és a csapnál megengedett legnagyobb nyírófeszültség 50 N/mm²?

Megoldás: A nyírófeszültség az F nyíróerő és a nyírással párhuzamos A keresztmetszet hányadosa. Ezért

$$\sigma = \frac{F}{A} < \sigma_{ny,max} ,$$

azaz

$$\frac{15700 \text{ N}}{A} < 50 \text{ N/mm}^2 .$$

Ebből

$$A > \frac{15700 \text{ N}}{50 \text{ N/mm}^2} = 314 \text{ mm}^2 .$$

Kör alakú keresztmetszet esetén:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} > 314 \text{ mm}^2 .$$

Ebből

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} > \sqrt{\frac{4 \cdot 314 \text{ mm}^2}{\pi}} ,$$

$$d > 20 \text{ mm} .$$

Tehát a vonórúd csapjának átmérője legalább 20 mm kell, hogy legyen.

Bár nem foglalkozunk részletesen a folyadékok mechanikájával, azt megemlíjtük, hogy a nyírással szembeni viselkedés az egyik legfontosabb különbség a folyadékok és a szilárdtestek között: nyugvó folyadékban nem lépnek fel nyíróerők, azaz folyadékokra $G = 0$. Folyadékok esetén az eddigi rugalmas állandók közül egyedül a kompresszibilitás értelmezhető.

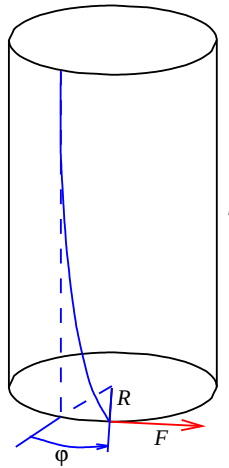
A hidrosztatikai nyomás minden irányban egyenlő, és nyugvó folyadék belsejében tetszőleges felületre arra merőleges nyomóerő hat. Ebből következik, hogy nincsenek nyíróerők, ugyanis ha lennének, akkor lenne olyan felület, ami mentén a folyadék nyíródna, azaz az említett felülettel párhuzamos erő lépne fel.

1.10.4. A csavarás (torzió)

Vegyünk egy R sugarú l hosszúságú, kör keresztmetszetű rudat és rögzítsük egyik végét. A nem rögzített véget pedig csavarjuk el valamilyen M forgatónyomatékkal. Ilyenkor az elfordulás φ szöge és az azt létrehozó forgatónyomaték egyenesen arányos lesz (1.36. ábra.):

$$\varphi = \frac{2}{\pi G} \frac{l}{R^4} M . \quad (1.51)$$

Nem véletlen, hogy a G nyírési modulusz lép fel a fenti összefüggésben. Szemeljünk ugyanis ki egy kis téglatest alakú darabot a rúd anyagából úgy, hogy az alaplapok párhuzamosak legyenek a rúd kör alakú alaplapjaival.



1.36. ábra. Csavarás

Egy ilyen kis téglatest a csavarás során az alaplapokkal párhuzamos lapjai mentén nyíródni fog. A rudat sok kicsi darabra felbontva tehát a csavarást a kis darabok nyírásából tudjuk előállítani, ezért került a nyírási modulusz a fenti képletbe.

Azt is megjegyezzük, hogy nem kör keresztmetszet esetén az elfordulás szöge

$$\varphi = C \cdot \frac{1}{G} l M$$

alakban állítható elő, ahol C egy, a rúd keresztmetszetére jellemző együttható. Nem kör keresztmetszettel itt terjedelmi okokból nem foglalkozunk. (És azért, mert a gyakorlatban csavarási igénybevétel esetén általában kör keresztmetszetű rudakkal találkozunk.)

Hogy jobban láthassuk a lényegét, vonjuk össze a rúd adatait egy D^* együtthatóba:

$$M = D^* \varphi .$$

Ez a D^* mennyiség tulajdonképpen azt fejezi ki, mennyire nehezen csavarható el a rúd. Vegyük észre, hogy D^* a rúd sugarának 4. hatványával arányos, azaz pl. *kétszer* kisebb átmérőjű rudat *tizenhatszor* könnyebb elfordítani. Ez viszont azt jelenti, hogy igen kis keresztmetszetek esetén kis forgatónyomatékokra (erőre) érzékeny berendezéshez juthatunk. Ilyen elven működő berendezéssel, úgynevezett torziós ingával végzett Eötvös Lőránd igen pontos (10 tizedesjegy pontosságú) gravitációs méréseket a század elején.

D^* bevezetése nemcsak formális egyszerűsítés, hanem megfelel annak is, hogy a gyakorlatban D^* -ot közvetlenül mérik és nem a fentebbi képletből számolják, ugyanis így pontosabb értékhez juthatunk.

1.32. példa: Sárgaréz torziómodulusának meghatározásához egy 40 cm hosszúságú, 2 mm átmérőjű sárgaréz drót végére egy 30 cm hosszú, 0,6 kg tömegű rudat erősítünk. A drótot a rúd közepéhez kötjük, a rúd vízszintes helyzetű. A rudat rezgésbe hozzuk és lemérjük a rezgésidőt. Mekkora a sárgaréz torziómodulusa, ha 1 s-s rezgésidőt mértünk?

Megoldás: A merev testek mechanikájával foglalkozó fejezetben megmutattuk, hogy az egyensúlyi helyzetéből kimozdított csavarási inga harmonikus forgási rezgéseket végez, amelynek a lengésideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}, \quad (1.52)$$

ahol az $M = D^* \varphi$ értelmében a forgatónyomaték és a szögelfordulás közötti arányosságot kifejező állandó. Ha megnézzük az (1.51) összefüggést, megállapíthatjuk, hogy az szintén a forgatónyomaték és a szögelfordulás közötti arányosságot fejezi ki. A két összefüggést összehasonlítva kapjuk, hogy

$$D^* = \frac{\pi \cdot G}{2} \cdot \frac{R^4}{l}.$$

Az egyenlőséget alakítsuk át és fejezzük ki a torziómoduluszt:

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} \cdot D^*.$$

A G meghatározásához tehát ismernünk kell D^* -ot, ami (1.52) alapján

$$D^* = \Theta \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2.$$

A Θ a forgómozgást végző vízszintes rúd tehetetlenségi nyomatéka a geometriai középpontján átmenő függőleges forgástengelyre vonatkoztatva. A merev testek forgómozgásával kapcsolatban tanultak szerint:

$$\Theta = \frac{1}{12} m L^2 = \frac{1}{12} \cdot 0,6 \text{ kg} \cdot (0,3 \text{ m})^2,$$

$$\Theta = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2.$$

Ezután kiszámíthatjuk D^* -ot:

$$D^* = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{1 \text{ s}} \right)^2 ,$$

$$D^* = 0,177 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 0,177 \text{ Nm} .$$

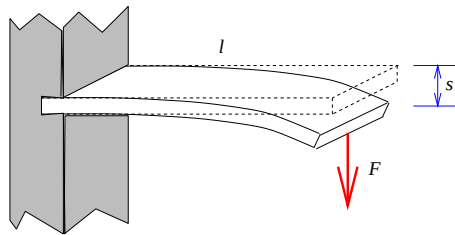
Végül számítsuk ki a torziómodulus értékét:

$$G = \frac{2 \cdot 0,4 \text{ m}}{\pi \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2} \right)^4} \cdot 0,177 \text{ Nm} ,$$

$$G = 4,507 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 = 45070 \text{ N/mm}^2 .$$

1.10.5. A lehajlás

A gyakorlatban nagyon sokszor előfordul az, hogy egy néhány ponton rögzített test saját súlya vagy külső erő hatására elhajlik. Egy tipikus esetet láthatunk az 1.37. ábrán: egyik végén vízszintesen befogott l hosszúságú deszkát a szabad végénél fogva F erővel lefelé hajlítunk.



1.37. ábra. Lehajlás

Ekkor a lehajlás mértéke:

$$s = \frac{1}{3E} \frac{l^3}{I} F \quad (1.53)$$

lesz, ahol E a rúd anyagának Young-modulusza, I pedig az ún. **felületi tehetetlenségi nyomaték**, ami a rúd keresztmetszetére jellemző mennyiség.

1.33. példa: Egy műanyag vonalzó hossza 20 cm, szélessége 3,5 cm, vastagsága 0,2 cm. A vonalzó egyik végét rögzítve, a másik végén lapjára merőleges 0,5 N erő hatására 2 cm lehajlást hozhatunk létre. Mennyi az anyag rugalmassági modulusa?

Megoldás: A vonalzó anyagának rugalmassági modulusát (1.53) segítségével határozhatjuk meg. Fejezzük ki (1.53) összefüggésből a rugalmassági moduluszt:

$$E = \frac{1}{3s} \cdot \frac{l^3}{I} \cdot F.$$

Mint látható, E meghatározásához ismernünk kell az I felületi tehetetlenségi nyomaték értékét:

$$I = \frac{ab^3}{12} = \frac{3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot (0,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3}{12},$$

$$I = 2,33 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4.$$

Tehát a rugalmassági modulusz:

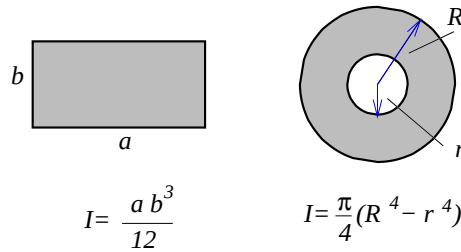
$$E = \frac{1}{3 \cdot (2 \cdot 10^{-2} \text{ m})} \cdot \frac{(20 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3}{2,33 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4} \cdot 0,5 \text{ N},$$

$$E = 2,86 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 = 2860 \text{ N/mm}^2.$$

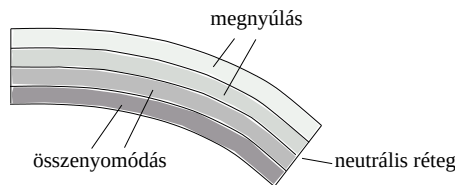
I kiszámítása általános keresztmetszet esetén viszonylag bonyolult (úgynevezett „felületi integrálok” használatát igényli), ezért most csak a leggyakrabban előforduló keresztmetszetekre adjuk meg a formulákat:

- Téglalap alakú keresztmetszetre $I = ab^3/12$, ahol a a vízszintes, b a függőleges oldalhossz.
- Kör keresztmetszet esetén (tömör rúd esete) $I = \pi R^4/4$, ahol R a rúd sugara.
- Körgyűrű keresztmetszetre (cső) esete $I = \pi/4 \cdot (R^4 - r^4)$, ahol R a külső, r a belső sugár.

A lehajlás során a testet oldalnézetből vizsgálva azt tapasztalhatjuk, hogy a középső réteg (az úgynevezett **neutrális réteg**) nem változtatja meg hosszát, az e feletti rétegek nyúlnak, az ez alattiak rövidülnek. Ezen rétegek nyújtásából illetve összenyomásából adódó erők tartanak egyensúlyt a hajlító erővel.



1.38. ábra. Egyszerű alakok felületi tehetetlenségi nyomatéka

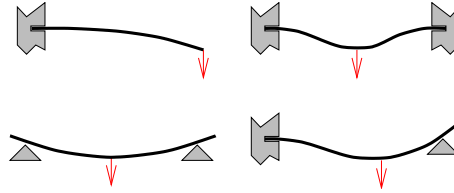


1.39. ábra. A rétegek deformációja lehajlás közben

Ezen megnyúlások számításokkal való követése bonyolult, ezért itt nem térünk ki rá. Ilyen jellegű számításokkal lehet a fenti, a lehajlás mértékét megadó képletet megkapni, illetve nem állandó keresztmetszetű rudak lehajlását számolni. Itt csak azért említettük ezt meg, hogy lásuk: a lehajlás nem elvileg új deformációfajta, az anyagoknak nincs külön valamiféle „hajlítási együttható” nevű anyagi állandójuk, hanem a Young-modulusz és a geometriai méretek adják meg a hajlítással szembeni merevséget.

Igazán pontos számításoknál azt is figyelembe kell venni, hogy a fentebb elmondottak értelmében nyújtáskor a keresztmetszet csökken, és ennek hatására egy lehajló téglatest felső lapja nem egyszerűen lefelé görbül, hanem bonyolult, ún. nyeregfelület alakot vesz fel. Ez a hatás azonban a legtöbb gyakorlati esetben elhanyagolható.

Természetesen lehajlás még több féle módon elképzelhető. Itt nem célunk az összes eset kimerítő tárgyalása, ezért nem adjuk meg ezen esetek lehajlásának képletét és nem tárgyaljuk a saját súlya alatt lehajló rúd esetét sem. Megfelelő kézikönyvekben a legtöbb, gyakorlatban előforduló eset lehajlásának képlete megtalálható.



1.40. ábra. Különböző fajta lehajlások

1.34. példa: Van két azonos hosszúságú, azonos anyagból készült rudunk. Ezek egy bizonyos külső erő hatására egyforma mértékben hajlanak le a 1.37 ábrához hasonló elrendezésben. Az első rúd tömör, R sugarú, kör keresztmetszetű, a második egy cső, aminek külső sugara $2R$.

Melyik nehezebb és hányszor?

Megoldás: Mivel a rudak hossza, anyaguk és a külső erő megegyezik, ezért ha lehajlásuk azonos, akkor keresztmetszetük felületi tehetetlenség nyomatékának is egyezni kell. Azaz:

$$\pi/4 R^4 = \pi/4 ((2R)^4 - r^4)$$

ahol r a cső belső sugara. Innét a belső sugár könnyen kifejezhető R -rel:

$$r = \sqrt[4]{15} R.$$

A tömör rúd keresztmetszete $A_1 = R^2\pi$, a csőé pedig $A_2 = (2R)^2\pi - r^2\pi = (4 - \sqrt{15})R^2\pi$. Mivel a hossz és az anyag megegyezik, ezért a tömegek aránya a keresztmetszetek arányával meg fog egyezni, azaz a tömegarány

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4 - \sqrt{15}} \approx 7,9$$

lesz.

A cső alakú rúd tehát csaknem nyolcszor kisebb anyagfelhasználást igényel, mint a tömör, ha azt akarjuk, hogy a hajlítással szemben ugyanannyira legyenek ellenállóak. Ezért hajlítási igénybevétel esetén üreges testeket érdemesebb használni, mint tömöreket.¹⁴

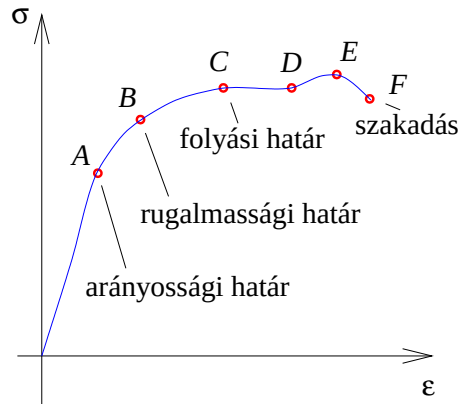
1.10.6. A rugalmasság határai

Az előzőekben tárgyalt törvényszerűségek mindig kis alakváltozásokra voltak érvényesek. Most a nyújtás esetében megnézzük, mi történik, ha az

¹⁴Nem a cső forma az ideális, ha minél kevesebb anyaggal ugyanazt a hajlítással szembeni merevséget akarjuk elérni, hanem az elfordított „H” alak. Ilyen okokból ez a keresztmetszetük a vasúti síneknek.

alakváltozás nem kicsi. (A többi deformáció esetén is hasonló eredményeket kapnánk, ezért ezeket itt helyhiány miatt nem tárgyaljuk.)

Mérjük ki egy rúd esetén a $\sigma(\epsilon)$ függvényt, azaz mérjük meg a rúdban ébredő mechanikai feszültséget különböző relatív megnyúlások esetén. Fémek esetén az 1.41 ábrán feltüntetett jellegű görbét kapjuk.



1.41. ábra. Fémek viselkedése nyújtással szemben

A görbe az A pontig egyenesnek vehető: idáig érvényes a Hooke-törvény. Ennek megfelelően az A pont neve: **arányossági határ**. Az ide tartozó relatív megnyúlás fémek esetében általában 1–2 százalékos.

A és B pont közt még rugalmas az alakváltozás (tehát az anyag visszanyeri eredeti alakját), de már nem érvényes a Hooke-törvény. B pont szokásos neve: **rugalmassági határ**.

1.35. példa: Acélhuzal rugalmassági határa 240 N/mm^2 . Mekkora terhet akaszthatunk az 1 mm átmérőjű huzalra, hogy a huzal a terhelés megszűnte után visszanyerje eredeti hosszát?

Megoldás: Az acélhuzalban ébredő mechanikai feszültség nem haladhatja meg a rugalmassági határt:

$$\sigma = \frac{F}{A} < \sigma_{max}.$$

Ebből

$$F < \sigma_{max} \cdot A,$$

$$F < 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{(1 \text{ mm})^2 \pi}{4},$$

$$F < 188 \text{ N}.$$

Tehát az acélhuzalra akasztható teher nem haladhatja meg a 188 N értéket.

B és C pont közt maradandó alakváltozás lép fel, amihez még jelentős külső erőt kell a testre gyakorolnunk.

C és D pont közt a görbe közel vízszintessé válik, ez azt jelenti, hogy nagyon kis erő is tovább deformálja az anyagot, az anyag mintegy „folyik”. Ezért a C pontot **folyási határnak** nevezzük. Ez a képlékeny szakasz igen fontos a fémek hidegen történő megmunkálása esetében.

D pontnál az anyag újból megszilárdul és E pontig egyre nagyobb erő kell a további nyújtáshoz.

E és F pontok közt pedig a szükséges húzóerő (feszültség) egyre csökken, végül F pontban a rúd elszakad. Az F pontbeli feszültségértéket **szakítószilárdságnak** nevezzük. Például a különböző acélfajták szakítószilárdsága $0,4 \dots 1,8 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ közé esik.

A tapasztalat szerint az anyagokat nagyon sokszor kitéve a szakítószilárdságuknál kisebb feszültségeknek, az anyag előbb kissé megmerevedik, majd eltörik. Ezt a jelenséget az **anyagok fáradásának** nevezzük. Ennek magyarázatát a kristályszerkezetről szóló részben adjuk meg.

1.11. Kérdések és feladatok

1.11.1. Elméleti kérdések

1. Mikor tekintünk egy testet homogénnek illetve izotrópnak?
2. Mikor nevezünk egy alakváltozást rugalmasnak?
3. Mit mond ki az általánosított Hooke-törvény?
4. Igaz-e az általánosított Hooke-törvény minden rugalmas alakváltozásra?
5. Mit nevezünk egy test direkciós állandójának?
6. Mit nevezünk Young-modulusznak és mi a mértékegysége?
7. Mi a Poisson-szám és mi a mértékegysége?
8. Mi a kompresszibilitás és mi a mértékegysége?
9. Milyen fajta deformációt nevezünk nyírásnak?
10. Mondjon példát nyírási deformációra?
11. Mi a nyírási feszültség, hogyan tudom növelni az értékét?

12. Mi a nyírási modulusz mértékegysége?
13. Miért nem lehet a Poisson-szám $1/2$ -nél nagyobb?
14. Miért a nyírási modulusz szerepel a csavarás szögének képletében?
15. Kb. mennyi a víz nyírási modulusza?
16. Van-e kapcsolat az anyag különböző rugalmasságtani állandói között?
17. Egy fémhuzalt egy F erő Δl -el nyújt meg. Biztos-e, hogy $10 \cdot F$ hatására a megnyúlás $10 \cdot \Delta l$ lesz?
18. Mit nevezünk szakítószilárdságnak?
19. Mikor mondjuk egy anyagról azt, hogy anizotrop?
20. A lehajlás mértékét megadó összefüggésekben az anyagok melyik rugalmas állandója lép fel? Miért pont ez?
21. Két tömör, kör keresztmetszetű rúd közül az első kétszer nagyobb átmérőjű, mint a második. Azonos hajlítási terhelés esetén melyik hajlik meg jobban? Mekkora a meghajlások aránya?
22. Egy kötélről tudjuk, hogy akkor szakadna el, ha egy kampóra kötve alsó végére egy 100 N súlyú testet akasztanánk, de 99 N esetén még nem szakad el. Elszakad-e, ha kézbe fogva mindkét végét 80 N nagyságú, ellentétes irányú erővel húzzuk? Miért?

1.11.2. Kidolgozott feladatok

1.15. feladat: Mekkora a feszítőerő, ha a hegedű 40 cm hosszú, 0,5 mm átmérőjű acélhúrját 0,36 mm-rel megnyújtjuk?

Megoldás: A feszítőerő nagysága (1.45) értelmében

$$F = 2,15 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\left(\frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2}\right)^2 \pi}{40 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cdot 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ m} ,$$

$$F = 38 \text{ N} .$$

1.16. feladat: Mennyivel csavarodik el a 80 cm hosszú, 2 cm átmérőjű motortengely, amely 30 1/s fordulatszám mellett 30 kW teljesítményt visz át? Anyagának torziómodulusa 80000 N/mm^2 .

Megoldás: A motor a tengelyre M forgatónyomatékokat gyakorol. Ha a tengely a

forgatónyomaték hatására $\Delta\varphi$ elemi szöggel elfordul, akkor a motor által végzett munkát részletes bizonyítás nélkül a $\Delta W = F \cdot \Delta x$ analógiájára a

$$\Delta W = M \cdot \Delta\varphi$$

összefüggés segítségével számolhatjuk ki. Ha a $\Delta\varphi$ szögelfordulás Δt idő alatt történt, akkor a motor teljesítménye:

$$P = M \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = M \cdot \omega .$$

A 30 1/s-os fordulatszám mellett a szögsebesség:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 30 \text{ 1/s} ,$$

$$\omega = 1885 \text{ 1/s} .$$

A teljesítmény és a szögsebesség ismeretében kiszámíthatjuk a forgatónyomatékokat:

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ W}}{188,5 \text{ 1/s}} ,$$

$$M = 159,2 \text{ Nm} .$$

A motortengely elcsavarodásának nagysága (1.51) alapján számolható:

$$\varphi = \frac{2}{\pi \left(8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \right)} \cdot \frac{80 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{\left(\frac{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2} \right)^4} \cdot 159,2 \text{ Nm} ,$$

$$\varphi = 0,101 \text{ rad} \approx 5,8^\circ .$$

1.17. feladat: Egy anyagban a longitudinális hullámok 3500 m/s-mal, a transzverzálisak 2100 m/s-mal terjednek.

Melyik rugalmas állandó értéke határozható meg ezekből? Határozza is meg ennek értékét! Reális ez az eredmény?

Megoldás: Tudjuk, hogy

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} .$$

Ebből 2 adat ismert, de három ismeretlen van, tehát E és G innét nem kapható meg. Viszont E/G megkapható, amiből a Poisson-szám meghatározható:

$$\frac{E}{G} = \frac{v_l^2}{v_t^2} ,$$

továbbá

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{G} = 2(1 + \mu).$$

Ezekből a Poisson-szám:

$$\mu = \frac{v_l^2}{2v_t^2} - 1 = 0,39.$$

Ez reális, hisz az anyagok Poisson-száma 0 és 0,5 közé kell essen.

1.18. feladat: Két, azonos anyagból készült gerenda hajlításnak van kitéve. Az első 10 cm oldalú négyzet keresztmetszetű, a második egy elfordított "H" alakú, mely egy 10 cm élű négyzetbe írható bele és szárai 1 cm vastagságúak. Hogy aránylik egymáshoz a két gerenda hosszegységenkénti tömege és azonos külső terhelés melletti lehajlása?

Megoldás: A hosszegységenkénti tömeg a keresztmetszet nagyságával arányos, míg az azonos terhelés melletti lehajlás fordítottan arányos a felületi tehetetlenségi nyomatékkal. Formulával:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2},$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{I_2}{I_1}.$$

(1-es index a négyzet keresztmetszetet, 2-es az elfordított H-t jelöli.)

Nyilván:

$$A_1 = a^2 = 0,01 \text{ m}^2,$$

$$I_1 = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{1}{12} \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

A H-alak tulajdonképp ebből származtatható két darab, egyenként $8 \times 4,5$ cm-es méretű téglatest kivágásával. A területek nyilván kivonódnak egymásból:

$$A_2 = A_1 - 2 \cdot 0,08 \cdot 0,045 \text{ m} = 0,0028 \text{ m}^2.$$

Ebben az esetben a felületi tehetetlenségi nyomatékok is kivonhatók egymásból, mert a kivont részek neutrális rétege ugyanott van, mint az egész rúd.

Így:

$$I_2 = I_1 - 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,045 \cdot 0,08^3 \text{ m}^4 = \frac{1}{12} 0,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Tehát a kért arányok:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} = 3,57,$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{I_2}{I_1} = 0,54.$$

(A tömeg tehát majdnem a negyedére csökkent, de a lehajlás kevesebb, mint duplájára nőtt csak.)

1.19. feladat: Egy falból vízszintesen kiálló tömör fémrúd végét függőleges irányban terheljük, és mérjük a lehajlását. Számítsuk ki, hányszor nagyobb átmérőjű az a rúd, amelyik kétszer ilyen hosszú, és ugyanekkora terhelésre ugyanennyit hajlik le! (A rudak anyaga megegyezik.)

Megoldás: A rövidebb rúd adatait 1-es, a hosszabbét 2-es indexszel jelölve írjuk fel, hogy a két lehajlás azonos:

$$\frac{1}{3E} \frac{l_1^3 F}{I_1} = \frac{1}{3E} \frac{l_2^3 F}{I_2}.$$

Egyszerűsítsünk a közös tagokkal, majd írjuk be ide a tömör rudakra vonatkozó $I = (\pi/4)R^4$ összefüggést is:

$$\frac{l_1^3}{(\pi/4)R_1^4} = \frac{l_2^3}{(\pi/4)R_2^4},$$

Az átmérők kért aránya nyilván megegyezik a sugarak arányával. Az viszont ebből az egyenletből könnyen kifejezhető:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{R_2}{R_1} = \sqrt[4]{\frac{l_2^3}{l_1^3}}.$$

A feladat szerint $l_2 = 2l_1$, ezért a kért átmérő-arány:

$$\frac{d_2}{d_1} = \sqrt[4]{8} \approx 1,68.$$

Tehát a kétszer olyan hosszú rúd akkor hajlik le ugyanannyira, ha átmérője 1,68-szorosa az eredetinek.

1.20. feladat: Egy épületben egy $d = 2\text{ cm}$ átmérőjű, $l_0 = 2\text{ m}$ hosszúságú acélrúd húzófeszültségnek van kitéve. Legfeljebb mekkora erőt bír el? Mennyivel nyúlik meg, ha ennek az erőnek a harmada terheli meg? (A szakítószilárdságot vegyük $\sigma_{max} = 1,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ -nek, a Young-moduluszt pedig $E = 2,15 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ -nek.)

Megoldás: Az acélrúd keresztmetszete $A = d^2 \pi/4$, így ha a σ_{max} szakítószilárdságnak megfelelő feszültség ébred benne, akkor ez

$$F_{max} = \sigma_{max} A = 4,7 \cdot 10^5 \text{ N}$$

maximális erőt jelent.

Amennyiben ennek harmadával terheljük meg a rudat, akkor a fellépő mechanikai feszültség a szakítószilárdság harmada lesz, azaz $\sigma = 5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$. Ekkor a relatív megnyúlás

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = 2,3 \cdot 10^{-3}$$

lesz. Ez viszont azt jelenti, hogy az $l_0 = 2\text{ m}$ -es rúd megnyúlása:

$$\Delta l = \varepsilon l_0 = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4,6 \text{ mm}.$$

Láthatjuk, hogy a szakítószilárdság harmadánál fellépő relatív megnyúlás kb. 0,23 százalékos, ami azt jelenti, hogy az arányossági tartományban a relatív megnyúlás semmiképp sem nagyobb (inkább kisebb) másfél százaléknál. Valóban jogosak voltak tehát a fentebb tett elhanyagolások, amikor ε magasabb hatványait elhanyagolhatónak vettük.

A gyakorlatban —biztonsági okokból— általában úgy tervezik a terheléseket, hogy a feszültségek ne ériék el még a szakítószilárdság harmadát sem. Ezért ott még kisebb relatív megnyúlások lépnek fel.

1.11.3. Gyakorló feladatok

1. Mekkora az átmérője annak a 3 m hosszúságú platina huzalnak, amely 60 N erő hatására 8,5 mm-t nyúlik meg? ($E = 170000 \text{ N/mm}^2$)
2. Egy szilárd anyagról tudjuk, hogy 100 K-es hőmérséklet-emelés esetén 0,15%-kal nő meg a térfogata, ha szabadon tágul. Ebből az anyagból 30 cm hosszú, 4 cm^2 keresztmetszetű rudat készítünk, és pontosan befogjuk végeit. Azt tapasztaljuk, hogy 10 K-nyi melegítés hatására 4300 N erővel feszíti a befogásokat.
Mekkora az anyag Young-modulusa?
3. Mennyivel nyúlik meg csupán a részecskéire ható nehézségi erő következtében az M tömegű, l hosszúságú, felső végén rögzített, függőlegesen lefelé lógó huzal?
4. Egy 10 cm hosszúságú, 1 cm szélességű és 0,5 mm vastagságú acéllemezrugó egyik végét satuba szorítjuk, másik végéhez 0,4 kg tömegű testet erősítünk. A lemez tömege elhanyagolható. Mutassuk meg, hogy kis kitérések esetén a test harmonikus rezgőmozgást végez és határozzuk meg a rezgésidőt.
5. Felső végénél rögzített rugalmas huzalra alul egy 4 cm sugarú és 2,25 kg tömegű korongot erősítünk. A korong síkja vízszintes, és a huzal a korong középpontján megy át. Ha a korongot az egyensúlyi helyzetéből egy kissé elcsavarjuk, majd magára hagyjuk, a korong

- forgó rezgést végez. Mennyi a rezgésidő, ha a huzal hossza 31,4 cm, átmérője 2 mm és anyagának torziómodulusa 81000 N/mm^2 ?
6. Egy tömör acélrúd vízszintesen áll ki egy falból. A rúd kiálló részének hossza 40 cm. Mekkora legyen keresztmetszetének átmérője, ha azt akarjuk, hogy 100 kg-nyi, végére akasztott teher esetén csak 1 cm-t hajoljon le? (Az acél Young-modulusa $2,15 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.)
 7. Egy falból vízszintesen kiálló fémrúd végét függőleges irányban terheljük, és mérjük a lehajlását. Számítsuk ki, hányszor nagyobb átmérőjű az a rúd, amelyik kétszer ilyen hosszú, és ugyanekkora terhelésre ugyanennyit hajlik le! (A rudak anyaga megegyezik.)
 8. Mekkora erővel feszíthetünk egy (nyújtatlanul) 5 m hosszú, 3 mm átmérőjű acélhuzalt, ha azt akarjuk, hogy a terhelés a szakítószilárdság harmada legyen? Mekkora ekkor a megnyúlás és a keresztmetszet csökkenése?
(A szakítószilárdság $1,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, a Young-modulus $2,15 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, a Poisson-szám 0,35.)
 9. Lehet-e olyan anyagot előállítani, melynek Young-modulusa $E = 5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, nyírási modulusa $G = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$? Válaszát részletesen indokolja!
 10. Egy cső hajlításnak van kitéve. Belső átmérője 11 mm, a külső 14 mm. Helyettesíteni szeretnénk egy azonos anyagú tömör rúddal, amely ugyanennyire áll ellen a hajlításnak.
Mekkora legyen a rúd átmérője? Hányszor nehezebb ebből a rúdból 1 m, mint a csőből?
 11. Milyen hosszú kötélszakad el a saját súlya alatt, ha a szakítószilárdság 400 N/mm^2 , és a kötélsűrűsége 8 kg/dm^3 ?

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó
- Holics László: Fizika, Műszaki Könyvkiadó

Felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó
- Holics László: Fizika, Műszaki Könyvkiadó

2. Rezgőmozgások

Ebben a fejezetben a gyakorlat szempontjából kiemelkedő fontosságú mozgásfajtával, a **rezgőmozgásokkal** foglalkozunk. Ilyen mozgással a mindennapi élet és a mérnöki gyakorlat számtalan területén találkozhatunk. Épp a témakör mérete miatt a rezgőmozgás pontos definícióját megadni meglehetősen nehéz. Egy jó közelítéssel azt mondhatjuk, hogy rezgőmozgásról akkor beszélünk, ha a test a tér egy jól behatárolt tartományában ide-oda mozog. Általában van a térnek egy olyan pontja, amihez a rezgőmozgást végző test sokszor visszatér.

2.1. Egyenes menti rezgések

Az egyszerűség kedvéért beszéljünk először egy pontszerű test egyenes vonalú mozgásáról, rezgéséről. Ilyenkor a mozgást egy $x(t)$ függvény segítségével jellemezhetjük. Akkor beszélünk tehát rezgésről, ha található olyan x_0 hely, melynél sok t értékre teljesül az $x(t) = x_0$ egyenlet.

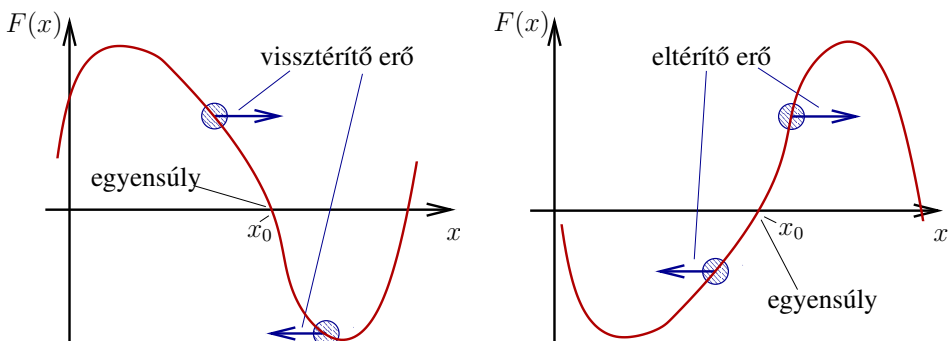
Fontos esete a rezgéseknek a **periodikus rezgések** esete, amiről akkor beszélünk, ha $x(t)$ egy periodikus függvény.

Rezgések nagyon sokféle módon kialakulhatnak. A leggyakoribb eset a következő: van egy olyan pont a mozgás egyenese mentén, ahol a test egyensúlyban van. Innét kissé kitérítjük a testet. Ha ekkor (tetszőleges kitérítés esetén) az egyensúlyi hely felé ható erő ébred, akkor a test visszatér az egyensúlyi pontba, és szinte mindig túl is lendül rajta. A másik oldalon ugyanez ismétlődik, a testre ugyancsak az egyensúlyi pont felé ható erő kezd hatni, visszatér oda, ... így előáll egy rezgés. Az ilyen pontokat **stabil egyensúlyi helyzetnek** nevezzük.

Nem minden egyensúlyi helyzet stabil. Előfordul a fenti eset ellenkezője is, amikor az egyensúlyi helyzet közelében olyan erők ébrednek, melyek eltávolítják a testet az egyensúlyi helyzettől. Az ilyen pontokat **instabil egyensúlyi helyzetnek** nevezzük.

Az $F(x)$ erőfüggvény ismeretében igen egyszerű eldönteni, hol van stabil- és hol instabil egyensúlyi helyzet. Egyensúlyban ugyanis biztosan $F(x_0) = 0$, és ha x_0 egy környezetén monoton fogyó az $F(x)$ függvény, akkor $x > x_0$ -ra $F(x) < 0$, azaz pozitív kitérítésre negatív erő ébred, illetve $x < x_0$ esetén $F(x) > 0$, azaz negatív kitérítésre pozitív erő ébred. (Kitérés alatt az $x - x_0$ mennyiséget értjük.) x_0 környezetében monoton fogyó $F(x)$ esetén tehát tényleg visszatérítő erővel találkozunk, azaz stabil az egyensúly.

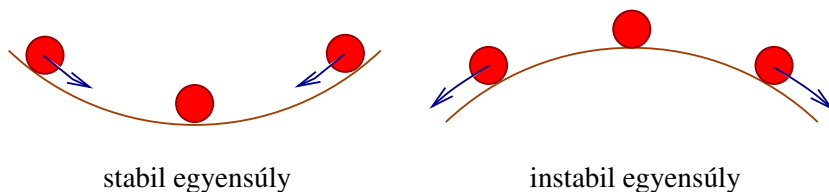
Ezzel szemben ha $F(x)$ monoton növekvő az egyensúlyi helyzet közelében, akkor instabil lesz az egyensúly.



2.1. ábra. Stabil és instabil egyensúly erőfüggvénye.

Ezeket az eseteket szemléltettük a 2.1. ábrán.

A gyakorlatban stabil és instabil egyensúlyi helyzetekkel egyaránt találkozunk. Például egy labda egyensúlyban van egy gödör alján és egy domb tetején is, mert mindkét helyen sík a talaj, de ezekből a pontokból kitérítve a gödör esetében az egyensúlyi helyzet felé visszatérítő, a domb esetén viszont onnan elgurító erők ébrednek, azaz a domb tetején ugyan egyensúlyban van a labda, de bármilyen irányba kitérítve onnan, elgurul. Ezt szemlélteti vázlatosan a 2.2. ábra.



2.2. ábra. Labda stabil és instabil egyensúlyi helyzete.

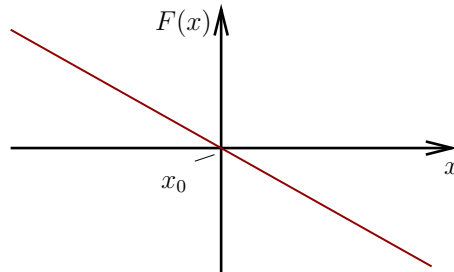
A következőkben néhány fontos rezgésfajtaival ismerkedünk meg.

2.1.1. A harmonikus rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgásról akkor beszélünk, ha a testre nyugalmi helyzetétől mért x kitérésével egyenesen arányos, és azzal ellentétes irányú erő

hat, azaz ha az egyensúlyi hely az origó, akkor

$$F(x) = -D \cdot x. \quad (2.1)$$



2.3. ábra. Harmonikus rezgés erőtvénnye.

Ilyen erőtvénnyel jellemző a rugalmas alakváltozásokra, azaz ilyen lesz pl. egy rugóra akasztott testre ható erő a kitérés függvényében. Ez a mozgás már középiskolai tanulmányainkból ismerős lehet. Ott megtanultuk, hogy a hely-idő függvény szinuszosan változik, és megtanultuk, hogyan függenek ezek paraméterei a rendszer jellemzőitől (rugóállandó, tömeg, stb.). Most egy más úton, a mozgásegyenlet irányából közelítjük meg a problémát.

Newton második törvénye alapján a harmonikus rezgőmozgás alapegyenlete a következő módon írható fel:

$$ma = -Dx,$$

átrendezve:

$$a = -\frac{D}{m} x. \quad (2.2)$$

Korábban elmondtuk, hogy a gyorsulás a hely idő szerinti második deriváltja. Így a harmonikus rezgőmozgás alapegyenlete a következő alakba írható:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m} x,$$

vagy a vesszős jelöléssel:

$$x'' = -\frac{D}{m} x. \quad (2.3)$$

Ez az $x(t)$ függvényre egy úgynevezett „másodrendű lineáris differenciálegyenlet”. Ilyen egyenletek megoldásával a matematika differenciálegyenleteket tárgyaló része foglalkozik. Ezen matematikai ismeretek

birtokában meg lehetne kapni $x(t)$ -t fizikai meggondolások nélkül is. De a speciális matematikai ismeretek nélkül is kitalálhatjuk, melyik függvény az, melynek második deriváltja önmagának negatív konstansszorosa.

Az alapderiváltak közül könnyű megtalálni, hogy a $\sin$ és $\cos$ függvények rendelkeznek ilyen jellegű tulajdonsággal, mivel pl. $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$. Vizsgáljuk meg, lehetséges-e, hogy a $\sin$ függvény egy lineáris transzformáltja kielégíti a (2.3) egyenletet.

Tegyük fel tehát, hogy $x(t) = a \sin(b \cdot t + c)$ ahol a , b és c egyelőre ismeretlen jelentésű állandók. (Ez egyben a $\cos$ -os megoldásokat is tartalmazza, mivel $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$.) Könnyű kiszámolni $x(t)$ deriváltjait:

$$x'(t) = a \cos(b \cdot t + c) \cdot b,$$

$$x''(t) = -a \sin(b \cdot t + c) \cdot b^2.$$

Ezt behelyettesítve a (2.3) egyenletbe:

$$-a \sin(b \cdot t + c) b^2 = -\frac{D}{m} a \sin(b \cdot t + c),$$

ami csak akkor állhat fenn, ha $b^2 = D/m$, de a -ra és c -re nincs feltétel, azok bármelyike esetén megvalósulhat a rezgés. Hogy egy konkrét esetben milyen értékűek lesznek ezek az állandók, azt az dönti el, hogyan indítottuk el a rezgést, azaz a probléma kezdőfeltételei alapján határozhatók meg.

A szokásos elnevezések és jelölések: a -t a rezgés **amplitúdójának** nevezzük és A -val jelöljük; b neve: **körfrekvencia**, jele: ω ; c pedig a rezgés **kezdőfázisa**, szokásos jele φ_0 .

Így tehát a harmonikus rezgőmozgás hely-idő függvénye a szokásos jelölésekkel: $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Az áttekinthetőség kedvéért álljon itt összegyűjtve $x(t)$ és annak deriváltjai, azaz a sebesség-idő, és gyorsulás-idő függvények:

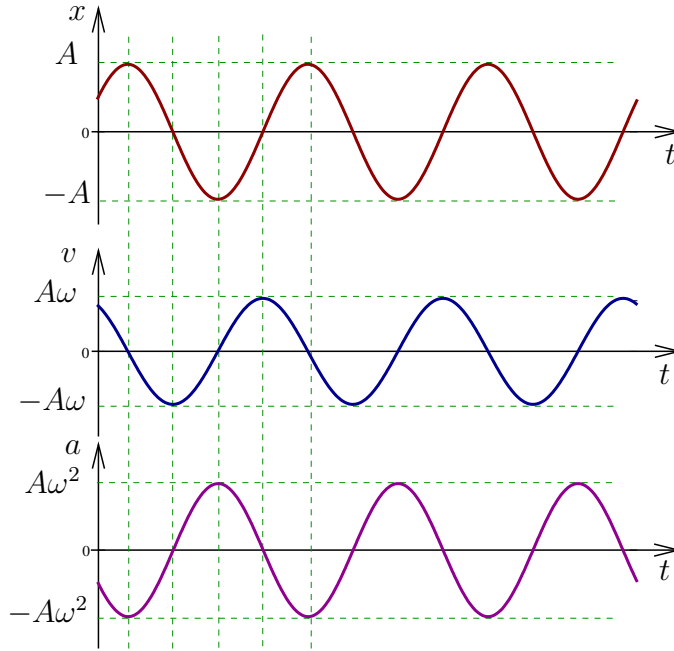
$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.4)$$

$$v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.5)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.6)$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (2.7)$$



2.4. ábra. Harmonikus rezgőmozgás hely-, sebesség- és gyorsulás-idő függvénye

Érdemes grafikonon is megjeleníteni az $x(t)$, $v(t)$ és $a(t)$ függvényeket. Ezt tettük meg a 2.4. ábrán. Jól megfigyelhető, hogy a mozgás ezen jellemzői mind azonos periódusidővel szinuszosan változnak, de a rezgések közt fáziseltérés van (pl. a sebességmaximumok egybeesnek a kitérés nullátmeneteivel) és az amplitúdók is eltérnek: a hely-idő függvény $-A$ és $+A$ között, a sebesség-idő függvény $-A\omega$ és $+A\omega$ között, a gyorsulás-idő függvény pedig $-A\omega^2$ és $+A\omega^2$ között változik.

Ez a mozgás tehát periodikus. Mivel a sin-függvény periódusa 2π , ezért a harmonikus rezgőmozgás T **periódusideje** az alapján határozható meg, hogy a sin argumentumában levő kifejezés 2π -t változzék:

$$\omega t + \varphi_0 + 2\pi = \omega(t + T) + \varphi_0,$$

ahonnan:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}. \quad (2.8)$$

Fontos még megemlíteni, hogy a periódusidő reciprokát szokás a rezgés

frekvenciájának nevezni és f -fel vagy ν -vel jelölni:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Vigyázni kell tehát a „frekvencia” és „körfrekvencia” kifejezések pontos használatára. A frekvencia fogalma szemléletesebb, ezért szövegben sokszor azt adják meg, a körfrekvencia viszont a számítások során ad módot rövidebb képletek írására.

2.1. példa: Egy rugón lógó testet rezgésbe hozunk. Azt tapasztaljuk, hogy 10 s alatt 23 rezgést végzett. Mekkora a rezgés periódusideje és körfrekvenciája? Mekkora a rugóállandó, ha a test tömege 0,25 kg?

Megoldás: Az, hogy a test 10 s alatt 23 rezgést végez, azt jelenti, hogy egy rezgés ideje:

$$T = \frac{10 \text{ s}}{23} = 0,435 \text{ s}.$$

(2.8) szerint a körfrekvencia:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 14,45 \frac{1}{\text{s}}.$$

Ugyaninnen a kért rugóállandó is meghatározható, hisz

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}},$$

ahonnan

$$D = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 52,2 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

2.2. példa: Egy test harmonikus rezgéseket végez 5,6 Hz frekvenciával. Megál-
lítjuk, majd egy 0,5 kg-os testet ragasztunk rá és újra rezgésbe hozzuk. Rezgési
frekvenciáját ekkor 4,5 Hz-nek mérjük. Mekkora a test tömege és a rugóállandó?

Megoldás: Legyen a test tömege m_0 , a ráragasztott test tömegét jelöljük Δm -mel,
a rugóállandót pedig D -vel.

Felhasználva, hogy a frekvencia a periódusidő reciproka, $f = 1/T$, (2.8) szerint
általános esetben:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Ezt a feladatbeli két esetre alkalmazva:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m_0}}, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m_0 + \Delta m}}.$$

Egyszerű átrendezéssel:

$$\begin{aligned} 4\pi^2 f_1^2 m_0 &= D, \\ 4\pi^2 f_2^2 (m_0 + \Delta m) &= D. \end{aligned} \tag{2.9}$$

A jobb oldalak egyenlőek, tehát a bal oldalak is meg kell egyezzenek:

$$4\pi^2 f_1^2 m_0 = 4\pi^2 f_2^2 (m_0 + \Delta m),$$

ahonnan az ismeretlen tömeg megkapható:

$$m_0 = \Delta m \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} = 0,91 \text{ kg}.$$

Ezt felhasználva a rugóállandó a (2.9) egyenletből közvetlen megkapható:

$$D = 4\pi^2 f_1^2 m_0 = 1130 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

2.3. példa: Egy 300 N/m-es rugóállandójú rugón levő, 0,2 kg tömegű testet 5 m/s-os kezdősebességgel meglökünk. Milyen lesz a kialakuló rezgés amplitúdója?

Megoldás: Az 5 m/s-os sebesség a test egyensúlyi helyzetén való áthaladáskor a sebessége, azaz a fentebb tanultak szerint a maximális, $A\omega$ nagyságú sebesség.

ω viszont egyszerűen meghatározható a tömegből és a rugóállandóból: $\omega = \sqrt{D/m}$, így azt állíthatjuk, hogy

$$v_0 = A\sqrt{\frac{D}{m}},$$

ahonnan a keresett amplitúdó:

$$A = v_0 \sqrt{\frac{m}{D}} = 0,129 \text{ m}.$$

Tehát a test 12,9 cm-es amplitúdójú rezgéseket fog végezni.

Energiaviszonyok a harmonikus rezgés során. Érdemes megnézni, hogyan alakulnak az energiaviszonyok egy harmonikus rezgés során.

A mozgási energia az idő függvényében:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m \cdot (A\omega)^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Felhasználva $\omega = \sqrt{D/m}$ -et ez némiképp egyszerűsíthető:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}DA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

A helyzeti (potenciális) energia (1.23) szerint:

$$V(t) = \frac{1}{2}Dx^2(t) = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Ezt összevetve a mozgási energia előbbi kifejezésével könnyű belátni, hogy összegük állandó, ami a harmonikus erő potenciális voltának következménye:

$$\begin{aligned} E(t) = E_m(t) + V(t) &= \frac{1}{2}DA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2}DA^2 (\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)) = \frac{1}{2}DA^2. \end{aligned}$$

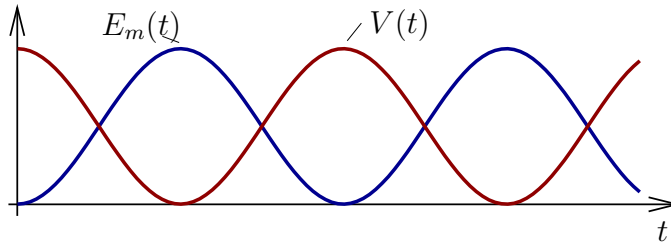
A harmonikus rezgés során tehát az összenergia állandó:

$$E = \frac{1}{2}DA^2. \quad (2.10)$$

Felhasználva $\omega = \sqrt{D/m}$ -et és a maximális sebesség $v_m = A\omega$ kifejezését ez egyszerű átalakítással az alábbi alakra hozható:

$$E = \frac{1}{2}mv_m^2$$

A harmonikus rezgést végző test mozgási és helyzeti energiája tehát az előbbi E érték és 0 között változik: amikor az egyik maximális, a másik 0 értéket vesz fel. Ezt mutatja a 2.5. ábra.



2.5. ábra. Harmonikus rezgőmozgás mozgási és helyzeti energiájának időbeli változása

2.4. példa: Oldjuk meg a 2.3. példát a rezgés energiájáról tanultak felhasználásával!

Megoldás: Az indulás az egyensúlyi helyzetben történik, amikor a helyzeti energia 0, így az itteni mozgási energia egyben a test össz energiája is. Erről (2.10) alapján tudjuk, hogy egyszerű kapcsolatban van az amplitúdóval. Azaz:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}DA^2,$$

ahonnan a keresett amplitúdó:

$$A = v_0 \sqrt{\frac{m}{D}} = 0,129 \text{ m},$$

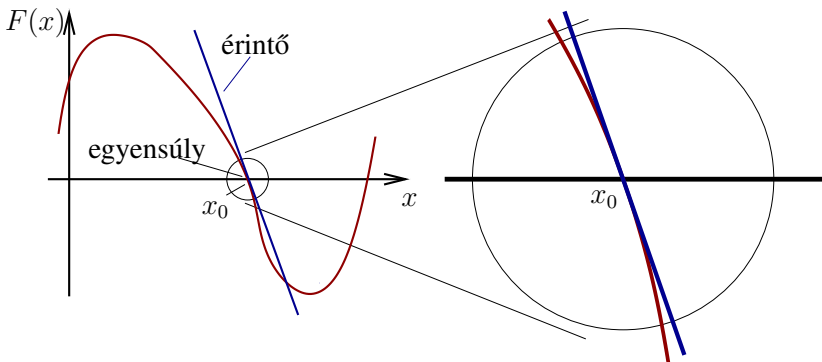
ami természetesen ugyanaz, mint a másik megoldási módszernél kapott érték.

2.1.2. Kis rezgések periódusideje

A gyakorlatban a testekre sokszor nem olyan erő hat, mely a helytől lineárisan függ, mint a harmonikus rezgés esetén. Ilyenkor azt, hogy egyáltalán kialakul-e rezgés, eldönthetjük $F(x)$ egyszerű tulajdonságainak vizsgálatával, ahogy azt a 2.1. fejezetben tárgyaltuk. Általános esetben megmondani a rezgés frekvenciáját vagy periódusidejét viszont már sokkal bonyolultabb, mivel ekkor nem könnyű a mozgásegyenletet megoldani.

Szerencsére a gyakorlati esetek többségében $F(x)$ nem változik túl „vadul” az egyensúlyi helyzetek közelében, és ekkor az x_0 pontban $F(x)$ grafikonjához húzott érintő alig tér el $F(x)$ grafikonjától. (Lásd 2.6. ábra.)

Természetesen el lehet képzelni olyan esetet, amikor az érintővel való közelítés nem jogos vagy kivitelezhetetlen. Pl. ha $F(x)$ -nek x_0 -ban 0 a deriváltja, és inflexiós pontja van, vagy $F(x)$ épp x_0 -ban nem deriválható, mert „törik”. A gyakorlatban azonban ilyen esetekkel csak igen kivételesen szerencsétlen esetekben találkozunk. Ezekben a ritka esetekben természetesen nem igazak a következő megfontolások.



2.6. ábra. Erőfüggvény közelítése stabil egyensúlyi helyzet körül.

Ez azt jelenti, hogy kis kitérésekre az erőfüggvény jó közelítéssel lineáris. Ezen lineáris függvény meredeksége dF/dx , azaz az erőfüggvény hely szerinti deriváltja, így x_0 egy kis környezetében teljesül, hogy

$$F(x) \approx \frac{dF}{dx}(x - x_0).$$

A test mozgásegyenlete tehát:

$$\frac{dF}{dx}(x - x_0) = mx''.$$

Vezessük be a $X = x - x_0$ jelölést, amely az egyensúlyi helyzettől való eltérést méri. Mivel $X' = x'$ és $X'' = x''$, ezért az előbbi egyenlet átírható:

$$\frac{dF}{dx}X = mX'',$$

azaz

$$X'' = - \left(- \frac{1}{m} \frac{dF}{dx} \right) X.$$

Az egyensúlyi helyzettől való eltérésre tehát ugyanolyan szerkezetű egyenlet vonatkozik, mint a harmonikus rezgőmozgás alapegyenlete, azaz (2.3), csak itt D/m helyett $-(1/m) dF/dx$ áll.

Tehát az egyensúlyi helyzet környékén történő kis rezgések esetén jó közelítéssel harmonikus rezgés alakul ki

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{m} \cdot \frac{dF}{dx}} \quad (2.11)$$

körfrekvenciával.

Nem kell megijedni attól, hogy az előző formulában a gyökjel alatt egy negatív előjelet látunk. A formulát ugyanis csak stabil egyensúly esetén van értelme alkalmazni, de ekkor a fentiek szerint $F(x)$ monoton fogyó, azaz $dF/dx < 0$, így a gyökjel alatt pozitív szám áll. Ha instabil egyensúlyra akarnánk alkalmazni a formulát, a gyökjel alatt negatív mennyiség állna, ami megmutatná, hogy nem jó esetre alkalmaztuk az összefüggést, mert rezgés sem alakul ki.

A gyakorlatban sokszor nem az erőfüggvényt, hanem a potenciálfüggvényt ismerjük, azaz $V(x)$ -et tudjuk. Ez nem jelent nagy különbséget, mert ekkor (1.20) alapján az erőfüggvény megkapható:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}.$$

Így potenciállal megfogalmazva az eddig erővel leírt dolgokat, a következőket állíthatjuk:

Adott $V(x)$ potenciálfüggvénnyel jellemezhető megoldás esetén a testnek ott van egyensúlyi helyzete, ahol

$$\frac{dV}{dx} = 0.$$

Ez az egyensúlyi helyzet stabil, ha $-dV/dx$ monoton fogyó, azaz ha

$$\frac{d^2V}{dx^2} > 0,$$

és az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2V}{dx^2}}.$$

2.5. példa: Egy 4 kg-os test egyenes mentén mozoghat, és SI-egységekben az alábbi erő hat rá:

$$F(x) = 10 - 2/x^2.$$

- Hol van(nak) a test egyensúlyi helyzete(i)?
- Melyik(ek) körül alakulhat ki rezgés?
- Mennyi a kis rezgések periódusideje?

Megoldás: A test egyensúlyi helyzeteiben $F(x) = 0$, azaz

$$10 - \frac{2}{x^2} = 0. \quad (2.12)$$

Ennek megoldásai:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \approx -0,447 \text{ m}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447 \text{ m}.$$

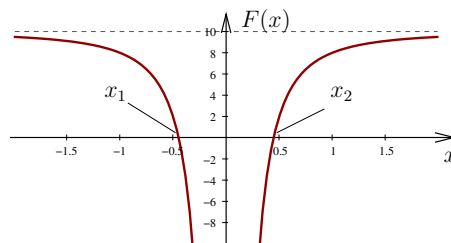
Rezgés olyan egyensúlyi helyzetek körül alakulhat ki, ahol $F(x)$ monoton fogyó. Ezt a grafikon felrajzolásával vagy deriválással lehet eldönteni. Vizsgáljuk meg a deriváltakat! (Úgyis szükség lesz a derivált egyensúlyi helyzetbeli értékére a periódusidő meghatározásához.)

$$F'(x) = \left(10 - \frac{2}{x^2}\right)' = 0 + \frac{4}{x^3}.$$

Ezt kiértékelve a két egyensúlyi helyzetenél:

$$F'(x_1) = -4\sqrt{125} \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad F'(x_2) = 4\sqrt{125} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Csak x_1 körül fogyó $F(x)$, tehát x_1 körül alakulhat ki rezgés. A szemléletesség kedvéért rajzoljuk fel $F(x)$ grafikonját, hogy jobban érzékelhető legyen a két gyökhely eltérő jellege. (2.7. ábra.)



2.7. ábra. $F(x) = 10 - 2/x^2$ grafikonja.

A kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{m} F'(x_1)} = \sqrt{-\frac{1}{4} (-4\sqrt{125})} = \sqrt[4]{125} \approx 3,34 \text{ Hz.}$$

Ebből a kért periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,88 \text{ s.}$$

2.6. példa: Egyik végén zárt üvegcső fekszik vízszintesen az asztalon. A csőben levő $l = 20 \text{ cm}$ hosszúságú levegőt egy $h = 5 \text{ cm}$ méretű higanyszál zárja be. Mekkora periódusidejű rezgéseket végez a higanyszál egyensúlyi helyzete körül, ha a csövet egy kicsit meglökjük? (A sűrűdást hanyagoljuk el, és tegyük fel, hogy a bezárt levegő hőmérséklete állandó.)

Megoldás: Legyen a cső keresztmetszete A , a külső levegő nyomása p_0 , a belső pedig p . Jelöljük továbbá x -szel a rezgés során a bezárt levegő pillanatnyi hosszát. (Ez fogja megadni a higany helyzetét.) Ekkor a higanyra ható erő nyilván $F(x) = pA - p_0A$ lesz.

Viszont a Boyle–Marioette-törvény¹⁵ szerint $p_0 \cdot lA = p \cdot xA$. E két utóbbi egyenlet alapján látható, hogy

$$F(x) = Ap_0 \left(\frac{l}{x} - 1 \right).$$

Az egyensúlyi helyzet nyilván akkor áll fenn, ha $F(x_0) = 0$, azaz $l/x_0 - 1 = 0$, tehát $x_0 = l$. Ebben a pontban az erőfüggvény deriváltja:

$$F'(x_0) = -\frac{Ap_0 l}{x_0^2} = -\frac{Ap_0}{l},$$

ami nyilván negatív, tehát stabil egyensúlyról van szó.

A higany tömege $m = \varrho \cdot Ah$, ahol ϱ a higany sűrűsége, ezért a kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{m} F'(x_0)} = \sqrt{\frac{Ap_0}{l\varrho \cdot Ah}} = \sqrt{\frac{p_0}{l\varrho h}}.$$

A számszerű értéket egyszerű behelyettesítéssel megkaphatjuk, ha beírjuk a normál légköri nyomás ($p_0 = 10^5 \text{ Pa}$) és a higany sűrűségének ($\varrho = 13\,600 \text{ kg/m}^3$) értékét:

$$\omega = 27,1 \frac{1}{\text{s}}.$$

¹⁵A Boyle–Marioette törvény azt mondja ki, hogy állandó hőmérsékletű gáz esetén a $p \cdot V$ szorzat állandó. Ez a törvény a középiskolás törzsanyagban szerepel, de a jegyzet későbbi részeiben is találkozni fogunk vele.

Tehát a periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,23\text{s}.$$

A valóságban ettől egy kicsit eltérő értéket mérhetünk. A bezárt gáz ugyanis a periodikusan csökkenő illetve növekvő nyomás miatt kissé változtatja hőmérsékletét, így nem lesz igaz pontosan a Boyle–Marioette-törvény. Az eltérés pl. attól is függ, milyen gyorsan tud a hő áramlani a gáz és a cső fala közt.

2.1.3. A csillapított rezgőmozgás

A tapasztalat szerint az egyszer elindított (és magára hagyott) rezgő rendszerek rezgési amplitúdója fokozatosan csökken, majd egy idő múltán a rezgés gyakorlatilag megáll. Ez azért van így, mert mindig fellép valamilyen fékező erő, pl. rugón rezgő test esetében a közegellenállás. Ennek a hatását szeretnénk most megvizsgálni.

A mechanika alapjairól szóló fejezetben elmondottak szerint kis sebességű mozgások esetén a közegellenállási erő egyenesen arányos a sebességgel (és azzal ellentétes irányú). Azaz egyenes mentén mozgó testre a közegellenállási erő

$$F_{\text{közeg}} = -C \cdot v$$

alakban írható fel, ahol C a test méretétől és a közeg adataitól (pl. sűrűségétől) függő állandó. (Lásd (1.24).)

Ekkor Newton II. törvénye szerint:

$$F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} = m \cdot a,$$

azaz

$$-D \cdot x - C \cdot v = m \cdot a.$$

Leosztva mindkét oldalt m -mel felismerhetjük a D/m hányadost, ami a csillapítás nélkül kialakuló harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciájának négyzete: jelöljük ω_0^2 -tel.¹⁶ Vezessük be továbbá a $\beta = C/(2m)$ jelölést. Így megkapjuk a csillapított rezgőmozgás alapegyenletét:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v$$

ω_0 szokásos elnevezése: **csillapítatlan körfrekvencia** vagy **sajátfrekvencia**, míg az előbbi β paramétert **csillapítási tényezőnek** szokás nevezni.

¹⁶Látni fogjuk, hogy a csillapított rezgés körfrekvenciája kisebb lesz a csillapítatlanénál, ezért vezettük be a 0 indexet a csillapítatlan körfrekvenciára.

Egységnyi sebességgel mozgó test gyorsulásának nagysága 2β lesz, de ennél is szemléletesebb jelentése lesz β -nak a mozgás hely-idő függvényében.

Felhasználva, hogy a sebesség a hely idő szerinti első- a gyorsulás pedig a második deriváltja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt},$$

illetve a vesszős jelöléssel:

$$x'' = -\omega_0^2 x - 2\beta x'. \quad (2.13)$$

A harmonikus rezgésről szóló fejezethez hasonlóan itt is elmondhatjuk, hogy megfelelő matematikai ismeretek birtokában ez az egyenlet fizikai megfontolások nélkül megoldható. Ezen ismeretek hiányában csak találgatni tudjuk a megoldás jellegét. Az egyenletben ugyanis egy függvény és annak első és második deriváltja is felbukkan. Egyszerű szinuszos (vagy koszinuszos) függés tehát nyilván nem fogja kielégíteni ezt, hanem feltehetően szinuszos és exponenciális tagok is szerepet fognak benne játszani. (Ugyanis $(e^{bx})' = be^{bx}$, tehát az exponenciális jellegű függvények deriválásakor önmaguk konstansszorosa bukkan fel.)

Ennél többet a differenciálegyenletekről szóló speciális tudás nélkül nem tudunk mondani, csak a megoldást adjuk meg és elemezzük a következőkben.

A megoldás jellege más lesz az $\omega_0 > \beta$ illetve $\omega_0 < \beta$ esetekben, azaz kis illetve nagy csillapítások esetén. (β ugyanis a csillapítás erősségét jellemzi, ahogy fentebb említettük.)

Kis csillapítások esete. A gyakorlatban legtöbbször a kis csillapítások esetével találkozunk, azaz amikor $\beta < \omega_0$.

Ekkor a megoldás:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0),$$

ahol

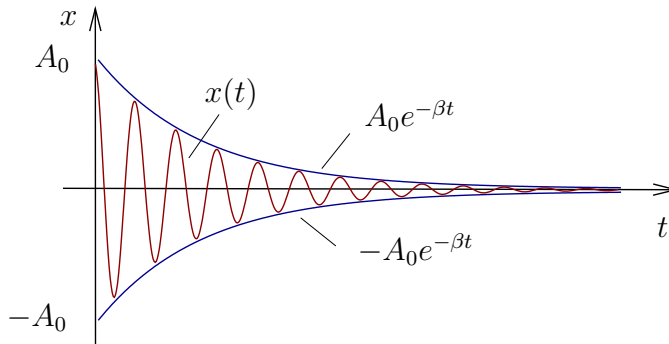
$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (2.14)$$

Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy egy A_0 amplitúdóról induló harmonikus rezgés amplitúdója exponenciális függvény szerint csökken:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (2.15)$$

a rezgés körfrekvenciája pedig a csillapítatlanénál kisebb ω_{cs} érték. Ezt szemléltettük a 2.8. ábrán.

A megoldás helyességéről a (2.13) egyenletbe történő behelyettesítéssel győződhetünk meg.



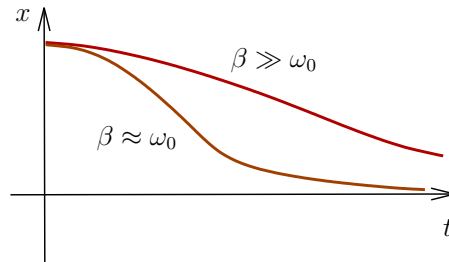
2.8. ábra. Csillapodó rezgőmozgás hely-idő függvénye

Megfigyelhetjük β szerepét a megoldásban: nagyobb csillapítási tényező gyorsabban csillapodó amplitúdót és kisebb frekvenciát eredményez.

Az A_0 kezdeti amplitúdó és φ_0 kezdőfázis a mozgás elindításának paramétereitől (azaz attól, honnan és milyen sebességgel indítottuk a testet) függ. A megfelelő formulák eléggé bonyolultak, és nem használnánk őket a későbbiekben, ezért itt nem szerepelnek.

Erős csillapítások esete. Nagy csillapítás esetén nem is rezgőmozgás alakul ki, hanem akkor, ha a testet kezdősebesség nélkül indítottuk el az egyensúlyi helyzet közeléből, az $x(t)$ függvény monoton csökkenően 0-hoz tart, ahogy azt a 2.9. ábra mutatja. Amennyiben nagy, az egyensúlyi helyzet felé irányuló kezdősebességet adtunk a testnek, egyszer ugyan átlépi azt, visszafordul, de utána már csak aszimptotikusan tart hozzá, azaz igaz rezgőmozgás ekkor sem alakul ki.

Érdemes megjegyezni a következőt: Nagyon kis β értékre a rezgés amplitúdója lassan csillapodik. Nagyon nagy β esetén viszont a test csak lassan tér vissza az origóba az erős fékezés miatt. Kimutatható, hogy ha a kezdeti kitérést minél gyorsabban csökkenteni akarjuk (azaz pl. annak az idejét szeretnénk csökkenteni, ami után a test mondjuk a kezdeti kitérés századrésznél kisebb távolságra lesz az origótól), a $\beta \approx \omega$ eset a legjobb.



2.9. ábra. Csillapított rezgőmozgás erős csillapítás esetén.

Tehát egy lengéscsillapító tervezésénél sem a túl erős csillapítás, sem a túl gyenge nem jó, hanem valahol középtájt van az optimális megoldás.

Meg kell jegyeznünk azonban, hogy a csillapító erő sok esetben jelentősen eltér a lineáristól. Ennek megfelelően az itt leírtakhoz viszonyítva megváltozik a megoldások konkrét alakja. Ennek ellenére a lineáris fékezőerő feltételezésével kapott megoldás jellege azonos az általános csillapódó rezgések jellegével. Azaz pl. a nemlineáris esetben is igaz, hogy a frekvencia a csillapítás növelésével csökken, vagy az, hogy elegendően nagy csillapítás esetén nem is alakul ki rezgés csak „lecsengés”, valamint az is, hogy közepes erősségű csillapítással lehet a leghatékonyabban megállítani a rezgő test mozgását.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

A gyakorlatban minden rezgés esetén találkozunk valamilyen csillapítással. Még légüres térben rezgő test rezgési amplitúdója is csökken a rezgést biztosító rugalmas felfüggesztésen belül fellépő belső súrlódás miatt. Az ilyen esetekben is jól alkalmazható az eddig elmondott elmélet kis sebességek esetére.

Amennyiben súrlódás csillapítja a rezgést, mert pl. a test egy másik szilárd testen csúszik, a fékező erő nem fog függeni a test sebességétől, csak a mozgás irányától. és ez gyökeresen más hely-idő függvényt fog jelenteni. Megmutatható, hogy ekkor a rezgés amplitúdója az időben közel lineárisan csökken és véges idő alatt a rezgés teljesen megáll, nemcsak aszimptotikusan válik 0-vá az amplitúdó.

2.7. példa: Egy csillapodó rezgés amplitúdója 15 s alatt megfeleződik. Mekkora a csillapítási tényező értéke?

Megoldás: Használjuk fel a csillapodó rezgőmozgás amplitúdójának időfüggését megadó (2.15) egyenletet. Ezt a feladatbeli $t = 15$ s-ra alkalmazva:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\beta t}.$$

(A kezdeti A_0 amplitúdót ugyan nem ismerjük, de nem is szükséges, mert kiesik az egyenletrendezés során.)

Egyszerű átrendezéssel:

$$\beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,0462 \frac{1}{s}.$$

2.8. példa: Egy csillapodó rezgőmozgás körfrekvenciája 99 Hz, a csillapítatlané (légüres térben mérve) 100 Hz. Mekkora a csillapítási tényező levegőben?

Megoldás: (2.14) szerint:

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Ebből egyszerű átrendezéssel:

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{cs}^2} = 14,1 \text{ Hz}.$$

2.9. példa: Egy csillapított rezgőmozgás amplitúdója kezdetben 17 cm. 20 s múlva már csak 4 cm. Mekkora a csillapítási tényező? A kezdettől számítva mennyi idő múlva lesz az amplitúdó 5 mm?

Megoldás: Tudjuk, hogy az amplitúdó időfüggése:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t},$$

ahol $A_0 = 17$ cm, a kezdeti amplitúdó, β pedig az ismeretlen csillapítási tényező.

$t_1 = 20$ s-ra alkalmazva ezt:

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\beta t_1},$$

ahol $A_1 = 4$ cm.

Innét egyszerű átrendezésekkel:

$$\beta = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{A_1}{A_0} = 0,0723 \frac{1}{s}.$$

A második kérdésre a válasz az alábbi módon határozható meg: Legyen az ismeretlen időpont t_2 . Tudjuk, hogy t_2 -kor az amplitúdó $A_2 = 0,5$ cm. Azaz:

$$A_2 = A_0 \cdot e^{-\beta t_2}.$$

Innét:

$$t_2 = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{A_2}{A_0} = 48,8 \text{ s}.$$

Tehát 48,8 s múlva lesz az amplitúdó 0,5 cm.

2.10. példa: Egy 300 kg tömegű berendezés rugalmas alapzaton áll. Külső lökésre rezgésbe jött és a rezgető hatás megszűnte után figyeljük rezgéseit. Azt tapasztaljuk, hogy 4 s alatt 6 rezgést végez, és ez alatt rezgési amplitúdója 8 mm-ről 3 mm-re csökkent. Mekkora a csillapítási tényező és az alapot jellemző „rugóállandó”? Mikor lesz rezgési amplitúdója kisebb, mint 1 századmilliméter?

Megoldás: A csillapított rezgés frekvenciája a szöveg szerint $6/4=1,5$ Hz, ezért a csillapított körfrekvencia:

$$\omega_{cs} = 2\pi \cdot 1,5 \text{ Hz} = 9,425 \text{ Hz}.$$

A csillapítási tényező abból számolható ki, hogy $t_1 = 4$ s alatt az amplitúdó $A_0 = 8$ mm-ről $A_1 = 3$ mm-re csökkent, hisz a csillapított rezgés amplitúdócsökkenése:

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\beta t_1},$$

ahonnan a kért csillapítási tényező:

$$\beta = \frac{1}{t_1} \ln \frac{A_0}{A_1} = 0,245 \frac{1}{\text{s}}.$$

Most már kiszámolható a csillapítatlan körfrekvencia:

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_{cs}^2 + \beta^2} = 9,428 \text{ Hz}.$$

Így már a D rugóállandó is megkapható, hisz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow D = \omega_0^2 m = 26\,667 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Legyen $A_2 = 0,01$ mm. Ekkor keressük azt a t_2 időpontot, melyre:

$$A_2 = A_0 \cdot e^{-\beta t_2}.$$

Egyszerű átrendezéssel:

$$t_2 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{A_0}{A_2} = 27,3 \text{ s}.$$

Tehát a kezdettől mintegy fél perc múlva a rezgések már századmilliméternél kisebbek lesznek.

Ez a példa jól mutatja, hogy a gyakorlatban igen sokszor a csillapított és csillapítatlan frekvenciák alig térnek el egymástól, és azt is, hogy bár elvileg sosem csökken 0-ra az amplitúdó, az exponenciális csökkenési ütem gyorsan elhanyagolhatóvá teszi azt.

2.1.4. A gerjesztett rezgőmozgás, kényszerrezgés

Eddig mindig olyan eseteket tárgyaltunk, amikor egy meglökött test magára hagyva rezgett. Sokszor előfordul azonban olyan eset is, amikor a testet egy külső erő állandóan „rezgeti”, azaz gerjeszti a rezgést. Ilyenkor beszélünk **gerjesztett rezgőmozgásról** vagy más szóval **kényszerrezgésről**.

A sokféle lehetséges gerjesztő erő közül a legegyszerűbb eset, amikor a gerjesztő erő szinuszosan változik, azaz a testre az előző fejezetbeli erőkön kívül még egy

$$F_{\text{gerj}} = F_0 \sin(\omega_g t)$$

erő is hat. Itt ω_g a gerjesztés körfrekvenciája.

Ekkor Newton II. törvénye szerint:

$$F_{\text{rugó}} + F_{\text{közeg}} + F_{\text{gerj}} = m \cdot a,$$

azaz

$$-D \cdot x - C \cdot v + F_0 \sin(\omega_g t) = m \cdot a.$$

Egyszerű átrendezéssel:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\beta v + a_0 \sin(\omega_g t),$$

ahol $a_0 = F_0/m$, illetve differenciálegyenlet alakra hozva:

$$x'' = -\omega_0^2 x - 2\beta x' + a_0 \sin(\omega_g t). \quad (2.16)$$

A csillapodó rezgésekhez hasonlóan ezt az egyenletet is csak magasabb matematikai ismeretek segítségével tudnánk megoldani, de megfigyelve szerkezetét hihetővé tehetjük a következőkben felírt megoldást.

Kis csillapítás ($\beta < \omega_0$) esetén a megoldás a következő alakú:

$$x(t) = A_g \cdot \sin(\omega_g t + \delta) + A_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \varphi_0), \quad (2.17)$$

ahol

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$A_g = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}, \quad \text{illetve} \quad \tan \delta = \frac{2\beta\omega_g}{\omega_0^2 - \omega_g^2}. \quad (2.18)$$

A_0 és φ_0 a rezgés elindításától függ, a kezdő helyből és sebességből kiszámolható, de csak speciális esetekben van szükség ezek számszerű értékének meghatározására, ahogy azt rövidesen meglátjuk.

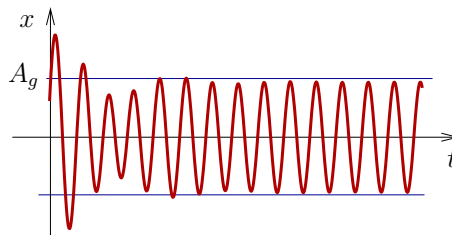
A fenti (2.17) megoldás első látásra bonyolult alakú, ezért vizsgáljuk meg részletesen. $x(t)$ tulajdonképpen egy kéttagú összegként áll elő, amiből az első egy harmonikus rezgés ω_g körfrekvenciával, a második pedig egy exponenciálisan csillapodó rezgés ω_{cs} körfrekvenciával, ami ugyanaz, mint a csillapodó rezgések esetében. (A megoldás helyessége a (2.16) egyenletbe való behelyettesítéssel ellenőrizhető.)

Ezen nem lepődünk meg, hisz a mozgást leíró differenciálegyenlet ugyanaz, mint a csillapodó rezgőmozgásé, csak egy időfüggő, ω_g frekvenciával változó szinuszos tagot adtunk hozzá. Az, hogy az egyenletben megjelenő új tag a megoldás jellegét nem alakítja át gyökeresen, hanem egy új tagot eredményez, a differenciálegyenlet lineáris voltából következik.

Nagy t értékekre, pontosabban $1/\beta$ -nál sokkal nagyobb t esetén, a csillapodó tag elhanyagolhatóvá válik, és a szinuszos tag fog dominálni, azaz a kezdeti, különböző frekvenciájú rezgések összegeként előálló „összevissza” rezgés után egy

$$x_g(t) = A_g \cdot \sin(\omega_g t + \delta)$$

összefüggéssel leírható szinuszos rezgést kapunk. (Lásd 2.10 ábra.)



2.10. ábra. Gerjesztett rezgőmozgás hely-idő függvénye.

A gyakorlati esetek többségében csak ez az $x_g(t)$ rezgés érdekel minket, ezért erre koncentrálnak.

A rezonancia. A kialakuló rezgés amplitúdója (2.18) szerint függ a gerjesztő körfrekvenciától. A formula számlálója konstans, nevezőjében pedig négyzetgyökkel alatt az

$$f(\omega_g) = (\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2$$

kifejezés áll. Akkor lesz tehát A_g maximális, ha ez az $f(\omega_g)$ függvény minimális értéket vesz fel. Határozzuk meg az ehhez tartozó ω_r frekvenciát!

Vegyük észre, hogy $f(\omega_g)$ kifejezésében csak ω_g^2 szerepel. Hogy elkerüljük a magas hatványokat, érdemes áttérni az $x = \omega_g^2$ változóra, azaz a

$$g(x) = (\omega_0^2 - x)^2 + 4\beta^2x$$

függvény minimumát keresni.

Látszik, hogy ez egy pozitív főegyütthatójú másodfokú függvény, azaz egyetlen minimuma van ott, ahol $g'(x) = 0$, azaz:

$$2(\omega_0^2 - x) \cdot (-1) + 4\beta^2 = 0,$$

ahonnan

$$x = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

Visszatérve az eredeti változóra megállapítható, hogy $f(\omega_g)$ minimuma, tehát az $A_g(\omega_g)$ függvény maximuma

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

körfrekvenciánál van.

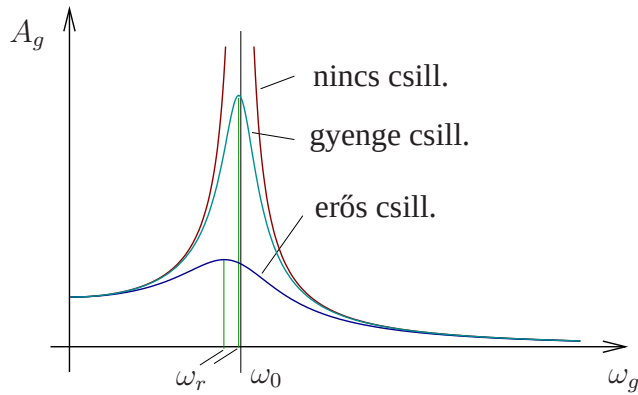
Ezt az ω_r mennyiséget **rezonancia-körfrekvenciának** nevezzük.

Mivel az esetek többségében $\beta \ll \omega_0$, ezért többnyire $\omega_r \approx \omega_0$, tehát a rezonancia körfrekvencia közel egyenlő a saját körfrekvenciával.

Ez alapján érthető, miért olyan $A_g(\omega_g)$ grafikonja, ahogy azt a 2.11. ábra mutatja.

Az, hogy $A_g(\omega_g)$ jelentős maximummal rendelkezik, egy érdekes és fontos jelenség, a **rezonancia**. Ennek megfelelően $A_g(\omega_g)$ grafikonját **rezonanciagörbének** nevezzük.

Fizikailag a rezonancia jelensége azt jelenti, hogy a gerjesztett rezgőmozgás amplitúdója a rendszer saját körfrekvenciája környékén nagymértékben megnövekszik.



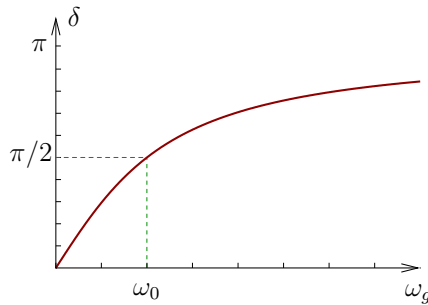
2.11. ábra. Rezonanciagörbék különböző csillapítások esetén.

Ennek oka érthető, ha belegondolunk a gerjesztett rezgőmozgás folyamatába. Képzeliük el pl. hogy egy rugón rezgő testet egy külső erő (a gerjesztő erő) váltakozva pozitív-negatív irányba gyorsít. Ha a gerjesztő erő csak igen lassan változik az időben, akkor annak egy periódusa alatt a test sok rezgést megtesz a rugón rezegve, így a külső erő hol mozgásával egy irányban, hogy vele ellentétesen hat, azaz hol gyorsítja, hol lassítja. Hasonló a helyzet, ha a gerjesztő erő frekvenciája sokkal nagyobb, mint a sajátfrekvencia.

Ezzel szemben ha a saját körfrekvencia megegyezik a gerjesztőerő körfrekvenciájával, akkor a gerjesztő erő mindig egyirányú lehet a mozgással, azaz mindig növeli a rezgő test energiáját. Ha nem lenne közegellenállás, akkor a test energiája, így a rezgés amplitúdója elvileg tetszőlegesen megnőhet. A tetszőleges növekedést csak az állítja meg a valóságban, hogy a közegellenállás az egyre nagyobb sebességek esetén egyre jelentősebb lesz, míg a gerjesztés hatása nem növekszik, így előbb-utóbb a gerjesztő erőből egy periódus alatt nyert energia épp elemésződik a közegellenállás által.

Bár a kialakuló rezgés amplitúdója a legfontosabb, mégis érdemes a hosszú távon megmaradó rezgés és a gerjesztő erő közti δ fáziskülönbségről pár szót ejteni. (2.18) szerint ez is változik ω_g függvényében. Ezt a függést ábrázoltuk a 2.12. ábrán.

Ez a lassan változó görbe kis gerjesztő frekvencián közel 0 értéket vesz fel, azaz lassú külső gerjesztés esetén a létrejövő rezgés lényegében egy fázisban változik a gerjesztő erővel. Igen magas körfrekvencián viszont a



2.12. ábra. Gerjesztett rezgés és a gerjesztő erő fáziskülönbsége a gerjesztő körfrekvencia függvényében.

fáziseltérés π -hez, azaz egy fél rezgéshez tart, ami épp ellentétes rezgést jelent. A rendszer saját körfrekvenciáján pedig a fáziseltérés $\pi/2$, azaz egy negyed rezgés lesz. Ez megfelel annak, amit fentebb elmondottunk: a rezonancia esetében a gerjesztőerő azonos fázisban kell legyen a gerjesztett rezgőmozgás *sebességével*, viszont a harmonikus rezgőmozgás sebessége $\pi/2$ fáziseltérésben van a hely-idő függvényhez képest.

2.11. példa: Egy rezgés saját körfrekvenciája $\omega_0 = 12,41/\text{s}$. A rezgés amplitúdója 3,2 s alatt feleződik meg. Hányszor nagyobb amplitúdójú gerjesztett rezgések jönnek létre a saját körfrekvencián, mint igen kis körfrekvenciákon?

Megoldás: A feladat megoldásához a gerjesztett rezgések amplitúdóját megadó alábbi összefüggésből kell kiindulni: (lásd (2.18))

$$A_g(\omega_g) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega_g^2}}.$$

A saját körfrekvencián kialakuló rezgések amplitúdója ezért:

$$A_g(\omega_0) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2}} = \frac{a_0}{2\beta\omega_0}.$$

Az igen kis körfrekvenciákon kialakulóké pedig:

$$A_g(0) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0^2)^2 + 4\beta^2 0^2}} = \frac{a_0}{\omega_0^2}.$$

Ezek arányát kérdezi a feladat, azaz a következő mennyiséget:

$$\frac{A_g(\omega_0)}{A_g(0)} = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Innen egyedül a β csillapítási tényező értéke nem ismert. Ez viszont könnyen megkapható abból a tényből, hogy a rezgés amplitúdója $t = 3,2$ s alatt feleződik meg:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\beta t},$$

ahonnan

$$\beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,217 \frac{1}{s}.$$

A kért arány tehát:

$$\frac{A_g(\omega_0)}{A_g(0)} = \frac{\omega_0}{2\beta} = 28,6.$$

Tehát a saját körfrekvencián kialakuló rezgések amplitúdója 28,6-szor nagyobb a kis körfrekvenciák mellett kialakuló amplitúdónál.

A rezonancia körfrekvencián pedig még a saját körfrekvencia esetén is kissé nagyobb amplitúdó alakul ki. A korábban elmondottak szerint azonban az eltérés nem számottevő mértékű, ha $\beta \ll \omega_0$.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

A rezonancia jelensége rendkívül fontos a gyakorlati életben. Mint láttuk, kis csillapítások esetén a sajátfrekvencia környékén nagyon nagy rezgési amplitúdók jönnek létre. Ezen alapul pl. a hinta hajtása. Egy-egy külső lökés vagy a hintázó kisgyerek előre-hátra hajlásából származó erő önmagában csak kicsit lendít a hintán, de ha pont a hinta lengésével összhangban történik, az amplitúdó idővel igen megnőhet.

A rezonancia azonban lehet káros is. Ha pl. egy gépalkatrész vagy épületrész sajátfrekvenciája olyan, amilyen frekvenciájú rezgések fellépnek a működés közben, akkor az alkatrész nagyon erős rezgésbe jöhet, akár el is törhet. Állítólag megtörtént hogy katonák díszlépésben mentek át egy hídon, és a lépések frekvenciája megegyezett a híd saját rezgéseinek frekvenciájával. A híd annyira rezgésbe jött, hogy leszakadt. (Azóta tilos az ütemre menetelés a hidakon.)

Jól dokumentált, filmre vett eset a Tacoma Narrows híd leomlása 1940. november 7-én. A hidat oldalról erős, de önmagában nem veszélyes erejű egyenletes szél érte. Erre tervezői felkészítették, így nem is közvetlen a szél ereje okozta a leomlást, hanem az, hogy az adott szélesebesség mellett a hídnak ütköző szélben épp olyan frekvenciával keletkeztek örvények, mint a híd sajátfrekvenciája, így a híd csavarodó rezgésekbe kezdett, majd

anyagának elfáradása után összeomlott. (Szerencsére volt elég idő ahhoz, hogy mindenki lemeneküljön róla, így emberéletben nem esett kár.)

2.2. Rezgések összetétele

Sokszor megtörténik, hogy nem egyszerű rezgéssel kell foglalkoznunk, hanem több rezgés adódik össze valamilyen módon, és mi ezt tudjuk megfigyelni. Ezért külön figyelmet fordítunk erre a kérdésre. A következőkben tehát harmonikus (szinuszos) rezgések eredőit fogjuk vizsgálni, először olyankor, amikor a rezgések iránya egy egyenes mentén van, majd azt az esetet is megnézzük, amikor a rezgési irányok merőlegesek.

A harmonikus rezgések tanulmányozása azért játszik kiemelt szerepet, mert egyrészt ezek valóban gyakran fellépnek (lásd az egyensúlyi helyzet körüli rezgésekről szóló 2.1.2. fejezetet), másrészt kiderült, hogy minden periodikus rezgés előállítható szinuszos rezgések összegeként, így a harmonikus rezgések összegzésének valóban kiemelt szerepe van.

2.2.1. Egyirányú rezgések eredője

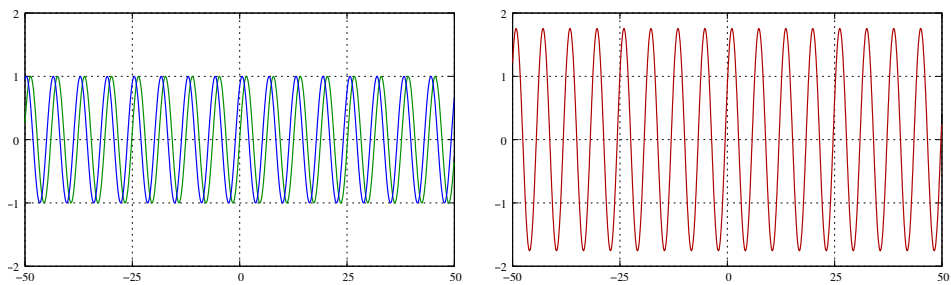
Ilyen eset pl. úgy valósítható meg mechanikailag, hogy egy nagyobb testet rezgetünk rugón, és ezen nagyobb testhez képest végez harmonikus rezgéseket egy kisebb. Ilyenkor a kis test mozgása nyilván a két rezgés eredője lesz. Más probléma, ami két egyirányú rezgés összegére vezethet, a hullámok interferenciájakor merül fel, amit majd a következő fejezetben tárgyalunk, és ott felhasználjuk az itt levezetett összefüggéseket.

Vegyünk tehát két harmonikus rezgést és adjuk össze a kitérés–idő függvényeket:

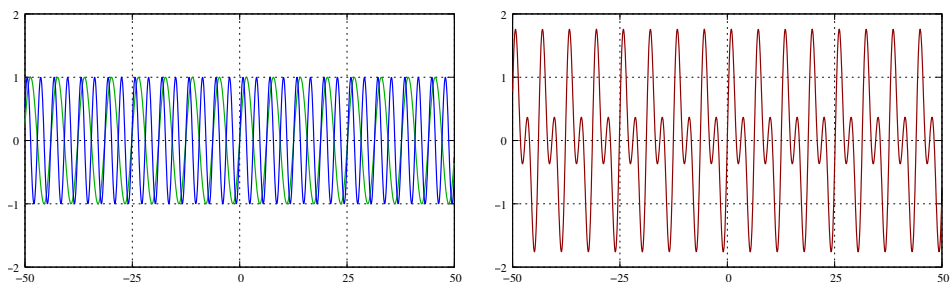
$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.19)$$

Általános $A_1, A_2, \omega_1, \dots$ paraméterek esetén semmi érdemleges nem mondható el erről a mozgásról. Például még az sem biztos, hogy az eredő rezgés periodikus lesz. Bebizonyítható ugyanis, hogy ha ω_1/ω_2 nem racionális, akkor a mozgás nem lesz periodikus. (Ha pedig racionális, akkor az lesz.)

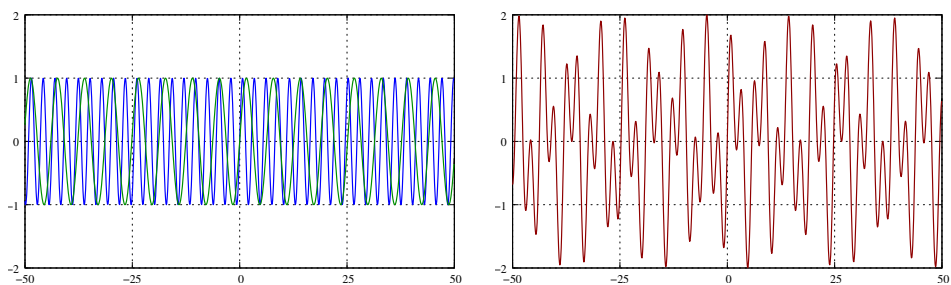
Ezt demonstrálják a 2.13–2.15. ábrák. Ezeken az ábrákon a vízszintes tengelyen az idő, a függőleges tengelyen pedig x értéke található $A_1 = A_2 = 1$ amplitúdó és különböző körfrekvenciák esetében.



2.13. ábra. Egyirányú rezgések (bal oldalt) és összegük (jobb oldalt), $\omega_1 = \omega_2$.



2.14. ábra. Egyirányú rezgések (bal oldalt) és összegük (jobb oldalt), $\omega_1 = 2\omega_2$.



2.15. ábra. Egyirányú rezgések (bal oldalt) és összegük (jobb oldalt), $\omega_1 = \sqrt{5}\omega_2$.

A 2.13. ábrán két azonos körfrekvenciájú szinuszos rezgés összegét látjuk. Érdekes, hogy ez szintén szinuszos lesz, bár van fáziskülönbség a két rezgés között. Ezt rövidesen be is fogjuk bizonyítani.

A 2.14. ábrán azt az esetet látjuk, amikor a rezgések frekvenciaaránya 1:2. Ekkor nem szinuszos az eredő, de jól láthatóan periodikus.

Itt és a továbbiakban „frekvenciaarányt” írunk „körfrekvencia-arány” helyett, hisz $\omega = 2\pi f$ miatt két rezgés körfrekvenciájának aránya egyenlő frekvenciájuk arányával. Ugyanígy az azonos frekvencia természetesen azonos körfrekvenciát jelent.

A 2.15. ábra pedig irracionális ($1:\sqrt{5}$) frekvenciaarány esetét mutatja be. Látszik, hogy az eredő rezgés nem ismétlődik meg.

Különösen fontos a gyakorlatban az azonos frekvenciájú rezgések összegének vizsgálata, ezért ezt végezzük el a következőkben.

Azonos frekvenciájú rezgések eredője.

Írjunk be $\omega = \omega_1 = \omega_2$ -t a (2.19) egyenletbe!:

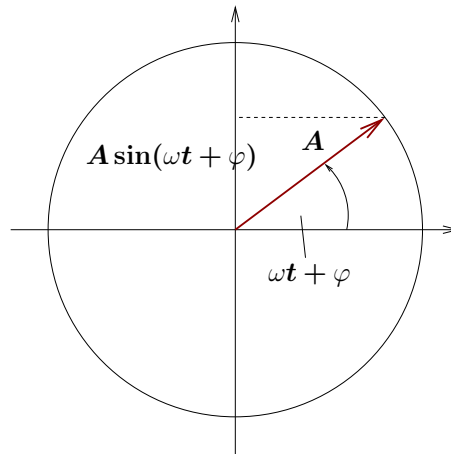
$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Sajnos, még ez az alak is meglehetősen összetett. A trigonometrikus függvényekre vonatkozó összefüggések felhasználásával ez átalakítható és bebizonyítható az, amit a fenti 2.13. ábra alapján sejtünk, tudniillik, hogy az összeg ekkor egy ω frekvenciájú szinuszos rezgés lesz. Mégsem ezt a matematikai jellegű utat követjük, hanem egy olyat, amely szemléletesebb: a rezgőmozgások **forgóvektoros ábrázolását**.

Tekintsünk egy síkbeli derékszögű koordinátarendszerbeli $\underline{v}$ vektort, aminek hossza A , irányszöge $\omega t + \varphi$. Ennek y tengelyre vett vetülete $A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ lesz, ami olyan alakú, mint egy harmonikus rezgés kitérés-idő függvénye. (Lásd 2.16. ábra.)

Az előbb elmondottak minden harmonikus rezgésre alkalmazhatók. Alkalmazzuk tehát az összeadandó 1-es és 2-es indexű rezgésekre. Vegyük észre azt is, hogy a forgó vektorok komponenseként is összeadhatók, ezért a függőleges tengelyre vett vetületek összege az összegvektor függőleges vetületével egyezik meg.

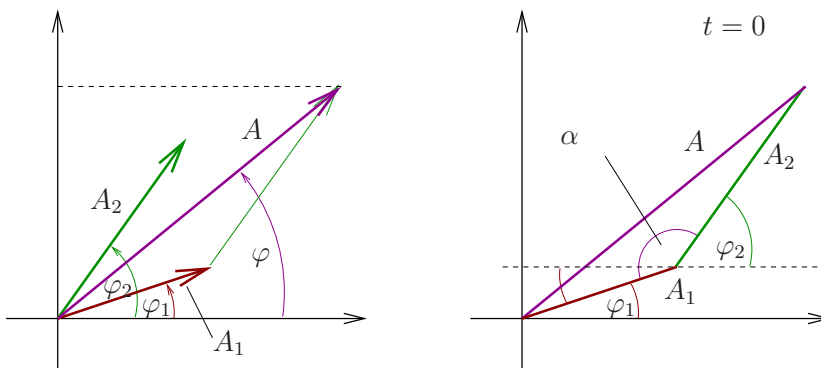
Így az eredő rezgés a $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektor y tengelyre vett vetülete lesz. Vegyük azonban észre, hogy $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorok azonos szögsebességgel, tehát együtt forognak, így $\underline{v}$ is ezzel a szögsebességgel fog forogni. Úgy



2.16. ábra. A forgóvektoros ábrázolás alapötlete.

képzeltetjük el, mintha $t = 0$ -kor egy celofánra rajzolnák le v_1 , v_2 és $v = v_1 + v_2$ vektorokat, majd az egész celofánt origó tengely körül ω szögsebességgel körbe forgatnánk.

Az összegvektor tehát hosszának megtartása mellett ω szögsebességgel körbeforog. Ezért ennek vetülete szintén egy tiszta szinuszos rezgés lesz. Ennek paraméterei a 2.17 vektorábra segítségével egyszerűen megkaphatóak.



2.17. ábra. Azonos szögsebességgel forgó vektorok összege vetületének számítása.

A kialakuló rezgés amplitúdója legyen A . ennek nagysága egyszerűen meghatározható, ha felrajzoljuk $t = 0$ -kor a forgóvektoros ábrát (2.17. ábra, jobb oldal) a vektori összeadás szabályainak megfelelően $\underline{v}_2$ -t $\underline{v}_1$ után rajzolva. Az így keletkező A_1 , A_2 és A oldalhosszúságú háromszögre alkalmazva a cosinus-tételt:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha.$$

Az ábráról azonban könnyű belátni, hogy $\alpha = \pi - \varphi_2 + \varphi_1$, így $\cos \alpha = \cos(\pi - \varphi_2 + \varphi_1) = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, így a cosinus-tétel fenti alakja így írható át a rezgés paramétereivel:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

tehát:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (2.20)$$

Ugyanerről az ábráról az eredő rezgés φ kezdőfázisa is egyszerűen leolvasható. Az eredő rezgés vektorának két koordinátája ugyanis a két eredeti rezgésvektor koordinátáinak összege lesz, azaz $v_x = v_{1,x} + v_{2,x} = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$, illetve $v_y = v_{1,y} + v_{2,y} = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2$.

Az eredő irányszögének tangense $t = 0$ -kor: $\tan \varphi = v_y/v_x$, azaz:

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (2.21)$$

Tehát azonos frekvenciájú egyirányú harmonikus rezgések eredője ugyanolyan frekvenciájú tisztán szinuszos rezgés lesz, melynek paramétereit a (2.20) és (2.21) egyenletek határozzák meg.

Különösen fontos az eredő rezgés amplitúdójának vizsgálata, azaz annak elemzése, hogy adott A_1 és A_2 mellett mi A maximuma ill. minimuma. Vegyük szemügyre A (2.20)-beli kifejezését. Könnyű felismerni, hogy A folytonosan és monoton növekvő módon függ $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ -től.

A tehát akkor maximális, ha $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ maximális, azaz ha $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$, ami $\varphi_1 - \varphi_2 = 0 + k \cdot 2\pi = 0 + k \cdot 360^\circ$ esetben valósul meg. (k tetszőleges egész szám.) Ekkor A értéke:

$$A_{\max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot 1} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2.$$

(Felhasználtuk, hogy az amplitúdók nemnegatív értékek lehetnek.)

Hasonlóképp: A akkor minimális, ha $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ minimális, azaz ha $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$, ami $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi + k \cdot 2\pi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ esetben

valósul meg. (k tetszőleges egész szám.) Ekkor A értéke:

$$A_{\min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot (-1)} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = |A_1 - A_2|$$

(Itt az abszolútérték-jel nem hagyható le, mert $A_1 - A_2$ lehet negatív.)

Összefoglalva: két, azonos frekvenciájú harmonikus rezgés összege ugyanilyen frekvenciájú harmonikus rezgés, melynek amplitúdója $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ és $A_{\max} = A_1 + A_2$ értékek között változik. Az amplitúdó minimális, ha a két rezgés fáziseltérése $\pi + k \cdot 2\pi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ alakban írható fel, maximális pedig ha a fáziseltérés $k \cdot 2\pi = k \cdot 360^\circ$ formában írható fel.

A cosinus függvény folytonossága miatt megfelelő fáziseltérés esetén az előbbi két szélső érték közt mindegyik amplitúdó-érték megvalósulhat.

Az itt levezetett összefüggéseket a hullámok interferenciájáról szóló részben felhasználjuk.

Majdnem azonos körfrekvenciájú rezgések eredője.

Fontos eset a gyakorlatban az is, amikor két olyan rezgés eredőjét keressük, melyek körfrekvenciája csak közelítőleg egyezik meg, azaz jelöléseinkkel: $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$.

Ekkor a két rezgés összegének egyenletét célszerű az alábbi módon átalakítani:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_2 + (\omega_2 - \omega_1)t). \end{aligned}$$

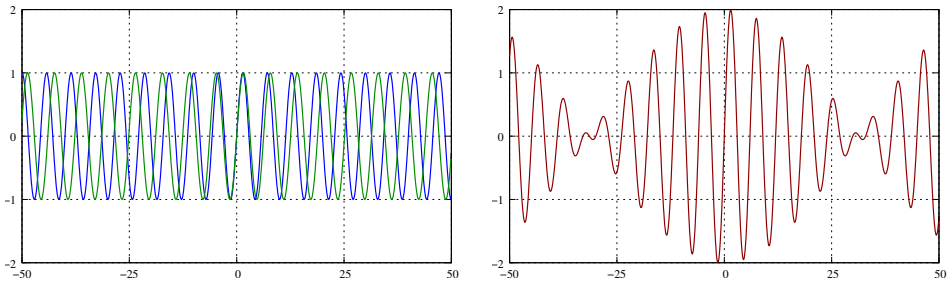
Ez majdnem ugyanolyan alakú, mint az előzőekben tárgyalt azonos frekvenciájú eset formulája, csak a második rezgés szinuszának argumentumában található $(\omega_1 - \omega_2)t$ tag az eltérés. Mivel feltételeztük, hogy $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$, ezért ez a $(\omega_2 - \omega_1)t$ tag sokkal lassabban változik, mint az ugyanezen szinusz-függvény argumentumának elején levő $\omega_1 t$ tag, azaz úgy is felfoghatjuk, mintha két azonos (ω_1) körfrekvenciájú rezgés összegéről lenne szó, de az egyik rezgés kezdőfázisa lassan, egyenletesen változik. Azt is meg tudjuk mondani, mennyi ennek a fázisváltozásnak a teljes T_f ideje:

$$|(\omega_2 - \omega_1)T_f| = 2\pi,$$

ahonnet

$$T_f = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}.$$

Az pedig, hogy az egyik rezgés fázisa fokozatosan elcsúszik az előzőekben elmondottak szerint azt jelenti, hogy az eredő rezgés amplitúdója a minimális $|A_1 - A_2|$ és a maximális $A_1 + A_2$ értékek közt T_f periódusidővel váltakozik. Ez tehát egy érdekes, „pulzáló” eredményt ad, ahogy azt a 2.18. ábra mutatja $A_1 = A_2$, $\omega_2 = 1,1\omega_1$ esetében.



2.18. ábra. Közel egyenlő frekvenciájú rezgések összege ($\omega_2 = 1,1\omega_1$, $A_1 = A_2 = 1$).

Ezt a jelenséget **lebegésnek** nevezzük.

2.12. példa: Két párhuzamos rezgés A amplitúdója megegyezik, de fázisuk 90° -kal eltér. Mekkora lesz az eredő rezgés amplitúdója és milyen lesz a fáziseltérés az eredeti rezgésektől?

Megoldás: Az előzőekben tanultakat kell alkalmaznunk az $A_2 = A_1$, $\varphi_1 - \varphi_2 = 90^\circ = \pi/2$ esetre.

(2.20) szerint az amplitúdó:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_1 \cos(90^\circ)} = \sqrt{2A_1^2} = A_1\sqrt{2}.$$

(2.21) szerint az eredő rezgés kezdőfázisának tangense:

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_1 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_1 \cos \varphi_2} = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}.$$

Mivel nincs megadva φ_1 és φ_2 konkrét értéke, csak különbségük, ezért az eredeti rezgésektől való fáziseltérést úgy számolhatjuk ki legegyszerűbben, hogy feltételezzük, hogy $\varphi_2 = 0$, így ekkor $\varphi_1 = 90^\circ$. Ekkor:

$$\tan \varphi = \frac{\sin 90^\circ + \sin 0}{\cos 90^\circ + \cos 0} = 1.$$

Ennek $\varphi = 45^\circ = \pi/4$ a megoldása.

Az eredő rezgés amplitúdója tehát $\sqrt{2}$ -szerese az eredeti amplitúdóknak és fázisa 45° -kal tér el mindkét rezgéstől.

2.13. példa: Egy áramköri elemre két forrásból is érkehetnek (azonos frekvenciájú) szinuszos jelek. Ha csak az egyik jelforrás működik, 15 V-os, ha csak a másik, akkor 12 V-os, ha mindegyik egyszerre, akkor 5 V-os amplitúdójú jeleket kapunk.

Feltéve, hogy a jelek összeadódnak, határozza meg a két forrás fáziseltérését!

Megoldás: A feladat szövege szerint azonos frekvenciájú harmonikus rezgések egyirányú eredőjével kell számolnunk. Azt tudjuk, hogy a két rezgés $A_1 = 15$ V és $A_2 = 12$ V-os amplitúdójú, az eredő pedig $A = 5$ V-os.

Ismert, hogy:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}.$$

Innét a kért fáziseltérés koszinusza:

$$\cos \Delta\varphi = \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} = -0,9556.$$

Azaz a fáziseltérés lehetséges értékei:

$$\Delta\varphi = \pm 2,842 + k \cdot 2\pi = \pm 162,9^\circ + k \cdot 360^\circ,$$

ahol k tetszőleges egész.

2.2.2. Egyásra merőleges rezgések összetétele

Mozogjon egy kocsi egy vízszintes sínen, a sínnel párhuzamos rugó hatása alatt. A kocsin lévő kis test pedig a kocsin lévő, az előzőre merőleges, szintén vízszintes sínen mozogjon, egy másik –a kocsihoz rögzített– rugó hatására. Hozzuk rezgésbe a kocsit és a kocsin levő testet is. Ekkor a test mozgása két, egymásra merőleges rezgés eredőjeként áll elő.

Ez a példa nem egy valós életből vett eset volt, de itt mechanikai példát szeretnénk volna adni. Később majd találkozunk a gyakorlati életből vett alkalmazással is.

Ebben az esetben a test mozgását a következőképpen írhatjuk le: Vegyük fel az x tengelyt a kocsi rezgéseinek irányában, az y tengelyt pedig erre

merőlegesen (vízszintes síkban). Az origó legyen a test nyugalmi helyzete. Ekkor a mozgás az

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \\y(t) &= A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}$$

egyenletekkel írható le.

Az egyirányú rezgések esetéhez hasonlóan itt sem tudunk semmi érdemlegeset mondani, ha nincs kapcsolat a rezgések paraméterei közt. Néhány dolgot azonban észrevehetünk:

- A mozgás minden esetben belül marad egy olyan téglalapon, amelynek x tengellyel párhuzamos oldala $2A_1$, y tengellyel párhuzamos oldala pedig $2A_2$ hosszúságú, azaz $-A_1$ -től A_1 -ig terjed x irányban, $-A_2$ -től A_2 -ig y irányban.
- Az amplitúdók megváltoztatása a mozgás képét csak megnyújtja illetve zsugorítja a megfelelő tengely irányában. Ezért elegendő mondjuk az $A_1 = A_2 = 1$ m eset tárgyalása, mert a többi eset mozgása ebből egyszerűen megkapható.
- Ha a (kör)frekvenciák aránya racionális, akkor a mozgás pályája egy idő után önmagába tér vissza.
Legyen pl. $\omega_1/\omega_2 = p/q$, ahol p és q egészek. Az $T = 2\pi/\omega$ összefüggés alapján ekkor a periódusidőkre igaz lesz, hogy $T_2/T_1 = p/q$, ezért $q T_2 = p T_1$. Ez viszont azt jelenti, hogy $q T_2$ idő elteltével mindkét rezgés teljes periódus végén van, így a mozgás valóban előlről kezdődik, mert a test visszaért a kiindulópontba és ugyanazzal a sebességgel halad, mint kezdetben.
- Ha a frekvenciák aránya irracionális, akkor a pálya sosem záródik.
Ez az előző gondolatmenethez hasonlóan bebizonyítható. Az is bebizonyítható, hogy ebben az esetben a test „sűrűn” bejárja a teljes téglalapot, azaz a téglalap bármely belső pontjához tetszőlegesen közel kerül, ha elég időt várunk. (Ilyen esetet mutat a 2.23. ábra.)

A racionális frekvenciaarányok esetén kapható zárt görbéket **Lissajous-görbéknek** nevezzük. A következőkben ezekkel a görbékkel foglalkozunk részletesen.

Azonos frekvenciák esete.

Tekintsük először az egyenlő frekvenciák esetét, vagyis az $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ esetet. Ekkor (a fentiek szerint $A_1 = A_2 = 1$ m-t véve és a mértékegységet

az egyszerűség kedvéért elhagyva):

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin(\omega t + \varphi_1), \\y(t) &= \sin(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}$$

Legyen először $\varphi_1 = \varphi_2$. Ekkor a két rezgés teljesen egyforma minden időpontban igaz, hogy $x(t) = y(t)$. Ez azt jelenti, hogy a mozgás az $x = y$ egyenletű egyenes mentén fog történni.

Vizsgáljuk ezután a $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$ esetet. Ekkor kihasználhatjuk a $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$ összefüggést, így a mozgás egyenletei a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(\omega t + \varphi_2), \\y(t) &= \sin(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}$$

Ez egy kör egyenlete. Képezzük ugyanis az $x(t)^2 + y(t)^2$ összeget. Mivel a $\cos$ illetve $\sin$ függvény argumentuma minden időpontban megegyezik és $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, ezért $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$. Ez viszont azt jelenti, hogy a test origótól mért távolságának négyzete 1, azaz valóban egy kör mentén mozog.

Könnyen bebizonyítható az is, hogy $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$ esetén szintén egyenest kapunk, csak az $y = -x$ egyenletűt, és az is, hogy $\varphi_1 = \varphi_2 + 3/2\pi$ esetben ismét kör lesz a pálya alakja, csak az előzőhöz képest ellentétes irányban járja be a test ezt a pályát.

Amennyiben a kezdőfázisok különbsége az előzőektől eltérő érték, akkor a kör és az egyenes közti „átmenetet” kapjuk: be lehet bizonyítani, hogy ekkor ellipszis lesz a pálya.

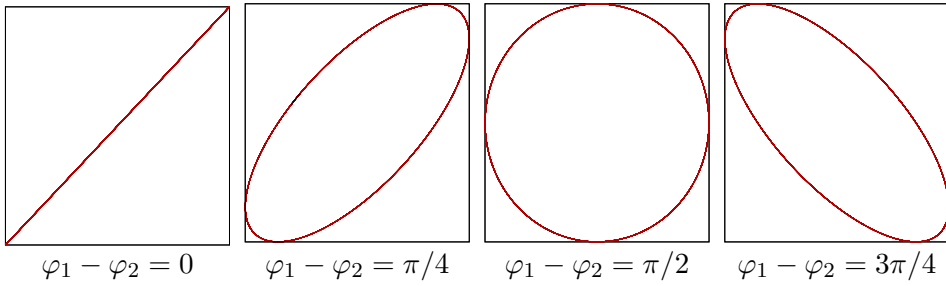
Tulajdonképpen azt is mondhatnánk, hogy a pálya mindig ellipszis, hisz a kör és az egyenes szakasz is felfogható speciális ellipszisként.

A főbb eseteket a 2.19. ábra szemlélteti.

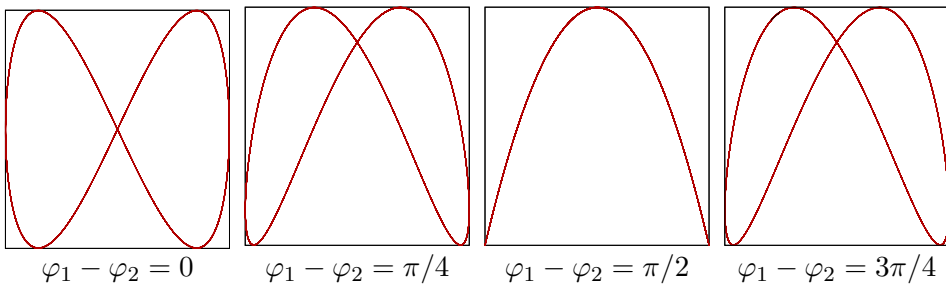
Racionális frekvenciaarányok esete.

Néhány kis számlálójú és nevezőjű (kör)frekvenciaarány esetén ábrázoltuk a Lissajous-görbéket a 2.20, 2.21 és 2.22. ábrákon.

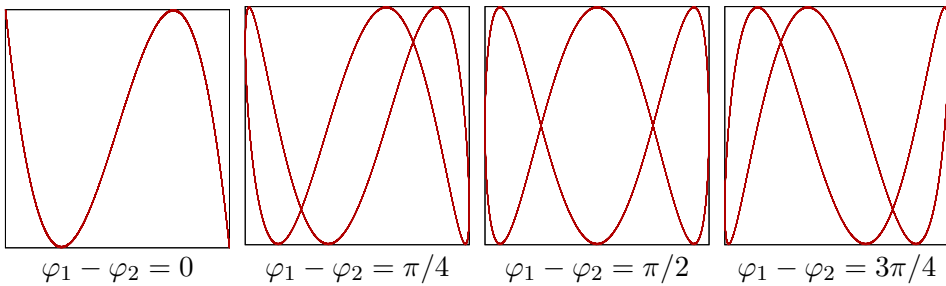
Megfigyelhetjük ezeken az ábrákon (és könnyen be is lehet ezt bizonyítani), hogy ha megszámloljuk az x illetve y tengelyekre merőleges négyzetoldalak mentén a görbék érintési pontjainak számát, akkor e két szám aránya a frekvenciaaránnal egyezik meg.



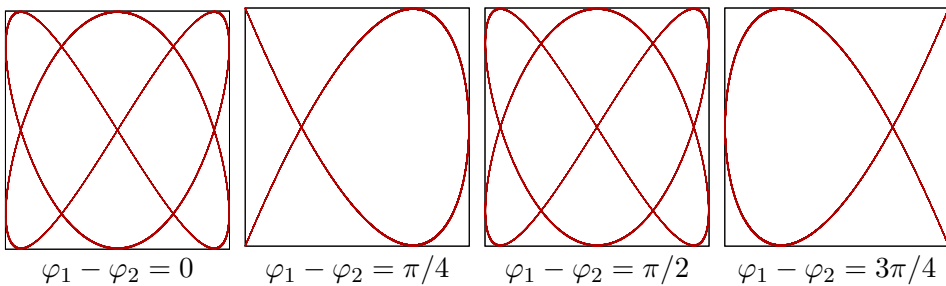
2.19. ábra. Lissajous-görbék $\omega_1/\omega_2 = 1/1$ frekvenciaarány esetében



2.20. ábra. Lissajous-görbék $\omega_1/\omega_2 = 1/2$ frekvenciaarány esetében.



2.21. ábra. Lissajous-görbék $\omega_1/\omega_2 = 1/3$ frekvenciaarány esetében

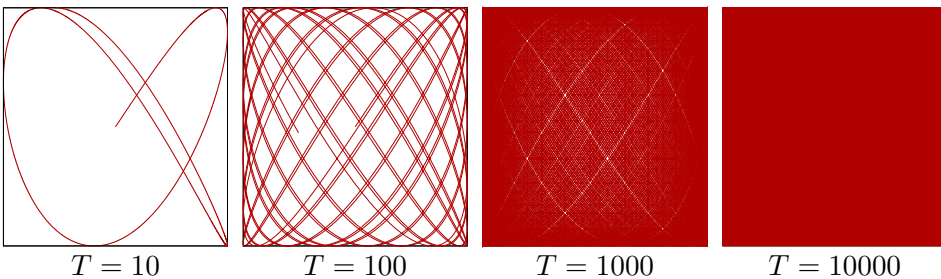


2.22. ábra. Lissajous-görbék $\omega_1/\omega_2 = 2/3$ frekvenciaarány esetében

Ezt csak az zavarhatja meg, amikor a görbe két szakasza ugyanott érinti a négyzet oldalát, mint pl. a 2.20. ábrán a $\Delta\varphi = \pi/2$ esetben. Ez viszont csak akkor következik be, ha a görbe valahol visszafordul, tehát egyik vége nem kerek, hanem csúcsban végződik. Ha ilyen csúcsot nem látunk, akkor biztosan nincs átfedő érintés, tehát érvényes a kimondott szabály.

Nem racionális frekvenciaarány esete.

A teljesség kedvéért a 2.23. ábrán bemutatjuk, hogyan járja be a test a teljes rendelkezésre álló területet, ha a nem racionális frekvenciaarányú, egymásra merőleges rezgéseket vizsgálunk. Mint fentebb említettük, a leírt görbe ekkor sohasem záródik, ezért nem a különböző fáziskülönbségek esetén kialakuló görbét tudjuk bemutatni, hanem azt, hogy növekvő T érték mellett mi a pályagörbe a $t \in [0, T]$ intervallumon. Látható, hogy az utolsó ábrán a rendelkezésre álló felbontás mellett már teljesen „befestette” a pályagörbe a mozgás rendelkezésre álló területet.



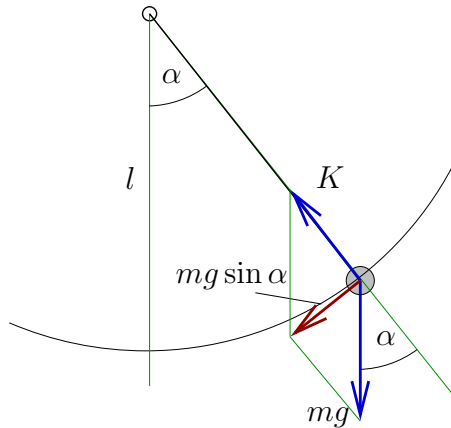
2.23. ábra. Merőleges rezgések eredője $\omega_1/\omega_2 = 1/\sqrt{2}$ frekvenciaarány esetében.

2.3. Speciális rezgések

Az eddigiekben tárgyalt esetekben a rezgés legszemléletesebb eseteit tárgyaltuk, amikor a rezgőmozgás a test térbeli, derékszögű koordinátáinak változását jelentette. Sok más fizikai mennyiség esetén is bekövetkezhet hasonló jelenség. Általában, ha egy fizikai rendszert leíró törvények egy mennyiség (szög, töltés, vagy bármi más) esetén olyan összefüggésre vezetnek, melyben a mennyiség idő szerinti második deriváltja egy negatív konstansszorosa lesz magának a mennyiségnek, a harmonikus rezgések-nél tanultak lesznek alkalmazhatóak. Hasonlóképp a csillapodó- illetve kényszerrezgések is fellelnek, ha az első deriválttal arányos, illetve egy független külső gerjesztést leíró tag is jelen van.

2.3.1. Az inga mozgása

Függesszünk fel egy l hosszúságú fonálra egy m tömegű testet. Ez függőlegesen lógatva stabil egyensúlyban van és onnan kitérítve a függőleges helyzet körül kis amplitúdójú rezgést fog végezni. Ezt könnyű belátni a 2.24. ábra alapján: látszik, hogy valóban az egyensúlyi helyzetbe visszatérítő erő ébred.



2.24. ábra. Matematikai inga mozgása.

Az ábrából látható, hogy az érintő irányú eredő erő $mg \sin \alpha$ nagyságú, ahol α a fonál függőlegessel bezárt szöge. Célszerű az ilyen mozgást a test pályája mentén felvett $h = l\alpha$ ívhossz mentén vizsgálni. Így ahelyett, hogy síkbeli, kétdimenziós mozgást vizsgálnánk, felhasználjuk, hogy a fonál kényszerítő ereje miatt a mozgás mindenképp a körív mentén történik, ezért csak az ív menti mozgást kell vizsgálni, amit az erők ebbe az irányba eső komponensei határoznak meg.

Így az ív menti mozgásegyenlet az erő visszatérítő jellegét figyelembe véve:

$$mh'' = -mg \sin \alpha = -mg \sin \frac{h}{l}.$$

Ez nem lineáris egyenlet, ezért nem harmonikus rezgés fog megvalósulni. Alkalmazhatjuk azonban a kis rezgésről tanultakat és könnyen megállapíthatjuk, hogy $h = 0$ (függőleges helyzet) stabil egyensúlyt jelent,

mely körül a kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{m} \left(-mg \sin \frac{h}{l} \right)'} = \sqrt{g \cos \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{l}},$$

ahova az egyensúlyi helyzetbeli $h = 0$ -t beírva:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Kis kitérések esetén tehát az inga közel harmonikus rezgőmozgást végez

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

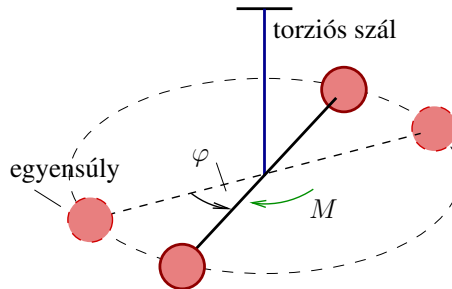
periódusidővel.

Az, hogy az inga lengésideje kis kitérések esetén független a lengés amplitúdójától tette lehetővé az első ingaórák megalkotását a 17. században, ami az időmérés és ezen keresztül a fizikai folyamatok megismerésének történetében kiemelkedő szerepet játszott.

2.3.2. Torziós rezgések

A rugalmasságtanban tanultak szerint egy rugalmas anyagú rúd az elcsavarással szemben az elcsavarodás szögével egyenesen arányos, a nyugalmi állapot irányába visszafelé forgató forgatónyomatékokat kelt. Megfelelő körülmények között –amint azt lentebb bemutatjuk– a testek elcsavarodása, torziója fog időben szinuszosan változni.

Vegyünk pl. egy fémhuzalt, egyik végét rögzítsük a mennyezetre, a másik (alsó) végére pedig közepénél fogva erősítsünk egy rudat (2.25. ábra), végein egy-egy egyforma testtel. (A rúd legyen vízszintes.) Ekkor a rudat vízszintes síkban elforgatva a huzalban csavarás jön létre, és a rugalmasságtannál elmondottak szerint ez a rúdra visszafele forgató, a forgatás szögével egyenesen arányos forgatónyomatékokat fog gyakorolni az $M = D^* \varphi$ törvény szerint. (A D^* együttható test adatival való kifejezését lásd a rugalmasságtani részben.)



2.25. ábra. Torziós rezgés kialakulása.

Ez a harmonikus rezgőmozgáshoz nagyon hasonló eset. Használjuk fel ugyanis az $M = \Theta\beta = \Theta\varphi''$ összefüggést és vegyük figyelembe azt, hogy a csavarás irányával ellentétes a rúdra ható forgatónyomaték:

$$\varphi'' = -\frac{D^*}{\Theta} \varphi$$

(Θ a rúd és a két test együttesének tehetetlenségi nyomatéka.)

φ -re tehát ugyanolyan alakú differenciálegyenletet kaptunk, mint (2.3), azaz φ szinuszosan fog változni $\omega = \sqrt{D^*/\Theta}$ körfrekvenciával.

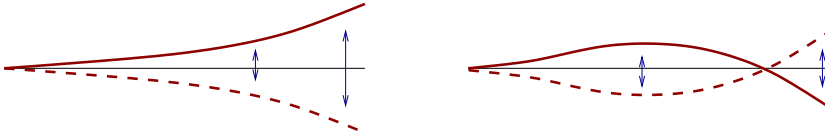
A rúd ilyen periodikus forgását torziós rezgésnek nevezzük, az említett berendezést pedig **torziós ingának**.

Az torziós ingával igen kis erők hatásai is mérhetők. **Eötvös Lóránd** hasonló berendezések segítségével végzett tudománytörténeti jelentőségű méréseket az 1900-as év környékén.

2.3.3. Hajlítási rezgések

Hajlítsunk meg egy rudat, majd engedjük el a végét. Ekkor a rúd rezgésbe jön, mivel a deformációval ellentétes irányú erő ébredt benne. Ezeket a rezgéseket nevezzük hajlítási rezgéseknek.

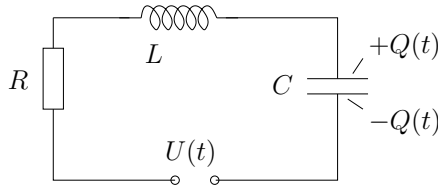
A hajlítási rezgések tárgyalása nagyon bonyolult, mivel az egész rúd anyaga rezgésbe jön, és a különböző részek esetleg más és más módon rezegnek. (Igazából ez a terület már átvezet a hullámtanba.) Ezért csak megemlíjtük, hogy többféle, úgynevezett „sajátrezgés” alakulhat ki különböző frekvenciákkal. Ilyen sajátrezgések vázlatát láthatjuk a 2.26 ábrán.



2.26. ábra. Példák hajlítási rezgésre.

2.3.4. Elektromos rezgőkör

Kössünk sorba egy R nagyságú ellenállást, egy L induktivitású tekercset és egy C kapacitású kondenzátort. (Soros RLC-kör, lásd 2.27. ábra.) Erre az egyszerű kapcsolásra kössük egy áramforrásból $U(t) = U_g \sin(\omega_g t)$ szinuszos váltakozó feszültséget.



2.27. ábra. Soros RLC-kör.

Anélkül, hogy részletekbe mennénk, megemlíjtük a következőket:

- Jelölje Q a kondenzátor töltését. Ekkor a kondenzátoron pedig $U_C = Q/C$ feszültség esik.
- A körben folyó áram tölti a kondenzátort, ezért az áram erőssége a kondenzátor töltésének idő szerinti deriváltjával egyenlő nagyságú. Belátható, hogy $I = -Q'$.
- A tekercsen eső feszültség az áramerősség deriváltjával arányos: $U_L = LI' = -LQ''$. (Lenz-törvény.)
- Az ellenálláson eső feszültség $U_R = -RI = RQ'$. (Ohm-törvény.)

Így $Q(t)$ -re az alábbi egyenlet fog vonatkozni:

$$\frac{Q}{C} + LQ'' + RQ' = U_0 \sin(\omega_g t),$$

azaz

$$Q'' = -\frac{1}{LC} Q - \frac{R}{L} Q' + \frac{U_g}{L} \sin(\omega_g t),$$

ami teljesen azonos szerkezetű, mint a gerjesztett rezgőmozgások (2.16) differenciálegyenlete.

Az együtthatók összevetéséből látszik, hogy egy ilyen rezgőkörben a kondenzátor töltése $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ saját körfrekvenciájú, $\beta = R/(2L)$ csillapítási tényezőjű gerjesztett rezgés szerint fog változni.

Az ilyen áramkörök különböző változatait az elektrotechnikában széles körben használják. Például ha a gerjesztő $U(t)$ feszültség nem szinuszos, akkor ez az áramkör „kiválasztja” a sajátfrekvencia környéki frekvenciákat, és lényegében csak ezek hatása jelentkezik $Q(t)$ -ben, azaz sokféle frekvencia keverékéből álló jel esetén így lehet egy meghatározottat kiemelni. Ezt az elektrotechnikában „sávszűrőnek” nevezik, és pl. a rádiókészülékekben használják a megadott frekvenciájú adók kiválasztására. (A hangolás többnyire a C kapacitás változtatásával történik.)

Az RLC-körök részletes tárgyalása túlmenne jegyzetünk keretein, de ennyit mindenképp érdemes tudni róluk.

2.3.5. Csatolt rezgések

Sokszor találkozunk olyan esettel, amikor két rezgő test nem egymástól függetlenül mozog, hanem rezgésük valamiképp csatolva van egymáshoz. Például ha egy állványon több hinta is lóg egymás mellett, akkor az egyiket belengetve, az kicsit rezgésbe hozza az állványt, ami a másik hintát is rezgésbe hozza. Ha a hinták rezgési (lengési) frekvenciája megegyezik, és a súrlódási ill. közegellenállási veszteségek nem túl nagyok, akkor ez a gyenge csatolás akár igen erős hatásúvá is válhat és előfordulhat, hogy az eredetileg nem lengő hinta lengésbe jön, miközben az eredeti lefékeződik, majd idővel, sok lengés alatt visszakapja az energiáját. Ez az ide-oda folyamat addig folytatódik, amíg a közegellenállás miatt az egész folyamat le nem csillapodik.

Általában, ha egy összetett rendszer több része képes rezgéseket végezni, de két rész sajátfrekvenciája közel megegyezik, akkor a leggyengébb kapcsolat is képes lehet a két rész közt a rezgési amplitúdót ide-oda vándoroltatni. Legegyszerűbb ezt egy rugalmas (műanyag), egyenes vonalzóval kipróbálni. Szorítsuk a vonalzót egy asztallap oldalához egy ujjunkkal erősen pontosan a felénél, majd pengessük meg a felső részét. Bármilyen erősen is szorítjuk, a rezgések pár másodperc alatt átadódnak az alsó oldalnak, majd onnan újra vissza, egészen addig, amíg a közegellenállás és a

vonalzó belső súrlódása ezt le nem állítja.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

A mindennapi életben számtalan helyen találkozunk rezgésekkel, mert sok test rögzítése némiképp rugalmas, azaz olyan, hogy az egyensúlyi helyzetéből kissé kitérítve rezgőmozgást kapunk. Sokszor ezek a rezgések gyors csillapodásuk vagy kis amplitúdójuk miatt nem érzékelhetők közvetlenül, de hatásukat valahogyan, pl. a rezgő test által keltett hangon keresztül érzékelhetjük.

A teljesség igénye nélkül csak néhány érdekes esetet említünk.

- A karácsonyfadíszek képesek mutatni a torziós rezgések szép példáját. Nagy díszek vékony fonálon elég kis körfrekvenciájú, azaz nagy periódusidejű rezgésekre képesek, ami azért érdekes, mert ekkor a kialakuló szögsebesség igen kicsi lehet, ami a közegellenállás hatásának alacsony voltát eredményezi, így a rezgés lassan, de kitartóan, akár egy óráig is tarthat.
- Az ablaktáblák rugalmasságuk folytán igen kis amplitúdójú rezgésre képesek. Ezt pl. akkor érzékelhetjük jól, amikor a közelben olyan jármű megy el, melynek hangjának frekvenciája „eltalálja” az üvegtábla sajátfrekvenciáját. Ekkor az üveg jól érzékelhetően beremeg.
- Egy asztalra felfordított fémlábú szék lábát megütve azt hajlítási rezgésekre készíthetjük. Ezek túl gyorsak ahhoz, hogy a rezgés menetét szemmel követni tudjuk, csak szemből nézve a székláb elmosódottságán vehetjük észre a rezgés hatását. Teljesen szimmetrikus esetben ez a rezgés a székláb irányára merőleges mindkét irányban azonos frekvenciával történne, azaz az 1:1 frekvenciaarányú Lissajous-görbék valósulnának meg. A gyakorlatban azonban mindig van egy kis aszimmetria, ami a két frekvencia kis eltérését jelenti, így a székláb vége a lebegéshez hasonló módon az 1:1 frekvenciaarányt jellemző egyenes, ellipszis és kör állapotok között fog ide-oda ingadozni.

Az ablaktáblák illetve a széklábak esetében nem egyszerű rezgésről, hanem állóhullámokról van szó. Ezekről a következő fejezetben fogunk tanulni. Annyit azonban előzetesen megemlítünk, hogy az állóhullámok esetében több frekvencia is szóba jöhet, tehát az ablaktábla és a székláb több frekvencián is képes a leírt jelenséget produkálni.

2.4. Kérdések és feladatok

2.4.1. Elméleti kérdések

1. Egy test egyenes mentén mozoghat. Rajzoljon fel egy $F(x)$ grafikont (azaz az erőt a hely függvényében) úgy, hogy pontosan három egyensúlyi helyzete legyen a testnek, melyek közül kettő körül (A és B) kialakulhasson rezgés, a harmadik körül (C) nem. (A, B és C szerepeljen az ábrán!)
2. Mondjon példát a gyakorlati életből olyan egyensúlyi helyzetre, mely körül nem alakulhat ki rezgés!
3. Harmonikus rezgőmozgás periódusidejét kétszeresére szeretnénk növelni. Hogyan változtassuk a rezgő test tömegét?
4. Egy test először 1 cm, majd utána 2 cm amplitúdóval végez harmonikus rezgőmozgást azonos felfüggesztés mellett. Melyik esetben nagyobb a frekvenciája?
5. Rugón rezgő test csillapodó rezgőmozgásánál mi történik a rezgő test kezdeti energiájával?
6. Egy rugóra akasztott testet kitérítünk egyensúlyi helyzetéből, majd elengedjük. A test ezután nem rezgőmozgást végez, hanem lassan visszatér az egyensúlyi helyzetbe. Milyen körülmények közt lehetséges ez?
7. Egy függőleges rugó alsó végéhez egy test van rögzítve. A rugó felső végét függőleges irányban kis amplitúdóval mozgathatjuk. Milyen körülmények közt lehetséges, hogy a felső véget csak 1 mm amplitúdóval mozgattuk, de a test 10 cm-es, állandó amplitúdójú rezgéseket végez?
8. Rajzoljon fel egy rezonanciagörbét! Röviden magyarázza meg, milyen mennyiségek találhatók a tengelyeken!
9. Milyen a gerjesztőerő és a hosszú távon kialakuló rezgések fáziskülönbsége a rezonanciafrekvencián?
10. Mikor lesz két egyirányú szinuszos rezgés eredője nem periodikus?
11. Milyen rezgés lesz két azonos frekvenciájú, egy irányba eső harmonikus rezgés eredője?
12. Lehetséges-e, hogy két 5 cm amplitúdójú, egyirányú harmonikus rezgés eredője is 5 cm amplitúdójú lesz? Válaszát indokolja röviden.

13. Két egyirányú harmonikus rezgés eredőjét vizsgáljuk. Lehet-e az eredő amplitúdó a két amplitúdó összegénél nagyobb? Miért?
14. Két egyirányú harmonikus rezgés eredőjét vizsgáljuk. Lehet-e az eredő kisebb amplitúdójú, mint a kisebbik amplitúdó? Miért?
15. Mi lesz három, azonos frekvenciájú, egy irányba eső szinuszos rezgés eredője? Válaszát indokolja!
16. Két egyirányú szinuszos rezgés eredőjének amplitúdója lassan, periodikusan váltakozik. Mit mondhatunk a két rezgés frekvenciájáról? Hogyan nevezzük ezt a jelenséget?
17. Milyen mozgásfajták alakulhatnak ki két, azonos amplitúdójú és frekvenciájú, egymásra merőleges harmonikus rezgés eredőjeként? Mi határozza meg, melyik eset áll fenn?
18. Rajzoljon fel vázlatosan egy 1 : 2 frekvenciaarányhoz tartozó Lissajous-görbét!
19. Hogyan olvasható le egy Lissajous-görbéről a rezgések frekvenciaaránya?
20. Mondjon példát a gyakorlati életből hajlítási rezgésre!

2.4.2. Kidolgozott feladatok

2.1. feladat: Egy rugón egy test lóg. Még egy ugyanilyen tömegű testet lassan ráakasztva, a rugó 3 cm-nyit nyúlik meg. Milyen periódusidejű rezgéseket kapunk, ha a két testet együtt rezgésbe hozzuk?

Megoldás: Legyen az ismeretlen tömeg m , a rugóállandó D .

A feladat szerint m plusz tömeg hatására $d = 3$ cm-nyit nyúlt meg a rugó, azaz

$$mg = dD, \quad (2.22)$$

ahol g a nehézségi gyorsulás értéke.

Azt is tudjuk, hogy az együttesen $2m$ tömegű test rezgésideje a D rugóállandójú rugón:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{D}}.$$

Felhasználva a (2.22) egyenletet m kifejezhető: $m = dD/g$ és ez T előbbi kifejezésébe beírható:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2dD}{Dg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{g}} = 0,49 \text{ s}.$$

2.2. feladat: Egy lapos jégtábla mindenütt 30 cm vastag, sűrűsége 915 kg/m^3 . Határozza meg, kb. milyen periódusidejű rezgéseket végez ez nyugodt vízben függőleges irányban, ha a víz sűrűsége 1000 kg/m^3 -nek vehető?

Megoldás: Vegyük fel az x tengelyt függőleges irányban felfelé mutatón, az origó legyen a víz felszínén.

Jelölje x a jégtábla alsó síkjának helyzetét, A pedig a jégtábla felszínének nagyságát.

A jégtáblára ható erők: a $-mg$ súlyerő és az $-x A \rho_v$ felhajtóerő (Arkhimédész törvénye), ahol m a jégtábla tömege, g a nehézségi gyorsulás, ρ_v a víz sűrűsége. Tehát:

$$F(x) = -mg - x A \rho_v g.$$

Vegyük észre, hogy $m = \rho A d$, ahol ρ a jég sűrűsége, d a tábla vastagsága, így

$$F(x) = -\rho A d g - x A \rho_v g.$$

Egyensúlyban $F(x_0) = 0$, azaz

$$0 = -\rho A d g - x_0 A \rho_v g,$$

ahonnan

$$x_0 = -\frac{\rho}{\rho_v} d.$$

($x_0 < 0$ azt fejezi ki, hogy egyensúlyban a víz felszíne alatt van a jégtábla alja.)

Akkor stabil az egyensúly, ha $F'(x_0) < 0$. Számoljuk ki tehát az erő deriváltját:

$$F'(x) = -A \rho_v g.$$

Ez valóban negatív, tehát az egyensúlyi helyzet körül kialakulhatnak rezgések.

A kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{m} F'(x_0)} = \sqrt{\frac{A \rho_v g}{A d \rho}} = \sqrt{\frac{\rho_v g}{d \rho}} = 5,98 \frac{1}{\text{s}},$$

ahonnan a periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,05 \text{ s}.$$

A 30 cm vastag jégtábla tehát kb. 1 s periódusidővel rezeg függőleges irányban.

Természetesen ezt a rezgést a víz közegellenállása csillapítja, de ez várhatóan nem módosítja nagyon a periódusidőt.

2.3. feladat: Egy 3 kg tömegű test rugalmasan van rögzítve valahol. Kis kitérések esetén másodpercenként pontosan 2 rezgést végez, de a rezgések amplitúdója 3 s alatt megfeleződik. Mekkora a csillapítási tényező és a befogást jellemző „rugóállandó”?

Megoldás: A másodpercenkénti 2 rezgés azt jelenti, hogy a csillapított rezgések körfrekvenciája:

$$\omega_{cs} = \frac{2\pi}{0,5\text{ s}} = 4\pi \frac{1}{\text{s}}.$$

A 3 s alatti amplitúdó-feleződés miatt:

$$A(3) = \frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot 3}.$$

Innét a csillapítási tényező:

$$\beta = \frac{\ln 2}{3} = 0,231 \frac{1}{\text{s}}.$$

A csillapítatlan és a csillapított körfrekvencia közti összefüggés alapján:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{cs}^2 + \beta^2} = 12,5 \frac{1}{\text{s}}.$$

Tudjuk, hogy:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Innét a kért rugóállandó:

$$D = m\omega_0^2 = 468 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

2.4. feladat: Egy rezgő test légüres térben (csillapítás nélkül) 32,5 Hz-es körfrekvenciával rezeg. Levegőben körfrekvenciája 31,9 Hz-re csökken.

Mekkora itt a csillapítási tényező értéke? Mennyi idő alatt csökken a csillapított rezgés amplitúdója az eredeti 1/10 részére?

Megoldás: A szokásos jelölésekkel (SI-egységekben):

$$\omega_0 = 32,5, \quad \omega_{cs} = 31,9.$$

Tudjuk, hogy

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

ahonnan a csillapítási tényező:

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{cs}^2} = 6,22 \frac{1}{\text{s}}.$$

Az amplitúdó csökkenését megadó összefüggést alkalmazva az 1/10-részre csökkenő esetre:

$$\frac{A_0}{10} = A_0 \cdot e^{-\beta t}.$$

Innét:

$$t = \frac{1}{\beta} \ln 10 = 0,37 \text{ s.}$$

Tehát kb. 0,37 s alatt csökken a rezgések amplitúdója az eredeti 10-ed részére.

2.5. feladat: Két, A amplitúdójú harmonikus rezgés egyirányú eredőjének amplitúdója szintén A . Mit mondhatunk a rezgések fáziskülönbségéről?

Megoldás: (2.20)-t alkalmazva esetünkre:

$$A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

ahonnan

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{2}{3} \cdot \pi + k \cdot 2\pi$$

ahol k tetszőleges egész.

2.4.3. Gyakorló feladatok

1. Egy teherautó platója rugalmasan van alátámasztva. Amikor valaki leugrik róla és üresen marad, 10 s alatt 7 rezgést végez. Amikor 600 kg teher van rajta és úgy jön rezgésbe, 10 s alatt már csak 4 rezgést végez. Mennyi üresen a plató tömege?
2. Egy 2 kg-os test egyenes mentén mozoghat, és SI-egységekben az alábbi erő hat rá:

$$F(x) = 10 - 6/x^2.$$

- Hol vannak a test egyensúlyi helyzetei?
 - Melyik(ek) körül alakulhat ki rezgés?
 - Mennyi a kis rezgések periódusideje?
3. Egy csillapított rezgőmozgás amplitúdója kezdetben 18 cm. 15 s múlva már csak 4 cm. Mekkora a csillapítási tényező? A kezdettől számítva mennyi idő múlva lesz az amplitúdó 5 mm?

4. Egy csillapodó rezgőmozgást végző test 20 s alatt 45 rezgést végez, és közben amplitúdója 20%-kal csökken. Mennyi a test sajátfrekvenciája?
5. Milyen gerjesztő körfrekvencián lesz a gerjesztett rezgés amplitúdója épp fele a saját körfrekvencián vett amplitúdónak?
6. Egy áramkörü elemre két forrásból is érkehetnek (azonos frekvenciájú) szinuszos jelek. Ha csak az egyik jelforrás működik, 11 V-os, ha csak a másik, akkor 8 V-os, ha mindegyik egyszerre, akkor 5 V-os amplitúdójú jeleket kapunk.
Feltéve, hogy a jelek összeadódnak, határozza meg a két forrás fázisel-térését!
7. Milyen hosszúságú matematikai inga periódusideje lesz pontosan 1 s, ha a nehézségi gyorsulás értékét 9,81 m/s-nak vesszük?

Ajánlott irodalom:

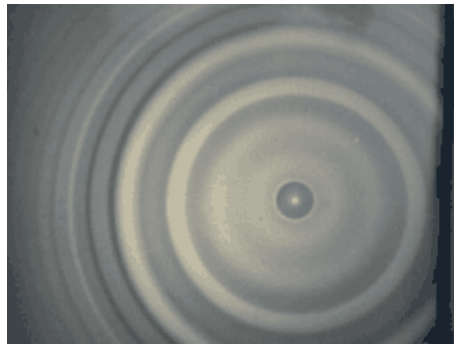
- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- Feynmann, Leighton, Sants: Mai fizika I., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

Felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- Budó Ágoston: Mechanika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.

3. Hullámmozgás

Amikor nyári este elered az eső és mi egy tó partján ücsörögve örülünk a langymeleg esőben, akkor egy érdekes természeti jelenséget is megfigyelhetünk. Az eső előtt nyugalomban lévő tó felszínét az esőcseppek megzavarják. Minden egyes esőcsepp becsapódása után a becsapódás helyétől koncentrikus körök mentén **hullámok** indulnak ki. A sok sok esőcsepp által keltett hullámok találkoznak, összegződnek és a tó teljes felszíne hullámoz. Egy soha nem ismétlődő, minden pillanatban más képet mutató, tó felszíni mozgásnak lehetünk tanúi.



3.1. ábra. Egy csepp keltette hullám a vízfelszínen

Az itt felhozott példa mellett még sok olyan természeti jelenséget ismerünk, melyek jobb megértéséhez sokat segít a hullám fogalma.

Hullámmozgás:

Ha valamilyen változás, zavar következik be, és ez a zavar tovaterjed, akkor ezt a jelenséget hullámmozgásnak nevezzük.

Amikor egy közegben hullám terjed, akkor a közeg minden egyes pontja kitér egyensúlyi állapotából. Tehát a közeg alkotóelemeit a hullámozás nem sodorja magával, hanem egyensúlyi helyzetükből való kitérésre kényszeríti azokat.

A hullámban nem a közeg alkotóelemei terjednek szét, hanem az egyensúlyi állapot megzavarásához szükséges energia terjed szét a közegben a közeg alkotóelemei közötti kölcsönhatás következtében.

Attól függően, hogy a közeg egy pontjában a zavar iránya és a hullám terjedési iránya hogyan viszonyul egymáshoz, megkülönböztetünk

- **transzverzális** vagy keresztirányú hullámzást és
- **longitudinális** vagy hossz menti hullámzást.

Transzverzális hullám:

Transzverzális hullámokban a terjedés iránya és a zavar iránya egymásra merőlegesek.

Longitudinális hullám:

Longitudinális hullámokban a terjedés iránya és a zavar iránya egymással párhuzamosak.

3.1. Egyenes menti hullámok kinematikája

Vizsgáljuk meg közelebbről az egy dimenzióban kialakuló hullámmozgást. Tételezzük fel, hogy a közeg, amelyben a hullámokat vizsgáljuk olyan, hogy az egyik mérete sokkal nagyobb a másik két méretéhez képest. Ilyen közeg például egy kifeszített gumikötél, vagy húr. A kötélen egyik végén keltünk zavart azzal, hogy a kötélen egy gyors mozgással felfelé, majd lefelé mozdítjuk el. A zavar tovaterjed a kötélen. Ezt az esetet modellelzi a 3.2 ábra.

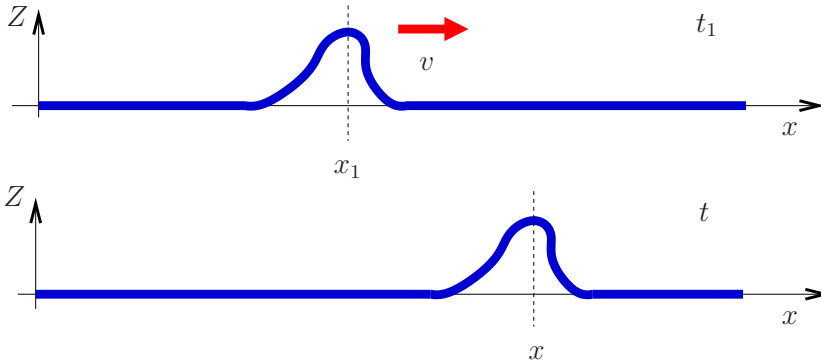
Írjuk le ezt a terjedési jelenséget a matematika segítségével. Tegyük fel, hogy a zavar tovaterjedésekor a kötélen nem lépnek fel energiavesztések. Így a kötélen későbbi időpillanatban felvett alakja megegyezik egy korábbi időpillanatban felvett alakkal, ha azt pontosan annyit toljuk el a zavar terjedési irányában, mint amennyit a zavar megtett a kötélen a két vizsgált időpillanat között.

A kötélen alakját leírhatjuk, mint a zavar helytől és időtől való függését. Legyen ez a függvény a $Z(x, t)$ függvény. A zavar tovaterjedéséről fentebb írtakat, úgy fejezhetjük ki, hogy

$$Z(x_1, t_1) = Z(x, t) \quad (3.1)$$

Tegyük fel, hogy a zavar a kötélen állandó sebességgel terjed. Ez a sebesség:

$$v = \frac{x - x_1}{t - t_1}. \quad (3.2)$$



3.2. ábra. Zavar terjedése feszített gumikötélen. (Fent: a köté alakja a t_1 időpillanatban, Lent: a köté alakja a t időpillanatban)

Tehát a későbbi hely meghatározható a zavar terjedésének sebessége alapján. Ehhez fejezzük ki x_1 -et a 3.2 egyenletből.

$$x_1 = x - v(t - t_1). \quad (3.3)$$

Helyettesítsük x_1 -et a 3.1 egyenletbe. Ekkor

$$Z(x - v(t - t_1), t_1) = Z(x, t). \quad (3.4)$$

Nem csökken a leírtak általánossága, ha feltesszük, hogy $t_1 = 0$. Ez az időmérés kezdetének jó megválasztásával mindig elérhető. Így a 3.4 egyenlet a következő alakot ölti:

$$Z(x, t) = Z(x - vt, 0). \quad (3.5)$$

Egyenes menti hullámterjedés:

Ha az x irányban v sebességgel hullám terjed, akkor annak alakját csak olyan $Z(x, t)$ függvény írhatja le, melyre teljesül, hogy

$$Z(x, t) = g(x - vt).$$

3.1. példa: Az x -tengely mentén terjedő impulzust a

$$Z(x,t) = \frac{2}{(x-3t)^2 + 1}$$

függvény írja le. Mekkora a hullám terjedési sebessége? Mekkora a Z mennyiség egyensúlyi értékétől való eltérés a $t = 0$ időpillanatban és az $x = 0$ helyen? Mekkora ez az érték, ha $t = 1$ és $x = 5$? (Minden adat SI mértékben adott!)

Megoldás: A $Z(x,t)$ függvény alakjából látható, hogy az hullámterjedést ír le, hiszen

$$x - vt = x - 3t.$$

Ebből azonnal következik, hogy a zavar az x -tengely irányában $v = 3$ m/s sebességgel terjed.

A másik két kérdésre a választ a $Z(x,t)$ függvény argumentumába való behelyettesítéssel kapjuk. Az első esetben

$$Z(x = 0, t = 0) = 2,$$

míg a második esetben

$$Z(x = 5, t = 1) = 0,4.$$

Z mértékegységét nem tudjuk megadni, hiszen a feladatból nem derül ki, hogy milyen mennyiség egyensúlyi állapotában bekövetkezett zavar tovaterjedését írja le a $Z(x,t)$ függvény.

Láthatóan hullámterjedést csak olyan a helytől és időtől egyszerre függő függvények írhatnak le, melyekben a helyet és az időt a terjedésnek megfelelő $(x - vt)$ kapcsolat fűz össze. Ennek az általános tulajdonságnak messzemenő következményei vannak. Vizsgáljuk meg a 3.5 egyenlettel adott $Z(x,t)$ függvény hely és idő szerinti második deriváltját!

A hely szerinti második derivált:

$$\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2} = g''(u) \quad (3.6)$$

A g'' az $u = x - vt$ függvény szerinti második deriváltat jelöli.

Az idő szerinti második derivált:

$$\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2} = v^2 g''(u), \quad (3.7)$$

vagyis

$$g''(u) = \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

Rendezzük nullára a 3.8 egyenletet, ekkor

$$\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.9)$$

A 3.9 egyenlet az egydimenziós **hullámegyenlet**. Tehát ebben az egydimenziós esetben $Z(x,t)$ hullám, ha kielégíti a 3.9 egyenletet.

Ha a hullámterjedést nem egy egyenes mentén vizsgáljuk, hanem a háromdimenziós fizikai térben, akkor is érvényes minden hullámterjedésre az általános hullámegyenlet, csak a helyet ebben az esetben az $\underline{r}$ helyvektor jelöli. Így a $Z(\underline{r},t) \equiv Z(x,y,z,t)$ függvény írja le a hullámot.

Hullámegyenlet:

A térben és időben terjedő zavarok alapegyenlete a 3.9 egyenlet alapján három dimenzióra általánosított hullámegyenlet.

$$\frac{\partial^2 Z(\underline{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z(\underline{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z(\underline{r},t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Z(\underline{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

Bevezetve a

$$\Delta Z(\underline{r},t) = \frac{\partial^2 Z(\underline{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z(\underline{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z(\underline{r},t)}{\partial z^2}$$

jelölést a hullámegyenletet a következő alakban írhatjuk.

$$\Delta Z(\underline{r},t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Z(\underline{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

3.1.1. Periodikus és harmonikus egyenes menti hullámok

Az eddigi vizsgálódásaink során nem foglalkoztunk a $Z(x,t)$ függvény konkrét alakjával, csak a hely- és időkoordináta kapcsolatára határoztunk meg követelményt. A hullámok tanulmányozása során igen hasznos hullámtípusok a **periodikus hullámok**.

Ha a feszített kötélt végét úgy mozgatjuk, hogy a kötélt elejének kitérése időben periodikusan változik T periódusidővel (f frekvenciával), és ennek hatására a kötélen v sebességű hullám terjed, akkor a hullám képe a térben is periodikus lesz. A térbeli periódust a hullám λ **hullámhosszának**

nevezzük, és érvényes rá:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}. \quad (3.10)$$

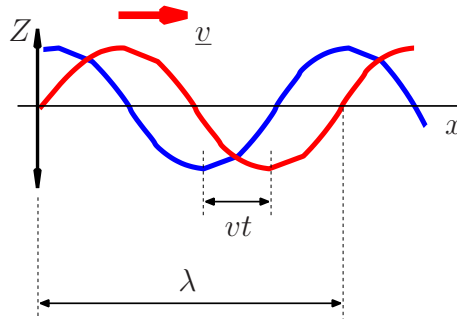
Ha a kötéel végét úgy mozgatjuk, hogy az harmonikus rezgőmozgást végez T periódusidővel, A amplitúdóval, és a kialakuló hullám sebessége v , akkor a $Z(x,t)$ függvény alakja:

$$Z(x,t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right). \quad (3.11)$$

Egyszerű átalakításokkal megmutatható, hogy ez a függvény hullámmozgást ír le.

$$Z(x,t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(x - \frac{\lambda}{T} t \right) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt).$$

A 3.3 ábra egy harmonikus hullám terjedését mutatja.



3.3. ábra. Harmonikus hullám terjedése (A két különböző színű görbe ugyanazt a hullámot mutatja két különböző időpillanatban)

Jelölje $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a hullám körfrekvenciáját. Ennek mintájára vezessük be a térbeli periódussal, a hullámhosszal kapcsolatos

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.12)$$

menyiséget, melyet **hullámszámnak** nevezünk. Ezen jelölések felhasználásával az egyenes menti harmonikus hullámot leíró függvény:

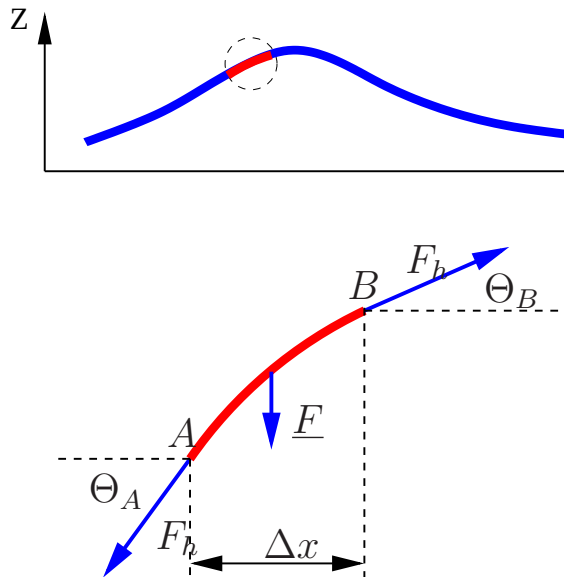
Egyenes menti harmonikus hullám:

$$Z(x,t) = A \sin(kx - \omega t).$$

3.2. Egyenes menti hullámok dinamikája

Az előző alfejezetben feltételeztük, hogy a kötélen mentén terjedő hullám terjedési sebességét ismerjük. Meghatározhatjuk ezt például méréssel, de nyilván a fizika feladatai közé tartozik ennek elméleti meghatározása is. A feladat nem egyszerű, hiszen tudnunk kell a megoldásához azt, hogy milyen erők hatására és milyen fizikai törvényeknek engedelmessé alakul ki a vizsgált közegben a hullámterjedés. Ezért minden egyes konkrét esetre el kell végezni a vonatkozó számításokat.

Elsőként azt vizsgáljuk, mi határozza meg egy kötélen az ezen a kötélen tovaterjedő hullámok sebességét. Számításainkhoz a 3.4 ábrát használjuk.



3.4. ábra. Hullám terjedési sebességének meghatározása feszített kötélen

Tegyük fel, hogy a vizsgált kötélen homogén, tehát keresztmetszete mindenütt ugyanaz az A érték. A kötélen egységnyi hosszra eső tömegét, azaz a

lineáris sűrűséget jelölje μ . Tehát $\mu = \frac{m}{l}$, ahol m a kötéltömege, l pedig a kötélt hossza. A kötele feszítő erő nagysága F_h .

Vizsgáljuk a hullámterjedés során a kötélt elegendően kis tömegű darabját. (Lásd a 3.4 ábrát.) A kötélt ezen darabjának mozgását harmonikus rezgőmozgásnak tekinthetjük.

A kötélt a hullám hatására kitér egyensúlyi helyzetéből, és ez a Z zavar végig fut a kötélen. A kötélt alakját a $Z(x, t)$ függvény határozza meg.

A vizsgált kötéldarab tömege $\mu \cdot \Delta x$. Az erre a kötéldarabra ható eredő erő zavarirányú komponense

$$F = F_h(\sin(\Theta_B) - \sin(\Theta_A))$$

nagyságú.

Levezetésünk során feltesszük, hogy a kötélen terjedő hullámozgás amplitúdója kicsi, így a Θ_A és Θ_B szögek szintén kicsik. Ennek köszönhetően ezen szögek szinusza helyettesíthetőek tangenseikkel. Tehát:

$$F \sim F_h(\tan(\Theta_B) - \tan(\Theta_A)).$$

Vegyük észre, hogy az A és B pontokban felírt tangensek valójában a $Z(x, t)$ függvény x szerinti parciális deriváltjai. Ezek után az F a következő módon alakul:

$$F = F_h \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_A \right).$$

A deriváltak definíciója alapján elvégezhetjük a következő közelítést ha Δx elég kicsi:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_A = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \Delta x.$$

Arra jutottunk, hogy:

$$F = F_h \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \Delta x.$$

Mivel a kötéldarab harmonikus rezgést végez az adott időpillanatban a hullám áthaladásának következtében a Z irányban, az F erő kifejezhető a következő módon is:

$$F = ma = \mu \Delta x \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}.$$

Az F erőt kétféleképpen is kifejeztük. Tehát:

$$F_h \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \Delta x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}.$$

Hozzuk az előző egyenletet a következő alakra:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_h} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = 0.$$

Látható, hogy az egydimenziós hullámegyenletet kaptuk, amelyben:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{F_h}.$$

Fejezzük ki innen a v terjedési sebességet!

$$v = \sqrt{\frac{F_h}{\mu}} \quad (3.13)$$

3.2. példa: Határozza meg, hogy milyen sebességgel terjednek a hullámok egy 1 mm átmérőjű acél húron, ha a húst 100 N erő feszíti!

Megoldás: Először határozzuk meg a húr lineáris sűrűségét! Mivel acél húrról van szó, így az acél sűrűsége táblázatból meghatározható. Azt kapjuk, hogy $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$.

A lineáris sűrűség a húr egységnyi hosszának tömege. Tehát:

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{\rho A l}{l} = \frac{\pi d^2}{4} \rho = 5,89 \text{ kg/m}$$

d - a húr átmérője, l - a húr hossza, m - a húr tömege, A - a húr keresztmetszete.

Figyelembe véve, hogy a hullámterjedés sebessége húrban:

$$v = \sqrt{\frac{F_h}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_h}{A\rho}}.$$

Behelyettesítés után:

$$v = 130,3 \text{ m/s}.$$

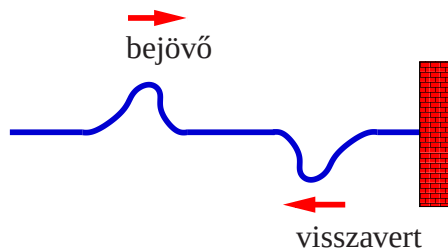
3.2.1. Hullámok viselkedése közeghatároknál.

Az előzőekben levezettük, hogy a feszített húrban terjedő hullámok sebessége a húr feszítettségi állapotától, valamint a húr lineáris sűrűségétől függ. Vizsgáljuk meg mi történik akkor, ha két különböző sűrűségű húst összekötünk, majd megfeszítjük azokat. Az ilyen rendszerben terjedő hullámok

azt modellezzük, hogy hogyan viselkednek a hullámok különböző sűrűségű közegekben.

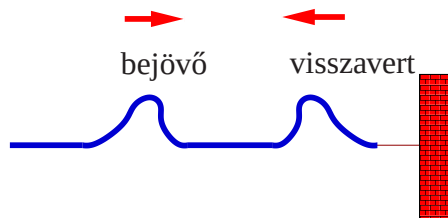
Az első eset amit megvizsgálunk az egyik végén rögzített húr esete. Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a rögzítés végtelen sűrűségű közegként viselkedik. Ebben az esetben azt tapasztaljuk, hogy a hullám a rögzített végről visszaverődik és a húron elindul visszafelé egy **reflektált (visszavert) hullámzás**. Ezt a szituációt mutatja a 3.5. ábra.

Tapasztalat szerint ilyenkor a bejövő és visszavert hullámok alakjai egymás -1 -szeresei, vagy más szóval „invertáltjai”



3.5. ábra. Visszaverődés rögzített végről

A második eset pontosan az ellenkezője az előzőnek. A húr egy elhanyagolható tömegű másik húron keresztül rögzítjük. Tehát a vizsgált húr egyik vége szabad. Ilyenkor is tapasztaljuk a visszaverődés jelenségét. Ezt a szituációt mutatja a 3.6. ábra. Ebben az esetben a visszavert hullám és a bejövő hullám alakja megegyezik.



3.6. ábra. Visszaverődés szabad végről

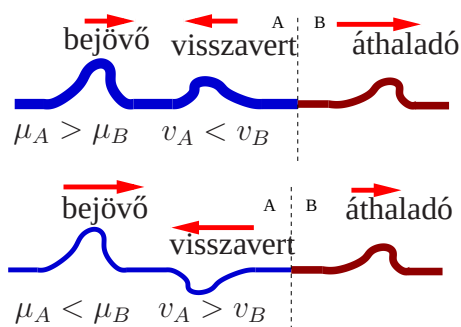
Most pedig elemezzük az általános esetet, azaz a különböző sűrűségű közegek határán való viselkedést. Ebben az esetben a reflektált hullám mellett megjelenik a második közegben terjedő, úgynevezett áthaladó vagy **transzmittált hullámzás** is.

A visszavert hullámzás alakja attól függ, hogy milyen viszonyban vannak egymással az első és második közeg sűrűségei. Ha az első közeg sűrűsége a kisebb, azaz ebben a közegben terjednek a hullámok nagyobb sebességgel, akkor *nagyobb sűrűségű közegről verődik vissza a hullám és invertálódik*.

Ha az első közeg sűrűsége a nagyobb, azaz ebben a közegben terjednek a hullámok kisebb sebességgel, akkor *kisebb sűrűségű közegről verődik vissza a hullám és nem invertálódik*.

Az áthaladó és visszavert hullámzás amplitúdója is kisebb mint a bejövő hullámé, hiszen a bejövő hullám által szállított energia osztódik el a reflektált és transzmittált hullámok között.

Ezt az általános helyzetet foglalja össze szemléletesen a 3.7 ábra.



3.7. ábra. Visszaverődés és áthaladás különböző sűrűségű közegek határán

3.2.2. Energiaterjedés egydimenziós harmonikus hullámokban

Amikor egy húron harmonikus hullámok alakulnak ki, akkor ehhez egy külső erőnek munkát kell végeznie, hiszen a húr minden darabja valamilyen tömeggel rendelkezik, és a hullámzás során harmonikus rezgést végez, azaz van gyorsulása, sebessége és kitérése. A *Rezgőmozgások* című fejezetből tudjuk, hogy egy harmonikus rezgőmozgást végző m tömeg összenergiája a következő módon írható fel:

$$E(t) = E_m(t) + V(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}Dx^2(t) = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Itt felhasználtuk, hogy a rugóerő konzervatív erő, így az összenergia

a rezgés során megmarad és egyenlő az egyensúlyi állapotban mozgó energiával. Ekkor $v_{max} = \omega A$.

Alkalmazzuk az előbbieket egydimenziós harmonikus hullámokra. A húr minden pontja a hullámzás következtében harmonikus rezgést végez. Jelölje $\Delta m = \mu \Delta x$ a rezgő tömeget, ami kifejezhető a μ lineáris sűrűséggel, valamint a húr elemi darabjának Δx hosszával.

Határozzuk meg azt az energia-áramot, ami a közeg adott keresztmetszetén áramlik keresztül. Ehhez írjuk fel a húr λ hosszúságú darabjának összenergiáját:

$$E = \int_0^\lambda \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 dx = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda \quad (3.14)$$

A J_E **energiaáram**, vagy **átáramlott teljesítmény** nem más, mint az egységnyi idő alatt átáramlott energia. Ahhoz, hogy a húr adott keresztmetszetén az egy hullámhosszban tárolt energia átáramoljon pontosan periódusidőnyi (T) időre van szükség. Tehát a $\Delta t = T$ idő alatti átlagos energiaáram:

$$\bar{J}_E = \frac{E}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad (3.15)$$

Itt v a hullám terjedési sebessége, és $\bar{J}_E$ az átlagos energiaáram.

Vezessünk be egy újabb hasznos fogalmat az **intenzitás** fogalmát.

Intenzitás:

Az egységnyi idő alatt a terjedési irányra merőleges egységnyi felületen keresztüláramló energiamennyiséget **intenzitás**nak nevezzük.

A 3.15 egyenlettel adott átlagos energia-áramot osszuk le a húr S keresztmetszetével. Az így kapott mennyiség a vizsgált hullám átlagos intenzitása:

$$\bar{I} = \frac{J_E}{S} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{S} \omega^2 A^2 v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \quad (3.16)$$

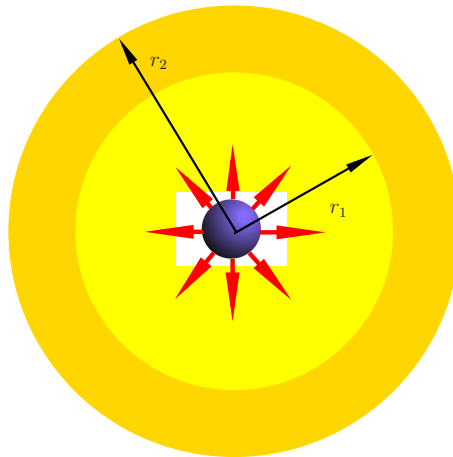
A 3.16 egyenletben figyelembe vettük, hogy a $\frac{\mu}{S}$ mennyiség a ρ sűrűség.

Az átlagos intenzitásra kapott összefüggés nem csak egydimenziós hullámokra igaz, ugyanezt az eredményt kapjuk síkbeli, vagy térbeli harmonikus hullámokra is. A továbbiak szempontjából külön kiemelandő, hogy az intenzitás a hullámmplitúdó négyzetével arányos.

3.3. Síkbeli és térbeli hullámok kinematikája

Az eddigiekben olyan hullámok leírásával foglalkoztunk, amelyekben a „zavar” egy dimenzióban terjedt tovább. A mindennapi életben, vagy a műszaki gyakorlatban azonban gyakran találkozunk olyan hullámokkal, amelyek síkban vagy térben terjednek szét. Az ilyen hullámok leírásával foglalkozunk a továbbiakban.

Gömbhullám Először vizsgáljuk meg mi történik, ha annak egy pontjába elhelyezünk egy olyan gumilabdát, amelynek belsejében időben harmonikusan változik a levegő nyomása. Ennek hatására a labda külső felszínének közelében hol csökken, hol növekszik a légnyomás. Ez a zavar természetesen tovaterjed, hullámmozgás alakul ki. Az ilyen hullámot **gömbhullámnak** nevezzük. Természetesen más módon is keltethetünk gömbhullámokat, a lényeg, hogy a hullámozgás hatására a közeg azonos fázisban mozgó részei egy gömbfelületen helyezkedjenek el. A 3.8. ábra szemlélteti a gömbhullámok keltésének fentebb leírt módját.



3.8. ábra. Gömbhullám keletkezése

Mit mondhatunk az ilyen gömbhullámok intenzitásáról? A gömbhullám kialakításához a külső erőknek (amelyek a labda belsejében lévő levegő nyomásváltozásait okozzák) munkát kell végezniük és az ennek megfelelő energia áramlik szét a hullámtérben. Jelölje ezt az energia-áramot J_E . A 3.8 ábrán jól látható, hogy ez az energiaáram minden időpillanatban egy gömb felszínén oszlik el. Tehát az intenzitás, ami

$$I = \frac{J_E}{4\pi r^2}$$

a gömbsugar négyzetével fordított arányban csökken. Mivel az intenzitás a hullámamplitúdó négyzetével arányos, így ez a két feltétel együttesen azt eredményezi, hogy a hullámamplitúdónak a sugárral fordított arányban kell csökkennie, azaz a harmonikus gömbhullámot a következő függvény írja le:

$$Z(r, t) = \frac{A_0}{r} \sin(kr - \omega t) \quad (3.17)$$

$Z(r, t)$ – a zavar mértéke a forrástól r távolságra a t időpillanatban

A_0 – a hullámamplitúdó a forrásnál,

k – harmonikus hullám hullámszáma,

ω – harmonikus hullám körfrekvenciája.

Síkhullám Végezzon egy elegendően nagy síklap harmonikus rezgőmozgást síkjára merőleges irányban. Ekkor az általa létrehozott zavar tovaterjed a lemezt körülvevő közegben. A hullámtér azonos fázisú pontjai ezen tovaterjedés során a lemez síkjával párhuzamos síkokon találhatók.

Itt meg kell jegyezni, hogy a lemez széleihez közel ez a párhuzamosság nem teljesül. Ennek okáról és következményeiről majd a későbbiekben lesz szó. Ebben a fejezetben ettől tekintsünk el.

A 3.9 ábra szemlélteti ezt a helyzetet. A hullám az $\underline{n}$ egységvektor irányában terjed v sebességgel. Mivel hullámterjedésről van szó, így azt csak a következő alakú függvény írhatja le:

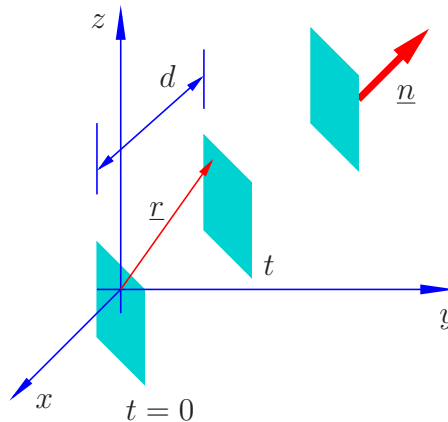
$$Z(\underline{r}, t) = f\left(t - \frac{d}{v}\right),$$

ahol a 3.9 ábra alapján $d = \underline{n} \cdot \underline{r}$. Ezt figyelembe véve síkhullámot a következő alakú függvény írhat csak le:

$$Z(\underline{r}, t) = f\left(t - \frac{\underline{n} \cdot \underline{r}}{v}\right).$$

Amennyiben harmonikus síkhullámról van szó, akkor az f függvény alakja ismert és a szokásos jelölésekkel:

$$Z(\underline{r}, t) = A \sin(k(\underline{n} \cdot \underline{r}) - \omega t) = A \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t). \quad (3.18)$$



3.9. ábra. Síkhullám keletkezése

A 3.18 egyenletben bevezettük a $\underline{k}$ hullámvektort, melynek nagysága megegyezik a hullámszámmal, míg iránya mindig az adott pontbeli hullámterjedési irány, jelen esetben $\underline{n}$.

3.4. Interferenciajelenségek.

Szuperpozíció elve:

A tapasztalat azt mutatja, hogy ha egy közegben két vagy több különböző forrásból származó hullám terjed, akkor a közeg pontjai az egyes hullámok által külön kiváltott rezgések ($Z_i(\underline{r}, t)$) algebrai összegének megfelelő eredő rezgést ($Z(\underline{r}, t)$) végeznek.

$$Z(\underline{r}, t) = \sum_i Z_i(\underline{r}, t).$$

Tehát hullámok találkozásakor rezgéseket kell összegezni „fázishelyesen”. Ez azt jelenti, amit már a *Rezgőmozgások* fejezetben is láttunk, hogy az eredő rezgés attól függ, hogy az összegzett rezgések fázisai hogyan viszonyulnak egymáshoz.

Hullámok interferenciája:

Hullámok egy pontban való találkozását interferenciának nevezzük.

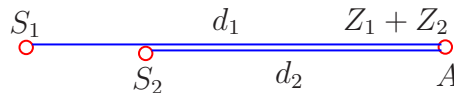
Vizsgáljuk meg két azonos frekvenciájú és hullámhosszúságú egyenes menti harmonikus hullám találkozását egy pontban. (Lásd a 3.10 ábrát.)

Az S_1 forrásból induljon ki a $Z_1(x, t)$ hullám,

$$Z_1(x, t) = A_1 \sin(kx - \omega t).$$

Az S_2 forrásból induljon ki a $Z_2(x, t)$ hullám,

$$Z_2(x, t) = A_2 \sin(kx - \omega t + \varphi_0).$$



3.10. ábra. Egyenes menti harmonikus hullámok interferenciája

Az S_1 forrásból induló hullám d_1 út megtétele után éri el az A pontot, míg az S_2 forrásból induló hullám d_2 út megtétele után. Az A -beli eredő rezgés a szuperpozíció elvének értelmében:

$$Z = A_1 \sin(kd_1 - \omega t) + A_2 \sin(kd_2 - \omega t + \varphi_0). \quad (3.19)$$

A továbbiakban egyszerűsítsük a feladatunkat úgy, hogy azonos amplitúdójú ($A_1 = A_2 = A$) hullámokkal foglalkozzunk, melyek között nincs kezdőfázis különbség ($\varphi_0 = 0$). Ebben az esetben:

$$Z = A \sin(kd_1 - \omega t) + A \sin(kd_2 - \omega t)$$

Használjuk fel a középiskolából ismert:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

összefüggést.

$$Z = 2A \cos \frac{k(d_1 - d_2)}{2} \sin \left(\frac{k(d_1 + d_2)}{2} - \omega t \right). \quad (3.20)$$

Látható, hogy az eredő rezgés ugyanolyan frekvenciájú, mint az egyes forrásokból érkező hullámok frekvenciája. Ami viszont az eredő rezgés amplitúdóját illeti, az már függ az egyes hullámok által megtett távolságok különbségétől és 0 és $2A$ között bármelyik értéket felveheti.

Vizsgáljuk meg mi a feltétele annak, hogy az eredő rezgés amplitúdója $2A$ legyen, azaz a két hullám az adott A pontban *erősítse* egymást! Ehhez az kell, hogy:

$$\cos \frac{k(d_1 - d_2)}{2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{k|d_1 - d_2|}{2} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Figyelembe véve, hogy $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ az előbbi feltétel egy szemléletesebb alakra hozható:

$$|d_1 - d_2| = 2n \frac{\lambda}{2}. \quad (3.21)$$

Erősítés feltétele:

Azonos amplitúdójú, frekvenciájú és hullámhosszúságú harmonikus hullámok, melyek között a kezdőfázis különbség 0, találkozásukkor akkor erősítik egymást, ha a hullámforrástól a találkozás pontjáig megtett utak különbsége egyenlő a hullámhossz felének páros számú többszörösével.

A továbbiakban vizsgáljuk, hogy mi a feltétele annak, hogy az eredő rezgés amplitúdója 0 legyen, azaz a két hullám az adott A pontban *kioltsa* egymást. Ehhez az kell, hogy:

$$\cos \frac{k(d_1 - d_2)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{k|d_1 - d_2|}{2} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Figyelembe véve, hogy $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ez a feltétel az alábbi alakra hozható:

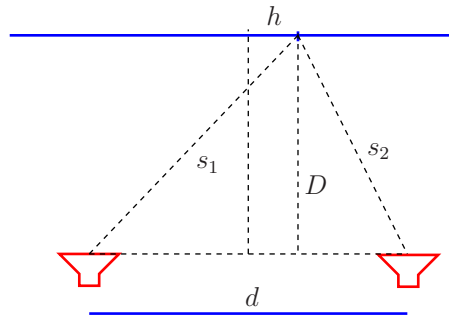
$$|d_1 - d_2| = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Kioltás feltétele:

Azonos amplitúdójú, frekvenciájú és hullámhosszúságú harmonikus hullámok, melyek között a kezdőfázis különbség 0, találkozásukkor akkor oltják ki egymást, ha a hullámforrástól a találkozás pontjáig megtett utak különbsége egyenlő a hullámhossz felének páratlan számú többszörösével.

3.3. példa: Egy kerítéstől $D = 10$ m-re két hangszóró van felállítva egymástól $d = 5$ m-es távolságban. A hangszórók azonos frekvenciájú hangot adnak ki. Azt tapasztaljuk, hogy a kerítésnél a két hangszóró felező merőlegesének vonalában a hangok erősítik egymást, és lassan mozogva a kerítés mellett $h = 1,2$ m-rel arrébb is erősítést kapunk. Mekkora a hang hullámhossza?

Megoldás: A feladatban leírtakat szemlélteti a 3.11 ábra. Abból, hogy a hang-



3.11. ábra. Két hangszóró interferenciája

szórók felező merőlegesénél erősítést tapasztalunk az következik, hogy a két hangszóró által kibocsátott hanghullámok között nincs kezdőfázis-különbség. Ha a felező merőleges és a kerítés közös pontjától $h = 1,2$ m-rel tovább megyünk újabb erősítést kapunk. Ez azt jelenti, hogy a két hanghullám által megtett utak különbsége éppen egy hullámhossznyi.

$$s_1 - s_2 = \lambda$$

Egyszerű geometriai megfontolások alapján felírható a keresett útkülönbség. (Lásd a 3.11 ábrát.)

$$s_1 = \sqrt{D^2 + \left(\frac{d}{2} + h\right)^2} = 10,66 \text{ m}$$

$$s_2 = \sqrt{D^2 + \left(\frac{d}{2} - h\right)^2} = 10,08 \text{ m}$$

Tehát az útkülönbség, ami egyben a hullámhossz is ez esetben:

$$s_1 - s_2 = \lambda = 0,58 \text{ m}$$

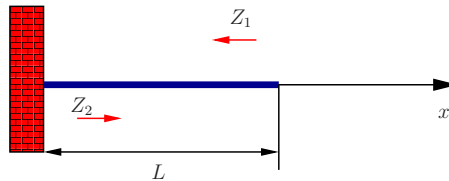
3.4.1. Állóhullámok

Az interferencia egy speciális esete az állóhullámok kialakulása. Vizsgáljuk egy L hosszúságú egyik végén befogott pálcán az állóhullámok kialakulását. (Lásd a 3.12 ábrát.) Keltsünk harmonikus hullámot a pálcán, amely az $x -$ tengely mentén balra halad! Írja le ezt a hullámot a $Z_1(x, t)$ függvény,

$$Z_1(x, t) = A \sin(-kx - \omega t).$$

A hullám elérve az origóba visszaverődik a pálcá rögzített végéről. Az eddig tanultak alapján tudjuk, hogy a bejövő hullám invertálódik, de amplitúdója nem változik. Jelölje a visszavert hullámot leíró függvényt $Z_2(x, t)$,

$$Z_2(x, t) = -A \sin(kx - \omega t).$$



3.12. ábra. Állóhullámok kialakítása egyik végén befogott pálcán

A bejövő és visszavert hullámok interferálnak egymással, és kialakul valamilyen eredő hullámmás a pálcán. A szuperpozíció elve alapján ez:

$$Z(x, t) = Z_1(x, t) + Z_2(x, t) = A(\sin(-kx - \omega t) - \sin(kx - \omega t)).$$

Ezt az ismert trigonometrikus összefüggések segítségével szorzattá alakítva a következő összefüggést kapjuk:

$$Z(x, t) = -2A \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (3.22)$$

Látható, hogy a visszaverődés törvénye miatt az $x = 0$ helyen $Z(x, t)$ mindig nulla, azaz az egyik peremfeltétel automatikusan teljesül. A kialakuló hullámmás alakja attól függ, hogy milyen kényszerek hatnak a pálcá másik végén, az $x = L$ helyen.

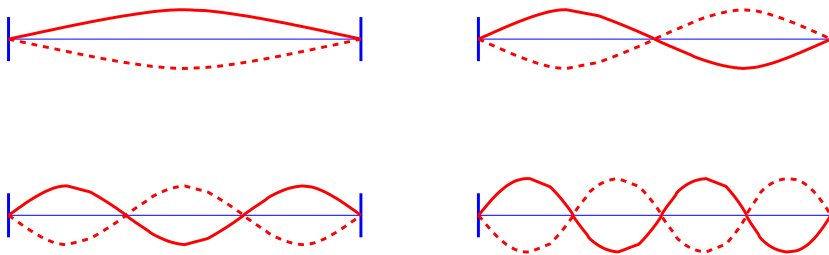
Mindkét végén rögzített pálca Ebben az esetben az $x = L$ helyen az eredő $Z(x, t)$ függvénynek minden időpillanatban azonosan nullának kell lennie. Ez csak úgy lehetséges ha:

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Az előbbi megoldás átfogalmazható másként is:

$$L = n \frac{\lambda}{2}.$$

Az első négy megoldást a 3.13 ábra mutatja.



3.13. ábra. Állóhullámok mindkét végén rögzített pálcán

Jól látható, hogy a megoldások nem az x tengely mentén haladó hullámok, hanem olyanak tűnik a helyzet mintha a pálca minden eleme a többitől függetlenül harmonikus rezgőmozgást végezne, melynek amplitúdója az x koordinátától függ. Az ilyen hullámokat nevezzük **állóhullámoknak**.

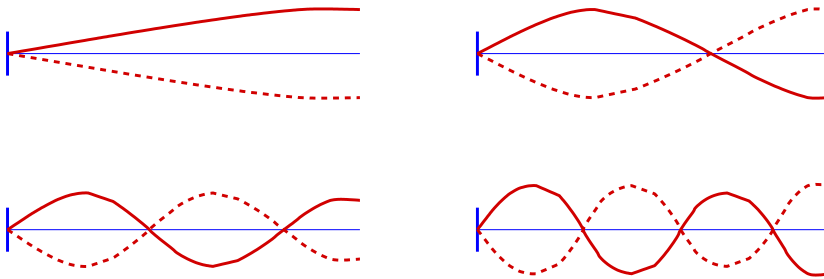
Az egyik végén rögzített pálca Ebben az esetben az eredő $Z(x, t)$ függvénynek maximumának kell lennie minden időpillanatban az $x = L$ helyen. Ez csak úgy lehetséges ha:

$$\sin(kL) = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Az előbbi megoldás átfogalmazható másként is:

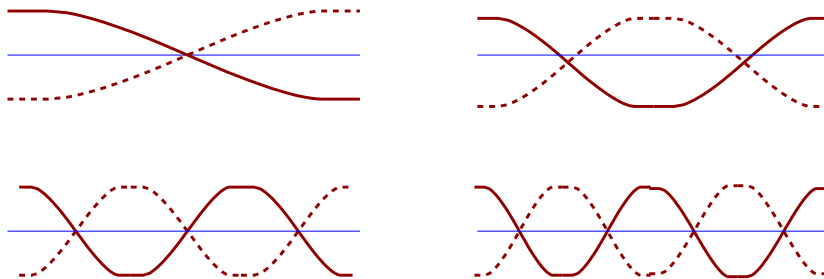
$$L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Az első négy megoldást a 3.14 ábra mutatja.



3.14. ábra. Állóhullámok egy végén rögzített pálcán

Mindkét végén szabad közeg állóhullámai Az eddigiekből kiderült, hogy az állóhullámok hullámhosszát meghatározzák a geometriai feltételek. Mindkét végén szabad közegben csak olyan állóhullámok alakulhatnak ki, amelyekben mind az $x = 0$, mind pedig az $x = L$ helyen maximális kitérés van. Ilyen hullámokat mutat a 3.15 ábra.



3.15. ábra. Mindkét végén szabad közeg állóhullámai

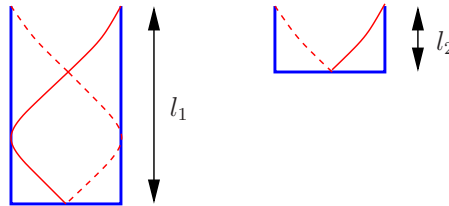
A 3.15 ábráról leolvasható, hogy ebben az esetben a következő feltételnek kell teljesülnie az állóhullámok hullámhosszára:

$$L = 2n \frac{\lambda}{4}.$$

Mivel a harmonikus hullámok λ hullámhossza és ν frekvenciája a hullámok v terjedési sebességén keresztül összefüggenek egymással ($v = \nu \cdot \lambda$), így a fenti, az állóhullámok hullámhosszára levezetett feltételek, korlátozásokat jelentenek a hullámok frekvenciájára is ($\nu_0 = \frac{v}{\lambda_0}$). Ezeket a frekvenciákat nevezzük a vizsgált rendszerek **sajátfrekvenciáinak**.

3.4. példa: Mindkét végén nyitott üveghengert vízzel teli edénybe merítünk. A henger másik végéhez rezgő hangvillát tartunk. A hengert folyamatosan kiemeljük a vízből. Közben két ízben hangerősödést észlelünk. A henger vízből kiálló részének hossza a két egymás utáni rezonancia esetén $l_2 = 36$ és $l_1 = 60$ cm. Mekkora a hangvilla rezgésszáma, ha a hangsebesség $c = 336$ m/s?

Megoldás: Rezonancia akkor alakul ki, ha állóhullámok tudnak kialakulni a henger belsejében. Mivel a víz felszínén csomópontnak kell lennie, míg a hangvillánál duzzadóhelynek, így a feladat két esetét a 3.16 ábra szemlélteti.



3.16. ábra. Állóhullámok egy üveghengerben

A 3.16 ábráról leolvasható, hogy a két rezonancia esetében mért hengerhosszak különbsége éppen a hanghullám hullámhosszának felével egyezik meg.

$$l_1 - l_2 = \frac{\lambda}{2}$$

Fejezzük ki a hullámhosszat a sebesség és a frekvencia segítségével.

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Az előző két összefüggés alapján a frekvencia:

$$f = \frac{c}{2(l_1 - l_2)} = 700 \text{ Hz.}$$

Vegyük észre, mindhárom konkrét esetben igaz a kialakuló állóhullámra, hogy az állóhullámok térben és időben való viselkedését leíró függvény felírható a következő alakban:

$$Z(x, t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \phi)$$

Helyettesítsük ezt a függvényt a 3.9 egydimenziós hullámegyenletbe. Ehhez szükségünk van a $Z(x, t)$ függvény hely szerinti és idő szerinti második deriváltjaira:

$$\frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \varphi(x) \sin(\omega t + \phi)$$

A 3.9 egyenletbe való helyettesítés után a következő összefüggést kapjuk:

$$\left\{ \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \varphi(x) \right\} \sin(\omega t + \phi) = 0$$

Az $\frac{\omega^2}{v^2}$ kifejezés éppen a hullámszám négyzete (k^2). Továbbá a fenti egyenletnek minden időpillanatban fenn kell állnia, ezért teljesülnie kell minden időpillanatban, hogy:

Egydimenziós állóhullámok hullámegyenlete:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \varphi(x) = 0 \quad (3.23)$$

A 3.23 egyenlet általánosan leír minden olyan esetet, amikor állóhullám alakulhat ki egy dimenzióban. Megoldásához, természetesen ismernünk kell a közeg két végénél $\varphi(x)$ konkrét értékeit.

3.5. A Huygens-Fresnel elv

A hullámmozgás legáltalánosabb fizikai törvényét Huygens és Fresnel fogalmazták meg. Ez az elv alkalmas arra, hogy a hullámok terjedését bármilyen körülmények között leírja.

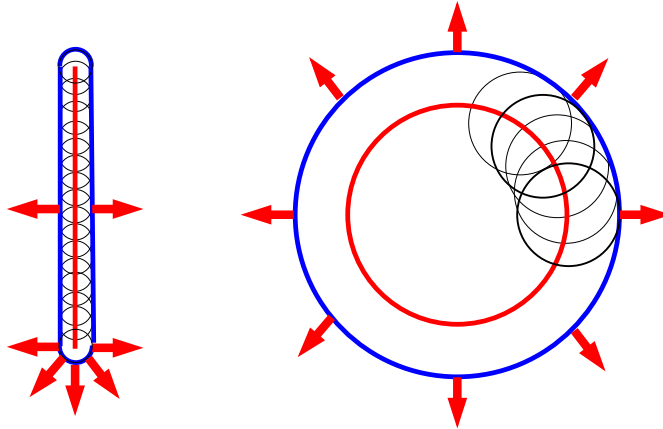
Huygens-Fresnel elv:

A hullámfelület minden egyes pontja minden időpillanatban elemi gömbhullámok kiindulópontja, és ezen elemi gömbhullámok interferenciájaként áll elő a későbbi hullámkép.

Ez az elv magyarázatot ad arra, hogy miért nincs tökéletes síkhullám, érthetővé válik ennek alapján a hullámok azon tulajdonsága, hogy képesek behatolni akadályok mögé stb.

A 3.17 ábrán a piros színű hullámfelület minden pontjából elemi gömbhullám indul ki, és ezen elemi gömbhullámok interferenciájaként (ezen esetekben egyszerű burkológörbeként) áll elő a későbbi hullámkép (késsel jelölve).

Gömbhullám esetében szépen látszik, hogy a későbbi hullámfelület is tökéletes gömb, míg a síkhullám esetében a későbbi hullámfelület már



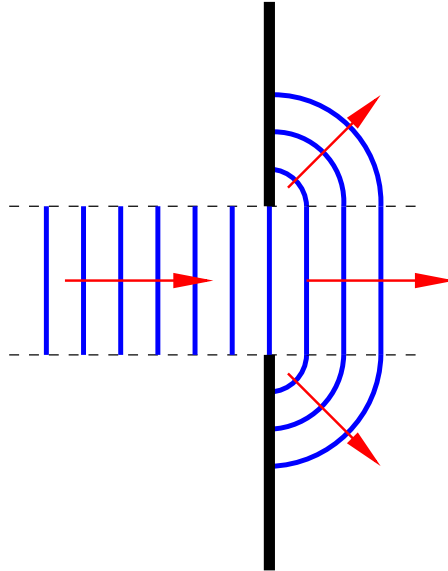
3.17. ábra. Huygens-elv alkalmazása síkhullámra (bal) és gömbhullámra (jobb)

nem tökéletesen sík. A zavart keltő síklemez szélein a Huygens-Fresnel elv értelmében szükségszerűen van torzulás. Ez azt jelenti, hogy nincs tökéletes síkhullám.

Tapasztalatból tudjuk, hogy egy hangforrás hangját akkor is meghalljuk, ha köztünk és a forrás között valamilyen, a hang számára áthatolhatatlan akadályt helyezünk el, és mi az árnyéktérben tartózkodunk. A hullámok behatolnak az akadály „mögé”. Ezt a jelenséget nevezzük **diffrakciónak**, vagy elhajlásnak.

A 3.18 ábrán jól látható, hogy a rés széleinél az eredeti síkhullám elhajlik, és a hullám eléri a rés szélei által „árnyékolt” térrészt is.

A pontosabb elemzés azt mutatja, hogy a rés mögötti „árnyékolt” térrész csak akkor érhető el a hullámok számára teljes egészében, ha a rés széle egyetlen pontnak tekinthető a Huygens-Fresnel elv értelmében, azaz csak egyetlen elemi gömbhullám indul ki ebből a pontból. Ennek az a feltétele, hogy a rés széle a hullám hullámhosszánál sokkal kisebb legyen. Általában igaz az, hogy az elhajlási jelenségek akkor válnak jelentőssé, ha a hullám útjába került akadályok mérete összemérhető a hullám hullámhosszával.



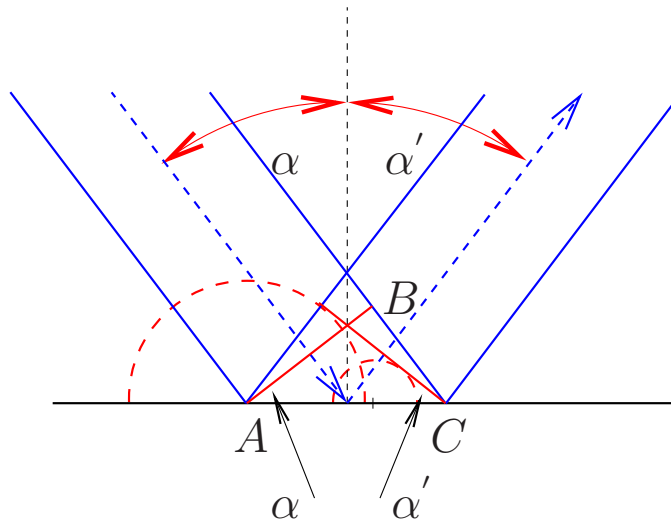
3.18. ábra. Síkhullám elhajlása rés széléin

Visszaverődés törvénye Már az egy dimenzióban terjedő hullámok esetében is láttuk, hogy a hullám, ha különböző sűrűségű közegek határához érkezik, akkor egy része visszaverődik, egy része áthatol a közeghatáron. Vizsgáljuk ezt a jelenséget síkhullámok esetében a Huygens-Fresnel elv alapján.

Érkezzen egy sík közeghatárhoz α beesési szöggel és v sebességgel (lásd a 3.19 ábrát) síkhullám. A hullám kiválasztott hullámfrontja az A pontban éri el először a közeghatárt. A Huygens-Fresnel elv értelmében ekkor az A pontból elemi gömbhullám indul ki. A hullámfelület B pontja csak egy bizonyos Δt idő eltelte után éri el a határfelületet. Ezalatt a Δt idő alatt az A pontból kiindult elemi gömbhullám energiája már egy $v\Delta t$ sugarú gömbfelületen oszlik el.

A vizsgált hullámfelület A és B pontok közötti pontjai különböző időpillanatokban érik el a közeghatárt és szintén elemi gömbhullámokat keltenek. Ezen elemi gömbhullámok burkolója adja a visszavert hullám hullámfelületét. A 3.19 ábrán csak két ilyen elemi gömbhullám szerepel, de ez alapján is jól látható, hogy a C pontból kell érintősíkot szerkeszteni az A pontból kiindult $v\Delta t$ sugarú gömbhöz.

A beesési szög és az A pontnál mért szög merőleges szárú szögek és



3.19. ábra. Hullám-visszaverődés magyarázata a Huygens-Fresnel elv alapján

ezért egyenlőek. Ugyanígy a visszaverődés szöge valamint a C pontnál mért szög is merőleges szárú szögek, így itt is fennáll az egyenlőség.

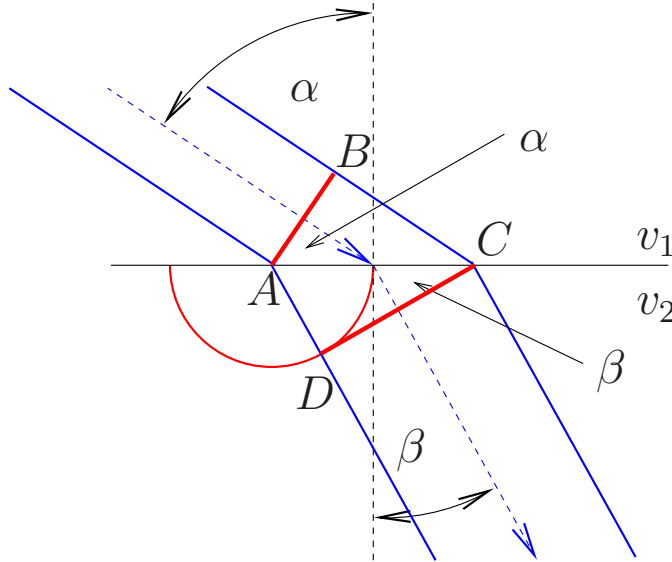
Mivel a beeső és visszavert hullámok ugyanabban a közegben terjednek, így sebességük is ugyanaz. Ebből az következik, hogy az A pontnál mért α szög valamint a C pontnál mért α' szögek egyenlőek.

Visszaverődés törvénye:

Hullámok visszaverődésekor a beeső hullám valamint a visszavert hullám ugyanakkora szöget zár be a beesési merőlegessel.

Törési törvény Fentebb megvizsgáltuk a visszaverődés törvényét. Most térjünk át a törés esetére. Tekintsünk egy sík közeget, melynek egyik oldalán a hullámok v_1 sebességgel terjednek, míg a másik oldalán v_2 sebességgel. Tegyük fel, hogy $v_1 > v_2$. A beeső síkhullám által és a beesési merőleges által bezárt szög legyen α . Ezt az esetet szemlélteti a 3.20 ábra.

A beeső hullám vizsgált hullámfrontja először az A pontban éri el a közeget. Ekkor elemi gömbhullám indul az A pontból a Huygens-Fresnel elv értelmében. Ez a gömbhullám v_2 sebességgel terjed a közegethatáron



3.20. ábra. Hullámtörés magyarázata a Huygens-Fresnel elv alapján

való áthaladás után. Természetesen a beeső hullám vizsgált hullámfelületének minden pontja előbb-utóbb eléri a közeghatárt, és szintén elemi gömbhullámok kiindulópontjaivá válnak. A visszaverődésnél leírtakhoz hasonlóan itt is ezen elemi gömbhullámok burkolója adja a megtört hullám hullámfrontját, azaz a C pontból kell érintősíkot szerkeszteni az A pontból kiindult elemi gömbhullámhoz.

Míg a beeső hullám hullámfelületének B pontja eléri a C pontot Δt idő alatt, addig az A pontból kiindult elemi gömbhullám sugara $v_2 \Delta t$ nagyságúra nő. Fejezzük ki az $\overline{AC}$ szakasz hosszát egyszer az ABC háromszög, egyszer pedig az ADC háromszög segítségével. Ezek szerint:

$$\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AD}}{\sin \beta}.$$

Vegyük figyelembe, hogy $\overline{BC} = v_1 \Delta t$ és $\overline{AD} = v_2 \Delta t$. Azaz:

$$\frac{v_1 \Delta t}{\sin \alpha} = \frac{v_2 \Delta t}{\sin \beta}.$$

További átalakítások után:

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}. \quad (3.24)$$

Törés törvénye:

Hullámok törésekor érvényes a következő törési törvény:

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{konstans}.$$

3.6. Hullámcsomag

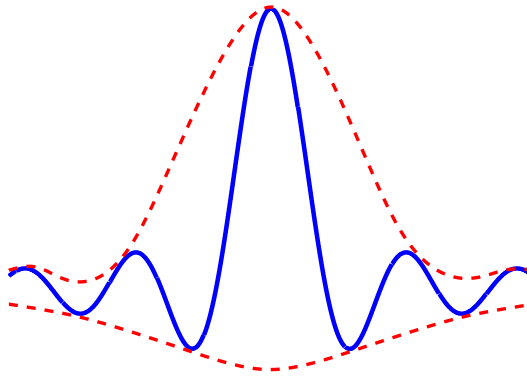
Ritkán találkozunk olyan hullámokkal, amelyeket tökéletesen harmonikus hullámoknak lehetne tekinteni. Amennyiben a vizsgált hullámok periódusidejéhez képest a hullámot keltő zavar elég hosszú ideig harmonikusan változik, a keletkező hullámot jól közelíthetjük harmonikus hullámmal.

Amennyiben a zavar csak rövid ideig tart, az ennek következtében kialakuló hullám térbeli mérete is korlátos lesz. Tehát semmiképpen sem írható le harmonikus függvényekkel az ilyen típusú hullám. Az ilyen, térben és időben korlátos, hullámokat **hullámcsomagnak** nevezzük. Ilyen hullámcsomag például a fejezet elején már többször tárgyalt gumikötélen végigszaladó impulzus is.

Bebizonyítható, hogy az ilyen hullámcsomag felfogható úgy, mint „nagyon sok” különböző frekvenciájú és hullámhosszúságú harmonikus hullám összege. Mivel nem áll rendelkezésünkre az a matematikai eszköztár, melynek segítségével az előző állítást igazolni tudnánk, ezért inkább fordítva közelítjük meg a problémát. Megvizsgáljuk milyen hullám alakul ki, ha olyan harmonikus hullámokat adunk össze, amelyeknek hullámszámai előre meghatározott értékek közé esnek. Egy ilyen hullámcsomagról készült „pillanatfelvételt” mutat a 3.21 ábra.

A 3.21 ábra egy adott pillanatban mutatja a hullámcsomagot. Ha egy későbbi időpillanatban is készítünk egy pillanatképet a csomagról, akkor azt látjuk, hogy az egész csomag a hullámterjedés irányában elmozdul valamilyen sebességgel és a csomagon belül az egyes maximumok is elmozdulhatnak a hullámcsomag burkolójához képest. Az egész csomag mozgását jellemző sebességet **csoportssebességnek** nevezzük.

A fázissebesség esetében ismert a következő összefüggés:



3.21. ábra. Harmonikus hullámok összegeként előállított hullámcsomag

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Ebben a jegyzetben nem foglalkozunk azzal, hogy a csoportsebesség kiszámolására vonatkozó összefüggést levezessük, csak az eredményt közöljük.

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \sim \frac{d\omega}{dk} \quad (3.25)$$

Vannak olyan közegek a természetben, és ezekben a közegekben keltethetőek olyan hullámok, amelyek esetében a harmonikus hullám fázissebessége és hullámhossza nem függetlenek egymástól. (Például vízfelszíni hullámok, vagy a fényhullámok esete ilyen viselkedést mutat.) Ezt a jelenséget **diszperzió**nak nevezzük.

Diszperzió:

Amikor egy közegben a terjedő harmonikus hullámok fázissebessége és hullámhossza függenek egymástól, akkor ebben a közegben diszperzióról beszélünk.

Sok esetben a fázissebesség és a hullámszám ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$) közti összefüggést ($v(k)$) az úgynevezett *diszperziós relációt* nehéz meghatározni. Számunkra

most az a fontos, hogy a diszperzió következtében egy hullámcsomag csoportsebessége, valamint a csomagot alkotó harmonikus hullámok sebessége különbözik egymástól. Ugyanis egy harmonikus hullám körfrekvenciájára írható, hogy:

$$\omega = k \cdot v(k)$$

hiszen a diszperzió miatt a fázissebesség a hullámszám (hullámhossz) függvénye.

Számoljuk ki ebből a csoportsebességet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v(k) + k \frac{dv(k)}{dk}.$$

Látható, hogy abban az esetben, ha $\frac{dv(k)}{dk} < 0$ a csoportsebesség kisebb mint a fázissebesség. Ilyenkor *normális diszperzióról* beszélünk.

Amikor $\frac{dv(k)}{dk} > 0$ a csoportsebesség nagyobb mint a fázissebesség. Ez az eset az *anomális diszperzió* esete. Diszperzió hiányában a csoportsebesség és fázissebesség megegyeznek egymással.

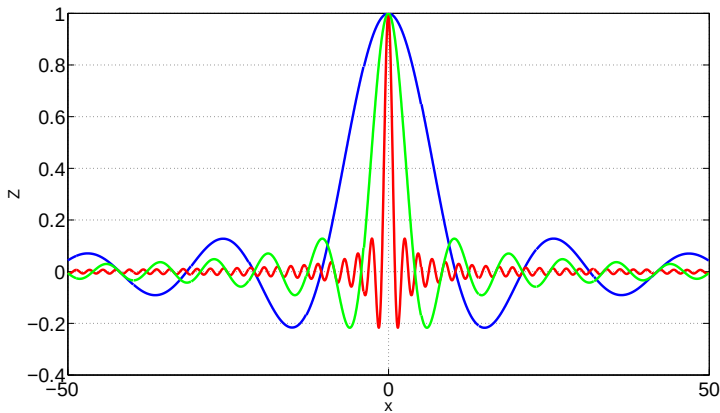
Térjünk még vissza a hullámcsomag általunk vázolt előállítási módjához, amikor is egy adott hullámhossz tartományból választott különböző hullámhosszúságú harmonikus hullámokat adtunk össze. Vizsgáljuk meg, milyen hatással van a hullámcsomag alakjára (burkolójára) a hullámhossz tartomány szélessége ($\Delta\lambda$). A 3.22 ábra három azonos módon előállított hullámcsomag alakját mutatja. A különbség közöttük csak annyi, hogy a hullámhossz tartomány amiből az összegzett harmonikus hullámokat vettük, különbözik. A kék görbe esetében a hullámhossz tartomány szélessége a legnagyobb, a piros esetében a legkisebb, míg a zöld esetében egy köztes érték.

A görbék alapján levonhatjuk azt az egyébként általános következtetést, hogy a szélesebb hullámhossztartományhoz, vagy ami ugyanaz keskenyebb hullámszám tartományhoz (Δk), térben lassabban lecsengő hullámcsomag tartozik.

Jellemezze a térben lecsengő hullámcsomag méretét Δx .

Δx sokféleképpen definiálható. A lényeg, hogy bárhogyan is definiáljuk az elején, utána mindig ezt a definíciót használjuk!

A fentebb megsejtett összefüggés így is megfogalmazható:



3.22. ábra. Hullámcsomagok

Határozatlansági reláció:

Minél keskenyebb sávból válogatjuk a hullámcsomagot alkotó harmonikus hullámok hullámszámain, annál nagyobb lesz a hullámcsomag térbeli kiterjedése. Ezt az általános összefüggést nevezzük a hullámoknál határozatlansági relációnak. Matematikai alakja:

$$\Delta x \Delta k \sim \text{konstans} \quad (3.26)$$

A 3.26 összefüggésben szereplő konstans konkrét értéke függ Δx konkrét definíciójától!

3.7. Mozgó források esete

Eddig nem foglalkoztunk azzal, hogy milyen hatással van a megfigyelt hullámokra az, hogy a hullámokat keltő forrás mozgásban van, vagy az hogy a megfigyelő mozog a hullám forrásához képest.

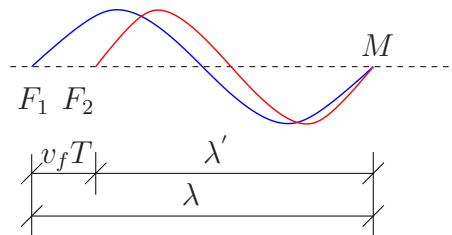
Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a hullámforrás közeledik a megfigyelőhöz állandó v_f sebességgel. Ezt a helyzetet szemlélteti a 3.23 ábra. A hullámforrás által keltett hullámok frekvenciáját jelölje f . Terjedési sebességük legyen c .

Ha a forrás állna, akkor a megfigyelő éppen λ hullámhosszúságú hullámokat észlelné. Mivel a forrás közeledik a megfigyelőhöz, így a megfigyelő éppen annnyival rövidebb hullámhosszúságú hullámokat észlel (λ') mint, amennyivel egy periódusidő alatt közeledik hozzá a forrás:

$$\lambda' = \lambda - v_f T.$$

Áttérve a frekvenciákra, valamint figyelembe véve a periódusidő és a frekvencia közötti kapcsolatot a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{c}{f'} = \frac{c}{f} - \frac{v_f}{f}.$$



3.23. ábra. Doppler-effektus. Mozgó forrás esete.

Fejezzük ki a megfigyelő által érzékelt f' frekvenciát:

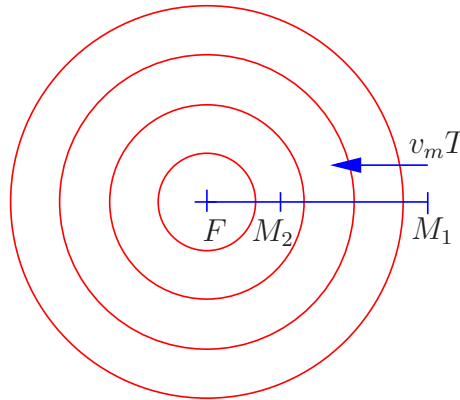
$$f' = f \frac{c}{c - v_f}$$

Látható, hogy a tapasztalattal összhangban azt kaptuk, hogy ha a forrás közeledik a megfigyelőhöz, akkor a megfigyelő nagyobb frekvenciájú, azaz rövidebb hullámhosszú hullámokat észlel.

Eredményünk helyesen értelmezi a távolodó forrás esetét is, csak az összefüggésekbe v_f helyére negatív előjelű sebességet kell írni.

Most pedig térjünk át arra az esetre, amikor a megfigyelő közeledik a forráshoz állandó v_m sebességgel, míg a forrás egy helyben áll. A forrás által keltett hullámok frekvenciáját jelölje f , terjedési sebességüket pedig c .

Ha a megfigyelő állna, akkor Δt idő alatt a hullám hatására $f \Delta t$ darab teljes periódusú rezgést érzékelne, mivel a frekvencia az egységnyi idő alatt



3.24. ábra. Doppler-effektus. Mozgó megfigyelő esete.

bekövetkezett teljes periódusok számát adja meg. Amikor a megfigyelő közeledik a forráshoz, akkor annnyival több rezgést észlel a Δt idő alatt, amennyi „ráfér” az általa megtett $v_m \Delta t$ útra. Egy ilyen „rezgés” térbeli hossza éppen a hullámhossz. Tehát:

$$f' \Delta t = f \Delta t + \frac{v_m \Delta t}{\lambda}.$$

Tudjuk, hogy a hullámhossz kifejezhető a frekvenciával és a sebességgel:

$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

Ezért:

$$f' = f + \frac{v_m f}{c} = f \frac{c + v_m}{c}.$$

Újfent a tapasztalattal megegyező eredményt kaptunk.

Eredményünk most is helyesen értelmezi a távolodó megfigyelő esetét is, csak az összefüggésekbe v_m helyére negatív előjelű sebességet kell írni.

Mivel a forrás és a megfigyelő mozgása egymástól függetlenek, így hatásukat egyszerűen összevonhatjuk egy összefüggésbe:

$$f' = f \frac{c + v_m}{c - v_f}. \quad (3.27)$$

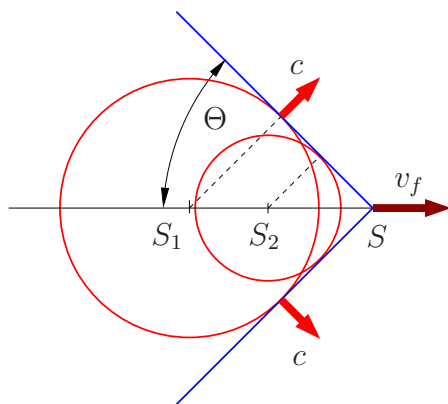
3.5. példa: Egyenes pályán 54 km/h sebességgel haladó vonat hosszú sípjelet bocsát ki, amelynek frekvenciája 450 Hz. Milyen magasnak hallja ezt a vonattal szemben haladó 90 km/h sebességű expresszen ülő megfigyelő? A hang terjedési sebessége 340 m/s.

Megoldás: Ha a forrás és a megfigyelő is mozognak egymás felé, akkor az észlelt hangmagasságra a következő összefüggés érvényes:

$$f' = f \frac{c + v_m}{c - v_f}.$$

Behelyettesítés után az észlelt frekvenciára 505 Hz értéket kapunk.

Vegyük észre, hogy a (3.27) összefüggés elveszti értelmét, ha a hangforrás az általa keltett hang sebességénél nagyobb sebességgel, vagy azzal megegyező sebességgel mozog. Ilyenkor **szuperszonikus hangforrásról** beszélünk.



3.25. ábra. Szuperszonikus hangforrás és a Mach-kúp

Ennek az esetnek a megértéséhez hívjuk újra segítségül a Huygens-Fresnel elvet. Tekintsük ehhez a 3.25 ábrát. Az ábrán az a pillanat látható, amikor a hangforrás az S pontban van. A korábbi időpillanatok egyikében az S_1 pontban volt, és az általa keltett hanghullám egy elemi gömbhullámot

indított útjára. Az alatt a Δt idő alatt, míg a hangforrás az S_1 pontból az S pontba jutott, az S_1 pontban keltett gömbhullám sugara $c\Delta t$ nagyságúra nőtt.

Az S_1 és S pontok közötti minden pontban keltett a mozgó hangforrás elemi gömbhullámokat, és ezek burkolója adja a hullámtér képét. A 3.25 ábráról leolvasható, hogy a hullámtér egy kúp belsejére korlátozódik, melynek csúcsában található a szuperszonikus hangforrás, mintegy lehalgyva a saját maga által keltett hullámokat. Ezt a kúpot nevezzük **Mach-kúp**nak.

A 3.25 ábra alapján kiszámolható a Mach-kúp nyílásszöge. Mialatt a hangforrás az S_1 pontból eljutott az S pontba, vagyis megtett $v_f\Delta t$ utat, az alatt az S_1 pontban keltett elemi gömbhullám sugara $c\Delta t$ nagyságúra nőtt. Felírhatjuk, hogy:

$$\sin \Theta = \frac{c\Delta t}{v_f\Delta t} = \frac{c}{v_f}.$$

A Mach-kúp nyílásszöge a Θ szög kétszerese.

3.8. Kérdések és feladatok

3.8.1. Elméleti kérdések

1. Miért tekinthetjük transzverzális hullámnak a gitár húrján terjedő hullámot?
2. Hogyan lehet kialakítani longitudinális hullámzást egy spirálrugón?
3. Mi a különbség a transzverzális és longitudinális hullámok között?
4. Hányszorosára kell növelni egy feszített húr esetében a feszítőerőt, hogy a húr mentén terjedő hullámok sebessége a kétszeresére nőjön?
5. Egy feszített húron két hullám halad egymással ellentétes irányban. Visszaverődhetnek ezek egymáson?
6. Ha egy kifeszített gumikötél egyik végét másodpercenként háromszor mozdítjuk fel-le, akkor a kötélen kialakult hullámok periódusideje mekkora lesz?
7. Tekintsünk egy feszített húr, melynek egyik végét harmonikusan rezgetjük adott teljesítménnyel. Hogyan változik a hullám amplitúdója ha a rezgetés teljesítményét megkétszerezzük? Változik-e a hullám terjedési sebessége?
8. Mi történik egy feszített húron terjedő hullámzás hullámhosszával,

- ha a hullámozás frekvenciáját megkétszerezzük? (Tegyük fel, hogy a kötélen a feszítőerő eközben nem változik.)
9. Mi történik egy feszített húron terjedő hullámozás terjedési sebességével, ha a hullámozás frekvenciáját megkétszerezzük? (Tegyük fel, hogy a kötélen a feszítőerő eközben nem változik.)
 10. Fémben terjedhetnek mind longitudinális mind transzverzális hullámok, viszont folyadék belsejében csak longitudinálisak. Mi lehet ennek az oka?
 11. Ha egy pontszerű hangforrástól háromszor olyan messzire távolodunk, mint eddig voltunk, hogyan változik meg a fülünk által érzékelt hang intenzitása?
 12. Miért kisebb mindig az intenzitása a visszhangnak, mint az eredeti hangnak?
 13. Amikor hullámok kioltják vagy erősítik egymást, megmarad-e a hullámok létrehozására befektetett energia?
 14. Mindkét végén rögzített húron állóhullámot alakítunk ki. Azt tapasztaljuk, hogy a húr egyik végétől a másik végének irányában nincs energiaáramlás. Hol van az állóhullám kialakításába fektetett energia?
 15. Mindkét végén rögzített húron állóhullámot alakítunk ki. Milyen mozgást végeznek a húr egyes pontjai? (Kivéve a csomópontokat?)
 16. Egy repülőgép tervező arra lett figyelmes, amikor egy kétmotoros gép hangját vizsgálta, hogy a hang hol felerősödik, hol elgyengül. Mi lehet a jelenség magyarázata?
 17. Bizonyára mindenki ismeri azt a jelenséget, hogy ha nedves ujjal körözzünk egy talpas pohár szélén, akkor az kellemes hangot adhat ki. Mi a jelenség magyarázata? Változtatható ezen hang frekvenciája?

3.8.2. Kidolgozott feladatok

3.1. feladat: Egy fémhuzalban terjedő transzverzális hullámozgás hatására a huzal alakját a $t = 0$ s időpillanatban a következő függvény írja le:

$$Z = \frac{6}{x^2 + 3}$$

(x jelöli a hullám terjedési irányát, míg Z a zavar irányát. Mindkét mennyiség SI mértékegységekben értendő.) Írja fel a huzalon terjedő hullámot leíró $Z(x, t)$ összefüggést, ha az x -tengely negatív irányában halad $v = 4,5 \text{ m s}^{-1}$ sebességgel!

Megoldás: A fejezet elején elmondottak alapján a következő összefüggés adja meg a huzalon terjedő transzverzális hullám térbeli és időbeli viselkedését:

$$Z(x, t) = \frac{6}{(x + vt)^2 + 3} = \frac{6}{(x + 4,5t)^2 + 3}.$$

(Vegyük észre, hogy ha a pozitív irányban terjedő hullámok sebességét vettük pozitívnak, akkor a negatív irányban terjedőké negatív kell hogy legyen. Ez magyarázza az eredményben a sebesség előtti pozitív előjelet.)

3.2. feladat: Egy egydimenziós hullámmozgást ír le a következő összefüggés:

$$Z(x, t) = 5e^{-(x+5t)^2}$$

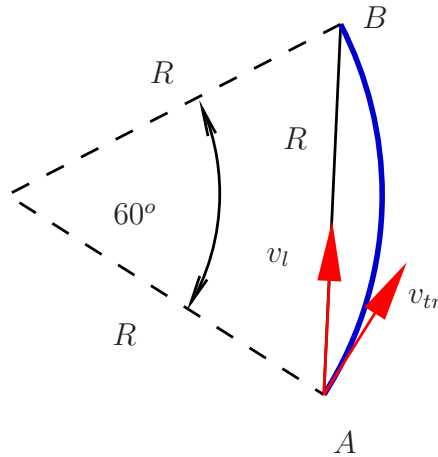
(Minden mennyiség SI egységekben értendő.) Határozza meg a hullámterjedés irányát valamint a hullám terjedési sebességét!

Megoldás: Mivel az idő- és térkoordináta közötti összefüggés $(x + 5t)$ hullámterjedésre utal, így a kérdésekre a válasz megadható a tanultak alapján. A hullám terjedési sebessége $v = 5 \text{ m s}^{-1}$, míg a terjedés iránya az x -tengely negatív tartományának iránya.

3.3. feladat: Az A és B pontok a Föld felszínének pontjai. Azonos hosszúsági körön fekszenek, szélességi pozíciójuk között az eltérés éppen 60° . Tegyük fel, hogy az A pontból földrengés indul ki. Ennek hatására a felszínen transzverzális rengési hullámok terjednek $4,5 \text{ km s}^{-1}$ sebességgel, míg a Föld belsejében longitudinális hullámok $7,8 \text{ km s}^{-1}$ sebességgel. Milyen típusú hullámot érzékelnek először a B -beli szeizmográfiai központban? Milyen időkülönbséggel érzékelik a két típusú rengési hullámot B -ben? (A Föld sugara jó közelítéssel 6370 km -nek vehető.)

Megoldás: A feladatban leírt helyzetet a 3.26. ábra szemlélteti. Ebből látható, hogy a longitudinális hullámoknak 6370 km távolságot kell megtenniük, míg eljutnak A -ból B -be, mivel az ábrán látható háromszög egyenlő oldalú. A transzverzális hullámok a feladat szövege alapján a felszínen terjednek, így az általuk megtett út:

$$s_{tr} = R \cdot \varphi = 6370 \cdot \frac{\pi}{3} \sim 6667 \text{ km}.$$



3.26. ábra. Rengési hullámok terjedése

A longitudinális hullámok sebessége a nagyobb és rövidebb utat is kell megtenniük, így ezeket érzékelik először B -ben.

Az időkülönbség, ami eltelik a két típusú hullámzás érzékelése között B -ben:

$$\Delta t = \frac{s_{tr}}{v_{tr}} - \frac{s_l}{v_l} \sim 665 \text{ s} \sim 11 \text{ min.}$$

3.4. feladat: Egy hangszóró egy nagy falfelülettel szembefordítva 75 Hz-es hangot ad. A fal és a hangszóró között 3 helyen halkul el a hang. (A falat tökéletesen visszaverőnek tételezzük fel.) Milyen messze van a hangszóró a faltól?

Megoldás: A feladatbeli szituációt szemlélteti a 3.27 ábra.

A 3.27 ábráról leolvasható, hogy:

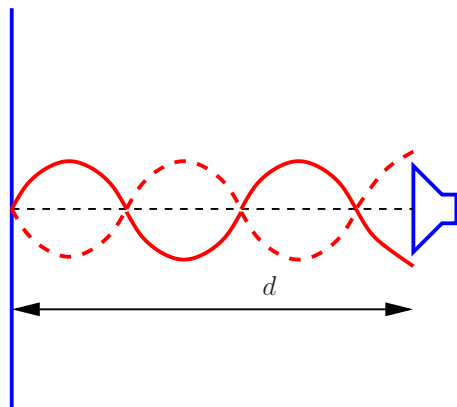
$$d = \frac{7}{4}\lambda.$$

A hangszóró által keltett hang hullámhossza meghatározható:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 4,53 \text{ m.}$$

Mindezt figyelembe véve:

$$d = 7,93 \text{ m.}$$



3.27. ábra. Állóhullám fal és hangszóró között

3.8.3. Gyakorló feladatok

1. Két azonos szinuszhullám mozog azonos irányban egy egyenes mentén. Hullámhosszuk 3 m, sebességük 2 m/s. Mindkét hullám azonos pontból indult ki, csak a második késve az elsőhöz képest. Határozza meg a második hullám azon legkisebb késését az elsőhöz képest, amely mellett az eredő hullám amplitúdója éppen megegyezik a két összegzett hullám amplitúdójával, azaz 3 m!
2. Két párhuzamos vályúban egy-egy víz hullám halad. Frekvenciájuk és sebességük rendre 5 Hz, ill. 10 Hz és 3,6 m/s, ill. 4,8 m/s. Egy adott pillanatban mindkét vályúban ugyanazon pontban hullámtaraj figyelhető meg. Mikor ismétlődik meg ez a jelenség ugyanazon pontban? Milyen távolságban ismétlődik ez ugyanabban a pillanatban?
3. 30 cm amplitúdójú és 3 s periódusidejű harmonikus víz hullám érkezik egy mólóhoz, amelyről egy zsinórra erősített kis ólomsúly lóg le. A súly nyugodt vízfelszín esetén 6 cm mélyen van a vízben. Mennyi ideig van a víz alatt óránként az adott amplitúdójú hullámverés mellett?
4. Víz felszínén két, egymástól 3 cm távolságban levő, teljesen egyforma és azonos körülmények között működő hullámkeltővel felületi hullámokat hozunk létre. Az egyes hullámforrások által keltett hullámok hullámhossza 6 cm. Mit tapasztalunk abban a pontban, amely az egyik gerjesztési helytől 12 cm, a másiktól pedig 9 cm-re van?
5. Oldjuk meg az előző feladatot abban az esetben, ha a hullámkeltőket

- úgy állítjuk be, hogy amikor az egyik maximálisan belenyúlik a vízbe, a másik éppen maximálisan kiemelkedik belőle.
6. Két, egymástól 15 cm távolságra levő, teljesen egyforma és azonos körülmények között működő hullámkeltő esetén határozzuk meg, hogy a két hullámforrást összekötő egyenesen hol helyezkednek el a kioltási helyek. ($c=0,6$ m/s, $l=6$ cm)
 7. Egy húrt kétfelé vágunk. A darabokat mindkét végén rögzítve és kifesztítve azt tapasztaljuk, hogy a rövidebb darabon kialakuló hullámok közül a legkisebb frekvenciájú hullám frekvenciája 256 Hz, a hosszabb darabon kialakuló hullámok közül a legkisebb frekvenciájú hullám frekvenciája 440 Hz. Mekkora lenne a mindkét végén rögzített és kifesztített egész húr legkisebb sajátfrekvenciája? Milyen hosszú volt eredetileg a húr?
 8. Határozzuk meg azokat a frekvenciákat, amelyekre az egyik végén lezárt, levegővel teli l hosszúságú cső rezonál. ($l=1,65$ m, $c=330$ m/s)
 9. Rugalmas fonálban a hullám terjedési sebességét a fonalat feszítő erő, a fonal keresztmetszete és a fonal anyagának sűrűsége határozza meg. Mekkora erővel kell feszíteni az $l=1,5$ m hosszúságú, $A=0,1$ mm² keresztmetszetű acélhúrt, hogy 400 Hz frekvenciájú hangot adjon? A fonal anyagának sűrűsége 7,5 kg/dm³.
 10. Egy húr 400 Hz alapfrekvenciával rezeg. Hol kell leszorítani, hogy 800 illetve 1200 Hz frekvenciájú rezgéseket adjon?
 11. Milyen hullámhosszúságú és frekvenciájú hangot észlel a nyugvó megfigyelő, ha egy 400 Hz frekvenciájú hangforrás 72 km/h sebességgel közeledik feléje? A hanghullámoknak a közeghez viszonyított sebessége a tapasztalat szerint a hangforrás sebességétől függetlenül 340 m/s. Teljes szélcsend van.
 12. Milyen frekvenciájú hullámokat észlel az a megfigyelő, aki 72 km/h sebességgel közeledik egy 400 Hz frekvenciájú hangforráshoz? $c=340$ m/s. Teljes szélcsend van.
 13. Szeretnénk megmérni a hang terjedési sebességét. Ehhez a következő berendezést használjuk: Egy hangszórót elhelyezünk egy falfelülettel szembe fordítva, attól 2 m távolságban. A hangszóró által kibocsátott hang frekvenciáját változtatni tudjuk, és kikeressük azt a frekvenciát, amikor a hangszóró és a fal között egy csomóponttal rendelkező állóhullámok alakulnak ki. Hol lesz csomópont illetve duzzadóhely a

hangszóró és a fal között? Azt tapasztaljuk, hogy a keresett állóhullám 124 Hz esetén alakul ki. Számítsuk ki ebből a hang terjedési sebességét!

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó
- Feynmann, Leighton, Sands: Mai fizika IV., Műszaki Könyvkiadó

Felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó
- Roller, Blum: Physics, Volume One, Holden-Day San Francisco

4. Hangtan

A mindennapi életben és a mérnöki gyakorlatban előforduló hullámok közül az egyik legfontosabb a **hang**. A hang esetén a hullámtan számtalan jelensége kis figyelemmel a mindennapokban is megfigyelhető, ahogy arra az előző fejezetben többször utaltunk is. Ezeket az általános hullámtani dolgokat itt nem ismételjük meg, hanem csak speciálisan a hangra jellemző témákkal foglalkozunk.

4.1. Alapfogalmak

Szűkebb értelemben hangnak a levegőbeli longitudinális hullámokat nevezük. Kicsit tágabb értelemben a folyadékok belsejében terjedő longitudinális hullámokat is nevezhetjük így, hisz azokat is képesek vagyunk felfogni fülünkkel és természetük is nagyon hasonló a levegőbeli hangokéhoz.

Szokás azonban a szilárd testek belsejében terjedő hullámokat is hangnak hívni, de ekkor sokszor használjuk a megkülönböztető **testhang** kifejezést annak jelzésére, hogy itt már a köznapi értelemtől jelentősen eltérő fogalomról van szó. Az előző fejezetből ugyanis kiderült, hogy szilárd testekben longitudinális és transzverzális hullámok egyaránt terjedhetnek, így a testhangok közt mindegyik előfordulhat. További különbség, hogy a szilárd testek belsejében terjedő hangot érzékszerveinkkel nem is tudjuk közvetlenül érzékelni, de a szilárd test felszínét a testhang megrezegteti, így az a vele érintkező levegőben hangot indít el, ami már érzékelhető. A testhang fogalma tehát csak kényelmes szóhasználatot tesz lehetővé, azaz mondhatjuk, hogy: A hang egy része behatol a falba, ott gyengül annak intenzitása és egy része kilép a túloldalon.

A **hang sebessége** normál körülmények között 330 és 340 m/s között változik a hőmérséklet függvényében. (A pontos összefüggést a hőmérséklet és a hangsebesség között később levezetjük.) Érdemes megjegyezni, hogy bár ez a sebesség a hétköznapi közlekedési sebességekhez képest nagy, azért egyszerű érzékelni, hogy a hang nem végtelen sebességgel terjed. Klasszikus példa erre a villámlás esete: bár a hang- és fényjelenség egyszerre keletkezik, a fény $3 \cdot 10^8$ m/s-os sebességével akár 50 km-re is érzékelhetetlenül rövid idő alatt odaér, a hangnak viszont kb. 3 s kell egy km megtételéhez, azaz jól érzékelhető késés lesz a hang- és fényjelenség között, ha a villámcsapás tőlünk néhány km-re történt. De elegendő, ha mondjuk 100 m-ről egy kalapáló embert figyelünk: a kalapácsütések látványa és a hang között jól észlelhető késés tapasztalható.

Látni fogjuk, hogy a hang az esetek túlnyomó többségében olyan kis

energiát szállít, olyan kis nyomáskülönbségeket okoz, hogy tárgyakra gyakorolt közvetlen hatásai elhanyagolhatók, és a hang terjedéséből csak az érdekel minket, hogy mennyire érzékelik azt az ott tartózkodó emberek. Ezért sok hangtani fogalom az ember hallásának sajátosságaiából származik. Ezek némelyike az *átlagos* emberi hallás paramétereire van igazítva, mert hallásunk egyénenként is és életkortól, betegségtől stb. függően jelentősen változik.

Az emberi fül nem egyformán érzékeny a különböző frekvenciájú hangokra. Az átlagember kb. 20 Hz és 20 kHz közti frekvenciát képes érzékelni, legérzékenyebben az 1–3 kHz tartományban. Az ezen a tartományon kívül eső frekvenciákat fülünk nem érzékeli, ezért külön elnevezést használunk rájuk.

Infrahang:

Infrahangnak nevezzük a 20 Hz-nél kisebb frekvenciájú hangokat.

Ultrahang:

Ultrahangnak nevezzük a 20 000 Hz-nél nagyobb frekvenciájú hangokat.

Több állatfaj ezek valamelyikét érzékeli és használja a kommunikációban. Általában a nagy méretű állatok nagyobb hangszálaik miatt a kisebb frekvenciákat használják: pl. a bálnák és az elefántok infrahangokat (is) kiadnak és érzékelnek, és ezt „beszélgetésre” is használják. Az embernél kisebb macskák és a kutyák pedig az ultrahangok egy részére érzékenyek.

4.1. példa: Milyen tartományba esik a hallható hangok hullámhossza, ha a hangsebességet 330 m/s-nak vesszük? Mekkora a hullámhossza az 1 kHz-es hangnak? (Ennek környékén a legérzékenyebb a hallásunk.)

Megoldás: A hullámtanban tanult $c = f\lambda$ összefüggést kell alkalmaznunk az előbbi 20 Hz és 20 kHz frekvenciákra.

Ez alapján a legkisebb hullámhossz, amit hallani képesek vagyunk:

$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} = 0,0165 \text{ m} = 16,5 \text{ mm},$$

a legnagyobb pedig:

$$\lambda_{max} = \frac{c}{f_{min}} = 16,5 \text{ m}.$$

Az 1 kHz-es hang hullámhossza:

$$\lambda_1 = \frac{c}{1 \text{ kHz}} = 0,33 \text{ m} = 33 \text{ cm}.$$

A hallható hangok hullámhossza tehát 16,5 mm és 16,5 m közé esik, legérzékenyebbek a néhány deciméteres hullámhosszakra vagyunk.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

Mivel a hallható hangok hullámhossza a hétköznapi tárgyak méretskálájába esik, ezért a hullámtani elhajlási jelenségek igen jelentősek a hétköznapi életben, épületek belsejében. Ez is szerepet játszik abban, hogy egy hangot akkor is hallhatunk, ha forrását nem látjuk mondjuk mert egy másik szobában van, aminek nyitva van az ajtaja, de a hangforrásra nem látunk rá. Egy épület belsejében éppen ugyan a falak visszaverésének is jelentős szerepe van, de érdemes kipróbálni a következőket:

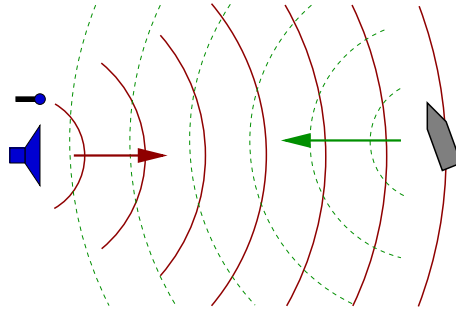
Keressünk egy olyan épületet, melynek belsejében hangos zene vagy beszéd szól, és jöjünk ki onnan. Ha a falak vastagok, de az ajtót nyitva hagyjuk, akkor kint is hallatszik valami a hangból. Amennyiben pontosan szemben állunk az ajtóval, többé-kevésbé tisztán halljuk a bentől kijövő hangokat. Mihelyt oldalirányban odébb megyünk, egyre kevésbé halljuk a magas hangokat, de a mélyek továbbra is hallatszanak.

Ennek a jelenségnek a magyarázata igen egyszerű: a nagy hullámhosszúságú, mély hangok az ajtórésen szinte minden irányba egyenletesen szétszóródnak, míg a nagyon magas hangok, melyeknek hullámhossza sokkal kisebb az ajtó méreténél szinte csak egyenesen haladnak tovább, azaz csak oda jutnak el, ahova a hangforrástól az ajtón keresztül rálátni.

4.1.1. Távolságmérés és képalkotás hanggal

A hangsebesség ismeretében a terjedési idők alapján távolságot mérhetünk, és ha ezt sok irányban egyszerre el tudjuk végezni, akár „képalkotásra” is felhasználhatjuk. Gyakorlati hasznuk és érdekességük miatt érdemes röviden a hangot ilyen célokra alkalmazó berendezésekről megemlékezni.

A hang, mint letapogató eszköz legegyszerűbb alkalmazása az, hogy minden irányba terjedő gömbhullámokat bocsátunk ki és vizsgáljuk a visszahangokat. Ha a közelben csak néhány hangvisszaverő tárgy van, melyeket látunk vagy egyéb módon tudunk róluk, akkor a visszhang visszaérkezési idejéből távolságukra, a visszhang intenzitásából pedig hozzávetőleges



4.1. ábra. Az egyszerű szonár alapötlete.

méretükre lehet következtetni. Ilyen elven működtek az első, tengeralattjárókon alkalmazott **szonárok**.

A 4.1. ábra a legegyszerűbb szonár alapötletét mutatja: egy hangszóró lényegében irányítatlanul hangot bocsát ki, és egy mellette elhelyezett mikrofon felfogja a visszhangot. A kibocsátott rövid hangjel és a visszaérkező jel időkülönbségéből a visszaverő tárgy (mondjuk egy hajó) távolságára lehet következtetni. A visszhang módosult frekvenciája (Doppler-effektus) miatt a tárgy sebességének felénk irányuló komponensét is elárulja.

A visszhang intenzitása pedig a visszaverő tárgy méretétől és akusztikus tulajdonságaitól függ, így ha valami feltételezésünk van az észlelt tárgyról (mondjuk tudjuk, hogy egy acélból készült hajó), akkor a visszhang intenzitása a méret megbecslésére is módot ad.

Ilyen célra, azaz víz alatti sok méter méretű tárgyak távolról történő felderítésére alacsony frekvenciájú hangot célszerű alkalmazni, mert arra kisebb a közegek hangelnyelése (lásd 4.6.3. fejezet) így a jelek messzebbre eljutnak. A nagy hullámhossz viszont nem teszi lehetővé a finom részletek felbontását.

Amennyiben finomabb letapogatásra, leképezésre akarjuk felhasználni a hangot, kis hullámhosszat (azaz nagy frekvenciát) kell alkalmazni, mert a hullámtanban tanultak szerint a hullámokkal megfigyelhető legkisebb részletek a hullámhossz nagyságrendjébe esnek. Pl. ha vízben, ahol a hangsebesség kb. 1400 m/s 1 mm-es részletekre vagyunk kíváncsiak, akkor a frekvencia legalább $1400/0,001 = 1\,400\,000$ Hz, azaz 1,4 MHz kell legyen. Ez a helyzet az orvosi ultrahang készülékeknél: itt az emberi testben terjedő ultrahangok segítségével alkotnak képet a szervekről vagy az anyaméhben elhelyezkedő magzatról. (4.2. ábra.)



4.2. ábra. Magzat ultrahangos képe: hagyományos és térbeli változat.

Az ultrahang ilyen felhasználása rendkívüli lehetőségeket ad az orvosi diagnosztika kezébe. Az egyszerű képalkotáson kívül a véráram vagy a szívverés a Doppler-effektus miatt a visszavert hang frekvenciáját is módosítja, melyből pl. a magzat szívhangjait vagy az erekben való áramlási sebességet is lehetséges megvizsgálni.

Egy ultrahangos képalkotó berendezés működése igen bonyolult. Gondoljunk bele, hogy egy irányt kiválasztva az abba eső közeghatárok (bőr-zsír, zsír-izom, izom-csont, stb.) mindegyikéről kapunk visszhangot, és ezekből kell a képet előállítani sok száz vagy ezer különböző irány esetben. A számítástechnika és a matematika jelenlegi fejlettségi szintjén azonban akár a térbeli szerkezet is visszaállítható, amint azt a 4.2. ábra jobb oldali képe mutatja. Az orvosi gyakorlatban mindkét leképezési formának (a hagyományos és a térbeli változatnak is) meg van a maga szerepe.

Hasonló alapelven működő eszközöket alkalmaznak tájékozódásra a tengeralattjárókon: a mély óceánban szinte tökéletes a sötétség, de a hang igen messze képes terjedni, így ez itt kézenfekvő tájékozódási eszköz. Természetesen ilyenkor nem szükséges nagy frekvenciás ultrahangot használni, mivel jóval kisebb felbontás is elegendő, ráadásul a nagy frekvenciájú hangok jobban elnyelődnek a vízben.

Ugyancsak a visszaverődő hangok segítségével lehet a tengerfenék részletes magassági térképét elkészíteni. Ehhez elegendő a felszínen úszó hajót megfelelő berendezéssel ellátni.

Érdekes, hogy az ultrahangokkal való tájékozódást bizonyos állatok használják, ilyen pl. a denevér vagy a delfin.

4.2. A hang erősségének mérőszámai

4.2.1. A hangintenzitás

Azt, hogy mennyire erős egy hullám (vagy sugárzás) szokás a merőleges beesés esetén felületegységenként szállított teljesítménnyel mérni. Ez a hang esetén is így van, tehát az, hogy mennyire erős egy hang, az jellemezhető a következő mennyiséggel:

Hangintenzitás:

Essen hang merőlegesen egy A nagyságú felületre, az erre a felületre a hang által szállított teljesítmény legyen P . Ekkor hangintenzitásnak nevezzük az

$$I = \frac{P}{A}$$

mennyiséget.

Fizikai számításokhoz ez a mennyiség tökéletesen megfelel: jellemzi, mennyi az időegységenként 1 m^2 -re szállított energia. A gyakorlatban mégis nem közvetlenül ezt szokás megadni, mert ez az energia általában elenyésző felmelegedést okoz az elnyelő felületen, az emberi hangérzékelés viszont nem ezzel a mennyiséggel arányos.

Az emberi fül elképesztően érzékeny. Az a hangintenzitás, melyet 1 kHz -es frekvencia esetén az emberi fül érzékelni képes (ha nincsenek zavaró körülmények) mindössze $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Ezt szokás az emberi fül **küszöbintenzitásának** nevezni. A másik véglet: $I_{max} = 10 \text{ W/m}^2$ az az érték, melyet az ember még halláskárosodás nélkül el bír viselni.

4.2.2. A hangnyomásszint

Hallástani vizsgálatok azt mutatták, hogy az emberi szubjektív hangerősség-érzet közel a hangintenzitás logaritmusával arányos. Ez azt jelenti, hogy egy hang erősségét nem akkor halljuk egyenletesen emelkedőnek, ha I növekszik egyenletesen, hanem ha $\log I$.

Részletesebb vizsgálatok kimutatták, hogy érzékelésünk nem pontosan arányos az intenzitás logaritmusával. Mégis, a logaritmikus függés közel igaz és –ahogy látni fogjuk– $\log I$ -vel sok esetben kényelmes számolni, ezért itt a fülhöz pontosabban igazodó skálákkal nem foglalkozunk.

Ezért többnyire nem a hangintenzitással, hanem az úgynevezett hangnyomásszinttel jellemezzük, mennyire erős egy hang:

Hangnyomásszint:

Egy I intenzitású hang hangnyomásszintjének nevezzük az

$$n = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (4.1)$$

mennyiséget, ahol $\lg$ a 10 alapú logaritmus jele, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ az átlagos emberi fül küszöbintenzitása.

Történeti okokból azt szokás mondani, hogy a hangnyomásszint az úgynevezett **decibel-skálán** van megadva. Formálisan ezt úgy fejezzük ki, mintha az n hangnyomásszint mértékegysége „dB”, azaz „decibel” volna. Valójában azonban ez nem igazi mértékegység, inkább csak jelzése annak, hogy a hangnyomásszintet jelenti a megadott mértékegység nélküli szám.

Az emberi hangérzékelés tehát nagyjából az előbbi n mennyiséggel arányos, vagyis akkor érzékelünk egyenletesen emelkedő hangerőt, ha egy hang hangnyomásszintje egyenletesen emelkedik.

A gyakorlatban sokszor van szükség (4.1) megfordítására, azaz kifejezni az I intenzitást, mint az n hangnyomásszint függvényét:

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{n}{10}}. \quad (4.2)$$

Ez az érdekes exponenciális kapcsolat be van építve minden hangkiadó eszköz, pl. rádió vagy CD-lejátszó elektronikájába. A hangerőszabályzó helyzetétől ugyanis nem lineárisan függ a hangszórókon megjelenő hang teljesítménye, hanem annak exponenciális függvényével arányos, hogy így a hangnyomásszint legyen arányos a hangerőszabályzó pozíciójával.

4.2. példa: Mekkora az éppen hallható és a maximális elviselhető hang hangnyomásszintje?

Megoldás: Egyszerű behelyettesítéssel megkaphatjuk az eredményt, I helyére először a fenti I_0 -t, majd I_{max} -ot helyettesítve.

Az éppen hallható hang hangnyomásszintje:

$$n_0 = 10 \lg \frac{I_0}{I_0} = 10 \lg 1 = 0 \text{ dB}.$$

A maximális elviselhető hangé pedig:

$$n_{max} = 10 \lg \frac{I_{max}}{I_0} = 10 \lg 10^{13} = 130 \text{ dB}.$$

Fülünk tehát a 0 és 130 dB közötti tartományban működőképes.

4.3. példa: Egy hangszóró 1,5 W teljesítménnyel sugározza a hangot a tér minden irányába. Mekkora a hangintenzitás és a hangnyomásszint tőle 5 m távolságban?

Megoldás: A $P = 1,5 \text{ W}$ teljesítmény minden irányban egyenletesen szóródik, ezért ha képzeletben egy $R = 5 \text{ m}$ sugarú gömböt rajzolunk a hangszóró köré, annak felületén mindenütt azonos lesz a hangintenzitás, és pontosan ezt az értéket keressük.

A hangintenzitás tehát: $I = P/A$, ahol A az R sugarú gömb felszíne:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi R^2} = 4,77 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Az előzőek alapján ezt igen könnyű a decibel-skálára átszámolni és így megkapni a hangnyomásszintet:

$$n = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 10 \lg(4,77 \cdot 10^9) = 96,8 \text{ dB}.$$

4.4. példa: Két hang hangnyomásszintje 20 dB-lel tér el egymástól. Mit mondhatunk a hangintenzitásokról?

Megoldás: A feladat szerint $n_1 - n_2 = 20$. (4.1) szerint ez az intenzitásokban azt jelenti, hogy:

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= 10 \lg \frac{I_1}{I_0} - 10 \lg \frac{I_2}{I_0} = 10 (\lg I_1 - \lg I_0 - (\lg I_2 - \lg I_0)) = \\ &= 10 (\lg I_1 - \lg I_2) = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \end{aligned}$$

Innen

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{n_1 - n_2}{10}} = 10^{\frac{20}{10}} = 100.$$

A 20 dB hangnyomásszint-különbség tehát 100-szoros hangintenzitás-aránynak felel meg.

4.5. példa: Egy hangforrás hangját önmagában 60 dB-esnek, egy másikét 50 dB-esnek halljuk. Feltéve, hogy nem lép fel közöttük interferencia (frekvenciájuk nem egyenlő), hány decibeles hangot hallunk, ha egyszerre szól mindkettő?

Megoldás: Fontos, hogy nem a dB-értékek adódnak össze, hanem a hangintenzitások. Először tehát a két hangnyomásszint-értéket intenzitásra kell átváltanunk. Erre felhasználhatjuk a fenti (4.2) egyenletet:

$$I_1 = I_0 10^{\frac{60}{10}} = 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad I_2 = I_0 10^{\frac{50}{10}} = 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Összegük így $I = I_1 + I_2 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ intenzitású, ami

$$n = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 60,4 \text{ dB}$$

eredő hangnyomásszintet jelent.

Ez az eredmény nagyon érdekes: egy 50 és egy 60 dB-es hang eredője csak 60,4 dB-es lesz, ami azt jelenti, hogy a 60 dB-es hanghoz képest az 50 dB-es alig fog változást okozni. Ez mutatja az emberi fül azon érdekes sajátosságát, hogy az erős hangok elnyomják a gyengébbet, azaz egy önmagában jól hallható hang érzékelhetetlenné válik, ha egy másik, erősebb is megszólal.

4.2.3. A fon-skála

Az előbb ismertetett decibel-skála nem veszi figyelembe, hogy az emberi fül különbözően érzékeny a különböző frekvenciájú hangokra. Például ha két 50 dB-es hangot hallunk egymás után, de az első 1 kHz-es a második pedig 10 kHz-es, a másodikat halkabbnak halljuk, mert ilyen magas frekvencián fülünk érzékenysége már kisebb.

Ezért szükséges egy olyan skála bevezetése, mely az ember hangosság-érzetét fejezi ki. Ilyen skálát nem lehet a fizikában megszokott precizitással definiálni, mert a hangosságérzet szubjektív, embertől függő komponenseket is tartalmaz. Az egyik, egyszerűen definiálható skála, mely általában megfelelő pontossággal írja le a szubjektív hangérzetet az úgynevezett fon-skála (vagy phon-skála).

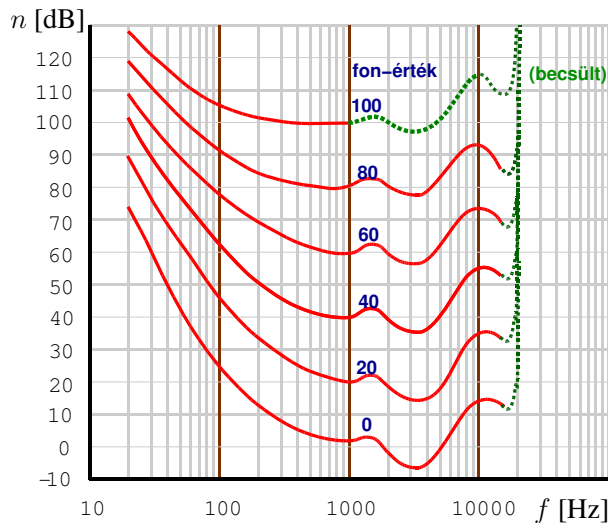
Fon-érték:

Egy hang fon-értékén azt a hangnyomásszintet értjük, amilyen hangnyomásszintű 1 kHz-es hangot ugyanolyan erősségűnek halljuk, mint a vizsgált hang.

Az 1 kHz-es hangok tehát annyi fonosak, ahány decibelesek. Az ettől eltérő hangok fon-értéke általában kisebb, mint a decibel-értékük, mivel a legtöbb frekvencián fülünk kevésbé érzékeny, mint 1 kHz-en.

A pontos vizsgálatok szerint a hangok fon-értéke közelítően, de nem teljesen pontosan felel meg a szubjektív hangerősség-értéknek. Hosszú méréssorozat után a kutatók felállítottak egy ún. „son-skálát”, mely jobban illeszkedik az emberi fülhöz, de kiszámítása hangintenzitásból vagy hangnyomásszintből sokkal összetettebb, mint a fon-skáláé. Könyvünk céljain túlmutatna ennek részletes ismertetése, de megemlíteni mindenképp érdemes.

Sok emberrel végzett mérések alapján a jelenleg szabványosnak elfogadott **egyenlő hangosságú görbéket** a 4.3. ábra mutatja.



4.3. ábra. Az egyenlő hangosságú görbék. (Magyarázatot lásd a szövegben.)

Ezen az ábrán a piros görbék az azonos hangosságúnak hallott pontokat kötik össze. Például a 60 fonos görbe (kék 60-as a közepe táján) 1000 Hz frekvencián természetesen 60 dB hangnyomásszint értéknél (függőleges tengely) van, de ez a görbe mondjuk 10000 Hz-nél kb. 74 dB értéket vesz fel, ami azt jelenti, hogy a 74 dB hangnyomásszintű 10 kHz-es hang hallatszik ugyanolyan erősnek, mint a 60 dB-es 1 kHz-es, azaz ennek fon-értéke 60.

Érdekes, hogy ez a görbe nem egy minimummal rendelkezik, hanem több kisebb lokális minimumhelye van, ami a fül biofizikai sajátosságaiból adódik. A globális minimum 2–3 kHz között található, mely 3–7 dB-lel megy az 1 kHz-es érték alá.

A hangok ember által érzékelt hangosságát tehát legjobban a fon-skála fejezi ki. Néhány irányadó fon-értéket láthatunk az 1. táblázatban.

hang típusa	fon-érték
hallásküszöb	0
falevélsusogás	10
suttogás	20
csendes utcai zaj	30
papírszakítás	40
beszélgetés	50
hangos beszéd	60
nagyvárosi utca	70
kiabálás	80
gépteremzaj	90
motorkerékpár közelről	100
kovácsműhely	110
repülőmotor 3 m-ről	120
fájdalomküszöb	130

1. táblázat. Néhány jellegzetes hang hozzávetőleges fon-értéke.

Ezek természetesen csak hozzávetőleges értékek, hisz nincsenek pontosan körülírva a feltételek, mégis segítenek a mindennapi élet zajainak körülbelüli elhelyezésében.

Most láthatjuk igazán annak előnyeit, hogy az emberi fül nem a hangintenzitással arányos hangerősség-érzetet jelez az agynak. Ez teszi ugyanis lehetővé, hogy a hangerősség ilyen széles skáláján érzékelni tudjuk a hangokat. Ha a fülünk az agyunknak a hangintenzitással arányos jelet küldene, annak 13 tizedesjegy pontosságúnak kellene lennie, hogy a minimális I_0 és a maximális I_{max} érték is megjeleníthető legyen. Ezzel szemben a fon-skálán kb. 2 értékes jegy pontossággal nagyon tág határok közti intenzitások kifejezhetők, azaz az emberi hallás igen tág határok közt képes működni anélkül, hogy a benne részt vevő biológiai alrendszerrel szemben túlzott pontossági követelmények lennének.

4.6. példa: Hányszor nagyobb intenzitású a 40 fonos 100 Hz-es hang, mint a 40 fonos 1000 Hz-es? (Használja az egyenlő hangosságú görbéket.)

Megoldás: Leolvashatjuk a 4.3. ábráról, hogy a 40 fonos görbe 100 Hz-nél kb. 62 dB hangnyomásszintél tart, 1000 Hz-nél pedig definíció szerint 40 dB az értéke.

Ez azt jelenti, hogy 22 dB-lel erősebb a 40 fonos 100 Hz-es hang, mint az ugyanilyen erősnek hallott 1 kHz-es. 22 dB hangnyomásszint-különbség pedig

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{22}{10}} = 158$$

intenzitásarányt jelent. (Itt most nem ismételtük meg azt a levezetést, melyet már korábban, a 4.4. példában megtettünk.)

4.3. A hang terjedése gázokban

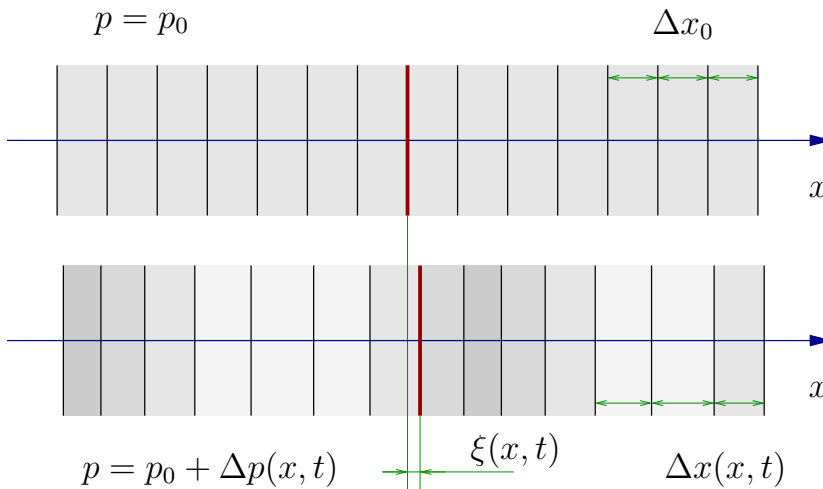
A most következő fejezetben részletesen megvizsgáljuk a hang gázokban való terjedésének mechanizmusát. A vizsgálat célja, hogy részleteiben megértsük a hang terjedésének mechanizmusát és olyan összefüggésekhez jussunk, melyek kapcsolatot teremtenek a nagy léptékben megmérhető mennyiségek (pl. hangintenzitás, frekvencia) és a mikroszkopikus, közvetlenül nehezen mérhető mennyiségek (pl. a levegőrészek elmozdulása, a hang által létrehozott nyomásváltozás) között. Ezek az összefüggések önmagukban is érdekesek és a hangtan további részeinek elméleti alapját képezik.

4.3.1. Bevezetés

Egy nyugvó gáz –melyben nem terjed hang– paraméterei (nyomása, sűrűsége, stb.) nem függ sem a helytől, sem az időtől, hanem minden pontban egy nyugalmi értéket mérhetünk. A hang a gáz jellemzőit kissé megváltoztatja: a nyugalmi érték környékén kis amplitúdóval változni fognak a gáz fizikai jellemzői és a gáz részei is elmozdulnak. A tapasztalatból is sejtjük, hogy ez a változás nem lehet jelentős a hétköznapi életben, hisz ha mondjuk a levegő sűrűségét lényegesen befolyásolná az áthaladó hang, az erős hangok terjedése a levegőben szemmel észlelhető lenne a levegő megváltozó fénytörése miatt. A most következő levezetések ezt a feltételezést meg fogják erősíteni, látni fogjuk, hogy pl. a normál, 10^5 Pa nyomású levegőben egy 130 dB-es hang is kevesebb, mint 30 Pa nyomásváltozást okoz.

Az egyszerűség kedvéért itt csak a síkhullám formájában terjedő hang esetével foglalkozunk. Ez nem jelent komoly megszorítást, mert ha nem

szélsőségesen bonyolult a hullámkép, annak kis része jó közelítéssel síkhullámnak tekinthető. Síkhullám esetén viszont egyértelmű terjedési irányt jelölhetünk ki, melyre merőleges koordináták mentén a paraméterek nem változnak, így a folyamatokat egyetlen térbeli koordinátával jellemezhetjük.



4.4. ábra. Hang terjedése síkhullám formájában.

A 4.4. ábra szemlélteti a vizsgálni kívánt folyamatot. Itt láthatjuk, hogy a hang terjedése során a levegőrészek sűrűsége is megváltozik (a sátrózás tónusa mutatja ezt) és azt is, hogy a sűrűsödések-ritkulások a terjedési irány (x -tengely) mentén kissé elmozdítják a levegőrészeket. Az ábrán felül bemutatott nyugalmi állapotban Δx_0 távolságonként berajzolt jelölések a hang terjedése során elmozdulnak, így az eredetileg Δx_0 vastagságú rétegek változó vastagságúak lesznek, amit egy $\Delta x(x, t)$ függvénnyel jellemezünk.

Hasonlóképpen a nyomás is az eredeti p_0 áll. helyett változni fog egy $p(x, t) = p_0 + \Delta p(x, t)$ függvény szerint. $\Delta p(x, t)$ és $\Delta x(x, t)$ nem lesz egymástól független, hisz a gáz nyomása függ annak térfogatától. Másrészt a nyomásból származó erők fogják az eredetileg Δx_0 vastagságú gázzrétegeket mozgatni, így a $\Delta p(x, t)$, $\Delta x(x, t)$ mennyiségek és a jelölések nyugalmi helyzettől mért $\xi(x, t)$ elmozdulásai egymástól kölcsönösen függenek. Pontosan ezeket a függéseket derítjük fel számszerűleg a következőkben.

A „ξ” betű a görög ABC betűje, mellyel talál most találkozik először a kedves olvasó. Kiejtése: „kszi”. Fizikában gyakran használják testek x koordináta-változásának jelölésére, mivel ez a latin ABC x betűjének megfelelője.

4.3.2. Alapvető összefüggések

Az előbb bevezetett $\xi(x,t)$ elmozdulásfüggvény alapján könnyen megkapható a gáz részeinek átlagos sebességét illetve átlagos gyorsulását megadó összefüggés. Definíció szerint:

$$v(x,t) = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}. \quad (4.4)$$

Fontos, hogy *nem* a gáz részecskéinek, molekuláinak sebességéről és gyorsulásáról van szó, hanem makroszkopikus mennyiségű gázmolekulából álló, a levezetés kedvéért kijelölt „gázréteg” adatairól. Maguk a molekulák a tér minden irányában rendezetlenül mozognak igen nagy sebességgel, de a véletlenszerűség miatt egy, a nyugvó gázban kijelölt gázréteg sebessége 0, hisz ez a benne levő molekulák átlagsebessége. Ez az itt következő hangtani levezetések mindegyikére vonatkozik, tehát mindig nagy számú molekulát tartalmazó gázrétegek adataival számolunk, nem az egyes molekulákéval.

Vizsgáljuk most a 4.4. ábrán jelölt, nyugalmi állapotban Δx_0 vastagságú gázrétegek jellemzőit. Ezek tömege:

$$\Delta m = \Delta x_0 A \rho_0, \quad (4.5)$$

ahol A a vizsgált keresztmetszet nagysága, ρ_0 pedig a gáz nyugalmi sűrűsége. Ez a tömegmegmaradás miatt nem változik, bár az ezt a tömeget határoló felületek a hang hatására elmozdulnak:

$$\Delta m = \Delta x A \rho, \quad (4.6)$$

ahol ρ a gáz pillanatnyi sűrűsége.

Egy ilyen tömegelem mozgásegyenletét is könnyen felírhatjuk. Vegyük észre ugyanis, hogy a tömegelem a környező gázrétegek nyomáskülönbsége miatt érez erőt:

$$F = p(x,t)A - p(x + \Delta x)A = -\frac{p(x + \Delta x, t) - p(x, t)}{\Delta x} \Delta x A.$$

Mivel mi kis Δx értékekkel számolunk, ezért ez a differenciahányados jó közelítéssel a differenciálhányadossal egyezik meg:

$$F = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Delta x A.$$

Newton II. törvényét alkalmazva erre:

$$F = \Delta m a(x, t) = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Delta x A.$$

Felhasználva a gyorsulás (4.4)-beli, a bezárt tömeg (4.6)-beli kifejezését:

$$\Delta x A \varrho \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Delta x A.$$

Egyszerűsítve:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x}. \quad (4.7)$$

A gázrétegek sűrűsödése-ritkulása olyan gyorsan történik, hogy a gáznak nincs ideje hővezetéssel- vagy sugárzással számottevő energiát cserélni környezetével. Ezért ezek összenyomódása **adiabatikus állapotváltozás** lesz. Ez viszont azt jelenti, hogy $pV^\kappa = \text{állandó}$, ahol κ a gáz specifikus fajhőhányadosa. (Lásd 7.4.1. fejezet.) Esetünkben ez azt jelenti, hogy:

$$p(x, t) V(x, t)^\kappa = p(x, t) (\Delta x(x, t) A)^\kappa = \text{állandó},$$

azaz mivel $A = \text{állandó}$, ezért

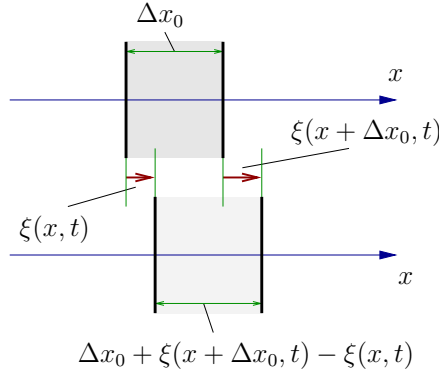
$$p(x, t) (\Delta x(x, t))^\kappa = p_0 (\Delta x_0)^\kappa. \quad (4.8)$$

A 4.5. ábráról könnyű leolvasni, hogy

$$\Delta x(x, t) = \Delta x_0 + \xi(x + \Delta x_0, t) - \xi(x, t).$$

Ezt beírva (4.8) egyenletbe és mindkét oldalt $(\Delta x_0)^\kappa$ -nal elosztva:

$$p(x, t) \left(\frac{\Delta x_0 + \xi(x + \Delta x_0, t) - \xi(x, t)}{\Delta x_0} \right)^\kappa = p_0.$$



4.5. ábra. A hang hatása egyetlen gázcellára.

Kissé átalakítva:

$$p(x, t) \left(1 + \frac{\xi(x + \Delta x_0, t) - \xi(x, t)}{\Delta x_0} \right)^\kappa = p_0.$$

Ha Δx_0 nagyon kicsi, akkor az előző egyenletben $\xi(x, t)$ hely szerinti parciális deriváltját ismerhetjük fel. Így ez az alábbi alakra hozható:

$$p(x, t) \left(1 + \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)^\kappa = p_0. \quad (4.9)$$

4.3.3. A hullámeqyenlet

Mint fentebb már írtuk, normál körülmények között a hang csak igen kis változásokat okoz a közeg nyomásában, részeinek helyzetében. Ennek figyelembe vétele jelentősen egyszerűsíti számításainkat.

A kis változások esetünkben konkrétan azt jelentik, hogy a $p(x, t) = p_0 + \Delta p(x, t)$ nyomás olyan, hogy $|\Delta p(x, t)| \ll p_0$, valamint, hogy $|\partial \xi / \partial x| \ll 1$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy (4.9) egyenletben szereplő $(1 + \partial \xi / \partial x)^\kappa$ csak kicsit különbözik 1-től. Ismert, hogy $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, ha $\varepsilon \ll 1$. Ennek megfelelően esetünkben jó közelítéssel teljesül, hogy

$$\left(1 + \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)^\kappa \approx 1 + \kappa \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}.$$

Ezt, és $p(x, t) = p_0 + \Delta p(x, t)$ -t beírva (4.9) egyenletbe:

$$(p_0 + \Delta p(x, t)) \left(1 + \kappa \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right) = p_0,$$

azaz

$$\left(1 + \frac{\Delta p(x,t)}{p_0}\right) \left(1 + \kappa \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right) = 1.$$

Felbontva a zárójelet, 1-et mindkét oldalból kivonva kapjuk, hogy:

$$\frac{\Delta p(x,t)}{p_0} + \kappa \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} + \frac{\Delta p(x,t)}{p_0} \cdot \kappa \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = 0.$$

Utóbbi egyenlet bal oldalának utolsó tagja elhanyagolható a másik kettőhöz képest, hisz az előbbieket szerint mind $|\Delta p(x,t)|/p_0 \ll 1$ és $|\partial \xi / \partial x| \ll 1$, azaz ezen kicsi tagok szorzata lép fel a 3. tagban, ami mindegyik tagnál jóval kisebb.

Ekkor viszont elemi átrendezéssel:

$$\Delta p(x,t) = -\kappa p_0 \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}. \quad (4.10)$$

Írjuk ezt be a fentebb levezetett (4.7) egyenletbe!

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial (p_0 + \Delta p(x,t))}{\partial x} = \kappa p_0 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}.$$

Figyelembe véve, hogy kis változásokat okozó hullámokról beszélünk, azaz $\varrho \approx \varrho_0$:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\kappa p_0}{\varrho_0} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}. \quad (4.11)$$

Ez ugyanolyan szerkezetű egyenlet, melyet az általános hullámtani részben **hullámegyenletnek** nevezünk. Az ott tanultak alapján tehát tudhatjuk, hogy ennek általános megoldása

$$\xi(x,t) = f(x \pm ct)$$

alakú, ahol f tetszőleges egyváltozós függvény, c pedig a hullám terjedési sebessége, ami esetünkben meg is adható:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\varrho_0}}.$$

Általános esetben v -vel szoktuk jelölni a különféle sebességeket, így a hullámtanban is ez volt a terjedési sebesség jele. Szokás azonban a fény és a hang terjedési sebességét c -vel jelölni, és a hangtanban ezt a konvenciót alkalmazzuk.

Amennyiben ideális gázzal van szó (a levegő jó közelítéssel annak tekinthető), az állapotegyenlet alapján ez átírható a következő formába:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{\mu}}, \quad (4.12)$$

ahol R az univerzális gázállandó, T a hőmérséklet (kelvinben), μ a gáz átlagos móltömege (kg/mol-ban).

Levezetésünk végére tehát bebizonyítottuk, hogy a levegőrészek mozgásegyenleteiből levezethető, hogy a gáz részeinek elmozdulását hullámegyenlet írja le. A gáz állapotjelzőiből a hangsebességet is meg tudtuk kapni.

4.7. példa: Ellenőrizzük, valóban az ismert 330 m/s körüli sebességet kapjuk-e a levegő adatainak felhasználásával!

Megoldás: A levegő adatai: $\kappa = 1,4$, $\mu = 29 \text{ g/mol} = 0,029 \text{ kg/mol}$. Az univerzális gázállandó értéke pedig $R = 8,31 \text{ J/(mol K)}$. A hőmérsékletet vegyük 273 K-nek.

Ezeket behelyettesítve:

$$c = \sqrt{1,4 \cdot \frac{8,31 \cdot 273}{0,029}} = 330,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Valóban összhangban vagyunk az eddig kísérleti eredményként említett értékkel.

4.8. példa: Mekkora a hang terjedési sebessége 273 K-en tiszta H_2 gázban? A hidrogéngáz esetén $\kappa = 1,4$ és $\mu = 2 \text{ g/mol}$ értékekkel számolhatunk.

Megoldás: Egyszerű behelyettesítéssel:

$$c = 1260 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

adódik, ami a hidrogéngázban mért értékkel megegyezik.

4.9. példa: Hány százalékkal terjed gyorsabban a hang a nyári, 30°C-os melegben, mint a téli -20°C-os hidegben?

Megoldás: Ha csak a hőmérséklet-különbségek okoznak változást, akkor a hangsebességek aránya:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\kappa \frac{RT_2}{\mu}}}{\sqrt{\kappa \frac{RT_1}{\mu}}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{303}{253}} = 1,09.$$

A nyári melegben tehát kb. 9%-kal terjed gyorsabban a hang, mint a téli hidegben.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

A hangsebesség hőmérsékletfüggése érdekes jelenségeket okoz, melyek egy része a hétköznapiakban is megfigyelhető.

A hullámtanban tanultak szerint ha egy felület egyik ill. másik oldalán a hullámok terjedési sebessége eltérő, a ferdén beeső hullámok iránya megtörik a

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

törvény szerint.

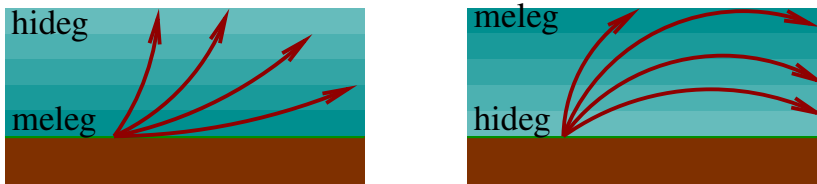
(4.12) szerint egy adott gázra $c = \sqrt{T}$ · áll., ezért

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}.$$

Nagyobb hőmérsékletű tartományba érkezve tehát a hang nagyobb szöggel fog eltérni a beesési merőlegestől.

A természetben a levegő sosem teljesen egyenletes hőmérséklet-eloszlású, de nem ugrásszerűen változik hőmérséklete, hanem folyamatosan. A folytonos változás is ugyanezt a jelenséget, tehát a hang irányának megváltozását hozza létre, azaz ha a hang egyre magasabb hőmérsékletű tartományokba jut, fokozatosan elfordul a hőmérséklet legmeredekebb változási irányától. (A jelenség konkrét matematikai leírásába nem megyünk bele.)

Szabad téren a levegő hőmérséklete többnyire függőleges irányban változik, és időjárási viszonyoktól függően akár felfelé csökkenő, akár felfelé növekvő hőmérséklet is kialakulhat. Ilyenkor a felszínen levő hangforrások hangja felfelé vagy lefelé fog kanyarodni, ahogy azt a 4.6. ábra mutatja.



4.6. ábra. Hang terjedése felfelé csökkenő és növekvő hőmérséklet esetén.

Felfelé csökkenő hőmérséklet tehát a hangot felfelé hajlítja, így a felszínen halkabb hangot hallunk, mintha a hang egyenletesen terjedne minden irányban. Ezzel szemben a felfelé növekvő hőmérsékletű levegő visszahajlítja a hangot, így a felszínen a forrástól távol meglepően erős hangot érzékelhetünk. Ha a hőmérséklet-eloszlás nem egészen egyenletes, akkor ez első pillanatra érthetetlen módon lehetővé teszi olyan jelenségek létrejöttét, hogy mondjuk egy vonat zakatolását 500 m-ről alig halljuk, de ugyanazt 2 km-ről már jól érzékeljük.

Különösen érdekes ez a jelenség sima víztükör felett. Ha a levegő hőmérséklete felfelé növekszik, akkor a felfelé induló hangok egy része visszahajlik, és a sima víztükről visszaverődik, de a légrétegek újra visszafordítják, stb. Így a víz feletti rétegben marad a kibocsátott hang egy része és nem oszlik szét a térben, ami meglepően távolra hallatszó hangjelenségeket okoz. Ez pl. tóparton, nyugodt estéken fordul elő, amikor a fenti légrétegek már hűlnek, de a víz közeliéket a víz még viszonylag melegen tartja.

Ez a jelenség kombinálódva a szél által okozott irányváltozással és a nagy tereptárgyak (pl. hegyek) hangelnyelésével, szabad terepen igen jelentősen tudja befolyásolni azt, mit honnan és milyen erősen hallunk és néha megmagyarázhatatlannak tűnő jelenségeket képes okozni. Megfelelő légköri viszonyok esetén pl. egy hegy túloldalán levő síkságon keletkező zajok is viszonylag jól hallatszanak, máskor meg semmi nem hallatszik át. De ugyancsak a hangsebesség hőmérsékletfüggésén múlik az is, hogy bizonyos napokon a magasban szálló repülők hangja erősebben, máskor alig hallatszik a felszínen.

4.3.4. A harmonikus hanghullám leírása

Alkalmazzuk az eddig tanult általános összefüggéseket harmonikus hanghullám esetére. Ekkor a szokásos alakot használva: (csak a jobbra futó hullámokat vizsgálva)

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin(kx - \omega t),$$

ahol $k = 2\pi/\lambda$ a hullámszám, ω a körfrekvencia.

A gázrétegek sebessége:

$$v(x,t) = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = -\xi_m \omega \cos(kx - \omega t).$$

Ez azt jelenti, hogy a gázrétegek sebessége

$$v_m = \xi_m \omega \quad (4.13)$$

amplitúdójú harmonikus hullámként terjed tova a közegben.

A gyorsulás pedig:

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -\xi_m \omega^2 \sin(kx - \omega t).$$

Ezt beírva (4.7) egyenletbe:

$$\varrho (-\xi_m \omega^2 \sin(kx - \omega t)) = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x}.$$

Használjuk ki ismét, hogy a hang csak kicsit módosít a közeg paraméterein, azaz $\varrho \approx \varrho_0$:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \varrho_0 \xi_m \omega^2 \sin(kx - \omega t).$$

Ennek mindkét oldalát x szerint integrálva:

$$p(x, t) = p_0 - \varrho_0 \xi_m \omega^2 \frac{1}{k} \cos(kx - \omega t) = p_0 - \varrho_0 c \xi_m \omega \cos(kx - \omega t).$$

(Felhasználtuk a hullámtanból ismert $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$ és $c = f\lambda$ összefüggéseket.)

Amennyiben tehát a gázrétegek elmozdulása harmonikus hullámot követ, a nyomásban is harmonikus ingadozások lesznek

$$p_m = \varrho_0 c \xi_m \omega \quad (4.14)$$

amplitúdóval, ugyanazzal a körfrekvenciával, mint amivel a gázrétegek elmozdulása rezeg, de ahhoz képest negyed rezgésnyi fáziseltéréssel. (Ennyi az eltérés a sin és cos függvények között.)

Nézzük meg ezután, mennyi energiát szállít egy harmonikus hanghullám!

A vizsgálatokban használt gázrétegek harmonikus rezgőmozgást végeznek, mely során mozgási és potenciális energiájuk periodikusan egymásba alakul. Korábban tudjuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás összenergiája az $E = (1/2)mv_m^2$ formulával adható meg, ahol m a rezgő test tömege, v_m

a maximális sebessége. Esetünkben egy Δx_0 hosszú, A keresztmetszetű, Δm tömegű levegő-darabra alkalmazva ezt:

$$E = \frac{1}{2} \Delta m v_m^2 = \frac{1}{2} A \Delta x_0 \rho_0 v_m^2.$$

Érdemes bevezetni az **energiasűrűség** fogalmát, mely egy V térfogatbeli energia és a térfogat nagyságának hányadosa:

$$e = \frac{E}{V}.$$

Esetünkben $V = A \Delta x_0$, ezért az energiasűrűség:

$$e = \frac{1}{2} \rho_0 v_m^2.$$

Ez az energia c sebességgel terjed. Egy A nagyságú, a terjedési irányra merőleges felületre így Δt idő alatt $Ac \Delta t$ térfogatú tartományból érkezik az e energiasűrűségű energia, tehát ennyi idő alatt összesen

$$\Delta E = e \cdot Ac \Delta t = \frac{1}{2} \rho_0 v_m^2 \cdot Ac \Delta t$$

energia áramlik át. Ez a felületen

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho_0 v_m^2 \cdot Ac$$

teljesítményt, azaz

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} c \rho_0 v_m^2$$

hangintenzitást jelent.

Ezzel kapcsolatot találtunk a makroszkopikusan mérhető hangintenzitás, sűrűség és terjedési sebesség és egy mikroszkopikus mennyiség, a levegőrészek sebességének amplitúdója között. Ezt, és a korábbi eredményeket felhasználva az eddig említett összes mikroszkopikus mennyiség kiszámolhatóvá válik.

Megemlítendő még a fentiekből egyszerűen adódó

$$I = ec \tag{4.15}$$

összefüggés, amit később még fel fogunk használni.

4.3.5. Összefoglalás

Érdemes összefoglalni a hang terjedéséről eddig tanultakat, mert túl sok oldalon keresztül vannak szétszóródva ismereteink. (A hangterjedés részletes leírása a 233. oldalon kezdődött és egész idáig tartott.)

Megállapítottuk (238. oldal), hogy a síkhullám formájában terjedő hang által keltett elmozdulásokat a

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \quad (4.16)$$

hullámegyenlet írja le, ahol

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\varrho_0}} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{\mu}} \quad (4.17)$$

a hang terjedési sebessége.

A harmonikus hanghullám esetén pedig a levegő egyes darabjai harmonikus rezgőmozgást végeznek ξ_m amplitúdóval, ω körfrekvenciával, $v_m = \xi_m \omega$ sebességamplitúdóval, miközben a nyomáshullám amplitúdója $p_m = \varrho_0 c \xi_m \omega$. A hangintenzitás pedig egyszerű kapcsolatban áll az eddigi mennyiségekkel: $I = (1/2) c \varrho_0 v_m^2$.

Az áttekinthetőség kedvéért összefoglaljuk a korábbi összefüggéseket, kiegészítve néhány elemi módon levezethetővel:

$$v_m = \xi_m \omega, \quad (4.18)$$

$$p_m = \varrho_0 c \xi_m \omega = \varrho_0 c v_m, \quad (4.19)$$

$$I = \frac{1}{2} c \varrho_0 v_m^2 = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\varrho_0 c}. \quad (4.20)$$

Adott közegben a hang intenzitásának és frekvenciájának ismeretében ezek felhasználásával a hangterjedés minden paramétere kiszámolható.

Érdemes észrevenni, hogy a közeg saját adatai utóbbi formulákban mindenütt csak a $\varrho_0 c$ kombinációban szerepelnek. Ezért szokás ennek külön nevet adni:

Akusztikus impedancia:

Akusztikus impedanciának nevezzük a közeg nyugalmi sűrűségének és a benne levő hangsebességnek a szorzatát:

$$Z = \varrho_0 c.$$

Az akusztikus impedancia fogalmának felhasználásával előző összefüggéseink átírhatók:

$$p_m = Z \xi_m \omega = Z v_m, \tag{4.21}$$

$$I = \frac{1}{2} Z v_m^2 = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{Z}. \tag{4.22}$$

4.3.6. Néhány anyag hangtani paramétere

A következőkben néhány anyag fő hangtani adatait adjuk meg. A válogatás néhol önkényes, de igyekeztünk több, különböző jellegű anyag adatait megadni. Pontosabb vizsgálatok esetén természetesen ezen paraméterek hőmérsékletfüggése is számottevő lehet. Itt csak olyan esetekben adtunk meg több hőmérsékleten mért adatot, amikor annak a gyakorlat szempontjából valamilyen kiemelt fontossága van.

Anyag	c [m/s]	ϱ [kg/m ³]	Z [kg/(m ² s)]
levegő (0°C)	332	1,29	428
levegő (20°C)	344	1,21	416
levegő (40°C)	355	1,13	400
H ₂ (0°C)	1284	0,089	114
CO ₂ (0°C)	259	1,96	507
vízgőz (100°C)	405	0,6	243

2. táblázat. Néhány gáz fő hangtani adatai

A 2. táblázat néhány gáz fő hangtani paramétereit tartalmazza. Ezek az értékek normál légköri nyomás esetére vonatkoznak.

4.10. példa: Számoljuk ki egy 80 dB-es, 1000 Hz frekvenciájú hang levegőbeli terjedése során fellépő elmozdulás, sebesség és nyomásamplitúdók nagyságát, ha a hőmérséklet 273 K!

Megoldás: A levegő akusztikus impedanciája ekkor $Z = \varrho_0 c = 428 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$. (Lásd a 2. táblázat.)

A 80 dB-es hang intenzitása könnyen kiszámolható:

$$I = I_0 \cdot 10^{80/10} = 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

(Lásd a (4.2) egyenletet.)

Így viszont már tudjuk alkalmazni a (4.22) összefüggést, amiből a sebesség- és nyomásváltozások amplitúdói:

$$v_m = \sqrt{\frac{2I}{Z}} = 6,88 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$p_m = \sqrt{2IZ} = 0,29 \text{ Pa}.$$

Az elmozdulás-amplitúdó kiszámításához szükség van a hang körfrekvenciájára, de ez a frekvenciából könnyen kiszámolható: $\omega = 2\pi f = 2000\pi \text{ 1/s}$.

Így (4.13) szerint:

$$\xi_m = \frac{v_m}{\omega} = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Érdekes, hogy egy ilyen erős hang esetén is milyen kicsik a levegőben létrejövő változások: az elmozdulás-amplitúdó kisebb a fény hullámhosszánál, a nyomásváltozás kb. a légköri nyomás milliomod részének 3-szorosa, a sebességamplitúdó mm/s-nál kisebb. Valóban jogos volt tehát az a többször használt feltételezés a levezetések során, hogy a hang által létrehozott zavar kicsi.

4.11. példa: Két hang hangnyomásszintje Δn dB-lel különbözik egymástól. Mit mondhatunk az általuk létrehozott nyomásamplitúdók viszonyáról?

Megoldás: Először a hangintenzitások arányáról tudunk valamit mondani, hasonlóan a 4.4. példához. A hangnyomásszint definíciója szerint ugyanis:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = 10 \lg \frac{I_1}{I_0} - 10 \lg \frac{I_2}{I_0} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

(4.22)-t felhasználva az intenzitásarány kifejezhető a nyomásamplitúdók arányának függvényeként:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{p_{m,1}^2}{2Z}}{\frac{p_{m,2}^2}{2Z}} = \frac{p_{m,1}^2}{p_{m,2}^2}.$$

Ezt Δn fenti kifejezésébe beírva:

$$\Delta n = 10 \lg \frac{p_{m,1}^2}{p_{m,2}^2} = 20 \lg \frac{p_{m,1}}{p_{m,2}}. \quad (4.23)$$

Innen egyszerű átrendezéssel a nyomásingadozások aránya:

$$\frac{p_{m,1}}{p_{m,2}} = 10^{\frac{\Delta n}{20}}.$$

Tehát pl. 20 dB hangnyomásszint-különbség 10-szeres nyomásingadozásarányt jelent.

Történetileg fontos ez a kiszámolt példa. A „Bel” ugyanis eredetileg $\sqrt{10}$ alapú logaritmust jelentett, a „dec” pedig a megszokott „egytized” előtagot. 10 dB tehát 1 Bel, azaz $\sqrt{10}$ -szeres arányt jelent bármilyen két mennyiség között. A „hangnyomásszint” szó tehát innen származik: két hang nyomásamplitúdóinak arányát jelenti logaritmikus skálán, melyek közül a $\sqrt{10}$ alapú logaritmus 10-szerese, azaz a decibel terjedt el. Mi nem a történeti utat követtük jegyzetünkben, amikor a hangnyomásszint fogalmát az intenzitásarányokból származtattuk a 4.2.2. fejezetben, de most már látható az elnevezés eredete.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

Általában tehát a hang által okozott elmozdulások elég kicsik. Kivétel ez alól az erős, de mély hangok esete. Például egy 110 dB-es, 20 Hz-es hang esetén a levegőrészek elmozdulása több, mint 0,1 mm. Ezt a hangot a 4.3. ábra szerint 60 fonosnak érzékeljük, tehát jól hallható, de azért nem túlzottan erős.

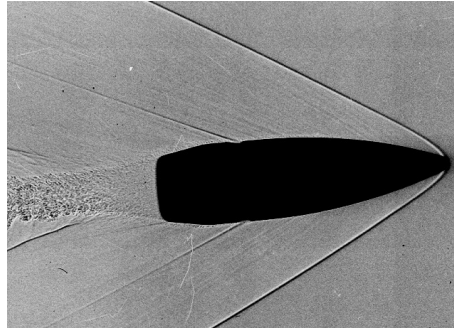
Ilyen mély hang által okozott tizedmilliméter feletti változás viszont már érzékelhető érzékszerveinkkel, érzékenyebb bőrfelületeinken. A „tag-jaimban érzem a zene lüktetését” kifejezés tehát nem feltétlenül pusztán költői túlzás.

Robbanásokkor olyan erős levegőbeli hullámok is keletkezhetnek, melyeknek leírására nem alkalmasak eddigi számításaink, mert a nyomásváltozások összemérhetők vagy akár nagyobbak is, mint a levegő nyugalmi nyomása. Ilyenkor **lökéshullámokról** beszélünk. Ezek annyira megváltoztatják a levegő sűrűségét és optikai viselkedését, hogy megfelelő technikával fényképezhetővé válnak, de nagyon ritkán szabad szemmel is látható a hatásuk.

Például a 4.7. ábra egy szuperszonikus lövedék ún. Mach-kúpjának és lökéshullámainak megjelenítését mutatja speciális fényképezési technikával, a 4.8. ábrán pedig azt figyelhetjük meg, hogy egy hadihajó ágyújának erős hangja szabad szemmel is észrevehetően megváltoztatja a levegő fénytörését, így rövid expozíciós idővel a hang láthatóvá válik.

4.4. Hang terjedése folyadékokban

A gázokhoz hasonlóan folyadékokban sem léphetnek fel nyíróerők, ezért itt is csak longitudinális hullámok terjedhetnek. Ezek mikroszkopikus leírása igen hasonlít a gázokban terjedő hullámokéra, de itt állapotegyenletről nem



4.7. ábra. Lövedék által keltett lökeshullám képe speciális fényképezési technikával



4.8. ábra. A lövések hangja által keltett lökeshullám közvetlenül megfigyelhető gyors expozícióval.

beszélhetünk olyan értelemben, ahogy azt a gázoknál tettük. A folyadékok összenyomással szembeni viselkedésére a κ kompresszibilitás lesz jellemző, és a gázokéhoz hasonló levezetéssel bebizonyítható, hogy folyadékokban a hangsebesség

$$c_f = \sqrt{\frac{1}{\kappa \varrho_0}}, \quad (4.24)$$

ahol ϱ_0 a folyadék sűrűsége.

A folyadékok sokszor bonyolult belső szerkezettel rendelkeznek. Pl. köztudott, hogy a víz 4°C-on a legnagyobb sűrűségű, de kompresszibilitása sem változik monoton módon a hőmérséklettel. Ebből kifolyólag a vízbeli hangsebesség hőmérsékletfüggése sem adható meg egyszerű formulával.

Szerencsére a változás nem túl nagy mértékű, így ha nem szükséges különlegesen nagy pontosság, számolhatunk mondjuk a 20°C-on vett értékkel.

Anyag	c [m/s]	ρ [kg/m ³]	Z [kg/(m ² s)]
víz (0°C)	1410	999	$1,41 \cdot 10^6$
víz (20°C)	1480	998	$1,48 \cdot 10^6$
tengervíz (13°C)	1500	1026	$1,54 \cdot 10^6$
glicerín (20°C)	1923	1260	$2,42 \cdot 10^6$
benzin (20°C)	1170	750	$8,8 \cdot 10^5$

3. táblázat. Néhány folyadék fő hangtani adatai

A 3. táblázat néhány folyadék fő hangtani adatait tartalmazza. Ezek közül némelyik (pl. a benzin vagy a tengervíz) nem pontosan meghatározott összetételű, ilyenkor a konkrét összetételtől függően a hangtani adatok kissé eltérőek lehetnek a táblázatbeli értéktől.

4.5. Hullámok terjedése szilárd testekben

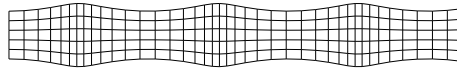
Folyadékokban és gázokban nem lépnek fel rugalmas jellegű nyíróerők, ezért azok belsejében csak longitudinális hullámok terjedhetnek. Ezzel foglalkozott az előző fejezet. Ezzel szemben szilárd testek belsejében fellépnek rugalmas nyíróerők, ezért ezekben transzverzális hullámok is terjedhetnek. A szilárd testekben terjedő hullámok elméleti és kísérleti vizsgálata azonban számtalan érdekes és összetett folyamatot tárt fel.

Ezek egy része azzal kapcsolatos, hogy (ahogy azt a rugalmasságtani részben láttuk) a szilárd testek keresztmetszete nyújtáskor csökken. A kereszt- és hosszirányú relatív méretváltozások aránya egy fontos anyagi állandó, az úgynevezett Poisson-szám (μ), melynek értéke biztosan 0 és 0,5 között van, de a legtöbb szilárd anyag esetében ez 0,25 és 0,4 közé esik. A hossz- és keresztirány ilyen összecsatoltsága miatt még egy longitudinális hullám haladásakor is fellépnek keresztirányú mechanikai feszültségek, ami befolyásolja a hullámok terjedési sebességét. Egy longitudinális hullám ugyanis keresztirányban szeretné összehúzni az anyagot. Ha keresztirányban a test mérete kicsi (sokkal kisebb, mint a hullámhossz), akkor ez az összehúzódnak lényegében akadálytalanul megtörténhet, mert hiába számottevő a keresztirányú relatív deformáció, a kis keresztirányú méret miatt a generált elmozdulások kicsik.

Ezzel szemben, ha a keresztirányú méret nagy, az anyag tehetetlensége miatt ez nem következhet be, így viszont nagyobb mechanikai feszültség

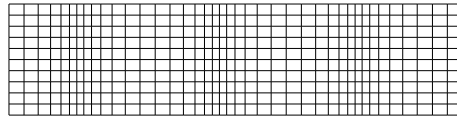
ébred az anyagban.

A longitudinális hullámok terjedési sebessége tehát függ attól is, hogy keresztirányban milyen méretű a test. Az egyik szélsőség a nagyon kis keresztmetszetek esete, amit **tágulási hullámnak** nevezünk. Ezt szemlélteti a 4.9. ábra.



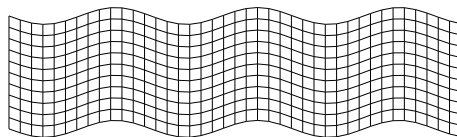
4.9. ábra. Tágulási hullám terjedése vékony rúdban.

Amikor a keresztirányú méret nagy, az összehúzódás nem következhet be. Ezt az esetet szokás a hagyományos értelemben vett longitudinális hullámnak nevezni. (Lásd 4.10. ábra.)



4.10. ábra. Longitudinális és hullám terjedése nagyméretű szilárd testben.

A transzverzális hullámoknál ilyen méretfüggés szerencsére nem lép fel, így azok viselkedése nem függ a test méreteitől. Az ilyen hullámokat szemlélteti a 4.11. ábra.



4.11. ábra. Transzverzális hullám terjedése nagyméretű szilárd testben.

Itt nem ismertetett levezetések szerint a hullámhossznál sokkal nagyobb méretű szilárd testekben a longitudinális és transzverzális hullámok terjedési sebessége:

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho_0}} \sqrt{\frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}, \quad (4.25)$$

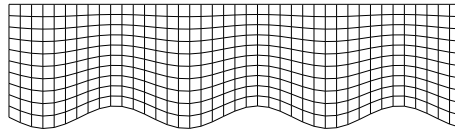
$$c_t = \sqrt{\frac{E}{\varrho_0}} \sqrt{\frac{1}{2(1 + \mu)}}, \quad (4.26)$$

ahol E az anyag Young-modulusza, μ a Poisson-száma, ϱ_0 a sűrűsége.

A tágulási hullámok a transzverzális és longitudinális hullámok speciális kombinációját jelentik a hullámhossznál sokkal vékonyabb rétegekben. Terjedési sebességük:

$$c_d = \sqrt{\frac{E}{\varrho_0}}. \quad (4.27)$$

A szilárd test véges méretéből fakadóan azonban különleges hullámtípusok is fellépnek. Ilyen pl. a csak a felszínen futó **Rayleigh-hullámok**. (4.12. ábra.) Ez csak a felszín közelében futó transzverzális hullám, mely rokonságban áll a folyadékok felszíni hullámaival.



4.12. ábra. Rayleigh-hullám terjedése szilárd test felszínén.

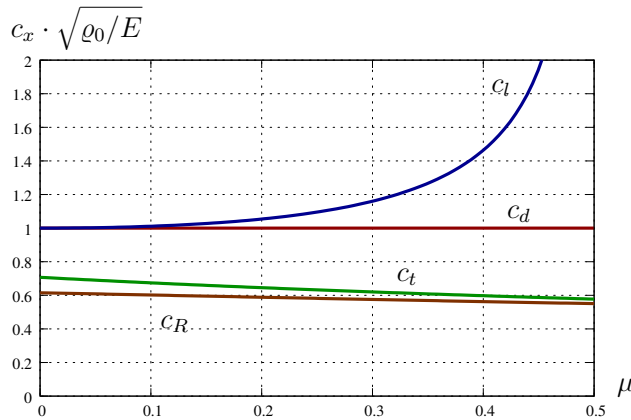
A Rayleigh-hullám terjedési sebessége:

$$c_R = c_t \frac{0,87 + 1,12\mu}{1 + \mu}. \quad (4.28)$$

Az eddig említett hullámok sebessége azonos nagyságrendbe esik, mivel a μ Poisson-szám nem mutat túl nagy változatosságot: elméleti megfontolásokból tudjuk, hogy mindenképp 0 és 0,5 közé esik, de a gyakorlatban előforduló anyagok többsége esetén 0,25 és 0,4 közötti értéket vesz fel. Hogy pontosabb elképzelésünk legyen az eddig említett hullámok terjedési sebességének viszonyáról, ábrázoljuk őket, mint a Poisson-szám függvényét, egységül választva a közös $\sqrt{E/\varrho_0}$ mennyiséget. Ezt láthatjuk a 4.13. ábrán.

Megfigyelhetjük, hogy a hullámok sebességében jelentős, akár kétszeres sebességkülönbség is előfordulhat.

Ez megnehezíti a szilárd testbeli hangterjedés vizsgálatát. Szilárd testekben nem beszélhetünk ugyanis egyetlen hangsebességről, hanem többféle hullám különböző sebességeiről kell beszélni. Például egy hang, ami a



4.13. ábra. A különféle hullámok sebességének Poisson-szám függése szilárd testekben.

levegőben longitudinális hullám, ferdén beesve egy szilárd testbe abban longitudinális és transzverzális hullámot is gerjeszt. Általános esetben ezek pontos arányát nehéz megmondani, ezért a gyakorlatban sokszor valamilyen közepes értékkel számolnak. Erre szokás a tágulási hullám sebességét használni, mert vékony rétegek esetén ez megegyezik a longitudinális hullám sebességével, vastag rétegnél pedig a longitudinális és transzverzális hullám sebessége között van. Mindamellet ha pl. egy szilárd közeg akusztikus impedanciáját számoljuk, észben kell tartanunk, hogy az csak az egyik vagy másik típusú hullámra érvényes, így számításaink egy kis bizonytalanságot tartalmaznak.

Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy bizonyos összetett anyagokról nem is áll rendelkezésünkre az összes anyagi állandó, így mondjuk csak a vékony rétegbeli tágulási hullámok sebessége ismert. Más anyagoknál (pl. fában) az anyag nem izotrop szerkezete miatt a rugalmasságtani paraméterek irányfüggőek, ezért a hangsebesség is irányfüggő.

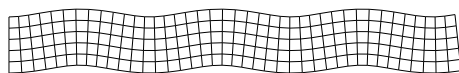
Ennek megfelelően a 4. táblázat csak az egyszerű szerkezetű, izotrop anyagok esetében teljes, több helyen hiányos, vagy közelítő adatokat tartalmaz csak.

Fontos még a hangterjedés szempontjából a **hajlítási hullámok** jelensége is. A tágulási hullámokhoz hasonlóan ez is vékony rétegekben zajlik le, ahogy azt a 4.14. ábra mutatja.

A hajlítási hullámok természete sokban különbözik az eddigiektől: a

Anyag	c_l [m/s]	c_d [m/s]	c_t [m/s]	ϱ [kg/m ³]	μ
acél	6100	5050	3200	7800	0,28
alumínium	6300	5100	3080	2700	0,34
ólom	2200	1200	700	11400	0,44
vörösréz	4650	3650	2260	0,35	
ablaküveg	5700	5300	3400	2500	0,22
bazalt	5900	5080	3140	2720	0,31
beton	–	3100	–	2500	–
fenyőfa	–	5300	–	360	–
gipszkarton	–	2000	–	800	–
márvány	6200	5340	3300	2660	0,31
parafa	–	500	–	200	–
porcelán	5340	4880	3120	2400	0,23
vörösfenyő	–	4200	–	360	–

4. táblázat. Néhány szilárd anyag hangtani adatai. Keverék összetétel esetén csak tájékoztató jellegű adat.



4.14. ábra. Hajlítási hullám terjedése vékony rétegben.

terjedési sebesség függ a rétegvastagságtól és az f frekvenciától is:

$$c_h = \sqrt[4]{\frac{1}{3(1-\mu^2)}} \sqrt{\pi f d c_d} \quad (4.29)$$

ahol d a réteg vastagsága, c_d pedig a fenti tágulási hullám sebessége.

Érdekes, hogy ez a terjedési sebesség erősen frekvenciafüggő, ellentétben a többi hullámmal.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

Azt, hogy a szilárd testekben a különféle hullámtípusok sebessége eltérő különféle célokra ki lehet használni. Egyik érdekes példa erre a földrengések forrásának, az ún. „epicentrumnak” felderítése.

A földrengés ugyanis úgy keletkezik, hogy valahol a földkéregben egy zavar jön létre kőzetlemezek elcsúszása vagy egy vulkán alatt a magma átrendeződése miatt és ez a zavar hullám formájában tovaterjed. A longitudinális és transzverzális hullámok terjedési sebességének jelentős eltérése miatt az epicentrumtól többször tíz kilométer távolságban már mérhetően különböző időpontokban futnak be a különböző típusú hullámok. Pl. baltában $v_l = 5900 \text{ m/s}$, $v_t = 3140 \text{ m/s}$, ami 50 km távolságban 8,5 s illetve 15,9 s terjedési időt jelent, ami jól mérhető a geofizikusok földrengésmérő műszerein. A különböző típusú hullámok eltérő beérkezési idejéből és a kőzetekbeli hangsebességekből meg lehet határozni, hogy egy adott mérőműszertől milyen távolságban volt az epicentrum. Ha legalább 3 helyről rendelkezünk ilyen információkkal, akkor a 3 hely köré képzeletben ilyen sugarú gömböket rajzolva azok föld alatti metszéspontja megadja az epicentrum helyét. Ilyen jellegű számításoknak köszönhető, hogy egy földrengés epicentrumának helye akkor is megmondható, ha az olyan lakatlan terület alatt volt, amerre senki nem tartózkodott.

4.6. A hang gyengülése, elnyelődése

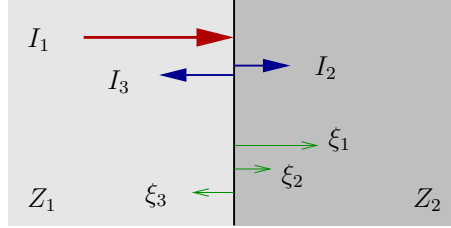
Ebben a fejezetben azzal a fontos problémakörrel foglalkozunk, ami a hang intenzitásának csökkenésével kapcsolatos. Tárgyalni fogjuk azt a hatást, amikor közeghatárokon a hang egy része visszaverődik, tehát az eredeti irányban továbbhaladó hang intenzitása emiatt csökken, és tárgyaljuk a valódi energiavesztés miatti folyamatokat, azaz a gázokban és falakban bekövetkező súrlódási- és egyéb folyamatok hatását, melyek a hang energiáját hővé alakítják.

4.6.1. Hangvisszaverődés nagyméretű közeghatáron

Vizsgáljuk meg, mi történik, amikor a hang egy olyan közeghatárra érkezik, melynek méretei jóval meghaladják a hullámhosszat. Általános hullámtani tanulmányainkból tudjuk, hogy ekkor a hang egy része behatol az új közegbe, másik része pedig visszaverődik. Most, a hang terjedésére vonatkozó ismereteink alapján, ennek számszerű leírását is képesek leszünk megadni a merőlegesen beeső hang esetében.

Merőlegesen beeső hang visszaverődése A közeghatárra merőlegesen érkező hang visszaverődése fenti ismereteink szerint elemi számításokkal kezelhető.

Essen be tehát egy Z_1 akusztikus impedanciájú térrészből egy I_1 intenzitású hang merőlegesen egy közeghatárra. A hang egy I_2 intenzitású része behatol a másik, Z_2 akusztikus impedanciájú részbe, a maradék I_3 intenzitás pedig visszaverődik. (Lásd a 4.15. ábrát.)



4.15. ábra. A hang visszaverődése közeghatárról.

Feltéve, hogy a visszaverődés során a belső súrlódás jellegű erők hatása elhanyagolható, az energiamegmaradás miatt a közeghatárra beérkező és távozó intenzitások nagysága egyenlő kell legyen:

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (4.30)$$

Alakítsuk át ezt (4.22) felhasználásával:

$$\frac{1}{2} Z_1 v_{m,1}^2 = \frac{1}{2} Z_2 v_{m,2}^2 + \frac{1}{2} Z_1 v_{m,3}^2.$$

(Figyelembe vettük, hogy a visszavert hang az 1-es közegben terjed.)

Ide beírva (4.18) alapján a sebességamplitúdók kifejezését:

$$\frac{1}{2} Z_1 \omega^2 \xi_{m,1}^2 = \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 \xi_{m,2}^2 + \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 \xi_{m,3}^2,$$

ami egyszerűsítés és átrendezése után erre az alakra hozható:

$$Z_1 (\xi_{m,1}^2 - \xi_{m,3}^2) = Z_2 \xi_{m,2}^2. \quad (4.31)$$

A közeghatár pontjainak rezgési amplitúdója között más kapcsolat is van, hisz a két közeg a határvonalon nem válik szét, azaz az 1-es közegbeli hangok által kiváltott rezgés a határon meg kell egyezzen a 2-es közegbeli hanghullámok által kiváltott rezgésével. Ha a közeghatárt $x = 0$ -ba helyezzük, akkor ez azt jelenti, hogy:

$$\xi_1(0,t) + \xi_3(0,t) = \xi_2(0,t). \quad (4.32)$$

Harmonikus hanghullámok esetén ez harmonikus rezgések összeadását jelenti, amit a rezgések fázisa is befolyásol. Jogos feltételezés az, hogy az eredeti irányban továbbmenő hang (2-es) a felületen ugyanolyan rezgési fázisban van, mint a beérkező (1-es). Annak függvényében, hogyan viszonyul e két hang rezgéseinek amplitúdója egymáshoz, a három hang rezgési amplitúdója között kétféle viszony állhat fenn:

- a) Ha $\xi_{m,1} > \xi_{m,2}$, akkor $\xi_{m,3} = \xi_{m,1} - \xi_{m,2}$.
- b) Ha $\xi_{m,1} < \xi_{m,2}$, akkor $\xi_{m,3} = \xi_{m,2} - \xi_{m,1}$.

Meglepő lehet, hogy egyáltalán foglalkozunk a második esettel, azaz az-
zal, hogy a továbbmenő hullám amplitúdója nagyobb, mint a beérkezőé.
Nem lehetetlen ez, ha $Z_2 < Z_1$, azaz ha a hang „keményebb” közegből
„puhábbá” érkezik.

Tárgyaljuk először az a) esetet! Ekkor $\xi_{m,2} = \xi_{m,1} - \xi_{m,3}$, amit a (4.31) egyenletbe beírva:

$$Z_1(\xi_{m,1}^2 - \xi_{m,3}^2) = Z_2(\xi_{m,1} - \xi_{m,3})^2.$$

Egyszerűsítve:

$$Z_1(\xi_{m,1} + \xi_{m,3}) = Z_2(\xi_{m,1} - \xi_{m,3}),$$

ahonnan a visszavert és bejövő amplitúdók aránya:

$$\frac{\xi_{m,3}}{\xi_{m,1}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad \text{ha } \xi_{m,1} > \xi_{m,2}.$$

A b) esetben teljesen hasonlóan levezethető:

$$\frac{\xi_{m,3}}{\xi_{m,1}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \text{ha } \xi_{m,1} < \xi_{m,2}.$$

A gyakorlat szempontjából nem annyira a rezgési amplitúdók, mint inkább a hangintenzitások az érdekesek. Fontos paraméter a visszavert és a bejövő hang intenzitásának aránya.

Reflexiós tényező:

Egy felület reflexiós tényezőjének (R) nevezzük az arról visszaverődő és oda beeső hang intenzitásának arányát.

Esetünkben ez:

$$R = \frac{I_3}{I_1} = \frac{\frac{1}{2}Z_1\omega^2\xi_{m,3}^2}{\frac{1}{2}Z_1\omega^2\xi_{m,1}^2} = \left(\frac{\xi_{m,3}}{\xi_{m,1}}\right)^2.$$

Ide beírva a fenti a) és b) esetekben kapott eredményt a rezgési amplitudó-arányokra rövid számolás után mindkét esetben ugyanazt kapjuk:

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2. \quad (4.33)$$

A gyakorlati számítások során sokszor van szükség az átmenő és a bejövő hang intenzitásának arányára, amit abszorpciós tényezőnek nevezünk.

Abszorpciós tényező:

Egy felület abszorpciós tényezőjének (a) nevezzük az abba behatoló és oda beeső hang intenzitásának arányát.

Az előzőek alapján egyszerű számítással adódik, hogy:

$$a = \frac{I_2}{I_1} = 1 - R = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (4.34)$$

Érdemes az áttekinthetőség kedvéért néhány fontos esetet tárgyalni.

- $Z_1 = Z_2$. Ekkor $R = 0$, azaz nincs visszavert hullám, ami érthető, hisz a közegek hangterjedési szempontból azonosnak tekinthetők.
- $Z_2 \gg Z_1$. Ekkor $R \approx 1$, azaz az új közegbe alig hatol be a hang, tehát $I_2 \ll I_1$. Ekkor könnyű belátni, hogy $\xi_{m,2} \ll \xi_{m,1}$, azaz az a) esettel állunk szemben. (4.32) szerint ez csak akkor lehetséges, ha a visszavert hang fázisa ellentétes a bejövőével. Ez az eredmény összhangban van az általános hullámtannál tanultakkal: merev végződésről visszavert hullám fázisa fél rezgésnyivel különbözik a bejövőtől.
- $Z_2 \ll Z_1$. Ekkor is $R \approx 1$, azaz az új közegbe alig hatol be a hang. Ekkor (4.34) szerint

$$a = \frac{I_2}{I_1} \approx 4\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Ide beírva az eddig már sokszor felhasznált $I = (1/2)Z\omega^2\xi_m^2$ összefüggést:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_2\xi_{m,2}^2}{Z_1\xi_{m,1}^2} \approx 4\frac{Z_2}{Z_1}.$$

ahonnét

$$\frac{\xi_{m,2}}{\xi_{m,1}} \approx 2.$$

Amennyiben tehát a hang sokkal kisebb akusztikus impedanciájú közegbe érkezik, szinte teljesen visszaverődik a határról, az új közegben rezgési amplitúdója mégis kb. 2-szer nagyobb lesz, mint az eredetiben. (Ez a nagyobb amplitúdó a kisebb impedancia miatt mégis kisebb intenzitást jelent.) Itt tehát a b) eset valósul meg.

4.12. példa: Hány decibellel csökken a hang hangnyomásszintje, miközben merőlegesen levegőből vízbe hatol? Hányadrésze verődik vissza a hangintenzitásnak?

Megoldás: A levegő adatait ismerjük, a 4.10. példában már kiszámoltuk, hogy a levegő akusztikus impedanciája normál körülmények között $Z_l = 422 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$.

A vízben a hang 1500 m/s sebességgel terjed, sűrűsége pedig $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$, ezért $Z_v = 1000 \cdot 1500 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$.

Az abszorpciós tényező tehát (4.34) szerint:

$$a_{l,v} = \frac{4Z_v Z_l}{(Z_v + Z_l)^2} = 0,00112.$$

A vízbe jutó hang intenzitása tehát az eredetinek alig több, mint egy ezreléke. Ez az intenzitásarány hangnyomáskülönbségnek felel meg, ahogy azt már korábban hasonló esetekben láttuk.

$$\Delta n = n_2 - n_1 = 10 \lg \frac{I_2}{I_1} = 10 \lg a_{l,v} = -29,5 \text{ dB}.$$

Merőleges beesés esetén tehát a vízbeli hang $29,5 \text{ dB}$ -el lesz halkabb, mint a beeső.

A második kérdésre pedig a válasz egyszerűen a reflexiós tényező segítségével adható meg: a hangintenzitás R -ed része verődik vissza, ahol

$$R = 1 - a = 0,9989.$$

4.13. példa: Az ultrahang tartományban az emberi izom akusztikus impedanciája $Z_i = 1,7 \cdot 10^6$, a zsír pedig $Z_z = 1,33 \cdot 10^6$. (SI-egységekben kifejezve.) Hányadrésze verődik vissza a hangintenzitásnak az izom-zsír határról?

Megoldás: Itt pusztán a reflexiós tényezőt kell meghatároznunk:

$$R = \left(\frac{Z_i - Z_z}{Z_i + Z_z} \right)^2 = 0,0149.$$

Tehát a hangintenzitás mintegy $1,5\%$ -a verődik csak vissza az izom-zsír határról.

Visszaverődés nem merőleges beesés esetén Ez az eset jóval összetettebben tárgyalható, mint a merőleges beesés. Könyvünk kereteit meghaladná ennek ismertetése, csak azt említjük meg, hogy ebben az esetben a reflexiós tényező nagyobb lesz, mint a merőleges beesés esetében, és ha $c_2 > c_1$, akkor az általános hullámtanból ismert teljes visszaverődés is bekövetkezhet, ha a beesési szög elér egy bizonyos mértéket.

4.6.2. Hangvisszaverődés a gyakorlatban

A gyakorlatban igen sokszor nem irányított hang visszaverődését kell vizsgálni sík felületekről, ahogy azt az előzőekben tettük, hanem pl. egy teremben ide-oda verődő hang falakon való elnyelődését, vagy irányított hang visszaverődését nem sík felületről, amikor is a hang lényegében véletlenszerű irányokból érkezik a közeghatárra. Az is különbség az előzőekben kiszámolt esetek és a gyakorlat között, hogy a gyakorlatban sokszor a visszaverő felület nem tekinthető végtelen mélységűnek, mint azt az előzőekben feltételeztük.

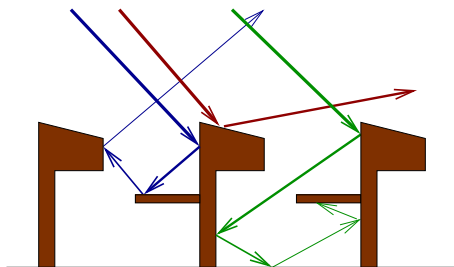
A figyelembe nem vett hatások némelyike még viszonylag könnyen követhető számításokkal is. Például teljesen síma felületek és teljesen véletlenszerű irányból érkező hang esetén lehetőség van az irányokra átlagolni a reflexiós tényezőt, de nem sík felületek esetén ezek a számítások már jóval bonyolultabbak, sokszor kivitelezhetetlenek.

Az ilyen esetekre is iránymutató, amit a merőleges beesés esetében kaptunk. Igaz lesz tehát, hogy nagy akusztikus impedancia különbség esetén a reflexiós tényező igen nagy, az abszorpciós tényező pedig kicsi. Egy kemény, síma betonfal tehát több hangot ver vissza, mint a fa burkolat.

A többszörös visszaverődések miatt az erősen egyenetlen felületek reflexiós tényezője pedig kisebb, mint az azonos anyagú síma felületeké, hisz a hang esetleg csak többszöri visszaverődés után tud a felületről elszakadni és minden visszaverődéskor csökken az intenzitása. Sokszor a falakat szándékosan teszik rücskössé vagy burkolják nem egy síkú faburkolattal, hogy csökkentsék a visszaverődés hatását, de a terem természetes tartozékai is képezhetnek rücskös felületet. Ezt a többszörös visszaverődést szemlélteti vázlatosan a 4.16. ábra egy padosor esetében.

Ezeket az eseteket számítással követni igen nehéz, mert itt lényeges szerepet játszhatnak a felület egyenetlenségei között a hang hullámtulajdonságai miatt kialakuló interferencia és állóhullám jelenségek, így a reflexiós tényező a hullámhossztól is erősen függhet.

Az pedig, hogy egy visszaverő anyag milyen vastag réteget alkot annyiban befolyásolja a reflexiós és abszorpciós tényezőt, hogy a réteg aljáról a



4.16. ábra. Többszörös visszaverődés vázlata egy előadóterem padsoráról.

hang egy része visszaverődik és így az eredetileg már a falba jutott hang egy része visszajut a falon kívülre. Ezt nemcsak a rétegvastagság, hanem a túloldalon elhelyezkedő anyag és annak kapcsolódása az adott réteghez is befolyásolja.

A fellépő számítási nehézségek miatt bonyolult felületek reflexiók és abszorpciós tényezőjét inkább kísérleti úton szokták meghatározni. Az elmélet, amit eddig tanultunk segít a tendenciákban eligazodni, és a következő szabályokat állapíthatjuk meg:

- Azonos alak esetén nagyobb akusztikus impedancia-különbség kisebb abszorpciós tényezőt jelent.
- Azonos anyagok esetén egyenetlenebb felület nagyobb abszorpciós tényezőt jelent.
- Vékony réteg mögött elhelyezkedő nagy akusztikus impedanciájú felület csökkenti az eredő abszorpciós tényezőt.

Mindezek a tendenciák jól megfigyelhetők az 5. táblázatban.

Például a sima öntött betonfelület abszorpciós tényezője sokkal kisebb, mint a beton falazóelemé, mely általában egyenetlen felületű. Vagy a szőnyeg is kevesebb hangot ver vissza, ha nem közvetlenül a betonon van, hanem valamilyen alátétén. Külön érdekes az utolsó négy sor, itt ugyanis a székeken helyet foglaló emberek hatása figyelhető meg: mivel az emberi test puha (kis impedanciájú) anyagból van, abszorpciós tényezője viszonylag nagy, még a kárpitozott széknél is nagyobb. Ezért az üres és foglalt kárpitozott szék abszorpciós tényezője között is van némi különbség, de a fa szék esetén ez a különbség drámai. Valóban, csupán hallással is jól észlelhető különbség van egy előadóterem hangzásában ha a székek nagy része üres vagy ha foglalt.

felület típusa	$a(250 \text{ Hz})$	$a(1 \text{ kHz})$	$a(4 \text{ kHz})$
akuszt. burkolat, merev szerelés	0,4	0,8	0,4
akuszt. burkolat, függesztett	0,7	0,7	0,7
akuszt. vakolat	0,2	0,6	0,7
normál vakolat	0,15	0,05	0,05
gipszkarton (12 mm)	0,1	0,04	0,1
farostlemez (6 mm)	0,3	0,1	0,1
beton falazóelem, festett	0,05	0,07	0,1
beton falazóelem, festetlen	0,4	0,3	0,3
öntött beton (sima)	0,01	0,02	0,03
tégla	0,03	0,04	0,07
vastag szőnyeg betonon	0,06	0,4	0,6
vastag szőnyeg alátéttel	0,3	0,5	0,7
fa padló	0,3	0,2	0,1
normál ablaküveg	0,2	0,1	0,04
vastag síküveg	0,06	0,03	0,02
kárpitozott szék, üres	0,4	0,7	0,6
kárpitozott szék, foglalt	0,6	0,9	0,9
fa szék, üres	0,03	0,06	0,05
fa szék, foglalt	0,4	0,7	0,7

5. táblázat. Tapasztalati hangelnyelési tényezők. (Tájékoztató értékek.)

Egy terem belső felülete természetesen általában különböző anyagokból áll. Ekkor van értelme a terem **átlagos abszorpció**s **együtthatójáról** beszélni, ami alatt az egyes burkolóanyagok területtel súlyozott átlagát értjük. Azaz ha az i . anyagtípus területe A_i , akkor egy terem átlagos abszorpció s együtthatója n fajta anyag esetén:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i a_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (4.35)$$

4.14. példa: Egy $8 \times 10 \text{ m}^2$ alapterületű terem belmagassága $3,5 \text{ m}$. A falakat és a mennyezetet festetlen beton falazóelemek alkotják, a fa padló területéből 40 m^2 -et foglalnak el a fa székek. Mekkora az átlagos abszorpció s tényező 1 kHz -en, ha senki sem ül a székeken illetve ha teli a terem hallgatóval?

Megoldás: Ebben az egyszerűsített modellben $n = 3$ anyag alkotja a belső felületet:

- $i = 1$: beton falazóelem. A feladat szerint $A_1 = 80 + 2 \cdot (10 + 8) \cdot 3,5 = 206 \text{ m}^2$, a fenti táblázat szerint pedig $a_1 = 0,3$.

- $i = 2$: a fa padló. Ebből $A_2 = 40 \text{ m}^2$ látszik ki, a táblázat szerint pedig $a_2 = 0,2$.
- $i = 3$: a székek által elfoglalt terület. A feladat szerint $A_3 = 40 \text{ m}^2$, ha üresek a székek, akkor $a_3 = 0,06$, teli székek esetén $a_3^* = 0,7$.

Így már könnyű megadni a választ.

Ha a székek üresek:

$$\bar{a} = \frac{A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{72,2}{286} = 0,25,$$

míg teli székek esetén:

$$\bar{a}^* = \frac{A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3^*}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{97,8}{286} = 0,34.$$

4.6.3. Hangelnyelődés közegek belsejében

Eddigi számításaink során a hang által szállított összenergia nem csökkent, csak széteszlott a közeghatáron. A valóságban azonban már a közegek belsejében is történik intenzitáscsökkenés amiatt, hogy a folyadékok, gázok és szilárd anyagok belső súrlódása a hang energiájának egy részét hővé alakítja. Ennek hatása a levegőben néhány m-es távolságokon nem érzékelhető, de látni fogjuk, hogy számtalan, füllel is jól érzékelhető jelenségnek ez az oka. Vizsgáljuk meg tehát ezt a jelenséget.

Jogos az a feltételezés, hogy a hang energiasűrűségének közegbeli abszorpció miatti, egységnyi idő alatti csökkenése egyenesen arányos magával az e energiasűrűséggel, azaz

$$\Delta e_a = -\alpha e \Delta t.$$

Ez a feltételezés jogosnak tűnik a normál hang tartományában, ahol a hanghullámok összeadhatók, hisz pl. két egyforma hang esetén a energiasűrűség is duplázódik és az elnyelődő energia is.

Fontos észben tartani, hogy ez csak a közeg abszorpciójának hatása, és más hatások is csökkenthetik az energiasűrűséget, ezért alkalmaztuk az a alsó indexet.

Használjuk ki a (4.15) összefüggést!

$$\Delta e_a = -\alpha \frac{I}{c} \Delta t.$$

Vizsgáljunk egy kicsi, ΔV térfogatú tartományt. Az ebben elnyelődő hangenergia az előző egyenlet ΔV -vel való szorzásával kapható meg:

$$\Delta E_a = -\frac{\alpha}{c} I \Delta V \Delta t.$$

Az elnyelődés teljesítménye tehát:

$$P_a = \frac{\Delta E_a}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{c} I \Delta V.$$

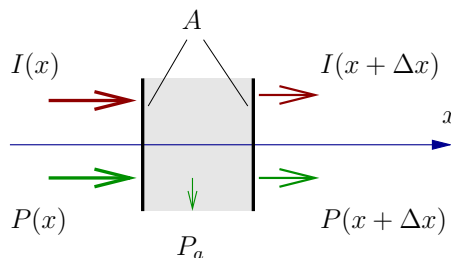
Bevezetve még az $m = \alpha/c$ jelölést:

$$P_a = -m I \Delta V. \quad (4.36)$$

Az m mennyiség neve: **lineáris abszorpció tényező**. Ez a közeg jellemző mennyiség, melynek értéke függhet a közeg paramétereitől (pl. hőmérséklet, páratartalom) és a hang frekvenciájától.

A továbbiakban ezt az alapösszefüggést alkalmazzuk több fontos esetre.

Síkhullám csillapodása. Vegyük fel az x -tengelyt a hang terjedési irányában és vizsgáljunk egy A keresztmetszetű, x és egy $x + \Delta x$ közé eső térfogatot. Ekkor $\Delta V = A \Delta x$. Az ebbe a tartományba belépő $I(x)$ intenzitás nem lesz egyenlő a kilépő $I(x + \Delta x)$ -szel, hisz az energia egy része elnyelődött. (Lásd 4.17. ábra.)



4.17. ábra. Síkhullám csillapodása közegben.

Ezt legkönnyebben a be- és kilépő hangteljesítményen keresztül tehetjük számszerűvé, hisz ezek különbsége nyilván a (4.36) által meghatározott elnyelt teljesítmény:

$$P(x + \Delta x) = P(x) + P_a = P(x) - m I \Delta V.$$

Felhasználva a $P = IA$ és $\Delta V = A\Delta x$ összefüggéseket:

$$I(x + \Delta x)A = I(x)A - mI(x)\Delta V = I(x)A - mI(x)A\Delta x.$$

(Itt felhasználtuk, hogy Δx -et kicsire választjuk, így az intervallum alatt I megváltozása olyan kicsi, hogy a $-mI\Delta V$ -s tagban I -t a térfogat bármely helyéről, így x -ből is vehetjük.)

Egyszerű átalakítások után:

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = -mI(x).$$

$\Delta x \rightarrow 0$ esetben ez:

$$\frac{dI}{dx} = -mI(x). \quad (4.37)$$

Ez egy egyszerű, szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenlet, melyet akkor is meg tudunk oldani, ha a differenciálegyenletek elméletéről semmit nem tudunk, de integrálni igen. Osszuk le ugyanis mindkét oldalt $I(x)$ -szel és integráljuk az egyenletet x szerint:

$$\int \frac{1}{I} \frac{dI}{dx} dx = - \int m dx,$$

amiből:

$$\ln I = -mx + C,$$

ahol C egy egyelőre ismeretlen jelentésű integrálási állandó.

Innen az intenzitás helyfüggése:

$$I(x) = e^{-mx+C} = e^C \cdot e^{-mx}.$$

C jelentése kitalálható, ha ide $x = 0$ -t írunk be:

$$I(0) = e^C \cdot 1.$$

Tehát a síkhullám intenzitásának gyengülése:

$$I(x) = I(0)e^{-mx}. \quad (4.38)$$

Érdemes a hang gyengülését decibel-skálán is kifejezni:

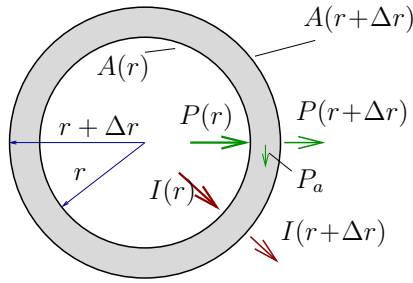
$$n(x) = 10 \lg \frac{I(x)}{I_0} = 10 \lg \left(\frac{I(0)}{I_0} e^{-mx} \right) = 10 \lg \frac{I(0)}{I_0} + 10 \lg e^{-mx},$$

azaz

$$n(x) = n(0) - \frac{10m}{\ln 10} x. \quad (4.39)$$

A hangnyomásszint tehát síkhullám esetében a távolsággal lineárisan csökken, és az elnyelődésből méterenként $(10/\ln 10)m \approx 4,34m$ dB csökkenés adódik.

Gömbhullám csillapodása. Az előzőekhez hasonlóan vizsgáljunk egy gömbhullámból kimetszett r és $r + \Delta r$ közti vékony réteget, nézzük meg, ebben hogyan történik a hang elnyelődése. (Lásd 4.18. ábra.)



4.18. ábra. Gömbhullámhullám csillapodásának számításához.

Az r és az $r + \Delta r$ sugarú gömbök felszíne:

$$A(r) = 4\pi r^2, \quad A(r + \Delta r) = 4\pi(r + \Delta r)^2.$$

A $P = IA$ összefüggés szerint az előbbi gömbfelületeken mérhető teljes hangteljesítmény:

$$P(r) = I(r)A(r), \quad P(r + \Delta r) = I(r + \Delta r)A(r + \Delta r). \quad (4.40)$$

A két gömbfelszín közötti elnyelődés miatt pedig:

$$P(r + \Delta r) = P(r) + P_a = P(r) - mI\Delta V. \quad (4.41)$$

A közrezárt ΔV térfogat is könnyen kifejezhető:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3 - r^3).$$

Mivel igen vékony rétegekkel számolunk, a Δr magasabb kitevőit tartalmazó tagok elhanyagolhatók lesznek, így

$$\Delta V \approx 4\pi r^2 \Delta r = A(r) \Delta r.$$

Ez a közelítés érthető, ha a vizsgált térrészt egy $A(r)$ sugarú gömb felületén elhelyezkedő, Δr vastagságú rétegnek képzeljük el.

Ezt beírva (4.41) egyenletbe:

$$P(r + \Delta r) = P(r) - mIA(r)\Delta r = P(r) - mP(r)\Delta r,$$

ahonnan:

$$\frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{\Delta r} = -mP(r).$$

$\Delta r \rightarrow 0$ határesetben ez átírható:

$$\frac{dP}{dr} = -mP(r),$$

ami szerkezetében teljesen azonos a fenti (4.37) egyenlettel, ezért megoldásának menetét nem részletezzük itt. A megoldás:

$$P(r) = P(0)e^{-mr}.$$

Ezt összevetve (4.40) egyenlettel egyszerű számítással adódik, hogy

$$I(r) = \frac{P(0)}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r^2}.$$

Ezen formula távolságfüggése jól érthető: az $1/r^2$ -es tag a távolság növekedésével az egyre nagyobb felületre való szétszóródás miatt lép fel, míg az exponenciális lecsengés a hangelnyelés miatt. Ha $m = 0$ lenne (nem elnyelő közeg), az exponenciális tag az állandó 1 értéket venné fel, tehát csak a szétszóródás miatt csökkenne a hangintenzitás.

Decibel-skálán leírva a hang gyengülését:

$$\begin{aligned} n(r) &= 10 \lg \frac{I(r)}{I_0} = 10 \lg \frac{P(0)}{4\pi r^2 I_0} + 10 \lg e^{-mr} = \\ &= 10 \lg \frac{P(0)}{4\pi r^2 I_0} - \frac{10m}{\ln 10} r. \end{aligned}$$

Ez nem áttekinthető, aminek az az oka, hogy formálisan $r \rightarrow 0$ esetén $n \rightarrow \infty$. A valóságban természetesen ez nem valósul meg, hisz nincs 0 méretű hangforrás, ezért valamilyen r_0 referenciasugárnál mért hangnyomásszinthez szokás viszonyítani:

$$n(r) - n(r_0) = -\frac{10m}{\ln 10}(r - r_0) - 20 \lg \frac{r}{r_0}. \quad (4.42)$$

Itt is jól kettéválasztható a hangelnyelődés miatti lineáris csökkenés és a távolságnövekedésből adódó tag. Ezek jellege más: az elnyelődésből méterenként $(10/\ln 10)m \approx 4,34m$ dB csökkenés adódik, a távolság duplázásakor pedig $20 \lg 2 \approx 6,02$ dB-nyi.

Vonalsugárzó hangjának csillapodása. Az előzőekben tárgyalt síkhullám esete megfelel az igen nagy méretű forrásokénak, a gömbhullám pedig a pontszerű hangforrásnak. Viszonylag gyakran fellép a gyakorlatban olyan eset, amikor a hangforrás egy hosszú egyenes vonalat alkot. Ilyen pl. egy autópálya, mint zajforrás. Ekkor a forrás erősségét az jellemzi, hogy méterenként hány watt teljesítménnyel sugározza a hangot, azaz az $Q = P/l$ mennyiség.

A vonalsugárzó hangintenzitása a forrás, mint tengely köré rajzolt hengereken lesz állandó, így számításaink során ezeket érdemes használni ahhoz hasonlóan, ahogy a gömbhullám esetén a forrás köré írt gömbökkel tettük. Ezekből a hengerekből egy l magasságú részt kivágva a fontos geometriai paraméterek a következők lesznek:

A vizsgált r és $r + \Delta r$ sugarú hengerfelületek felszíne:

$$A(r) = 2\pi r l, \quad A(r + \Delta r) = 2\pi(r + \Delta r)l.$$

A hengerek térfogatának különbsége, ismét felhasználva, hogy $\Delta r \ll r$ miatt Δr magasabb hatványait tartalmazó tagok elhanyagolhatóak:

$$\Delta V = \pi l ((r + \Delta r)^2 - r^2) \approx 2\pi r l \Delta r = A(r) \Delta r.$$

Így a hengerfelületeken a hangteljesítmény változására ugyanolyan összefüggést kapunk, mint a gömbhullám esetében:

$$P(r + \Delta r) = P(r) + P_a = P(r) - mI\Delta V = P(r) - mP(r)\Delta r,$$

ami $\Delta r \rightarrow 0$ esetében:

$$\frac{dP}{dr} = -mP(r),$$

ezért a hengerfelületeken áthaladó hang össz teljesítménye ebben az esetben is

$$P(r) = P(0)e^{-mr}$$

szerint csökken.

Ezt a fenti $A(r) = 2\pi r l$ -lel leosztva a hangintenzitás csökkenésére a következő formulát kapjuk:

$$I(r) = \frac{P(r)}{A(r)} = \frac{P(0)}{2\pi l} \frac{e^{-mr}}{r} = \frac{Q}{2\pi} \frac{e^{-mr}}{r}.$$

Ez igen hasonló formula a gömbhulláméhoz. A távolságfüggésben egyetlen különbség van: a szétszóródásból származó szorzó itt $1/r$, míg a gömbhullám esetén $1/r^2$ volt. A vonalforrás hangintenzitása tehát nem olyan gyorsan csökken, mint a pontforrásé.

Rövid számítással megmutatható, hogy dB-skálán a csökkenés egy r_0 referencia-sugárhoz viszonyítva:

$$n(r) - n(r_0) = -\frac{10m}{\ln 10}(r - r_0) - 10 \lg \frac{r}{r_0}. \quad (4.43)$$

Ez az összefüggés is majdnem ugyanaz, mint a gömbhullám esetében kapott eredmény, de itt a szétszóródást leíró tag együtthatója 10 és nem 20, ami azt jelenti, hogy a távolság megduplázása itt $10 \lg 2 \approx 3,01$ dB hangnyomásszint-csökkenést jelent.

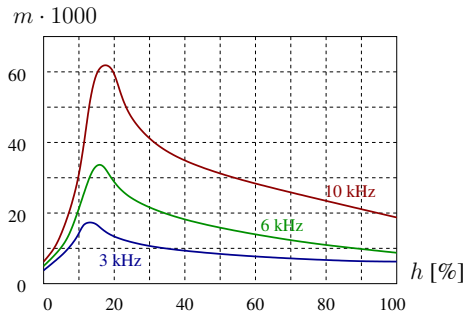
A levegő hangelnyelési tényezője. Ahhoz, hogy konkrét számításokat tudjunk végezni, szükség van a levegő hangelnyelési tényezőjének szám-szerű értékére. Ezt a tényezőt elméleti úton csak az igen kis méretskálán történő folyamatok részletes figyelembe vételével lehet megkapni. Az elmélet bonyolultsága miatt mi nem ezt az utat választjuk.

Azt azonban részletes számítás nélkül is könnyű belátni, hogy a frekvencia növelése m értékét is növeli, azaz magasabb hangokra nagyobb az elnyelési tényező, hisz nagyobb frekvencia nagyobb sebesség-amplitúdókat jelent, amit nyilván jobban fékez bármilyen belső súrlódás jellegű kölcsönhatás. A mindennapi tapasztalat azt is mutatja, hogy a levegő páratartalmától is függ a hangelnyelés. Ez a függés nem egyszerű: a mérések szerint 10 és 20% páratartalom közt a legnagyobb a hangelnyelés, ettől távolodva a hangelnyelés gyorsan csökken. Ezt mutatja be 3 frekvencia esetén a 4.19. ábra.

Nehézkes lenne ilyen grafikont használni a számításokhoz, bár pontos akusztikai elemzések csak a mérésekből létrehozott táblázatokon vagy grafikonokon alapulhatnak. Sokszor elegendő a mért értékekre illesztett egyszerű összefüggések használata. Pl. 20 és 70% közötti relatív páratartalom estében, 20°C hőmérsékleten az emberi fül érzékenységi tartományában a levegő hangelnyelési tényezője jó közelítéssel:

$$m = 5,5 \cdot 10^{-4} \frac{50}{h} \left(\frac{f}{1000 \text{ Hz}} \right)^{1,7} \frac{1}{\text{m}}, \quad (4.44)$$

ahol h a relatív páratartalom %-ban.



4.19. ábra. Levegő hangelnyelési tényezője a relatív páratartalom (h) függvényében 3 különböző frekvencián (Knudsen mérései szerint).

Látható tehát a hang frekvenciájától való erős függés, ami azt jelenti, hogy a magasabb hangok lényegesen jobban nyelődnek el, mint a mélyebbek.

4.15. példa: Hányszor nagyobb a hangelnyelési tényező egy 2 kHz-es hangra, mint egy 200 Hz-esre?

Megoldás: (4.44) szerint azonos páratartalom mellett

$$\frac{m(2000)}{m(200)} = \left(\frac{2000}{200} \right)^{1,7} = 50,1.$$

A 2 kHz-es hangok elnyelési tényezője tehát kb. 50-szer nagyobb, mint a 200 Hz-esé.

4.16. példa: Szabad területen egy kisméretű hangforrástól 50 m-re állva annak hangját 75 dB-esnek halljuk. Hány decibeles hangot fogunk hallani 1 km-ről, ha terepakadályok nincsenek és a hang frekvenciája 200 Hz? Mi lenne az eredmény 5 kHz-es hangokra? (A relatív páratartalmat vegyük 70%-osnak.)

Megoldás: Szükségünk lesz a két esetbeli hangelnyelési tényezőre. Ezt (4.44)-be való közvetlen behelyettesítéssel egyszerűen megkaphatjuk:

$$m_1 = 2,55 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{m}}, \quad m_2 = 6,06 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}}$$

(Az 1-es eset a 200 Hz-es a 2-es az 5000 Hz-es hang esete.)

Feladatunkban gömbhullámok intenzitásának csökkenéséről van szó. Ennek mértékét dB-ben a (4.42) határozza meg.

A hangelnyelésből származó gyengülés: $\Delta n_a = (10/\ln 10)m(r - r_0)$, ahol $r = 1000$ m, $r_0 = 50$ m. Ez a két frekvencia esetében:

$$\Delta n_{a,1} = 0,11 \text{ dB}, \quad \Delta n_{a,2} = 25,0 \text{ dB}.$$

Mint várható volt, a hangelnyelésből következő hangnyomásszint-csökkenés jelentősen eltér: 200 Hz-en szinte elhanyagolható, 5000 Hz-en viszont igen jelentős.

Ezzel szemben a hang szétszóródásából adódó csökkenés azonos a két esetben:

$$\Delta n_s = 20 \lg \frac{r}{r_0} = 26,0 \text{ dB}.$$

Ezért a két esetben az észlelt hangnyomásszint:

$$n_1 = 75 - 0,11 - 26,0 = 48,9 \text{ dB},$$

$$n_2 = 75 - 25,0 - 26,0 = 24 \text{ dB}.$$

A példa hatásosan mutatja azt, hogy km-es távolságon a magas hangok igen jelentős gyengülést szenvednek el a hangelnyelésből kifolyólag. Ez az oka pl. annak, hogy a villámcsapás hangja közelről nemcsak hangos, de igen magas frekvenciájú komponenseket is tartalmazó „csattanásként” hallatszik, míg távolról ugyanez a hang szinte csak mély komponenseket tartalmazó „dübörgésként” észlelhető.

4.17. példa: Egy autópálya sík terepen levő szakaszától 100 m-re 70 dB-es hangnyomásszintet mérünk. Milyen messzire kell mennünk, hogy a hangnyomásszint 50 dB alá csökkenjen? A páratartalmat vegyük 30%-osnak, a vizsgált hang frekvenciáját 200 Hz-nek.

Megoldás: A megoldáshoz (4.43) egyenletet kell alkalmaznunk $r_0 = 100$ m, $n(r_0) = 70$ dB, $n(r) = 50$ dB értékekkel:

$$50 - 70 = -\frac{10m}{\ln 10}(r - 100) - 10 \lg \frac{r}{100}.$$

A feladat körülményei között a hangelnyelési együttható (4.44) alapján $m = 5,94 \cdot 10^{-5}$ 1/m. Ezt beírva az előző egyenletbe és a konstansokat kiszámolva:

$$20 = 2,58 \cdot 10^{-4}(r - 100) + 10 \lg \frac{r}{100}.$$

Ez az egyenlet nem oldható meg algebrai úton, mert benne az ismeretlen r szorozóként és a logaritmushatvány argumentumában is szerepel. Közelítőleg meg tudjuk határozni a megoldást, ha a jobb oldalt kiszámoljuk több r értékre

és megnézzük, mikor lesz egyenlő 20-szal. Szerencsére a jobb oldal r szigorúan monoton növekvő függvénye, így legfeljebb 1 megoldás lesz.

A számolás előtt azért jó megbecsülni az eredmény nagyságrendjét. Ha nem lenne hangelnyelés, akkor a jobb oldal első tagja 0 lenne, azaz a keresett távolságra a

$$20 = 10 \lg \frac{r^*}{100}$$

egyenlet vonatkozna. Ennek megoldása könnyen megkapható: $r^* = 10^4$ m. Az eredeti feladat megoldása ennél kisebb kell legyen, mert a hangelnyelés miatt a hangnyomásszint gyorsabban csökken.

Készítsünk táblázatot a fenti egyenlet jobb oldaláról:

r [m]	2000	4000	6000	8000	10000
jobb oldal	13,5	17,0	19,3	21,1	22,6

Tehát valahol 6000 és 8000 m-es távolság között érjük el a 20 dB-es hangnyomásszint-csökkenést.

Egy olyan esettel találkoztunk, mely a gyakorlatban sokszor előfordul: a fizikai összefüggések egyenletrendezéssel, algebrai módon megoldhatatlan összefüggéshez vezettek. Ilyenkor az előző táblázatkészítésnél fejlettebb módszereket is lehet használni vagy számítógéppel lehet a megoldást tetszőleges pontossáig meghatározni. Esetünkben ez a megoldás 6741 m. Ilyen közelítő megoldásokat a matematikai alapok hiánya miatt az alapképzés során hallgatóinktól nem várunk el.

Az érdekesség néhány közeg hangelnyelését adjuk meg a 6. táblázatban. A szemléletesség kedvéért nem m -et, hanem annak reciprokát adjuk meg, ami azt a távolságot jelenti, mely alatt a hangintenzitás a hang elnyelése miatt e -ad részére csökken.

közeg	$1/m(100 \text{ Hz})$	$1/m(10 \text{ kHz})$	$1/m(1 \text{ MHz})$
levegő	10 km	5 m	6 mm
tengervíz	2000 km	1 km	3 m
üveg	1500 km	15 km	150 m
alumínium	15 000 km	150 km	1,5 km

6. táblázat. Néhány közeg hangelnyelésének jellemzése. (Lásd a szöveget.)

Ebből a táblázatból látszik, hogy mindegyik közegre jellemző, hogy nagyobb frekvenciák esetén a hangelnyelés mértéke jelentősen nő, azaz csökken az a távolság, ami alatt e -ad részére csökken az intenzitás. A közeget egymással összehasonlítva is érdekes tényekre lehetünk figyelmesek.

Pl. vízben a mély hangok akár több ezer km-t is megtehetnek számottevő elnyelődés nélkül. Ezt a jelenséget felhasználva a bálnák sok ezer km-re tudnak kommunikálni és a visszhangok alapján tájékozódni.

4.6.4. Hangelnyelődés zárt térben

Az előző alfejezetben a hang gyengülését szabad terek esetén tárgyaltuk. Egész másként zajlanak le a folyamatok zárt termekben, pl. egy szobában vagy előadóteremben. Ezt az esetet tárgyaljuk a következőkben.

A gyakorlatban előforduló zárt terek többségében a hang a másodperc kis része alatt többször megteszi a falak közti távolságot. Minden visszaverődéskor egy része elnyelődik a falban, így a levegőbeli hang intenzitása akkor is csökkenne, ha a levegőnek nem lenne önmagában hangelnyelése.

Ennek a folyamatnak részletes leírása elég bonyolult, ha a szoba alakja vagy a hangforrások elrendeződése speciális. Ilyen esetekkel pontos akusztikai tervezésnél foglalkozni kell. Mi itt csak a legfontosabb alapfogalmakkal és összefüggésekkel ismerkedünk meg.

A legtöbb esetben feltételezhető, hogy a falakról és a berendezésről többszörösen visszavert hang véletlenszerű irányokban terjed. Ezért nem tudjuk követni, hogy egy bizonyos irányban induló hang pontosan mikor verődik vissza a falról, de azt meg tudjuk mondani, hogy két visszaverődés között átlagosan mennyi utat tesz meg szabadon.

Átlagos szabad úthossz (hang) :

Egy teremben a hang átlagos szabad úthosszának nevezzük azt a távolságot, melyet a hang két visszaverődés között átlagosan megtesz.

Amennyiben a terem térfogata V , belső felülete A , bebizonyítható, hogy az átlagos szabad úthossz

$$L = \frac{4V}{A}$$

lesz.

Bár maga a bizonyítás meghaladná könyvünk kereteit, a végeredmény ésszerű. Hisz a véletlenszerűen pattogó hanggal együtt utazva nyilván annál nagyobb távolságot tehetünk meg szabadon, minél nagyobb térfogat áll rendelkezésre és annál gyakrabban ütközünk, minél nagyobb az a felület, aminek ütközhetünk.

A véletlenszerű irányokban terjedő hang tehát átlagosan

$$\Delta t_a = \frac{L}{c} = \frac{4V}{Ac} \quad (4.45)$$

időnként szenved a falon (amibe most általánosított értelemben a mennyezetet és a padlót is beleértjük) abszorpciót.

Ha nem lenne hangelnyelés magában a levegőben, a hang intenzitása Δt_a időnként $1 - \bar{a}$ -szorosára csökkenne, ahol $\bar{a}$ a falak átlagos abszorpciós tényezője. Egy nagyobb t idő alatt $t/\Delta t_a$ ilyen ütközés következik be, azaz a hang intenzitása $(1 - \bar{a})^{t/\Delta t_a}$ -szorosra változik. Ebben az esetben tehát az észlelhető intenzitás exponenciálisan cseng le:

$$I(t) = I(0) \cdot (1 - \bar{a})^{t/\Delta t_a}.$$

Az időegység alatti hangintenzitás változás a falak elnyelése miatt:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{fal} = I(0) \cdot \ln(1 - \bar{a}) \cdot (1 - \bar{a})^{t/\Delta t_a} \cdot \frac{1}{\Delta t_a} = I(t) \cdot \frac{\ln(1 - \bar{a})}{\Delta t_a}.$$

Vegyük észre, hogy $0 < a < 1$, ezért $\ln(1 - \bar{a}) < 0$, tehát ez az intenzitás csökkenését írja le.

Vegyük most figyelembe a levegő hangelnyelését is.

A hangelnyelésre vonatkozó (4.36) alapösszefüggést alkalmazzuk esztünkre az egész szobát tekintve vizsgálati tartománynak. Ekkor $\Delta V = V$. Beírva még a teljesítmény definícióját:

$$\frac{dE}{dt} = -mI(t)V.$$

Használjuk ki az $I = ec = E/V \cdot c$ összefüggést. Ebből a szobában levő össz hangenergia és az intenzitás összefüggése: $E = I \cdot V/c$, amit az előző kiemelt egyenletbe beírva:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_e = -mcI(t).$$

A valóságban mind a fal, mind a levegő elnyelése szerepet játszik, így a hangintenzitás időegységenkénti csökkenése ennek és a korábban kiszámolt fal hatásának az összege:

$$\frac{dI}{dt} = \left. \frac{dI}{dt} \right|_e + \left. \frac{dI}{dt} \right|_{fal} = \left(-mc + \frac{\ln(1 - \bar{a})}{\Delta t_a} \right) I(t).$$

Bár ez az egyenlet bonyolultnak tűnik, valójában $dI/dt = -kI$ alakú, ahol k egy adott szobára állandó. Ilyen típusú egyenletet már oldottunk

meg, pl. a 4.6.3. fejezetben. A levezetést nem megismételve is tudjuk, hogy a megoldás:

$$I(t) = I(0)e^{-kt}$$

alakú, ahol

$$k = mc - \frac{\ln(1 - \bar{a})}{\Delta t_a}.$$

Egy teremben tehát a szórt hang intenzitása exponenciális ütemben csökken. Az előző k állandó helyett szemléletesebb és gyakrabban használt annak reciprokát használni: a $\tau = 1/k$ mennyiséget a terem **időállandójának** nevezzük, és ezzel kifejezve az előzőeket:

$$I(t) = I(0)e^{-t/\tau}, \quad \text{ahol } \tau = \frac{1}{mc - \frac{\ln(1 - \bar{a})}{\Delta t_a}}.$$

Ide beírva Δt_a (4.45)-beli kifejezését:

$$\tau = \frac{1}{mc - \frac{\ln(1 - \bar{a})}{4V} Ac} = \frac{4}{c(4m - A/V \cdot \ln(1 - \bar{a}))}.$$

Ennek az időállandónak az a szemléletes jelentése, hogy ez adja meg, mennyi idő alatt csökken a hangintenzitás az eredeti $1/e$ -ed részére. A gyakorlatban szemléletesebb, ha valamilyen egész dB-nyi csökkenés idejét adjuk meg ehelyett. Megállapodás szerint a 60 dB-nyi csökkenés idejét szokás **utózungési időnek** (T_{60}) nevezni. Ez egyszerű kapcsolatban van τ -val, hisz 60 dB csökkenés az intenzitásban 10^{-6} -os szorzót jelent:

$$10^{-6}I(0) = I(0)e^{-T_{60}/\tau},$$

ahonnan

$$T_{60} = \tau \cdot \ln 10^6 \approx 13,82\tau.$$

τ fenti kifejezését ide beírva az **utózungési idő**:

$$T_{60} = \frac{4 \ln 10^6}{c(4m - A/V \cdot \ln(1 - \bar{a}))}. \quad (4.46)$$

A formula neve: **Eyring-Norris utózungési formula**.

Érdemes egy kicsit értelmezni ezt a formulát néhány speciális eset elemzésével:

- Ha a levegő elnyelése elhanyagolható (pl. alacsony frekvenciákon), akkor $m \approx 0$, így az előző formula egyszerűsíthető:

$$T_{60, fal} = \frac{4 \ln 10^6 V}{-cA \cdot \ln(1 - \bar{a})}.$$

Ekkor a terem méretei közül a V/A hányados számít. Ha egy terem minden méretét képzeletben 2-szeresére növeljük V a 8-szorosára, A a 4-szeresére változik, azaz V/A duplázódik. Nagyobb termeknek tehát nagyobb az utózengési ideje, ha a fal elnyelése a domináns.

- Ha a falak elnyelése elhanyagolható, akkor $\bar{a} = 0$, azaz $\ln(1 - \bar{a}) = 0$, így

$$T_{60, e} = \frac{\ln 10^6}{mc},$$

azaz ekkor a terem méretei nem számítanak, csak a levegő hangelnyelési tényezője.

Az utózengési időt megadó formula segítségével szokták anyagok abszorpciós tényezőjét megmérni: egy kis üreg belsejét a vizsgált anyaggal bevonva mérik az utózengési időt, amiből (és az üreg méreteiből) az abszorpciós tényező meghatározható, sokkal pontosabban, mintha közvetlenül a beeső és visszavert hang intenzitását mérnénk.

Ajánlott utózengési idők. Az utózengési idő definíció szerint a 60 dB hangnyomásszint csökkenésének ideje. Ez a 60 dB a jól hallható hangerrőtől a teljesen hallhatatlanig való csökkenést írja le. Különböző célokra különböző utózengési idejű termek a megfelelőek.

Akusztikai mérésekre, ahol zavaró a visszhang 0,1 s-nál kisebb utózengési idejű süketszobákat kell alkalmazni.

Előadóteremnek nem alkalmasak az igen kis utózengési idejű termek, mert itt ugyan a visszhangok értelemzavaró hatása kicsi, a nagy hangelnyelés azonban azt jelenti, hogy a teremben lényegében nem alakul ki erős szórt hang, ezért az előadótól távolodva a hangintenzitás igen kicsi lesz. Ha tehát az utózengési idő kicsi, sok helyen kell hangszórót felszerelni, hogy a hang mindenütt hallható legyen. Beszédre, prózai előadásra ezért a 0,3–1 s közötti utózengési idők a célszerűek.

A zene követelményei egész mások. Itt az utózengés nem rontja az élményt, inkább javítja, gazdagabbá teszi a hangzást. Az ajánlott tartomány

zenei termék esetén 2–5 s. A magas utózungési idő viszont ilyen teremben a beszéd érthetőségét rontja. Szélsőséges példa a párizsi Notre Dame, ahol az utózungési idő 8,5 s. Ez kedvez az orgonamuzsikának, a beszéd érthetőségét viszont nagyon lerontja.

Elfogadható középút a 1–2 s közti tartomány: az ilyen termék vegyesen használható prózai és zenei előadásokra is.

Egy terem pontos akusztikai tervezése igen bonyolult feladat, mely meghaladja tantárgyunk kereteit. Csak a főbb problémákat említve: a levegő hangelnyelése erősen frekvenciafüggő, ezért ha a falak abszorpciós tényezője nem függ a frekvenciától, az utózungési idő erősen változhat a hangmagassággal. Ez nem kívánatos jelenség, amit a fal anyagának gondos megválasztásával lehet kiküszöbölni. A falon kialakított speciális üregek (rezonátorok) jól meghatározott frekvenciatartományban képesek az abszorpciós tényezőt befolyásolni. Másik probléma: fentebb láttuk, hogy egy terem átlagos abszorpciós tényezője attól is függ, ülnek-e a székeken vagy sem. Egy igényes teremakusztikai tervezés ezt is figyelembe veszi.

4.18. példa: Mennyi az utózungési idő a 4.14. példában, ha a frekvencia 1 kHz, a páratartalom 60%-os? (Üres és foglalt székek esetére is számolja ki.)

Megoldás: (4.44) szerint a hangelnyelési tényező esetünkben $m = 4,58 \cdot 10^{-4} \text{ 1/m}$.

A feladat szövege szerint $V = 8 \cdot 10 \cdot 3,5 = 280 \text{ m}^3$, a felület pedig $A = 2 \cdot (80 + 3,5 \cdot 10 + 3,5 \cdot 8) = 286 \text{ m}^2$. Korábban kiszámoltuk, hogy üres székek esetén a szoba átlagos hangelnyelési tényezője 0,25, foglalt székek esetén pedig 0,34.

Így csak ezeket az értékeket kell behelyettesítenünk a fenti (4.46) egyenletbe. Az eredmények:

Üres székek esetén:

$$T_{60} = 0,55 \text{ s.}$$

Foglalt székek esetében:

$$T_{60}^* = 0,38 \text{ s.}$$

Jelentős tehát a különbség, de mindkét eset a prózai előadásokra megfelelő tartományban van, a zenei előadásra azonban alkalmatlannak tűnik a terem.

4.19. példa: Egy templom légtere $140\,000 \text{ m}^3$, falainak belső felülete $25\,000 \text{ m}^2$, falainak átlagos abszorpciós tényezője 0,1. Számolja ki az utózungési időt 200 Hz, 1 kHz és 5 kHz frekvenciák esetére. Állapítsa meg azt is, melyik esetben fog a falak illetve a levegő hangelnyelése dominálni! (A páratartalmat vegyük 30%-osnak.)

Megoldás: Az utózungési időt megadó (4.46) formula nevezőjében levő két tag egyike ($4m$) a levegő hangelnyeléséből származik, a másik ($-A/V \ln(1 - \bar{\alpha})$) pedig a falak hatása. Ezek összehasonlítása alapján lehet megmondani, melyik effektus dominál.

A feladat szövege szerint a frekvenciafüggését elhanyagolhatjuk, így a falakból származó tag állandó:

$$-A/V \ln(1 - \bar{a}) = 1,88 \cdot 10^{-2}.$$

A $4m$ -es tag viszont erősen frekvenciafüggő. (4.44) alapján sorra kiértékelve a 200 Hz, 1 kHz és 5 kHz frekvenciákon:

$$4m_1 = 2,38 \cdot 10^{-4}, \quad 4m_2 = 3,66 \cdot 10^{-3}, \quad 4m_3 = 5,66 \cdot 10^{-2}.$$

Ezek egy része az előbb kiszámolt, falakból származó tagnál kisebb, a másik nagyobb. 200 Hz-en és 1 kHz-en a hangelnyelésből származó tag jóval kisebb, mint a falból származó, 5 kHz-en viszont már fordul a helyzet: itt a levegő elnyelése fog dominálni.

Egyszerű behelyettesítéssel megkapható a három eset utószengési ideje is. A számításokhoz célszerű az itt kiszámolt részeredményeket felhasználni. Az eredmény:

$$T_{60,1} = 8,8 \text{ s}, \quad T_{60,2} = 7,5 \text{ s}, \quad T_{60,3} = 2,2 \text{ s}.$$

(A hang sebességét 330 m/s-nak vettük.)

A mély hangok tehát igen lassan csengenek le, a magasak már jóval gyorsabban, ahogy azt a fenti elméleti megfontolások alapján vártuk is.

4.6.5. Hangelnyelődés falakban

A gyakorlat szempontjából fontos probléma az, mennyivel csökken a hangnyomásszint egy falon áthaladva. A korábban, a nagyméretű közeghatárokról tanult visszaverődési formulák nem alkalmazhatók, ha a falvastagság kisebb a hullámhossznál, ráadásul vékony falak esetén pl. a fal hajlítási rezgései is szerepet fognak játszani a hang továbbadásában.

Maga a jelenségkör teljes elméleti tárgyalása meghaladja könyvünk kereteit, ezért itt csak a főbb fizikai folyamatok megértésére és az egyszerűbb esetek kiszámítására koncentrálnunk.

Tekintsünk egy egyrétegű falat. Ha erre egyik oldalról hang érkezik, annak hatására benne különféle rezgési módok alakulhatnak ki.

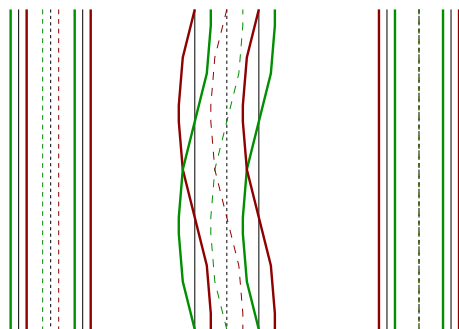
Egy tömbben rezgés. Az egész fal képes kis rezgésekre a hang hatására, melynek során a fal minden pontja a fal síkjára merőlegesen azonos fázisban rezeg.

Hajlítási hullámok. Ha a beeső hang nem pontosan merőleges a falra, képes benne olyan rezgést létrehozni, melyben a falon hullámmozgás formájában hajlítási rezgések futnak végig. Ekkor a fal pontjai a fal

síkjára merőlegesen mozognak, a fal egy adott helyén mélységben azonos a rezgési fázisuk csak a fal síkjában levő koordináta változásával változik a rezgési fázis.

Vastagsági állóhullámok. A fal anyagában, annak síkjára merőlegesen a hang képes állóhullám formában rezegni, ha a falvastagság és a hullámhossz megfelelő viszonyban van egymással. (Lásd az állóhullámokról szóló fejezetet.)

Ezeket szemlélteti a 4.20. ábra. Ezen a fal nyugalmi állapotát vékony fekete, két különböző pillanatbeli állapotát pedig vastagabb piros ill. zöld vonal jelzi. Szaggatottan a fal középvonalát is berajzoltuk.



4.20. ábra. Falak fő rezgéstípusai: egy tömbben rezgés (bal oldal), hajlítási hullám (középső), vastagsági állóhullámok (jobb oldal)

Vegyük sorra mindegyiket.

Egy tömbben rezgés, a vékony fal közelítés. Ez az alacsony frekvenciájú hangokra jellemző rezgési mód. Látni fogjuk, hogy a másik két rezgés csak jól meghatározott frekvenciákon következik be, és ez az egy tömbben rezgés az ezeknél kisebb frekvenciákra lesz jellemző. A másik két esetben jellemző frekvenciák fordítottan arányosak lesznek a falvastagsággal, ezért az egy tömbben rezgés a vékony falakra lesz jellemző a gyakorlatban, ezért ezen rezgési mód számítását szokás **vékony fal közelítésnek** nevezni.

Ebben az esetben az okozza az átmenő hang intenzitáscsökkenését, hogy a bejövő hang a levegőnél sokkal sűrűbb falat nem tudja olyan amplitúdójú rezgésbe hozni, mintha levegő lenne a helyén, ezért annak túloldalán csak kisebb amplitúdójú hullámok keletkeznek. (A hangenergia különbsége pedig visszaverődik a falról.)

Látható, hogy ebben az esetben a vékony falban zajló folyamatok nem játszanak lényegi szerepet, csak a fal tömegének megmozgatása jelent a hangterjedéssel szemben ellenállást, így a fal adataiból csak arra van szükség, hogy egységnyi felülete hány kg tömegű. Ezért érdemes bevezetni a következő fogalmat:

Felületi sűrűség:

Egy réteg (fal) felületi sűrűségének nevezzük egy falrész tömegének és felületének hányadosát:

$$\varrho_s = \frac{m}{A}.$$

Könnyű belátni, hogy

$$\varrho_s = \varrho \cdot d,$$

ahol ϱ a fal anyagának sűrűsége, d a fal vastagsága.

Számítások nélkül is sejthető, hogy a falon áthaladó hang intenzitás-csökkenése nagyobb mértékű lesz, ha ϱ_s nagyobb. Az is érthető, hogy az intenzitás-csökkenés a frekvencia növekedésével is nő. Ezen megfontolások után hihető, hogy ha a vékony falra merőlegesen beeső I_1 intenzitású hang a túloldalon I_3 intenzitású, akkor

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega \varrho_s}{2Z}\right)^2}, \quad (4.47)$$

ahol Z a levegő akusztikus impedanciája, ω a hang körfrekvenciája.

Ahogy a hangtanban megszoktuk, sokszor kényelmesebb intenzitásarány helyett hangnyomásszint-különbségben, azaz dB-ben mért veszteségben számolni. A gyakorlati számításokhoz további egyszerűsítést jelent, hogy az esetek túlnyomó többségében $\omega \varrho_s \gg 2Z$, így az előző formulában a nevezőbeli 1-es elhanyagolható a négyzetes tag mellett.

Tehát

$$\frac{I_3}{I_1} \approx \left(\frac{2Z}{\omega \varrho_s}\right)^2, \quad \text{ha } \frac{2Z}{\omega \varrho_s} \ll 1.$$

Ekkor a hangnyomásszint esése dB-ben:

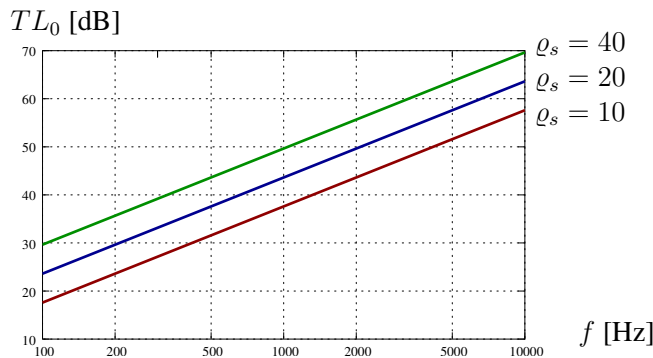
$$TL_0 = 10 \lg \frac{I_1}{I_3} = 20 \lg \frac{\omega \varrho_s}{2Z}. \quad (4.48)$$

A nemzetközi irodalomban szokásos TL jelölést használtuk, ami a „total loss”, azaz „teljes veszteség” rövidítése.

Érdeemes megfigyelni, hogy akár a frekvencia, akár a felületi sűrűség megduplázása $20 \lg 2 \approx 6,02$ dB-nyivel növeli az elnyelést.

A gyakorlati életben jól körülhatárolt körülmények között Z nem változik nagyon, ezért szokás egy közepes $Z = 415$ -ös értékkel számolni és a körfrekvencia helyett a frekvenciát megadni. Ekkor ez a formula az alábbi alakot ölti (SI-egységeket használva):

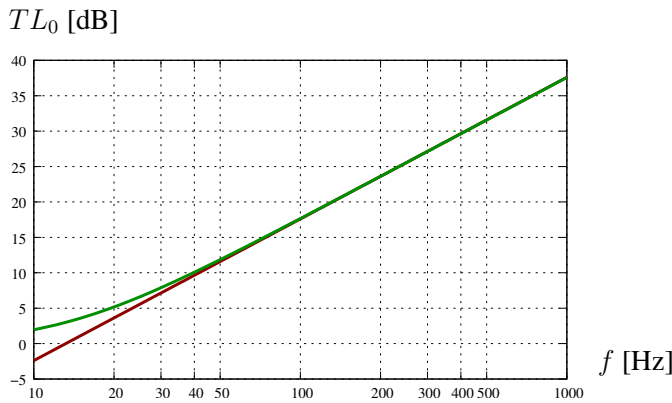
$$TL_0 = 20 \lg \frac{\pi f \varrho_s}{Z} = 20 \lg(f \varrho_s) - 42,4 \text{ dB.}$$



4.21. ábra. Vékony falak hangelnyelése három különböző felületi sűrűség esetén.

A 4.21. ábrán három különböző felületi sűrűség esetén ábrázoltuk ezt az összefüggést. Vegyük észre a vízszintes tengely (frekvencia) logaritmikus skálázását. A teljes gyengítést mutató görbék ilyen ábrázolás mentén egyenesek, melyek 10-szeres frekvencianövekedéskor 20 dB-t emelkednek, a tömegsűrűség duplázása pedig kb. 6 dB-lel emeli meg az egyeneseket.

Vigyázni kell ennek a formulának az alkalmazásával. Igen kis falvastagságokra ez negatív veszteséget adhat, ami természetesen irreális. Ilyenkor valójában arról van szó, hogy nem teljesül a fent említett $\omega \rho_s \gg 2Z$ feltétel, ezért ha ebből a formulából 10 dB-nél kisebb veszteség jön ki, az eredeti (4.47) összefüggésből kell kiindulni. Ez az eset azonban csak igen vékony rétegeken való áthaladás esetén vagy alacsony frekvencián lép fel. Ezt szemlélteti a 4.22. ábra, ahol valóban láthatjuk, hogy 10 dB hangcsökkentés alatt válik jelentőssé a közelítő formula pontatlansága.



4.22. ábra. Vékony falak hangelnyelése alacsony frekvencián $\rho_s = 10 \text{ kg/m}^2$ esetén. Pontos formula: zöld görbe. Közelítő formula: piros görbe.

Az eddig elmondottak merőleges beesés esetén igazak. A gyakorlatban sokszor véletlenszerű irányokból érkező, diffúz hanggal van dolgunk. A közeghatárok esetéhez hasonlóan a nagyobb beesési szögek esetén a visszaverődés erősebb, az átmenő hang pedig gyengébb lesz. A levezetés itt is meghaladná lehetőségeinket, ezért csak a végeredményt közöljük: diffúz hangok esetén a hangnyomásszint $10 \lg(3) \approx 4,8 \text{ dB}$ -el nagyobbat esik vékony rétegen áthaladva:

$$TL_d = TL_0 - 4,8 \text{ dB},$$

azaz a gyakorlatban használható közelítő összefüggés:

$$TL_d = 20 \lg(f \rho_s) - 47,2 \text{ dB}. \quad (4.49)$$

4.20. példa: Egy gipszkarton elem anyagának sűrűsége 800 kg/m^3 , vastagsága 25 mm . Hány dB-el csökkenti ez a diffúz, 400 Hz -es hangok hangnyomásszintjét?

Megoldás: A feladat szerint a gipszkarton felületi sűrűsége:

$$\varrho_s = 800 \cdot 0,025 = 20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

A diffúz hangra vonatkozó összefüggés szerint a csökkenés:

$$TL_d = 20 \lg(400 \cdot 20) - 47,2 = 30,9 \text{ dB}.$$

Egy 25 mm vastag gipszkarton lemez tehát mintegy 31 dB csökkenést okoz 400 Hz -en.

Ez az érték nagyobb 10 dB -nél, jogos volt tehát a közelítés használata.

4.21. példa: Egy fal vastagságát duplázzuk. Mennyivel nő a hangelnyelése a vékony fal közelítésben? Mennyivel nőne, ha nem egy fal vastagságát dupláznánk, hanem kis légréssel egymás mögé két egyforma falat emelnénk?

Megoldás: Fentebb már megállapítottuk, hogy a rétegvastagság duplázása $20 \lg 2 = 6,02 \text{ dB}$ -el emeli a hangelnyelést.

Két egymás utáni független fal pedig kétszer akkora elnyelést okoz a decibelskálán. Ez szinte mindig sokkal nagyobb lesz, mint a rétegvastagság duplázásával kapott érték, ami mutatja a többretegű hangszigetelés előnyét.

Meg kell jegyezni, hogy egy kétrétegű fal kis légréssel nem adna pontosan kétszeres gyengítést, mivel a két réteg között ide-oda verődő hang egy része tovább menne, így a gyengítés kisebb mértékű lenne. A gyakorlatban ezért a két falréteg között nagy elnyelési tényezőjű hangszigetelő anyagot szokás alkalmazni. Ez nemcsak a direkt átmenő hangot csökkenti, hanem a két falréteg közt ide-oda verődőt is.

4.22. példa: Egy papírlapot tartunk fülünk elé, melynek csomagolásán azt láttuk, hogy „ 80 g/m^2 ”. Hány dB-lel halljuk halkabban az 1 kHz -es és a 10 kHz -es hangokat, ha azok merőlegesen esnek be a papírra?

Megoldás: Első gondolatunk lehet a (4.48) formula használata. Ezt alkalmazva 1 kHz -en:

$$TL_0 = 20 \lg(1000 \cdot 0,08) - 42,4 = -4,33 \text{ dB}.$$

Ez nyilván elfogadhatatlan, mert a papírlap nem erősítheti fel a hangokat. A gond az, hogy a közelítő formula csak akkor használható, ha $\omega \varrho_s \gg 2Z$, de ez

esetünkben nem teljesül, mivel $\omega \varrho_s = 2\pi f \varrho_s = 502,7$, míg levegőre $2Z = 830$. Ekkor tehát a (4.47) összefüggést kell alkalmaznunk:

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega \varrho_s}{2Z}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{502,7}{830}\right)^2} = 0,73.$$

Decibelben ez igen csekély csökkenést jelent:

$$TL_0 = 10 \lg \frac{I_1}{I_3} = 1,4 \text{ dB}.$$

1000 Hz-en tehát a papírlap hangelnyelése elhanyagolható.

Kicsit más a helyzet 10 kHz-en. Itt:

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{5027}{830}\right)^2} = 0,027,$$

azaz

$$TL_0 = 10 \lg \frac{I_1}{I_3} = 15,8 \text{ dB}.$$

Ez a gyengülés már jól hallható.

A 10 kHz-es esetben már használhattuk volna a közelítő formulát is. Abból 15,7 dB jött volna ki, ami elhanyagolható eltérés a pontos értékhez képest.

Hajlítási hullámok. Mint fentebb említettük, a falak képesek kis amplitúdójú hajlítási hullámmozgásra. Fentebb levezetés nélkül említettük, hogy ezek terjedési sebessége:

$$c_h = \sqrt[4]{\frac{1}{3(1 - \mu^2)}} \sqrt{\pi f d c_d},$$

ahol $c_d = \sqrt{E/\varrho_0}$ a tágulási hullámok terjedési sebessége a fal anyagában, d a falvastagság, f a frekvencia, μ pedig a fal anyagának Poisson-száma.

Ezek a hullámok a falon

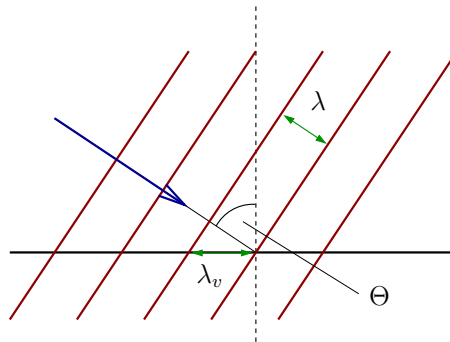
$$\lambda_h = \frac{c_h}{f} = \sqrt[4]{\frac{1}{3(1 - \mu^2)}} \sqrt{\frac{\pi d c_d}{f}}$$

hullámhosszúságot jelentenek.

Amennyiben a hang pontosan merőlegesen esik be a falra, nem fog ilyen hajlítási hullámokat kelteni, mert a fal minden pontjában azonos fázisú rezgéseket kelt. Ferde beesés esetén viszont más a helyzet: a λ hullámhosszúságú hang

$$\lambda_v = \frac{\lambda}{\sin \Theta}$$

térbeli periódussal váltakozva gerjeszti a fal rezgéseit. Ezt láthatjuk a 4.23. ábrán.



4.23. ábra. Hang ferde beesése egy falra.

Egy rezonancia-szerű jelenség zajlódik le, amikor $\lambda_h = \lambda_v$ bekövetkezik, azaz amikor a hajlítási hullámok hullámhossza megegyezik a beeső hang vetületének hullámhosszával. Ekkor ugyanis a beeső hang pont olyan térbeli periodicitással gerjeszti a fal rezgéseit, mely megfelel a fal saját hajlítási hullámainak. Az ily módon rezgésbe jövő fal a túloldalra erősebb rezgéseket továbbít, mintha ez a jelenség nem lenne. Ennek mértéke függ pl. a fal anyagának rezgéscsillapító hatásától, így pontos elméleti leírása bonyolult. Általában azt lehet mondani, hogy ez a jelenség pontos hullámhossz-egyezés esetén 10–15 dB-lel csökkenti a falon átjutó hang gyengülésének mértékét.

Arra, mely frekvenciák esetén történik ez meg, az eddig elmondottak alapján könnyű válaszolni: a fenti λ_h és λ_v hullámhosszak egyenlőségét felírva és $\lambda = c/f$ -et használva:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{3(1-\mu^2)}} \sqrt{\frac{\pi d c_d}{f}} = \frac{c}{f \sin \Theta},$$

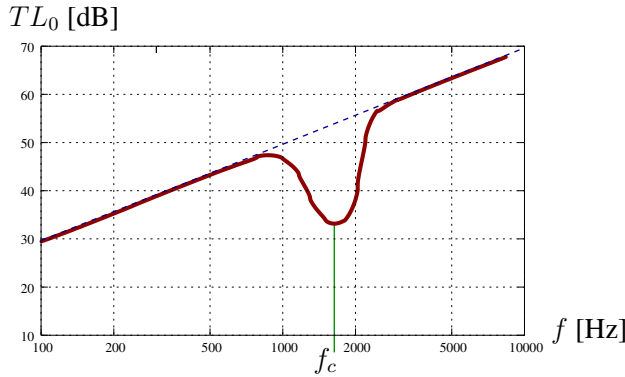
ahonnan:

$$f = \frac{\sqrt{3(1 - \mu^2)}c^2}{\pi c_d d \sin^2 \Theta}.$$

Azt a legkisebb frekvenciát, amin ez bekövetkezik, **koincidencia-frekvenciának** nevezzük. Ez nyilván az előző frekvencia $\Theta = 90^\circ$ -nál vett értéke:

$$f_c = \frac{\sqrt{3(1 - \mu^2)}c^2}{\pi c_d d}. \quad (4.50)$$

Szórt hang esetén tehát ezen frekvencia környékén a fal jobban átereszt a hangot, mint az a vékony fal közelítésből következne. Ezt szemléltettük a 4.24. ábrán.



4.24. ábra. A hangelnyelés viselkedése a koincidencia-frekvencia közelében.

Érdekes, hogy f_c fordítottan arányos a d falvastagsággal, azaz vastagabb falak esetén f_c kisebb, tehát ez a hanggátlás-csökkenés alacsonyabb frekvenciáknál következik be. Így előfordulhat, hogy egy adott frekvencián a kétszer vastagabb fal jobban átereszt, mint az egyszeres vastagságú (ha a vastagabbik koincidencia-frekvenciája épp ide esik).

Gyakorlati célokra a numerikus konstansokat, $c = 340$ m/s-ot és egy átlagos $\mu = 0,33$ -as értéket beírva ez a formula ezt az alakot ölti:

$$f_c = \frac{60\,160}{c_d d}. \quad (4.51)$$

4.23. példa: A 4.20. példabeli 25 mm vastag gipszkarton esetén mennyi a koincidencia-frekvencia?

Megoldás: A 4. táblázat szerint $c_d = 2000$ m/s. Így az előző formula alapján

$$f_c = \frac{60\,160}{2000 \cdot 0,025} = 1200 \text{ Hz.}$$

Ez azt jelenti, hogy a 4.20. példában 400 Hz-re kiszámolt hangnyomásszint-csökkenés jól közelíti a valóságot, mivel $400 \text{ Hz} \ll f_c$, de már 1000 Hz felett nem lehetne alkalmazni a vékony fal közelítést.

Vastagsági állóhullám. Ekkor a fal vastagsága mentén állóhullámok alakulnak ki. Ha ez bekövetkezik, a fal hanggyengítése igen alacsony lesz, mert ezekre a frekvenciákra a fal igen érzékeny.

Az állóhullámokról korábban tanultak alapján könnyű eldönteni, mely frekvenciákon következik be mindez: a fél hullámhossznak egész számú-szor kell beleférti a falvastagságba. Azaz végtelen sok megoldás van, melyeket egy k pozitív egész szám indexel:

$$d = k \frac{\lambda_k}{2},$$

és az ehhez tartozó frekvenciák:

$$f_k = \frac{c_l}{\lambda_k} = \frac{c_l}{2d} k,$$

ahol c_l a falbeli hangsebesség. Itt nyilván a longitudinális sebességgel kell számolni, mert a falra merőlegesen elsősorban ilyen hullámok indulnak ki külső gerjesztés hatására.

A legkisebb frekvencia, aminél ez bekövetkezik:

$$f_1 = \frac{c_l}{2d}. \quad (4.52)$$

Belátható, hogy ez jóval nagyobb lesz, mint a (4.50) által meghatározott koincidencia-frekvencia.

Az ilyen frekvenciákon bekövetkező hangnyomásszint-csökkenés mértéke függ a fal anyagának belső hangelnyelési tényezőjétől. Ha ez kicsi, mint pl. fémlapok esetében, a fal szinte teljesen áteresztí a hangot. Olyan anyagok esetén, melyből falat szoktak építeni, f_1 frekvencián a belső hangelnyelési tényező már általában elég nagy ahhoz, hogy ez a jelenség csak kisebb mértékben következzen be, összességében 10–20 dB-lel csökkentve a hanggátást.

4.24. példa: A hang sebessége a betonban 3100 m/s. Számolja ki, mi a legkisebb frekvencia, melynél a vastagsági állóhullámok bekövetkeznek egy 20 cm vastag betonfal esetében! Számolja ki a koincidencia-frekvenciát is!

Megoldás: Egyszerű behelyettesítést kell csak végeznünk:

Az állóhullámok közül a legkisebb frekvenciájú:

$$f_1 = \frac{3100}{2 \cdot 0,2} = 7750 \text{ Hz.}$$

Ugyanakkor a koincidencia-frekvencia:

$$f_c = \frac{60\,160}{3100 \cdot 0,1} = 194 \text{ Hz.}$$

Érdekes tehát, hogy ez a fal 200 Hz környékén jobban áteresztí a hangot, mint ha a vékony fal közelítés lenne érvényben. Ez a gyakorlatban káros jelenség, mivel ebben a tartományban elég érzékeny a hallásunk. A 7750 Hz-nél bekövetkező állóhullám-jelenség már nem ennyire jelentős, mert ugyan a fülünk itt is még viszonylag érzékeny, de ilyen frekvencián magának a fal anyagának a hangelnyelési tényezője jelentős csökkenést okozhat.

4.7. Kérdések és feladatok

4.7.1. Elméleti kérdések

1. Miért nem terjedhet gázok belsejében transzverzális hullám?
2. Mit fejez ki a hangintenzitás?
3. Egy hang intenzitása 2-szeresére nő. Mit mondhatunk a hangérzet növekedéséről?
4. Hány decibellel változik meg egy hang hangnyomásszintje, ha intenzitása 1000-szeresére nő?
5. 50 dB-es hangnyomásszintű 1 000 Hz-es illetve 10 000 Hz-es hangok közül melyiket érezzük hangosabbnak?
6. Két hang intenzitása azonos, de az első kétszer nagyobb frekvenciájú, mint a második. Mit mondhatunk a közeg egy pontja amplitúdójának viszonyáról?
7. Két hang intenzitása azonos, de az első kétszer nagyobb frekvenciájú, mint a második. Mit mondhatunk az egy pontban kialakuló nyomás-változások amplitúdójáról?

8. Magyarázza meg a hangtanban tanult $p_m^2 = 2\rho_0 c I$ képlet betűinek jelentését!
9. Mit nevezünk akusztikus impedanciának? (Szöveggel, vagy a megadott képlet betűinek magyarázatával kell válaszolni!)
10. Mi a kapcsolat a hang intenzitása és térbeli energiasűrűsége közt?
11. Hang érkezik két közeg határára merőleges beesési szögben. Az új közeg akusztikus impedanciája sokkal *kisebb*, mint a régié. Mit mondhatunk az új közegbe behatoló hang intenzitásának az eredeti intenzitáshoz való viszonyáról? Miért?
12. Hang érkezik két közeg határára merőleges beesési szögben. Az új közeg akusztikus impedanciája sokkal *nagyobb*, mint a régié. Mit mondhatunk az új közegbe behatoló hang intenzitásának az eredeti intenzitáshoz való viszonyáról? Miért?
13. A közeli villámcsapás hangja csattan, a távoliét csak mélyen dübörögni halljuk. Mi ennek az oka?
14. Kis méretű hangforrásból közel gömbhullámok indulnak ki. Amennyiben a közeg hangelnyelése elhanyagolható, akkor a hullámforrástól kétszer távolabb menve hányadrészére csökken a hangintenzitás? Hány dB-es csökkenést jelent ez?
15. Hosszú, egyenes autópályán sűrűn haladnak az autók. Ha kétszer távolabb megyünk a pályától, hányadrészére csökken a hangintenzitás? Hány dB-es csökkenést jelent ez? (A hangelnyeléstől tekintsünk el.)
16. Mit nevezünk egy teremben a hang átlagos szabad úthosszának? A terem mely adataiból lehet kiszámítani?
17. Mit nevezünk utózengési időnek?
18. Egy terem utózengési ideje 3 s. Milyen célokra alkalmas ez a terem?
19. Hogyan változik az utózengési idő egy teremben, ha a bennlevő fapadokra emberek ülnek? Miért?
20. Ha egy terem falainak abszorpciós tényezője közel független a frekvenciától, akkor 200 vagy 2000 Hz-en lesz nagyobb az utózengési idő? Miért?
21. Hány dB-lel nő egy vékonynak tekinthető fal elnyelése, ha vastagságát megduplázzuk? (Indoklással!)
22. Mit nevezünk egy fal koincidencia frekvenciájának?

23. Miért játszanak lényeges szerepet a falak hanggátlásában a fal hajlítási hullámai?
24. Milyen a fal hanggátlása olyan frekvencián, amikor a hang falbeli hullámhosszának fele megegyezik a falvastagsággal?
25. Azt tapasztaljuk, hogy egy bizonyos hang jobban áthatol egy kétszeres vastagságú falon, mint az (azonos anyagú) egyszeresen. Hogyan lehetséges ez?

4.7.2. Kidolgozott feladatok

4.1. feladat: A kén-hexafluorid (SF_6) gáz relatív molekulatömege 146 g/mol , specifikus fajhőhányadosa 300 K -en $1,33$. Számolja ki, mekkora a hangsebesség ebben a gázban 300 K -en.

Megoldás: A feladat megoldása igen egyszerű, csak be kell helyettesíteni a (4.12) egyenletbe:

$$\sqrt{\kappa \frac{RT}{\mu}} = \sqrt{1,33 \frac{8,31 \cdot 300}{0,146}} = 151 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Érdekességgént megemlítjük, hogy ez az egyik legkisebb érték, amit szoba-hőmérsékletű gázok esetén kaphatunk.

4.2. feladat: Egy este olyan meteorológiai viszonyok alakultak ki, hogy a talaj közelében 10°C -os a levegő, de a talaj felett pár száz méterrel egy 20°C -os légréteg húzódik. Erről a réteghatárról a felszín közeléből induló hangok egy része teljes visszaverődéssel visszaverődik. Becsülje meg, a vízszintessel mekkora szöget bezáró irányok esetén következik ez be!

Megoldás: A két légrétegben az eltérő hőmérséklet miatt a hangsebesség kis- sé eltér. (4.12) szerint a hangsebesség $\sqrt{T}$ -vel arányos, így a két légrétegben a hangsebességek aránya:

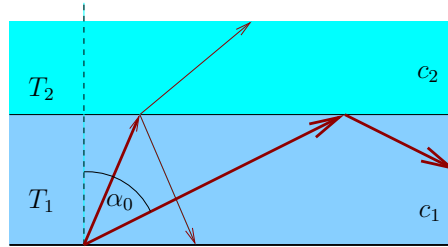
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} = \sqrt{\frac{283}{293}} = 0,983.$$

(1-es indexszel az alsó légréteget jelöltük, ahonnan a hang kiindul.)

A teljes visszaverődés jelenségénél tanultak alapján akkor verődik vissza a teljes hullám egy ilyen közegethatárról, ha az α beesési szög meghalad egy kritikus α_0 értéket, melyre $\sin \alpha_0 = c_1/c_2$. Esetünkben tehát a teljes visszaverődés határszöge:

$$\alpha_0 = \sin^{-1} 0,983 = 79,3^\circ$$

A 4.25. ábra szerint a vízszintessel bezárt szög $90^\circ - \alpha_0 = 10,6^\circ$.



4.25. ábra. Hang teljes visszaverődése melegebb levegőrétegről

Mindazok a hangok tehát, melyek a vízszintessel legfeljebb 10 fokos szöget zárnak be, teljesen visszaverődnek a légrétegek határáról. (Ha a talaj sima, az így visszavert hang a talajról visszaverődik, és „pattog” az alsó légrétegben.)

4.3. feladat: Egy hangszóró 200 Hz-es hangot egyenletesen sugároz a tér minden irányába. Kimenő hangteljesítménye 2,5 W. Mekkora a levegőrészek elmozdulása és a maximális nyomásváltozás tőle 3 m távolságban? (A hangelnyelődés ilyen távolságon elhanyagolható.)

Megoldás: A 2,5 W teljesítmény 3 m sugarú gömb felszínén oszlik el egyenletesen. Ezért a hangintenzitás:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{2,5}{4\pi 3^2} = 2,21 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

A hang körfrekvenciája:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 200 \text{ Hz} = 1\,257 \frac{1}{\text{s}}.$$

Tudjuk, hogy a nyomásváltozások maximuma:

$$p_m = \sqrt{2IZ} = 4,29 \text{ Pa}$$

($Z = 416$ -tal számolva, ami 20°C-os levegőnek felel meg.)

A levegőrészek maximális elmozdulása pedig:

$$\xi_m = \frac{p_m}{\omega Z} = 8,18 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

4.4. feladat: Olyan anyagot keresünk, mely a levegőből rá merőlegesen érkező hang intenzitásának pontosan a felét veri vissza. Milyen legyen az akusztikus impedanciája? (Egy igen vastag anyagréteg visszaverését vizsgáljuk.) Milyen anyagok esetén valósulhat ez meg?

Megoldás: (4.33) alapján feladatunkban:

$$\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = 0,5,$$

ahol Z_1 a levegő ismert impedanciája, Z_2 pedig a kérdezett impedancia.

$(Z_1 + Z_2)^2$ -nel átszorozva és a zárójeleket felbontva Z_2 -re egy másodfokú egyenletet kapunk: (az átrendezés lépéseit terjedelmi okokból mellőzzük)

$$Z_2^2 - 6Z_1Z_2 + Z_1^2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva ennek megoldásai:

$$Z_2 = \frac{6Z_1 \pm \sqrt{36Z_1^2 - 4Z_1^2}}{2} = Z_1(3 \pm \sqrt{8}).$$

Két megoldásunk van tehát, az egyik $Z_1(3 + \sqrt{8}) \approx 5,83Z_1$, a másik $Z_1(3 - \sqrt{8}) \approx 0,172Z_1$. Normál körülmények között a levegő akusztikus impedanciáját $416 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$ -nak vehetjük, ezért a keresett impedanciák: (SI egységekben)

$$Z_{2,1} = 2425, \quad Z_{2,2} = 71,4.$$

Ezek olyan impedanciaértékek, melyek normál anyagoknál nemigen fordulnak elő. A normális szilárd testekben a hangsebesség 500 m/s -nál nem szokott kisebb lenni, sűrűségük pedig nem megy $100 \text{ kg}/\text{m}^3$ alá, azaz akusztikus impedanciájuk legalább $50\,000$. Egyik érték sem teljesíti ezt a feltételt, tehát nehezen találhatunk ilyen anyagot. Speciális, erősen lyukacsos szerkezetű anyagoknál valósulhat meg egyedül az ilyen kis akusztikus impedancia.

4.5. feladat: Egy szivacsos anyag belsejében a hang 50 cm út alatt 12 dB -el lett halkabb a hangelnyelés miatt. Mennyi az anyag lineáris abszorpció tényezője?

Megoldás: (4.39) szerint a hang hangnyomásszintjének elnyelés miatti csökkenése x út alatt $10/\ln 10 \cdot mx \text{ dB}$, azaz esetünkben:

$$\frac{10}{\ln 10} m \cdot 0,5 = 12,$$

ahonnan a keresett abszorpció tényező:

$$m = \ln 102,4 \approx 5,5 \frac{1}{\text{m}}.$$

4.6. feladat: Szabad téren egy pontszerű hangforrástól 800 m-re állva annak 1500 Hz frekvenciájú hangját 30 dB-esnek halljuk. A levegő páratartalma 30%-os. Hány dB-es hangot hallanánk 80 m-ről? A két érték közti különbségből jelentős-e a hangelnyelésből származó tag?

Megoldás: A (4.42) egyenlet az, ami esetünkben leírja a hang gyengülését. Esetünkben $r_0 = 800$ m, $r = 80$ m, $n(r_0) = 30$ dB, a hangelnyelési tényező pedig (4.44) szerint:

$$m = 5,5 \cdot 10^{-4} \frac{50}{30} \cdot 1,5^{1,7} = 1,83 \cdot 10^{-3}.$$

(4.42) szerint a hangelnyelésből adódó hangnyomásszint-változás:

$$-\frac{10}{\ln 10} m(r - r_0) = 5,7 \text{ dB}.$$

A gömbhullám szétszóródásából származó tag pedig:

$$-20 \lg \frac{r}{r_0} = 20 \text{ dB}.$$

Így tehát a forrástól 80 m-re a hangintenzitás:

$$n(r) = n(r_0) + 5,7 + 20 = 55,7 \text{ dB}.$$

A teljes 25,7 dB-es hangnyomásszint-különbségből 5,7 dB, azaz kb. 22%-nyi származik a levegő hangelnyeléséből. Ez tehát számottevő része a különbségnek, azaz a feladat körülményei között a levegő hangelnyelése hasonló nagyságrendű, mint a geometriai okokból származó gyengülés.

4.7. feladat: Egy forgalmas autópályától először 100 m-nyire, majd 1 km-nyire mérjük a zajt. Melyik az a frekvencia, amely esetén a hangelnyelésből pontosan annyi hangnyomásszint-csökkenés származik, mint a geometriai veszteség? A relatív páratartalmat vegyük 50%-osnak. Mit mondhatunk az ennél nagyobb frekvenciák esetén a hangelnyelésről?

Megoldás: A (4.43) egyenlet írja le a vonalforrás hangjának gyengülését. Ebben a geometriai okokból bekövetkező gyengülést leíró tag: $10 \lg(r/r_0)$, ami esetünkben $10 \lg(1000/100) = 10$ dB.

A kérdés tehát az, melyik frekvencia esetén lesz a hangelnyelésből származó $(10/\ln 10) \cdot m(r - r_0)$ tag ezzel egyenlő. Azaz:

$$\frac{10m}{\ln 10} (r - r_0) = 10,$$

ahonnan

$$m = \frac{\ln 10}{1000 - 100} = 2,56 \cdot 10^{-3}.$$

(4.44)-t alkalmazva esetünkre: ($h = 50$)

$$m = 5,5 \cdot 10^{-4} \frac{50}{50} \left(\frac{f}{1000 \text{ Hz}} \right)^{1,7},$$

ahonnet

$$f = 1000 \cdot \sqrt[1,7]{\frac{m}{5,5 \cdot 10^{-4}}} = 2470 \text{ Hz}.$$

Tehát kb. 2500 Hz az a frekvencia, mely esetén a feladat viszonyai között a geometriai gyengülés és a hangelnyelésből származó egyaránt 10 dB lesz. Ennél nagyobb frekvenciákra a hangelnyelés szerepe növekszik, míg a geometriai csökkenés nem változik, tehát a levegő abszorpciója kezd dominálni.

4.8. feladat: Egy nagy előadóterem légtere 1600 m^3 -es, belső felülete 1100 m^2 . Mekkora legyen falainak átlagos abszorpciós tényezője, ha benne 0,8 s-os utózengési időt szeretnénk biztosítani az 1 kHz-es hangok esetére? (A páratartalmat vegyük 60%-osnak.)

Amennyiben a falak és a mennyezet a belső felület 75%-át teszi ki és a többi részen foglalt fa székeket feltételezünk, mekkora legyen a falak és a mennyezet átlagos abszorpciós tényezője? (Használja az 5. táblázatot.)

Becsülje meg, mekkora ugyanennek a teremnek az utózengési ideje, ha a székek üresek!

Megoldás: Alapvető összefüggésünk a (4.46) egyenlet. Ebből egyszerű átrendezéssel adódik, hogy:

$$\ln(1 - \bar{a}) = - \left(\frac{4 \ln 10^6}{c T_{60}} - 4m \right) \frac{V}{A}.$$

Ide $c = 340 \text{ m/s}$ -ot és (4.44)-ből kiszámolhatóan $m = 4,58 \cdot 10^{-4}$ -t beírva:

$$\ln(1 - \bar{a}) = -0,29,$$

ahonnet

$$\bar{a} = 1 - e^{-0,29} = 0,25.$$

A feladat szerint a terem belső felületét 2 típusú felületből összeállónak tételezzük fel: a székek által foglalt rész, melynek felülete $A_1 = 0,25 \cdot 1100 = 275 \text{ m}^2$ és a táblázat szerint abszorpciós tényezője $a_1 = 0,7$ és a többi felület, melynek nagysága $A_2 = 0,75 \cdot 1100 = 825 \text{ m}^2$ és a_2 abszorpciós tényezője ismeretlen.

(4.35) szerint:

$$\bar{a} = \frac{A_1 a_1 + A_2 a_2}{A_1 + A_2},$$

ahonnet

$$a_2 = \frac{\bar{a}(A_1 + A_2) - A_1 a_1}{A_2} = 0,1.$$

Teli terem esetén tehát a falak és a mennyezet 0,1 abszorpciós tényezőjű burkolása kell ahhoz, hogy az utózengési idő 0,8 s legyen.

Üres székek abszorpciós tényezője jelentősen különbözik az előző 0,7-es értéktől: az 5. táblázat szerint $a_1^* = 0,06$ -os közelítő értékkel lehet számolni.

Ekkor a terem átlagos abszorpciós tényezője:

$$\bar{a}^* = \frac{A_1 a_1^* + A_2 a_2}{A_1 + A_2} = 0,09 ,$$

ezért az üres terem utózengési ideje:

$$T_{60}^* = \frac{4 \ln 10^6}{c(4m - A/V \cdot \ln(1 - \bar{a}^*))} = 2,4 \text{ s}.$$

Az üres terem tehát meglehetősen visszhangos lesz, ami zenei előadáshoz megfelelő lehet, de a beszéd érthetőségét zavarja.

4.9. feladat: Hogyan változik egy terem utózengési ideje, ha minden méretét duplájára emeljük, de az anyagokat nem cseréljük le? Feltételezhetjük, hogy olyan alacsony frekvenciát vizsgálunk, ahol a levegő hangelnyelése elhanyagolható.

Megoldás: Elhanyagolható levegőbeli hangelnyelés és állandó fal abszorpciós tényező esetén (4.46) alapján az utózengési idő:

$$T_{60} = \frac{4 \ln 10^6}{-(A/V) \ln(1 - \bar{a})} = \frac{V}{A} \cdot C$$

ahol C állandó.

Ha minden méretet duplázunk, V a 8-szorosára, A a 4-szeresére változik, így V/A duplázódni fog.

A kétszer akkora méretű teremnek tehát kétszer akkora az utózengési ideje, ha a levegő hangelnyelése elhanyagolható.

4.10. feladat: Egy tömör, 10 cm vastag gipszfal mennyivel csökkentené az 400 Hz-es szórt hangok hangnyomásszintjét, ha igaz lenne rá a vékony fal közelítés?

Mennyi a koincidencia-frekvenciája? Ez alapján mit mondhatunk a 400 Hz-en vett hanggátlásáról?

Melyik a legkisebb frekvencia, amikor a vastagsági állóhullámok bekövetkeznek?

(A szükséges adatokat keresse ki a fenti táblázatokból.)

Megoldás:

A 4. táblázat szerint gipsz esetén $c_d = 2000 \text{ m/s}$, $\varrho_0 = 800 \text{ kg/m}^3$, így $\varrho_s = \varrho_0 d = 80 \text{ kg/m}^3$.

(4.49) alapján a hanggátlás vékony fal közelítése:

$$TL_d = 20 \lg(400 \cdot 80) - 47,2 \text{ dB} = 42,9 \text{ dB}.$$

Így (4.51) alapján:

$$f_c = \frac{60\,160}{2000 \cdot 0,1} = 300,8 \text{ Hz}.$$

A 400 Hz-es érték elég közel van a koincidencia-frekvenciához, azért az várható, hogy a vékony fal közelítésből adódó 42,9 dB-nél 5–15 dB-lel kisebb értéket kapunk. (Pontosabbat a rendelkezésünkre álló adatokból nem lehet mondani.)

A vastagsági állóhullámok közül a legkisebb frekvencia (4.52) szerint:

$$f_1 = \frac{c_l}{2d}.$$

Sajnos a gipsz esetén c_l értéke nem ismert, de tudjuk, hogy nem tér el nagyon c_d -től. Így közelítő értéket tudunk mondani:

$$f_0 \approx \frac{c_d}{2d} = 10\,000 \text{ Hz}.$$

4.11. feladat: Azt szeretnénk, ha egy egyrétegű betonfal koincidencia-frekvenciája 2000 Hz feletti lenne, de 1000 Hz-en a diffúz hangokat legalább 60 dB-lel gyengítene. Mit mondhatunk a rétegvastagságról?

Megoldás: (4.49) alapján $f = 1000 \text{ Hz}$ esetén

$$TL_d = 20 \lg(1000 \varrho_s) - 47,2 > 60 ,$$

ahonnet

$$\lg(1000 \varrho_s) > 5,36 ,$$

amiből egyszerű számítással:

$$\varrho_s > 10^{2,36} = 229.$$

A felületi sűrűség ismert kifejezésével:

$$\varrho d > 229$$

feltételt kapjuk a fal anyagának sűrűségére és a rétegvastagságra.

A koincidencia-frekvencia (4.50) szerint:

$$f_c = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}c^2}{\pi c_d d} > 2000 ,$$

ahonnet

$$c_d d < \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}c^2}{\pi 2000} = 31,9 \sqrt{1-\mu^2}.$$

($c = 340 \text{ m/s}$ -ot véve.)

Ez és a fenti $\rho d > 229$ feltételek azok, amiket teljesíteni kell a falnak. Ez nem határoz meg pontos feltételeket a hangsebességre és a falvastagságra, mert ρ és μ nem adottak. Tudjuk azonban, hogy $\mu < 0,5$, azaz $\sqrt{1 - \mu^2} > 0,866$, így ha olyan falat választunk, hogy $c_d d < 31,9 \cdot 0,866 = 27,6$ teljesüljön, akkor μ bármilyen értékére teljesülni fog a feltétel.

A rétegvastagságra tehát két feltételünk van:

$$d < \frac{27,6}{c_d}, \quad d > \frac{229}{\rho}$$

A beton $\rho = 2500$ és $c_d = 3100$ adataival a feltételek:

$$d < 0,0089, \quad d > 0,092$$

Ezek nem teljesíthetők egyszerre, tehát betonból ilyen fal (vagy réteg) nem hozható létre.

4.7.3. Gyakorló feladatok

1. Mekkora a hang terjedési sebessége egy 200°C -os sütő belsejében?
2. A hangintenzitás hányadrésze verődik vissza a víz-glicerín határfelületről merőleges beesés esetében?
3. Egy nagyméretű közeghatáron az új közegbe behatoló hang 35 dB-lel halkabb, mint az eredeti. Mit mondhatunk ez alapján a közegek akusztikus impedanciájának arányáról?
4. Egy szivacsos anyag belsejében a hangnyomásszint 10 cm-enként 7 dB-nyit csökken. Mekkora a lineáris hangelnyelési tényezője?
5. Sík terepen állva egy 500 m-re levő sziréna hangját 50 dB-esnek halljuk. Milyen hangnyomásszintet érzelnénk a szirénától 100 m-nyire, ha hangjának (átlagos) frekvenciája 800 Hz?
6. Egy terem térfogata 2000 m^3 , teljes belső felülete 1300 m^2 , amiből 300 m^2 a padló és ugyanennyi a mennyezet felszíne. (A terem nem téglatest alakú!) A padló, a mennyezet és a falak anyagának abszorpció tényezője 1 kHz frekvencián rendre 0,4, 0,1 és 0,2. Mekkora az utózengési idő, ha a levegő páratartalma 30%?
7. Mekkora abszorpció tényezőjűre kellene kicserélni az előző feladatban a mennyezet burkolatát, ha az utózengési időt 0,4 s-ra kívánnánk beállítani?

8. Egy kőépület egyik nagy termének falai átlagosan 0,07 abszorpciós tényezőjűek. A terem térfogata 5000 m^3 , felszíne 2500 m^2 . Melyik frekvencián lesz a levegő és a falak hangelnyelésének hatása egyforma az utószögési idő kialakításában?
9. Mennyivel csökkenti egy 10 mm vastag alumínium lemez az 500 Hz-es diffúz hangok hangnyomásszintjét? Jogos-e ezen a frekvencián a vékony fal közelítés használata?
10. Egy kétrétegű ablak mindegyik üvege 5 mm vastag. Hány dB-lel csökkenti ez a 100 Hz-es hangokat? Mekkora a koincidencia-frekvencia értéke? Mit érzékelhetünk a gyakorlatban a koincidencia jelensége miatt, ha egy ilyen ablakon keresztül hallgatjuk a forgalom zaját?

Ajánlott és felhasznált irodalom:

- Tarnóczy Tamás: Akusztika, fizikai akusztika, Akadémiai kiadó, 1963.

5. Optika

5.1. Bevezetés

A **fény** a mindennapi életben, a fizikában és a mérnöki gyakorlatban egyaránt igen fontos szerepet játszik, ennek megfelelően évszázadok óta nagyon alaposan vizsgálják a kutatók. A jelenlegi legpontosabb elméleti leírások nagyon nagy matematikai apparátust használnak, és a mögöttük levő fizikai kép is meglehetősen bonyolult. A fény azonban a jelenségek egy nagyon nagy körén belül¹⁷ úgy viselkedik, mint egy transzverzális hullám. Ebben a fejezetben a fényt transzverzális hullámként kezelő elmélettel, a **fizikai optikával** ismerkedünk meg.

Tartsuk tehát észben, hogy a fény *nem* tisztán hullám, hanem a jelenségek egy széles köre megmagyarázható ha a fénynek hullámtermészetet tulajdonítunk. Ezen a körön belül használhatók a következőkben leírtak. A jegyzet későbbi részében találkozni fogunk olyan esetekkel, amikor a fény részecskeként viselkedik. Ezek azok, amikor a fény az anyag elemi részeivel, pl. egy elektronnal lép kölcsönhatásba. A lencsékkel, tükrökkel, résekkel való kölcsönhatás azonban olyan jellegű, amikor a fény részecsketulajdonsága nem jelentkezik.

A fényhullám annyiban eltér az eddig megismert hullámoktól, pl. a hangtól, hogy terjedéséhez nincs szükség közegre, a fény tehát *nem* valamilyen anyag rezgése. (Ez is utal arra, hogy a fény nem egészen egyszerű hullám.) A fény terjedésekor az elektromos és mágneses tér erőssége „rezeget” a tér egyes pontjaiban, és ennek a tovaterjedése alkotja a fényhullámot. Röviden: *a fény elektromágneses hullám*.

Ezt kicsit részletesebben megvizsgáljuk a jegyzet elektromosságtanról szóló fejezetében, de az optikai problémák döntő többségében erről további részleteket nem kell tudni, mert a fény frekvenciája olyan nagy, hogy a legtöbb esetben a mágneses és elektromos tér váltakozása közvetlenül nem észlelhető. Természetesen a fény természetének alaposabb megértése mindenképp szükségessé teszi az elektromos és mágneses terek váltakozását leíró összefüggések ismeretét, de erre a klasszikus optikai alkalmazások esetén nincs szükség: elegendő annyit tudnunk, hogy a fény valamilyen

¹⁷Ez a kör felöleli majdnem a mindennapokban előforduló jelenségeket és a jelenlegi műszaki alkalmazások jelentős részét. A XIX-XX. századfordulóig minden fénnel kapcsolatos mérés bele volt illeszthető ebbe a körbe.

transzverzális hullám, mely bizonyos anyagokba behatol, másokban elnyelődik vagy részben visszaverődik és terjedési sebessége függ a közegtől, melyben terjed.

Mindez azt is jelenti, hogy a hullámtani részben tanultakat alkalmazhatjuk a fényre, tehát az interferenciáról, a Huygens-Fresnel elvről, a réseken való elhajlásról tanult jelenségek és törvények mind alkalmazhatók a fény esetében is, és ezek képezik az optika alapjait.

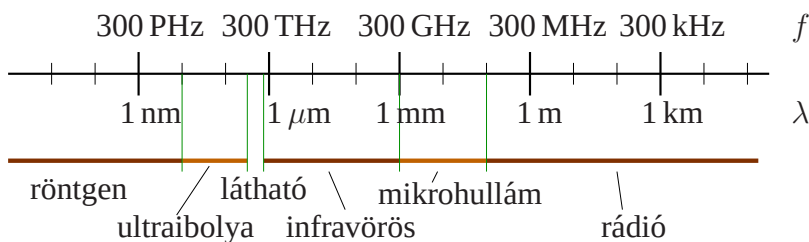
A Huygens-Fresnel elvet épp az optikában fedezték fel először, és csak később jöttek rá, hogy ez általános hullámtani törvény, mely minden hullámra teljesül. Sok fizika könyv ezért ezt az optika részeként tárgyalja, nem a hullámtanban.

5.1.1. A fény és az elektromágneses spektrum

Az elektromágneses hullámok közül nem mindegyiket érzékeljük szemünkkel, pedig természetük azonos. Az átlagos emberi szem kb. a $3,8 \cdot 10^{-7}$ m és $7,6 \cdot 10^{-7}$ m, azaz a 380 nm és 760 nm közötti hullámhossztartomány érzékelésére képes: az ebbe a tartományba eső elektromágneses sugárzást nevezzük fénynek. Az ezen a tartományon kívül eső elektromágneses hullámok is fontos szerepet játszanak életünkben, csak más hullámhosszuk és frekvenciájuk miatt egész más jellegű berendezésekkel kelthetők és érzékelhetők, valamint élettani hatásuk is más, így más és más névvel illetjük őket. Az 5.1. ábrán összefoglaltuk a teljes elektromágneses spektrum főbb tartományait. Ennek olvasásakor vegyük figyelembe, hogy a felosztás önkényes, történeti okokra vezethető vissza, ezért nem kell meglepődni, ha más könyvekben kissé más határok vannak megjelölve, illetve hogy egy-egy speciális területen a tartományok finomabb felosztását is definiálják. (Pl. a rádiótartományt szokás igen sok sávra felosztani a technikai alkalmazásoknak megfelelően.)

A tág értéktartományok miatt a közismert előtagokon (pl. „kilo-”, azaz k, vagy „milli-”, azaz m) kívül ritkábban használtak is előjöttek. Ezeket a függelékben lévő, 16. táblázat tartalmazza.

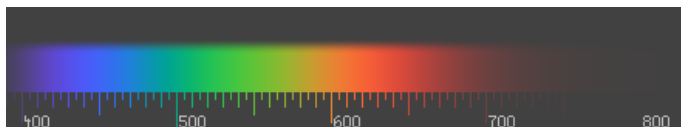
Figyeljük meg, hogy a teljes elektromágneses színekéhez képest milyen kicsi a látható tartomány: a legkisebb és legnagyobb látható hullámhossz aránya kb. 1:2, míg az a tartomány, amivel akár a mindennapokban is



5.1. ábra. Az elektromágneses spektrum főbb tartományai.

találkozunk 12 nagyságrendet, azaz akár $1:10^{12}$ arányt fog át a röntgenké-szülekek sugárzásától a hosszúhullámú rádióadásig.

A látható tartományban a különböző hullámhosszaknak a tiszta színek, azaz a szivárvány színei felelnek meg: a mélyvörös a leghosszabb, az ibolya a legrövidebb hullámhossznak. Ezt szemlélteti az 5.2. ábra.



5.2. ábra. A látható spektrum és a fény hullámhossza nanométerben.

Ez az ábra úgy készült, hogy egy átlagos monitoron a lehető leghűbben adja vissza a tiszta színek érzetét, ami természetesen nem lehet tökéletes, de jó tájékoztatást ad.

Ez az ábra egyben azt is szemlélteti, hogy a fent említett 380 és 760 nm-es határok kissé önkényesek, mert az emberi szem érzékenysége a látható tartomány széle felé fokozatosan csökken a 0-ra, így ezeken a hullámhossza-kon már jóval gyengébb az észlelés mint középen, 550 nm körül.

A tiszta színek tehát folytonosan mennek át egymásba, mégis szokás ezeket hétköznapi nevekkal illetni, melyek határai kissé önkényesek. Hasz-nos látni a fő tiszta színek közelítő hullámhossztartományát. Ezt mutatja be a 7. táblázat.

szín neve	közelítő hullámhossz
ibolya	430–380 nm
kék	500–430 nm
ciánkék	520–500 nm
zöld	565–520 nm
sárga	590–565 nm
narancs	625–590 nm
vörös	760–625 nm

7. táblázat. A főbb tiszta színek hullámhossztartománya

A nem tiszta színek, mint pl. a lila vagy a barna több hullámhossz keverékéből állíthatók elő. Az emberi szem színlátása azonban meglehetősen bonyolult jelenség, amivel itt részletesen nem áll módunkban foglalkozni.

Fontos megjegyezni, hogy a fény hullámhossza sokkal kisebb, mint a hétköznapiakban előforduló tárgyak nagy része. Ezért van értelme beszélni **fénysugárról**, ami alatt közel síkhullám formájában terjedő fényt értünk. Tökéletes síkhullám nem állítható elő, hisz annak végtelen hely kellene, a véges keresztmetszetű fénynyaláb szélén pedig mindenképp fellép bizonyos fényelhajlás, ez azonban a gyakorlatban sokszor elhanyagolhatóan kis mértékű. Például egy 1 mm keresztmetszetű fénynyaláb is a hullámhossz több ezerszerese átmérőt jelent, azaz a hullámfrontok nagy része a nyaláb szélétől sok hullámhossznyi távolságra van, így a síkhullám formában való tovaterjedés jó közelítéssel teljesül.

Ennek megfelelően a hétköznapiakban sokszor elhanyagolhatjuk a fény hullámtulajdonságait és úgy képzelhetjük, hogy a fény fénysugarakból áll, melyek homogén közegben egyenesen mennek, közeghatáron megtörnek vagy visszaverődnek. Az optika azon részét, mely a fény ilyen közelítő képével dolgozik **geometriai optikának** nevezzük és az 5.3. fejezetben tárgyaljuk. A geometriai optika kellő pontosságú ahhoz, hogy megértsük a mindennapi leképező eszközök (szemüveg, fényképezőgép, stb.) működését.

Amikor azonban a fény kis méretű tárgyakkal találkozik, hullámtermészete jelentős effektusokra vezet, így ekkor mindenképp a Huygens-Fresnel elv alapján kell a folyamatokat követnünk. Az optika ezen ágát **hullámoptikának** hívjuk és az 5.2. fejezetben tárgyaljuk.

5.1.2. A fény sebessége

Minden hullám kiemelt fontosságú jellemzője a terjedési sebesség. A fény légüres térben (vákuumban) terjed a leggyorsabban, és ez a sebesség jelen tudásunk szerint az elérhető legnagyobb sebesség. A fizika alaptörvényei szempontjából annyira fontos ez az érték, és jelenlegi tudásunk szerint annyira változatlan, hogy a mai mértékegység-rendszer alapegységeinek meghatározása során a fény vákuumbeli terjedési sebességét vették standard, nem változó értéknek. A másodperc atomi egységekkel történő meghatározása után a fény vákuumbeli terjedési sebessége segítségével adják meg a méter szabatos meghatározását. Ezért jelenlegi mértékegység-rendszerünkön belül a fény sebessége pontosan meghatározott: $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$.

Ez a sebesség olyan nagy, hogy a fény (és az egyéb elektromágneses hullámok) terjedéséhez nincs szükséges idő a gyakorlatban előforduló távolságok esetében általában nem észlelhető. A késés az igen nagy távolságú kommunikáció esetén válik érzékelhetővé: pl. a Holdon járó űrhajósokkal való kommunikációban már érzékelhető volt, mert a rádióhullámoknak kb. 1,3 s-ba kerül a Föld-Hold távolságot megtenni, azaz a feltett kérdés vége és a válasz visszaérkezése között akkor is több, mint 2 s telt el, ha az űrhajós „kapásból” válaszolt.

A hullámtanban tanultak szerint közeghatárra érve a behatoló rész továbbhaladási irányát a Snellius-Descartes törvény szerint, a közegekben mérhető terjedési sebességek aránya, a törésmutató határozza meg. Az előbb elmondottak alapján minden közegben lassabban terjed a fény, mint vákuumban, ezért a vákuumra vonatkozó törésmutató mindenképp 1-nél nagyobb, azaz szemléletesen mutatja, hányszor megy lassabban a fény az adott közegben, mint vákuumban. Néhány anyag vákuumra vonatkozó, azaz úgynevezett **abszolút törésmutatóját** láthatjuk a 8. táblázatban.

anyag	törésmutató
levegő (0°C)	1,0002926
jég	1,31
víz (20°C)	1,333
üvegek	1,5–1,9
gyémánt	2,419

8. táblázat. Néhány anyag abszolút törésmutatója

Általános hullámok esetén csak két közeg egymáshoz viszonyított törés-

mutatójáról beszélhetünk. A fény esetén azonban olyan fontos a vákuum szerepe, hogy szinte minden táblázatban ehhez viszonyítunk, és ezt az abszolút törésmutatót adjuk meg, amit röviden az anyag törésmutatójának hívunk. Így tehát a fényhullámok esetén van értelme egyetlen anyag törésmutatójáról beszélni, ami alatt a vákuumhoz viszonyított értéket értjük. Természetesen ezekből az értékekből az egymáshoz viszonyított törésmutató is egyszerűen megkapható az abszolút törésmutatók hányadosaként, azaz pl. a gyémántnak a vízre vonatkozó törésmutatója $2,419/1,333 = 1,815$.

Mivel a levegő törésmutatója alig tér el 1-től, ezért az előzőek szerint a levegőre vonatkozó törésmutató a gyakorlatban általában egyezőnek vehető az abszolút törésmutatóval.

A pontos mérések szerint a törésmutató (így az anyagbeli fénysebesség is) kissé függ a hullámhossztól. Ez azt jelenti, hogy közegekben fellép a **fény diszperziójának** jelensége, melyről az általános hullámtani részben már tanultunk. Ez a függés a látható tartományban általában nem túl erős: a különféle üvegek esetén pl. az ibolya színre vonatkozó törésmutató általában 1–3%-kal nagyobb, mint a mélyvörös szín esetében.

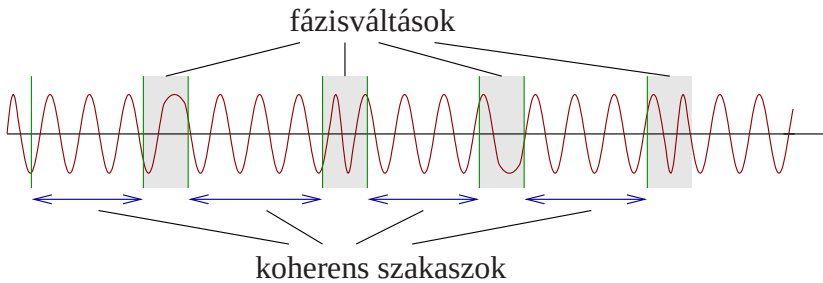
Ez a diszperzió azt jelenti, hogy a megtörő fény iránya hullámhossz-azaz színfüggő, így az a fény, ami több szín keverékéből áll elő, töréskor színeire bomlik. Az, hogy ez mennyire jelentős, a konkrét elrendezéstől függ: pl. sík üvegen való áthaladáskor ennek hatása elhanyagolható, de prizmán vagy lencsén való fénytöréskor jól láthatóvá válik, és fontos szerepet játszik a szivárvány kialakulásában is.

5.1.3. A fényhullámok interferenciája

A fényhullámok összeadhatók, azaz két fényforrás együttes fényének eredője úgy számolható, hogy az általuk keltett elektromos és mágneses térerősségvektorokat összeadjuk. Ennek megfelelően, megfelelő körülmények között létrejöhet a teljes kioltás és a maximális erősítés jelensége is. A részletesebb vizsgálat előtt azonban szólnunk kell a fényhullámok egy fontos jellemzőjéről, a koherenciahosszról.

A fényhullámok nem jellemezhetők egyetlen hullámvonulattal. Ennek oka, hogy a fényforrások jelentős részében a fénykibocsátás különálló atomokból, molekulákból egymástól függetlenül történik, és egy-egy részecske csak rövid ideig (nagyságrendileg 10^{-9} s-ig) sugároz. Bár ez az időtartam rövid, de a látható fény periódusidejéhez képest igen hosszú,

annak kb. egymilliószorosa, ezért ez alatt az idő alatt a fény lényegében egy szinuszhullámmal jellemezhető, de amikor a következő részecske fénye következik, nem lesz semmi kapcsolat a két hullám közt. Amennyiben a fény egyszínű (állandó hullámhosszú), akkor ez úgy jelentkezik, mintha a fényhullám időnként egy véletlenszerű fázisugráson menne keresztül. (Lásd 5.3. ábra.)



5.3. ábra. A koherenciahossz szemléltetése.

Koherenciahossz:

Azt a távolságot, amin belül egy adott fényforrás fénye egyetlen harmonikus hullámmal jellemezhető, koherenciahossznak nevezzük.

Normál fényforrások esetén (pl. izzólámpa, gyertya) ez legfeljebb 0,1 mm, lézerek esetén 10 m felett is lehet.

Az előző fejezetben megvizsgáltuk, mi a maximális erősítés és a kioltás feltétele akkor, amikor egy forrás hullámai két különböző úton jutnak el ugyanabba a pontba. (Lásd (3.21) egyenlet.) Az eddig elmondottak szerint ezeket még ki kell egészíteni a következő feltétellel: Az interferenciából adódó kép (erősítés, kioltás) akkor lesz időben állandó, ha az $|d_1 - d_2|$ útkülönbség kisebb a koherenciahossznál.

A normál fényforrások koherenciahossza sokkal kisebb, mint a szokásos méretek pl. egy szoba esetében. Ezért nem látunk interferenciajelenségeket a szobában, miközben egy lámpa fénye esetleg több helyről is visszaverődve jut el valahova. Ha pl. egy lámpa fénye közvetlenül és egy tükörről visszaverődve is eljut egy falfelületre, és ha a két út útkülönbsége a koherenciahossz felett van, akkor a két fényúton ismeretlen számú véletlenszerű fázisugrás következett már be, azaz egy nagyon rövid ideig mondjuk teljes erősítés, aztán egy ideig köztes állapot, majd kioltás, stb. váltogatja egymást az előzőekben említett 10^{-9} s nagyságrendű időnként, így nem látunk állandó interferenciát, hanem egy átlagos megvilágítást.

Ezen kívül a mindennapokban a fényforrások fénye többnyire sok hullámhossz keverékét tartalmazza és egyszerre sok fényforrás is azonos nagyságrendű intenzitással működik, ami szintén arra vezet, hogy a hétköznapiakban nem látunk magunk körül fényinterferencia-jelenségeket.

Ezzel szemben, ha olyan fényforrásunk van, melynek koherenciahossza nagy és egyszínű fényt bocsát ki, közvetlenül megfigyelhetők az interferenciajelenségek. Ilyen fényforrások a lézerek, melyek egyszerűbb változatához, egy toll méretű, mutatópálca helyett használt lézerhez mindenki hozzáférhet. Ilyen fényforrással könnyű interferenciajelenséget létrehozni, ha a fény útjába pl. egy girbegurba felületű üvegtárgyat teszünk, mert ekkor az áthaladó fény az üvegtárgy mögötti tárgyak egyes pontjaira különböző útvonalakon jut el, és az útkülönbségeknek megfelelően erősítések vagy kioltások alakulnak ki, amit sötét-világos csíkok formájában láthatunk.

Nemcsak a fényhullámoknál jelentős a koherenciahossz szerepe, hanem mindenfajta hullám interferenciájánál. Az előző fejezetben példaként felhozott hullámok (hang, felületi hullámok) esetében azonban a koherenciahossz általában elég nagy, így nem annyira fontos a szerepe.

5.1.4. A fény polarizációja

Mint már elmondtuk, a fény elektromágneses hullám, melynek terjedése során az elektromos és mágneses tér váltakozik. Síkhullám esetén ezek a terek merőlegesek a terjedési irányra. Mint látni fogjuk, fontos ezek térbeli helyzetét (különösen irányukat) is ismerni.

Képzeljük el ugyanis két, vízszintesen haladó fénysugár interferenciáját. Ha mindkét fénysugárban mondjuk függőleges az elektromos tér, akkor ezek képesek akár teljesen kioltani egymást (ha a frekvencia megegyezik és a fázisban fél hullámnyi különbség van). Ezzel szemben: ha az egyik sugárban az elektromos tér függőleges, a másikban vízszintes, nem alakulhat ki teljes kioltás, hanem az elektromos tér egy adott ponton a Lissajous-görbéknek megfelelő módon viselkedik a két fény fáziskülönbségének függvényében.

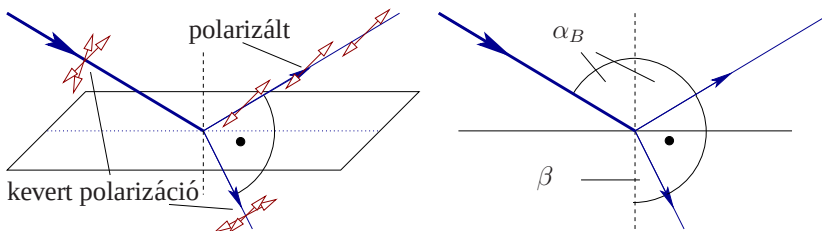
A gyakorlatban azonban sokszor lényegtelen a fény polarizációja, mert a hagyományos fényforrások olyan fényt bocsátanak ki, melynek nincs határozott polarizációs iránya, ugyanis bennük a polarizáció a másodperc igen rövid törtrésze alatt minden irányba össze-vissza változik. Továbbá a

legtöbb fényérzékelő nem különbözteti meg a különböző polarizációs irányokat, így a szemünk, a fotózáskor használt film vagy a digitális kamerák érzékelője is egyformán viselkedik az egyes polarizációs irányokra.

A legtöbb anyagban a törésmutató sem függ a polarizációs iránytól, bár vannak ritka kivételek. Például az izlandi pát olyan különleges aszimmetrikus kristályszerkezettel rendelkezik, melynek törésmutatója polarizációs irányfüggő, így a kevert polarizációjú beeső fényt szétválasztja a polarizációs irányoknak megfelelően.

Ezen kívül léteznek olyan speciális anyagok, melyekből vékony réteget felvéve egy üveglemezre olyan réteget kapunk, mely az egyik polarizációs irányt sokkal nagyobb mértékben engedi át, mint a másikat. Az ilyen üveglemezt **polarizációs szűrőnek** nevezzük.

A normál anyagok fénytörése és -visszaverése a polarizáció irányától független. Az viszont kiderült, hogy a szigetelő anyagok felületéről visszavert sugár *intenzitása* függ a polarizációtól: bizonyos beesési szög esetén csak a felülettel párhuzamos komponensek verődnek vissza, az erre merőleges összetevő nem verődik vissza. A kísérleti és elméleti vizsgálatok szerint ez akkor következik be, amikor a visszavert és a megtört fénysugár épp derékszöveget zár be egymással. Az ehhez az esethez tartozó beesési szöveget **Brewster-szögnek** nevezzük. (Lásd az 5.4. ábra.)



5.4. ábra. A Brewster-szög értelmezése.

Az ábra alapján felírható, hogy:

$$\alpha_B + 90^\circ + \beta = 180^\circ,$$

ahonnan:

$$\alpha_B + \beta = 90^\circ.$$

A Snellius-Descartes törvény szerint viszont:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta} = n.$$

Ide beírva az előzőekből adódó $\beta = 90^\circ - \alpha_B$ összefüggést és egyszerű átalakítással:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_B}{\sin(90^\circ - \alpha_B)} = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} = \tan \alpha_B = n$$

Ez alapján a törésmutató ismeretében a Brewster-szög egyszerűen meghatározható.

Amennyiben a beesési szög nem pontosan egyezik meg a Brewster-szöggel, a visszavert fény akkor is több olyan komponenst fog tartalmazni, mely a felülettel párhuzamos polarizációjú. Így a mindennapokban a nem fémes felületekről nem merőlegesen visszavert fény többé-kevésbé polarizált lesz, ha véletlen épp eltaláljuk a Brewster-szöget, akkor a polarizáció teljes. Ablaküvegen, vízfelületen vagy betonon megcsillanó napfény mind ilyen. Szemmel nem látjuk annak hatását, hogy polarizált fénnel lenne dolgunk, de ha pl. olyan szűrőt teszünk szemünk elé, mely csak az egyik polarizációs irányt engedi át, észlelhetjük ennek hatását. Ezt a fényképészetben ki is használják; megfelelő polarizációs szűrő segítségével a vízfelület vagy az ablakok csillogása jelentős mértékben csökkenthető.

A visszaverődés jelenségén kívül a hétköznapiakban még az égbolt kékje esetében találkozunk polarizált fénnel: a légkörön szóródó napfény ugyanis nem azonos valószínűséggel szóródik a különböző polarizációs irányoknak esetén, így az ég kékje részben polarizált fényből áll. (A Nappal 90° -os szöget bezáró irányban teljes a polarizáció, azon kívül csak részleges.)

Bizonyos lézertípusok polarizált fényt bocsátanak ki, és ezek megjelenése nagyot lendített a polarizációval kapcsolatos alkalmazásokon. A nagy koherenciahosszúságú, polarizált, egyszínű lézert fény ugyanis lehetővé teszi, hogy a fényjelekben a fény polarizációs síkja hordozza az információt, amit továbbítani szándékozunk, és a polarizációs irány sokszor könnyebben szabályozható és észlelhető, mint mondjuk a jel intenzitásának változása.

5.1. példa: Határozza meg a vízfelületről való visszaverődés Brewster-szögét!

Megoldás: A fentiek szerint

$$\tan \alpha_B = n = 1,33.$$

(A víz törésmutatóját a 8. táblázatból vettük.)

Innen:

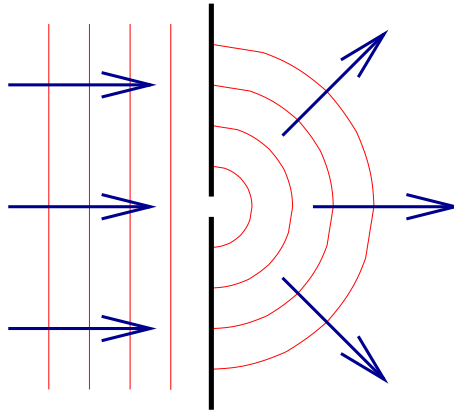
$$\alpha_B = 53,1^\circ.$$

5.2. Hullámoptika

A fény mindazokat a jelenségeket mutatja, amiket az általános hullámtanban tanultunk. Az itt következők tehát az általános hullámtani ismeretek alkalmazásai a fény esetére.

5.2.1. Fény elhajlása kis lyukakon és réseken

Tekintsünk egy átlátszatlan ernyőt, amin egy igen kicsi (a fény hullámhosszánál kisebb) lyukat fúrunk. Essen erre az ernyőre merőlegesen egy fénysugár. Mivel a lyuk kisebb a hullámhossznál, ezért a lyuk területéről induló elemi gömbhullámok nagyon közlelről és azonos fázisban indulnak. Ennek megfelelően az ernyő mögötti részben lényegében a lyukból kiinduló gömbhullámokat kapunk. Nagyon kicsi lyukon áthaladva a fény tehát teljesen szétszóródik. (Lásd az 5.5. ábrát.)



5.5. ábra. Fény áthaladása kis lyukon

Fontos megjegyezni, hogy ezzel az esettel a gyakorlatban tisztán nemigen találkozunk, mert ha a lyuk valóban kisebb, mint a hullámhossz, akkor olyan kevés fény jut át rajta, hogy csak speciális körülmények között lehet észlelni.

Legyen most két kis lyuk az ernyőn, egymástól a távolságra. Az előzőek szerint a lyukakból egyező fázisban egy-egy gömbhullám indul ki. A hullámtanban tanultak szerint egy ernyő mögötti pontban a következőképp kaphatjuk meg az erősítés illetve kioltás feltételeit: Legyen a vizsgált pont s_1 illetve s_2 távolságban a lyuktól. (Lásd az 5.6 ábra.) Ekkor az erősítés

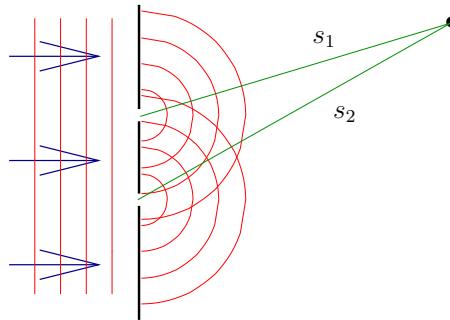
feltétele:

$$s_1 - s_2 = n\lambda,$$

a kioltásé pedig

$$s_1 - s_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda,$$

ahol n egész szám, és szükséges még, hogy $|s_1 - s_2|$ kisebb legyen a koherenciahossznál.



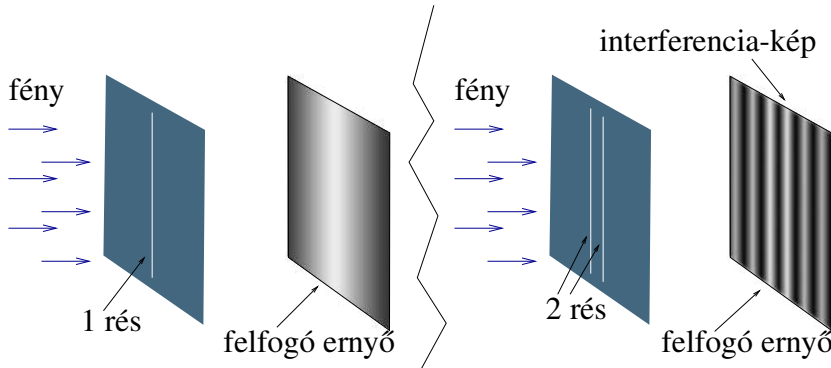
5.6. ábra. Fény áthaladása két kis lyukon.

A fenti egyenletek által meghatározott azonos jellegű pontok (pl. erősítések) mértani helyei hiperbolák (a térben forgási hiperboloidok), hisz két ponttól azonos távolságkülönbségűek n minden értékére. Az állandó erősítés és kioltás helyei tehát hiperbolaágak mentén helyezkednek el az ábrán.

Ez a két kis lyukas eset is olyan, ami a fény esetében olyan kevés átmenő fényt eredményez, hogy az szinte mindig kimutathatatlan. Ezért a gyakorlatban nem kis lyukakon, hanem hosszú, de keskeny réseken való áthaladáskor szokás az interferenciajelenségeket vizsgálni. Ilyenkor a jelenségek az előzőekben említettekhez teljesen hasonlóan mennek végbe, csak gömbhullámok helyett hengerhullámok jutnak át a réseken de a résekre merőleges síkban a hullámfrontok képe azonos lesz az előző ábrán a kis lyukak esetében mutatottal.

Két hosszú, de keskeny résen már jut át annyi fény, hogy az a gyakorlatban is észlelhető. Ezt a fényt egy, a rések mögött elhelyezett ernyőn szokás észlelni: az erősítési helyeket fényes, a kioltási helyeket sötét terület fogja jelölni az ernyőn. Ezt szemlélteti az 5.7. ábra jobb oldala.

Az egy keskeny rés esetében a teljesen szétszóródó fény majdnem egyenletesen világítja meg az ernyőt, ahogy azt az 5.7. ábra bal oldala mutatja.



5.7. ábra. Fény áthaladása egy és két keskeny résen.

(Az egyenletességtől való eltérést az okozza, hogy a felfogó ernyő szélei felé a fény nem merőlegesen esik be, így kissé csökken a felületre jutó fény intenzitása.) Két keskeny rés esetében viszont az interferenciajelenségnek megfelelően erősödő-gyengülő periodikus intenzitásváltozást láthatunk.

A fentiek alapján tudjuk, hogy az interferenciakép fényes csíkjai olyan helyeken lesznek, amelyeknek a két réstől mért távolságának különbsége a hullámhossz egész számú többszöröse, azaz $s_1 - s_2 = n\lambda$, azaz az erősítési helyek a résekre merőleges síkban hiperbolaágakat rajzolnak ki. A fény esetén azonban csak olyankor fogunk észlelhető jelenséget kapni, ha a réseket a távolsága sokkal kisebb, mint a réseket és a felfogó ernyő távolsága.

Ekkor a vizsgált, felfogó ernyőn lévő pont és a két lyuk által meghatározott háromszög igen elnyújtott lesz, a vizsgált pontnál majdnem 0° -os szöget kapunk, és a két hosszú szár közel párhuzamos lesz egymással. (Lásd 5.8. ábra.)

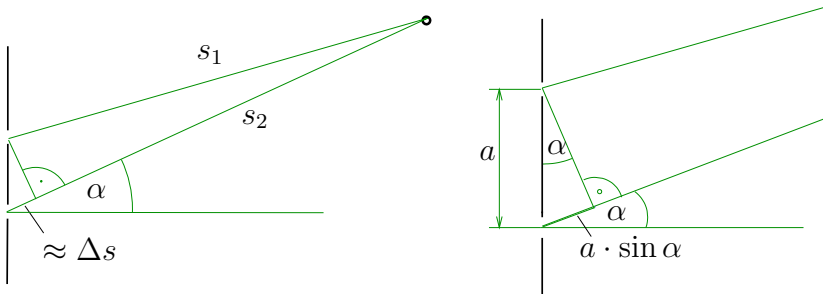
Ekkor a $\Delta s = s_1 - s_2$ útkülönbség jó közelítéssel $a \sin \alpha$ -val egyenlő. (α az egyenes továbbhaladáshoz képesti szög.) Ezért az erősítés feltétele az alábbi alakba írható:

$$\sin \alpha_n = n \frac{\lambda}{a}. \quad (5.1)$$

A kioltási irányokat β -val jelölve a kioltás feltételei hasonló megfontolásokból:

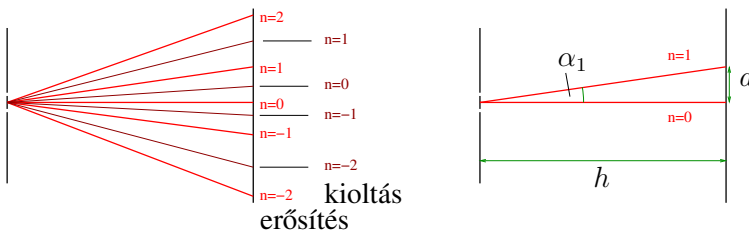
$$\sin \beta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{a}. \quad (5.2)$$

Az erősítési és kioltási irányok tehát váltogatják egymást. Pl. az $n = 0$ -hoz tartozó erősítési irány nyilván $\alpha_0 = 0$, $n = 1$ -hez pedig $\alpha_1 = \sin^{-1}(\lambda/a)$,



5.8. ábra. Az útkülönbség számítása közeli rések esetén.

míg $\beta_0 = \sin^{-1}(\lambda/(2a))$, azaz $\alpha_1 > \beta_0$. (Lásd 5.9. ábra.)



5.9. ábra. Erősítési és kioltási irányok két rés esetén

Látszik az is, hogy akkor lesz pl. az $n = 1$ -hez tartozó erősítési irány lényegesen különböző, mint a fénysugár eredeti iránya, ha α_1 legalább néhány foknyi. Ez viszont akkor következik be, ha λ/a nem nagyon kicsi, azaz a rések távolsága a fény hullámhosszánál nem sokkal nagyobb.

Valóban teljesül tehát az, amit megfontolásaink elején feltételeztünk, tudniillik, hogy a rések és a felfogó ernyő távolsága sokkal nagyobb, mint a réstávolság, így a rések és az ernyő egy pontja által meghatározott háromszög tényleg olyan hegyes szögű, hogy a fenti közelítés Δs -re jogos, ahogy azt az 5.8. ábra mutatja.

5.2. példa: Egy 700 nm hullámhosszúságú fény olyan réseken halad át, melyek távolsága 0,01 mm. Milyen távolságra lesz a középvonaltól az első erősítési irány egy olyan felfogó ernyőn, melynek távolsága a résektől 3 m?

Megoldás: Az előzőekben elmondottak szerint a közép-vonalban az $n = 0$ -s erősítési irány, azaz $\alpha_0 = 0$ van. A mellette levő erősítési irányok az $n = 1$ ill. $n = -1$ -esek, melyek kétoldalt szimmetrikusan helyezkednek el. Vegyük pl. az $n = 1$ -hez tartozó erősítési irányt:

$$\alpha_1 = \sin^{-1} \frac{\lambda}{a} = \sin^{-1} \frac{7 \cdot 10^{-7}}{10^{-5}} = 4,01^\circ.$$

Az 5.9. ábra alapján ezen erősítési irány felfogó ernyőre vett vetülete a közép-vonaltól

$$d = h \tan \alpha_1 = 0,21 \text{ m}$$

távolságban lesz. ($h = 3 \text{ m}$, a rések és a felfogó ernyő távolsága.)

5.2.2. Az optikai rács

Bár az előzőekben említett kétréses interferencia jelensége már észlelhető, sokszor szükség van arra, hogy az átmenő fény intenzitása nagy legyen. Ilyenkor nem két rést szokás használni, hanem egymás mellé, egyenletes távolságba elhelyezett réssorozatot. Az ilyen berendezést **optikai rácsnak** nevezzük.

Az optikai rácsok előállításának klasszikus módja az, hogy egy sík üveglemezen egy gép hegyes gyémánttű segítségével egyenletes távolságban karcolásokat ejt. A megkarcolt rész érdekessége miatt átlátszatlan lesz, így alakul ki az optikai rács.

Egy tipikus optikai rácson centiméterenként 100–1000 rés van egyenletes távolságban, így már egy kis darabja is igen sok rést tartalmaz, azaz a kétréses esethez képest nagyságrenddel több fényt enged át.

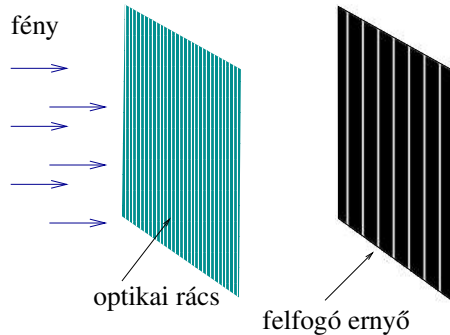
Az eddig tanultak alapján arra is meg tudjuk találni a választ, hogy egy ilyen optikai rácson áthaladó fény esetén mit látunk az optikai rács mögött.

Legyen tehát egymás után nagyon sok kicsi rés, a szomszédok távolsága legyen a . Ekkor könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az erősítés feltételei azonosak a két rés esetével. Ha ugyanis olyan szöveget vizsgálunk amelyre két rés esetén erősítés volt, akkor a szomszédos résekből érkező hullámok útkülönbsége a vizsgált irányban λ egész számú többszöröse, ezért bármely két rés esetére az útkülönbség ugyancsak λ egész számú többszöröse lesz.

Az is bebizonyítható, hogy más irányokban nem lesz erősítés. A pontos interferencia-kép felírásához szükséges hosszadalmas számításokat mellőzve most csak bizonyítás nélkül közöljük, hogy ha a rések száma igen nagy,

akkor az (5.1) egyenlet szerinti irányokban erősítés lesz, míg az összes többi irányba gyakorlatilag elhanyagolható fény fog jutni.

Így egy optikai rács mögötti ernyőn nem egy olyan folytonosan hullámzó interferencia-képet kapunk, mint a két rés esetében (5.7. ábra), hanem éles, fényes vonalakat az erősítési irányoknak megfelelő helyeken, egyébként pedig sötét ernyőt. (Lásd az 5.10. ábrát.)



5.10. ábra. Fény interferenciája optikai rácson

5.3. példa: Egy optikai rácstra ismeretlen hullámhosszúságú monokromatikus fény esik. A rács olyan, hogy centiméterenként 2000 rés van belekarcolva. A rács mögött $h = 2$ m távolságban elhelyezett ernyőn fényfoltokat látunk. Az a fényfolt, ami a fény eredeti továbbhaladási irányában van, $d = 24$ cm-re található a szomszédjától.

Mekkora a használt fény hullámhossza?

Megoldás: A feladat szövege alapján azt mondhatjuk, hogy az első erősítési irány olyan α_1 szög esetén következett be, amelyre $\tan \alpha_1 = d/h = 0,12$.

Ebből $\alpha_1 = 6,84^\circ$, így $\sin \alpha_1 = 0,12$.

Fentebb viszont levezettük az optikai rács erősítési irányira a $\sin \alpha_n = n \cdot \lambda/a$ összefüggést, és most pontosan az $n = 1$ eset valósul meg. Ezért

$$\lambda = a \cdot \sin \alpha_1 = \frac{0,01 \text{ m}}{2000} \cdot 0,12 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}.$$

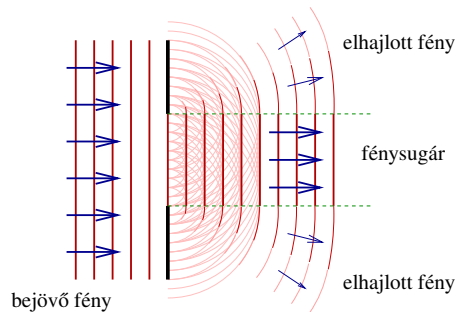
A fény hullámhossza tehát 600 nm. (Ez narancssárga színt jelent.)

5.2.3. Fényelhajlás széles résen

Fontos eset az is, amikor a fény egy olyan réshez érkezik, mely szélesebb, mint a hullámhossz. Ekkor a Huygens-Fresnel elv alkalmazása a

rés nyílásában elvileg végtelen sok helyről továbbinduló elemi gömbhullám összegzését kívánja meg. A hosszadalmas számításokat mellőzve itt bizonyítás nélkül közöljük az eredményt, amit fizikai megfontolásokkal teszünk hihetővé.

Képzeljünk el egy néhány hullámhossz szélességű rést, és a Huygens-Fresnel elvnek megfelelően képzeljük el a rés pontjaiból kiinduló elemi gömbhullámokat. Ezt rajzoltuk fel az 5.11. ábrán.



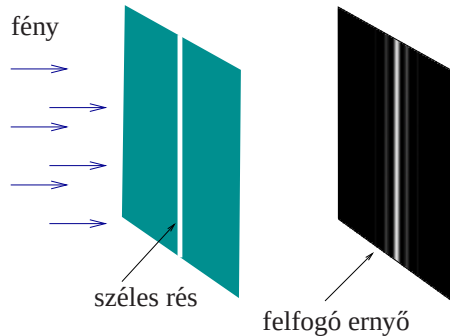
5.11. ábra. Fény elhajlása széles résen

Láthatjuk, hogy a rés közepe tájékán a gömbhullámok frontfelületei egy közel sík burkológörbe mentén „gyülekeznek”, míg a rés széle felé elhajló frontfelületeket kapunk. Hihető tehát, hogy a széles résen való áthaladáskor a nyaláb közepe közel egyenesen továbbmegy (ezt hívja a köznyelv „fénysugárnak”), de a széle elhajlik.

Az is hihető e szemléltetés alapján, hogy minél szélesebb a rés a hullámhosszhoz viszonyítva, annál kisebb lesz az elhajló, szóródó fény részaránya a teljeshez képest és annál kisebb szögű lesz a szóródás is. Így pl. egy 1 cm-es résméret (mely több, mint 10 000-szer nagyobb az összes látható hullámhossznál) esetén az elhajló rész igen kis intenzitású és az elhajlási szög is kicsi, ezért ha nem különösen pontos méréseket végzünk, az elhajlás jelensége elhanyagolható.

Az előzőekben elmondott nem precíz megfontolásokat a részletes matematikai elemzés megerősíti és pontosítja. Kiderül, hogy az elhajló fény az elhajlási szög függvényében nem monoton módon, hanem csökkenő amplitúdójú hullámzó függvény szerint csökkenti intenzitását, így egy széles rés elhajlási képe egy ernyőn egy középső fényes sávból és mellette egyre csökkenő erősségű, életlen csíkokból fog állni. (5.12. ábra.)

Bebizonyítható, hogy a középső, legerősebb sáv közepe és az első telje-



5.12. ábra. Fény elhajlási képe széles résen.

sen sötét csík közötti szögtávolság a réstől nézve:

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{d}, \quad (5.3)$$

ahol d a rés szélessége.

Ebből a formulából látszik az, amit a fent vázolt fizikai kép alapján állítottunk: ha a rés szélessége sokkal nagyobbá válik, mint a hullámhossz, akkor a szétszóródás szöge tart a 0-hoz, azaz széles résen a fényelhajlás jelensége elhanyagolható lesz.

5.4. példa: Egy 600 nm hullámhosszúságú fény 2 cm széles résen halad át. Mekkora az elhajlás mértékét jellemző szögérték, mely a továbbhaladó fénynyaláb kiszélesedését jellemzi?

Megoldás: (5.3) szerint:

$$\sin \varphi = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^{-5},$$

ahonnan

$$\varphi = 0,0017^\circ = 0,10' = 6,2''.$$

A 2 cm-es résen tehát egy átlagos fénynyaláb elhajlás miatti szóródása a olyan kicsi, hogy a gyakorlatban általában elhanyagolhatónak vehetjük.

5.3. Geometriai optika

Az előző fejezetben említettük, hogy amit a köznapi életben fénysugárnak nevezünk, az valójában síkhullám alakban terjedő elektromágneses hullámokat jelent. Tökéletes síkhullám a gyakorlatban nincs, de láttuk, hogy ha a méretek sokkal nagyobbak fény hullámhosszánál, az elhajlási jelenségek elhanyagolhatóvá válnak, így a fénysugarakkal való közelítés jogos.

A **geometriai optika** az optikának azon része, amely a fénysugarak terjedését vizsgálja. Tehát a geometriai optika csak közelítést adja a fényhullámok terjedésének és csak akkor ad jó közelítést, ha a fellépő méretek lényegesen nagyobbak a használt fény hullámhosszánál. Az előző alfejezetben láthattuk, hogy ilyen eset áll fenn a cm-es nagyságú testek, szemüvegek, távcsövek, mikroszkópok esetén: működésük megértéséhez elegendő a fénysugarak terjedését vizsgálni, és csak a nagyon pontos vizsgálatkor kell a fény hullámtulajdonságát is figyelembe venni.

A fénysugárról megállapítottuk, hogy homogén közegben egyenes vonalban terjed c/n sebességgel,¹⁸ közeghatárra érve egy része visszaverődik, egy része behatol az új közegbe és megtörik a megismert törvényszerűségek szerint. (Visszaverődési törvény, Snellius-Descartes törvény.) Pusztán ezek alapján a képalkotó eszközök működése megérthető.

Érdekes, hogy a geometriai optikának van egy alaptörvénye, melyet a Huygens-Fresnel elvvel korábban fedeztek fel, amikor még a fény hullámtermészete nem volt ismert. Ez a Fermat-elv:

Fermat-elv:

A fénysugár tetszőleges két pont között a végtelen sok lehetséges útvonal közül azokon terjed, melyeken a terjedési időnek lokális minimuma van.

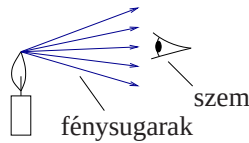
Bebizonyítható, hogy a Huygens-Fresnel elvből ez a geometriai optikai közelítésben levezethető, és az is, hogy a Fermat-elvből a homogén közegbeli egyenes terjedés és a törési- illetve visszaverődési törvény is következik. Sok esetben a Fermat-elvből egyszerűbb bizonyos problémák megoldása, de ilyet ebben a bevezető fizika kurzusban nem tárgyalunk részletesen.

5.4. A képalkotás alapfogalmai

Az optika egyik fő alkalmazási területe az olyan eszközök tervezése, amelyek a tárgyak képeit hozzák létre. (Pl. fényképezőgép, távcső.) Most az ezzel kapcsolatos alapfogalmakat fogjuk tisztázni.

¹⁸ c a fénysebesség vákuumban, n a közeg (abszolút) törésmutatója.

A tárgyak felületének pontjairól a tárgy által kibocsátott vagy visszavert fény a lehetséges összes irányba elindul, és ezek egy része a szemünkbe jut. Egy tárgy vizsgált pontját olyan helyen látjuk, ahonnan a szemünkbe jutó fénysugarak kiindulni látszanak. (5.13. ábra.) A szemünk ugyanis csak azt érzékeli, milyen fénysugarak jutnak el hozzá, azok „előélete”, tehát hogy hol és hogyan változtattak előtte irányt, nem számít.

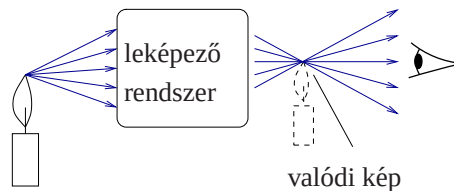


5.13. ábra. Egy tárgy közvetlen észlelése látással.

Amennyiben tehát nem közvetlenül jut a szemünkbe a fény egy tárgyról, de szemünkben a fénysugarak nem össze-vissza irányban haladnak, hanem úgy, mintha visszafelé meghosszabbításuk egy pontból indult volna, látásunk úgy érzékeli, mintha abban a pontban lenne a tárgy. Fontos azonban tudni, hogy a fénysugarak valóban találkoztak-e egy pontban vagy sem, mert ez sok minden alkalmazást befolyásol.

Valódi kép:

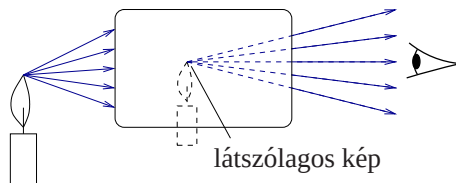
Valódi képről akkor beszélünk, amikor az egy pontból (a tárgyról) kiinduló sugarak egy része újra egy pontba (a képpontba) gyűlik össze.



5.14. ábra. Egy tárgy valódi képének észlelése látással.

Látszólagos kép:

Látszólagos- vagy virtuális képről akkor beszélünk, ha a tárgyról kiinduló sugarak ugyan nem találkoznak, de úgy terjednek, mintha egy pontból, a látszólagos képpontból indultak volna ki.



5.15. ábra. Egy tárgy látszólagos képének észlelése látással.

A következőkben mindegyik esetre fogunk példát látni.

Fontos különbség a kétféle képalkotás közt, hogy a valódi kép esetén a kép helyére egy ernyőt téve, az ernyőn megjelenik a kép, míg látszólagos kép esetén nem. (Hisz ekkor a fénysugarak nem is találkoznak.) A látszólagos képet csak azért látjuk, mert szemünk összegyűjti azokat a sugarakat, amelyek egy pontból látszanak kiindulni, így a látszólagos kép tulajdonképpen csak a szemünkben keletkezik.

5.5. Egyszerű képalkotó eszközök

5.5.1. A lyukkamera

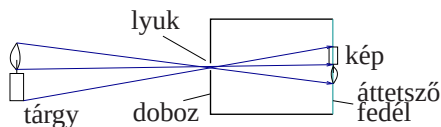
Szigorú értelemben nem nevezhetjük ezt a berendezést képalkotó eszköznek, mert nem gyűjti össze az egy pontból kiinduló fénysugarakat, csak egy igen vékony nyalábot választ ki belőlük. Történeti okokból és a tanulság miatt mégis röviden megemlítjük.

A lyukkamera lényegében egy doboz, melynek egyik oldala áttetsző, matt fedővel (pl. zsírpapír) rendelkezik, és az ezzel szembeni oldalon egy kicsi lyuk van fúrva a doboz átlátszatlan falába.

Ilyen „berendezést” otthon is könnyű elkészíteni egy nagyobb konzervdoboz és némi zsír- vagy pauszpapír felhasználásával.

A fénysugarak egyenes vonalú terjedése miatt az áttetsző fedélen megjelenik a lyuk előtti térrész kissé életlen, fejre állított („fordított állású”) képe. (Lásd az 5.16. ábrán.)

Láthatjuk, hogy nem igazi képalkotásról, inkább egy speciális árnyékvetési jelenségről van szó. A lyukkamerával jó képet nehéz előállítani: ha a lyukat nagyra készítjük, a kép életlen lesz, hisz egy pont képe az áttetsző fedélen egy legalább akkora folt, mint a lyuk, ha meg kicsire vesszük, olyan



5.16. ábra. Lyukkamera működési elve.

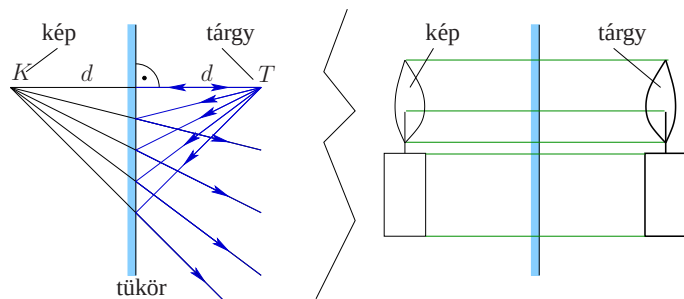
kevés fény jut be, hogy a kép láthatatlanul halvány lesz. (Igen kicsi lyuk-méret esetén pedig a hullámoptikában tanult elhajlási jelenség életleníti a halvány képet.)

A lyukkamera az optikai kutatások kezdetén játszott lényeges szerepet. A lencsék természetének megismerésével jelentőségét elvesztette, mert egy lencse valóban egy helyre gyűjti az egy helyről kiinduló fénysugarakat, így nagy belépő nyílás mellett is éles képet biztosít. Tehát a legegyszerűbb lencse is jobb képalkotásra képes, mint a lyukkamera.

5.5.2. Síktükör képalkotása

A visszaverődési törvény szerint a sík felületről visszaverődő sugarak esetén a beesési és visszaverődési szögek megegyeznek. Ezért ha egy síktükörtől d távolságra levő pontszerű fényforrásból (T pont) induló fénysugarak útját megrajzoljuk, akkor az 5.17 képen látható ábrát kapjuk. Szimmetriaokokból könnyen belátható, hogy a visszaverődő sugarak (a képen a jobb oldalon) úgy jönnek, mintha a tükör bal oldalán levő K képpontból indultak volna ki, ahol K matematikai értelemben tükörképe T -nek. (Azaz K és T egyenese merőleges a tükröre és a tükrőtől egyforma d távolságra vannak.) A síktükör tehát látszólagos képet alkot.

Amennyiben nem egy pontszerű fényforrás síktükörbeli képére vagyunk kíváncsiak, hanem egy kiterjedt testére, akkor a test minden pontjának megszerkeszthetjük a képét és ezen képpontok összerakásából előállíthatjuk a teljes képet, ahogy az az előző ábra jobb oldalán látszik.



5.17. ábra. Síktükör képképzése.

A továbbiakban mindig meg fogunk elégedni azzal, hogy megmutatjuk az egyes képképző eszközökről, hogy tetszőleges helyen levő, egyetlen tárgypont képe hogyan szerkeszthető meg. Ez alapján ugyanis kiterjedt tárgyak képe is pontról pontra megkapható.

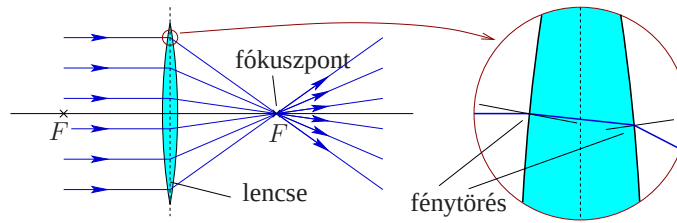
Könnyen belátható, hogy kiterjedt testek síktükörbeli képe ugyanakkora lesz, mint az eredeti tárgy, a síktükör tehát nem nagyít, valamint a kép nincs megfordítva, aminek a szakszerű kifejezése az, hogy a síktükör egyenes állású képet alkot.

5.5.3. Lencsék képképzése

Készítsünk valamilyen anyagból egy olyan lencse alakú testet, amelyet két gömbfelület (pontosabban két gömbsüveg) határol. A tapasztalat szerint ha a lencse anyagának törésmutatója nagyobb a környezeténél (mondjuk a levegőénél), akkor ez a lencse gyűjteni fogja a sugarakat, pl. egy párhuzamos sugárnyaláb a lencse után egy pontban fog egyesülni. Próbáljuk ezt megérteni az eddig tanultak alapján.

Tekintsünk egy fénysugarat, ami a lencse tengelyével párhuzamosan érkezik a lencsére. A lencse anyagához érve ez a fénysugár megtörik, méghozzá úgy, hogy a tengely felé fog haladni. Ugyanilyen irányú törés következik be a kilépéskor is. A tengellyel párhuzamos sugár tehát a tengely felé fog hajlani a lencsén való áthaladás után. (Lásd az 5.18. ábrát.)

A Snellius-Descartes törvény segítségével ez a két törés pontosan nyomon követhető, és kiszámolható, hogy az összes, eredetileg a tengellyel párhuzamos sugár egy pontban fog egyesülni. Ezt a pontot a lencse **fókusz-**



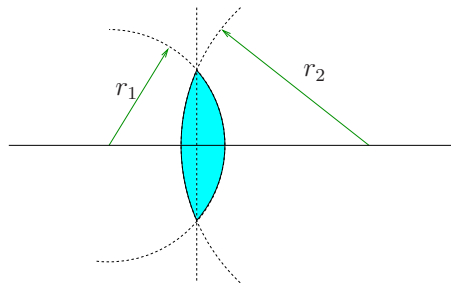
5.18. ábra. Domború lencse fénygyűjtő képességének magyarázata

pontjának nevezzük. A fókuszpont és a lencse távolságának elnevezése: **fókusz-távolság**, szokásos jele f .

Az is bebizonyítható, hogy

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.4)$$

ahol n a lencse anyagának a környezetre vonatkozó relatív törésmutatója, r_1 és r_2 a lencse két oldalának görbületi sugarai. (5.19. ábra.)



5.19. ábra. Domború lencse görbületi sugarai

Az előző formula alkalmas annak az esetnek a kezelésére is, amikor az egyik oldal sík. Ilyenkor ebbe a képletbe formálisan $r_1 = \infty$ -t, azaz $1/r_1 = 0$ -t írhatunk. Sőt, ha az egyik oldal homorú, akkor negatív görbületi sugarat beírva, helyes értéket kapunk a fókusz-távolságra.

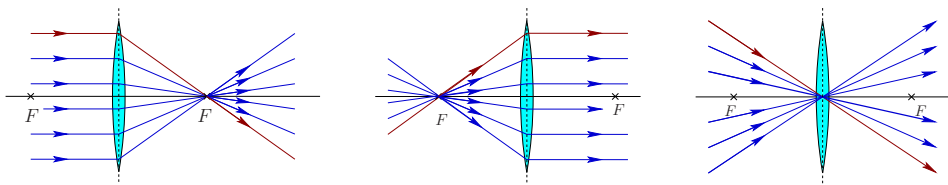
Az itt matematikai bonyolultságuk miatt nem részletezett számítások felvilágosítással szolgálnak a nem a tengellyel párhuzamosan beérkező

fénysugarakról is. A levezetések szerint azok a lencsék, melyeknek vastagsága elhanyagolható egyéb méreteikhez képest („vékony lencsék”) egyszerű törvényszerűségeknek tesznek eleget, mely középpontjában három fontos aleset az úgynevezett **nevezetes sugármenetek** állnak:

1. A gyűjtőlencse tengelyével párhuzamosan érkező fénysugarak a lencse után a fókuszponton fognak áthaladni.
2. A gyűjtőlencse fókuszpontjának irányából érkező (a fókuszponton átmenő) fénysugarak a lencse után a tengellyel párhuzamosan fognak haladni.
3. A gyűjtőlencse középpontján áthaladó fénysugarak az eredeti irányban haladnak tovább.

Ezeket a nevezetes sugármeneteket szemlélteti az 5.20. ábra. Mindegyik nevezetes sugármenethez több fénytut is berajzoltunk, hogy jelezzük: *minden* fókuszpont felől érkező fénysugár a lencsén áthaladva a tengellyel párhuzamosan fog továbbhaladni, stb. Ezek azonban egymástól független sugarak, pl. a fókuszpontokban nem „keverednek össze”, amit egy-egy más színnel berajzolt sugár kiemelése jelez.

Azt is fontos megjegyezni, hogy az itt tárgyalt vékony lencsék esetében a nevezetes sugármenetek rajzolásakor a következők szerint kell eljárni: a bejövő sugarat rajzoljuk meg a lencse közepén átmenő, szimmetriatengelyére merőleges síkig (szaggatott vonal az ábrákon), majd ott megváltoztatva az irányt rajzoljuk tovább a megfelelő irányba. Természetesen a valóságban két helyen törik a fény, ahogy az az 5.18. ábrán látszik, de vékony lencsék esetén bebizonyítható, hogy ezek eredő irányváltozása épp az előbb említett szabályok szerinti egyetlen irányváltozással egyező értékre vezet.

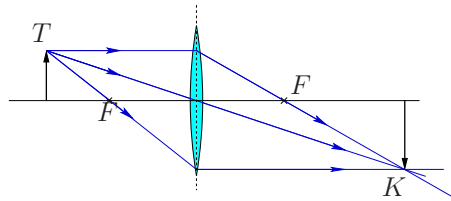


5.20. ábra. Gyűjtőlencse nevezetes sugármenetei.

A nem ismertetett levezetés azt is kimutatja, hogy ha a nevezetes sugármenetek egy pontban találkoznak, vagy egy pontból látszanak kiindulni, akkor az összes többi, a tárgyról kiinduló és a lencsén megtörő fénysugár is ugyanígy fog viselkedni. Elegendő tehát ezen sugármenetek követése.

Ezen törvényszerűségek alapján tetszőleges tárgynak megszerkeszthetjük a képét.

Valódi képalkotás gyűjtőlencsével. Ilyen esetet mutatunk pl. az 5.21. ábrán, ahol egy olyan tárgy képét szerkesztettük meg, amely távolabb van a lencsétől, mint a fókusz távolság. Ilyenkor az ábra szerint valódi képet kapunk.



5.21. ábra. Domború lencse valódi képalkotása.

Azért, hogy a kialakuló kép méretéről és helyzetéről számszerű összefüggéseket tudjunk megállapítani, néhány fontos jelölés bevezetése szükséges: (Lásd még 5.22. ábra.)

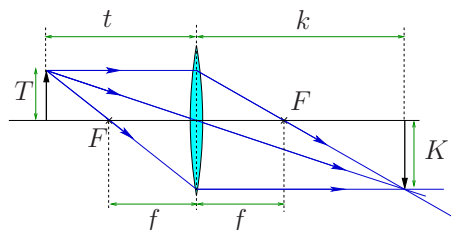
fókusz távolság: f ; a fókuszpontok és a lencse távolsága,

képtávolság: k ; a kép és a lencse távolsága,

tárgytávolság: t ; a tárgy és a lencse távolsága,

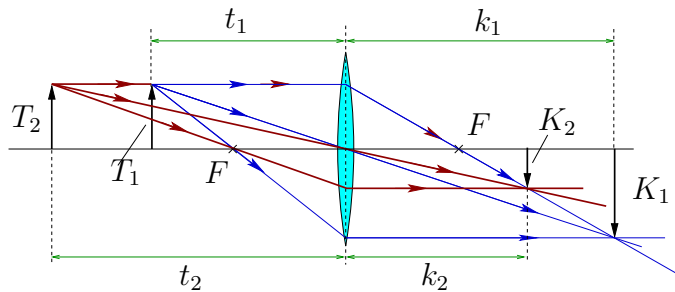
képméret: K ; a kép mérete,

tárgyméret: T ; a tárgy mérete.



5.22. ábra. Domború lencse valódi képalkotása, szokásos jelölések.

Mindezek a távolságok kapcsolatban vannak egymással. Pl. ha a tárgyat távolítjuk a lencsétől, azaz növeljük t -t, akkor a képtávolság (k) és a képméret (K) is csökkenni fog, hisz az első nevezetes sugár lencse utáni része nem változtatja helyzetét, de a 2. kisebb szöget fog bezárni a tengellyel, így törés után attól kisebb távolságban fog haladni. Ezt mutatja be az 5.23. ábra.



5.23. ábra. Gyűjtőlencse képképzése: a tárgy helyváltoztatásának hatása.

Ekkor bebizonyítható, hogy

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t} \quad (5.5)$$

és

$$\frac{K}{T} = \frac{k}{t}. \quad (5.6)$$

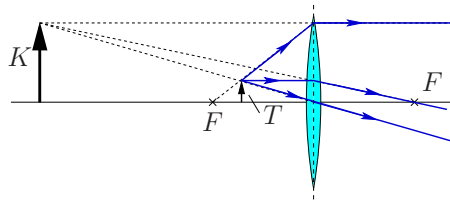
Szokás az $N = K/T$ hányadost a rendszer **nagyításának** is nevezni.

A valódi képet alkotó eset adja több optikai rendszer működésének elvét. Így működik pl. a vetítógép és a fényképezőgép. Mindegyik esetben a tárgyról lencse segítségével alkotunk valódi képet, a vetítógépnél ez egy vásznon történik meg, mely szétszórja a fényt, hogy minden irányból látható legyen a kép, a fényképezőgépnél pedig a kép egy fényérzékeny területre jut, ahol a hagyományos filmek esetén kémiai változásokat, a digitális fényképezőgépek esetén elektromos változásokat hoz létre, amit aztán a megfelelő módon fényképpé alakítunk.

A vetítő- és a fényképezőgépekben több lencse is található. Ennek az a magyarázata, hogy a lencsék képképzésének sokféle hibája van, amit csak lencserendszerek alkalmazásával lehet csökkenteni. Ezekről a hibákról itt nem szólnunk.

Ennek ellenére, a valódi képképzés elve lényegében ugyanaz, mint az 5.21. ábrán látható egy lencse esetében.

Látszólagos képképzés gyűjtőlencsével. Egészen más az eset, ha a tárgy a fókuszponton belül van. Ilyen esetet mutat az 5.24. ábra. Ekkor nem kapunk valódi képet, hanem a tárggyal megegyező oldalon egy látszólagos képet.



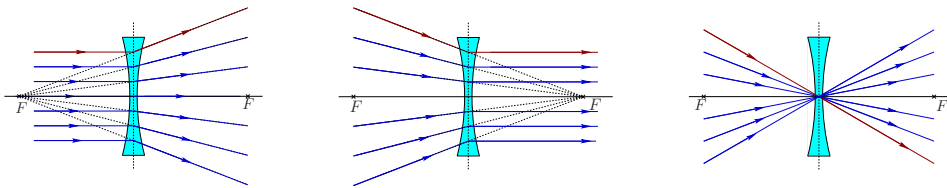
5.24. ábra. Domború lencse látszólagos képképzése

A fenti egyenletek a valódi és a látszólagos kép esetét is tartalmazzák. Könnyű belátni pl., hogy $t > f$ esetén $k > 0$ lesz (valódi kép), míg $t < f$ esetben $k < 0$. Az utóbbi eset negatív képtávolsága jelzi azt, hogy a kép csak látszólagos.

A látszólagos kép esetét a gyakorlatban pl. olyankor használjuk, amikor egy egyszerű lencsével nézegetünk egy kis tárgyat.

Szórólencsék. Eddig mindig gyűjtőlencséről beszéltünk. Azonban vannak homorú lencsék is, melyek szórják a fényt. Ez abból is látszik, hogy az (5.4) egyenletbe negatív görbületi sugarakat írva negatív fókusz-távolságot kapunk. Ez annak feleltethető meg, hogy a párhuzamos fénysugarak nem a lencse után egyesülnek, hanem egy, a lencse előtt levő pontból látszanak jönni. A domború lencsénél tanult 3 nevezetes sugármenet megmarad szórólencsék esetében is, csak itt mintha a kétoldali fókusz-pontok szerepe felcserélődne:

1. A szórólencse tengelyével párhuzamosan érkező fénysugarak a lencse után úgy mennek tovább, mintha a lencse azon fókuszpontjából indultak volna ki, amelyik a fény beérkezési oldalán van.
2. A szórólencse túloldali fókuszpontjának irányába érkező fénysugarak a lencse után a tengellyel párhuzamosan fognak haladni.
3. A lencse középpontján áthaladó fénysugarak az eredeti irányban haladnak tovább.



5.25. ábra. Szórólencse nevezetes sugármenetei.

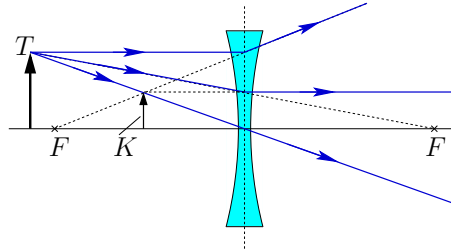
Érdekes módon az (5.5) egyenlet is érvényben marad, ha figyelembe vesszük azt, hogy az előjelek megváltoznak, ha a kép vagy a tárgy a gyűjtőlencse valódi képalkotásának esetéhez képest a másik oldalra kerül.

Megjegyezzük, hogy szórólencsét kapunk akkor is, ha a görbületi sugarak pozitívak, de a lencse anyagának a közegre vonatkozó relatív törésmutatója egynél kisebb, azaz a lencse —optikai értelemben— ritkább, mint a környezete. Ilyen eset fordul elő pl. a vízben levő kis légbuborékok esetében: ezek (bár domború felületek határolják őket) szórólencseként viselkednek. Valóban: (5.4) szerint $n < 1$ és $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ esetén $f < 0$ lesz.

Könnyű belátni, hogy a szórólencse egy tárgyról csak látszólagos, kicsinyített képet állít elő. Ennek megfelelően alkalmazási köre sokkal szűkebb, mint a gyűjtőlencsée. (Lásd 5.26. ábra.)

5.5. példa: Egy 10 cm fókusztávolságú lencsével egy tőle 80 cm-re levő izzószál képét állítjuk elő. Mekkora lesz a kép távolsága a lencsétől? Ha az izzószál hossza 30 mm, mekkora lesz képének a mérete?

Megoldás: A szokásos jelölésekkel: $f = 0,1$ m, $t = 0,8$ m, $T = 0,03$ m.



5.26. ábra. Szórólencse látszólagos képképzése.

(5.5) szerint $1/f = 1/k + 1/t$. Itt f és t is ismert, így az ismeretlen k képtávolság kifejezhető:

$$k = \frac{1}{1/f - 1/t} = \frac{tf}{t - f} = 0,114 \text{ m.}$$

Az izzószál képe tehát 11,4 cm-re lesz a lencsétől.

A kép ismeretlen K mérete (5.6) alapján ($K/T = k/t$) határozható meg. Egyszerű átrendezéssel:

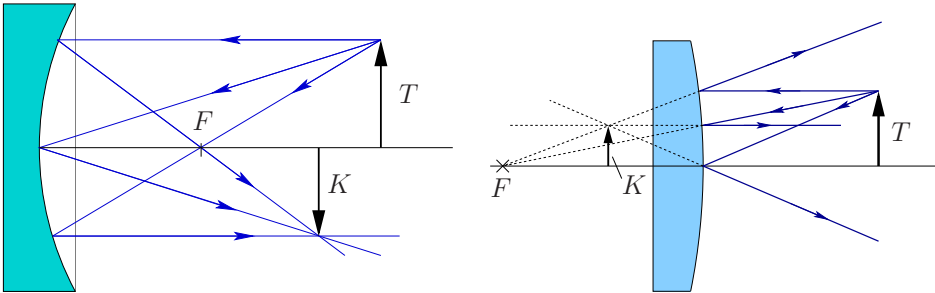
$$K = T \frac{k}{t} = 0,0043 \text{ m.}$$

A vetített kép mérete tehát 4,3 mm.

5.5.4. Gömbtükrök képképzése

A lencsék a fénytörés jelenségét kihasználva gyűjtik össze a sugarakat. Hozzájuk nagyon hasonlóan viselkednek azok a tükrök, melyek nem sík felületűek, hanem alakjuk egy gömbfelület kis darabja. Érezhetjük, hogy a homorú tükrök gyűjtik, a domborúak szórják a fényt, és valóban be is lehet bizonyítani, hogy a gömbtükrök nagyon hasonlóan viselkednek a lencsékhez: a homorú tükrő a gyűjtőlencséhez, a domború tükrő a szórólencséhez hasonlóan viselkedik. A fő különbség a tükrök és a megfelelő lencsék között az, hogy a kép a lencse esetéhez képest épp az ellenkező oldalon képződik.

A nagyfokú hasonlóság miatt nem is tárgyaljuk a homorú és domború tükrök képképzését annyira részletesen, mint a lencsénél tettük, mert elvileg újat nem tudunk mondani, csak két fontos esetet mutatunk meg a nevezetes sugármenetek alkalmazása segítségével: a homorú tükrő valódi képképzését (5.27. ábra, bal oldal) és a domború tükrő látszólagos képképzését (5.27. ábra, jobb oldal).



5.27. ábra. Homorú tükör valódi és domború tükör látszólagos képalkotása.

Természetesen az (5.5) és (5.6) összefüggések is igazak lesznek, és hasonlóan alkalmazhatók, mint a lencsék esetében.

Bebizonyítható, hogy a gömbtükör fókusz távolságának abszolút értéke a görbületi sugár fele. (A domború tükör fókusz távolsága negatív, a homorúé pozitív.)

Felmerülhet a kérdés, hogy ha ennyire hasonlít a homorú tükör és a gyűjtőlencse, akkor szükség van-e a gyakorlatban mindkettőre. A válasz az, hogy mindegyiknek egyaránt megvannak az előnyei és a hátrányai, így a konkrét helyzet dönti el, melyiket célszerűbb alkalmazni.

A tükrök előnyei a lencsékkel szemben:

- A tükröknek csak egy oldalát kell nagyon pontosan megcsiszolni, míg lencse esetén kettőt.
- Az egyszerű lencsék anyagának törésmutatója kissé függ a hullámhossztól, azaz a fény színétől. Ezért a különböző színekre más és más lesz egy lencse fókusz távolsága, így a kép sehol sem lesz éles. Ez a jelenség a tükröknél nem lép fel, mert azok fókusz távolsága független a hullámhossztól.
- A tükrök hátulról teljes felületen megtámaszthatók, míg a lencsék csak a peremükön. Ez a nagy méretek esetén lényeges, mert a lencse képes saját súlya alatt számottevően meggömbülni. (Az optikai felületek fény hullámhosszynyi torzulása már eltorzítja a képalkotást!) Ez a fő oka annak, hogy 1 m-nél lényegesen nagyobb lencse nem használható a gyakorlatban, míg a legnagyobb, egy darabból készült tükör átmérője 5 m-nél nagyobb.

Sajnos egy kikerülhetetlen hátrány sok esetben megakadályozza a tükrök alkalmazását lencse helyett: a tükrök esetén ugyanazon az oldalon

keletkezik a valódi kép, mint a tárgy, így ha a képhez valami érzékelőt (pl. filmet) akarunk tenni vagy mi magunk akarjuk szemügyre venni, akkor pont a bejövő fény útját takarjuk el. Az ilyen elrendezési problémák adják a fő okot amiért a tükrök (sok előnyös tulajdonságuk ellenére) nem váltják fel mindenütt a lencsét.

Néhol viszont kifejezetten kívánatos a gömbtükrök képviszaverő tulajdonsága: pl. a beláthatatlan kereszteződésekben magasban elhelyezett domború tükrök segítségével beláthatunk egy szűk mellékutcába. Itt a síktükör alkalmazása nem lenne célszerű, mert az azonos méretben mutat mindent, azaz a kis felületű tükrön keresztül csak az utca kis részét látnánk, de a domború tükrőben kicsinyített képet kapunk, ami lehetővé teszi nagyobb terület észlelését.

5.6. A képalkotó eszközök korlátai

Az eddigiekben a lencsékkel és tükrökkel kapcsolatos legalapvetőbb tudnivalókat ismertettük, csak az ideális eseteket tárgyalva. A valóságban egy pontos képalkotás sokkal összetettebb probléma, és mindenféle torzításoktól mentes, pontos, éles képet kapni nem is olyan egyszerű. Ehhez a képalkotó eszközök hibáiról, korlátairól kell ismeretekkel rendelkezni. Az optika ezen része azonban nagyon bonyolult, így itt csak egy rövid bepillantást teszünk ide.

5.6.1. Geometriai hibák

A képhibák egy része a képalkotó rendszer geometriai hibáiból adódik. Ezen hibák egyik fajtája a gyártás során elkövetett pontatlanságokat jelenti. Az optikai eszközök megmunkálása igen kényes kérdés, mert már az alkalmazott hullámhossz fele méretű hiba a lencse vagy a tükör felületében érzékelhetően rontja a képalkotást. Ez nem okoz zavart a hétköznapi alkalmazások egy részénél (pl. a fürdőszobai tükör esetében), de egy precíziós berendezés, mondjuk egy fényképezőgép képalkotásánál már igen.

A geometriai hibák másik fajtája a tervezési hiba. Az ideális lencse alak ugyanis nem a korábban említett gömbfelület-darabok által határolt térrész, és az ideális tükör sem pontosan gömb alakú. A gyakorlatban ha a felületek görbülete sugara jóval nagyobb (legalább 10-szer akkora), mint az optikai elem (pl. lencse) átmérője, akkor a gömb jó közelítést jelent, de alkalmazástól függően a különböző felületeket szokás forgási paraboloid, ellipszoid vagy hiperboloid alakra is csiszolni. Ezek mindegyikének meg van a maga alkalmazási tere, ahol a legkevésbé torz képek alkotására képes.

5.6.2. Diszperzió

Ezt a jelenséget fentebb már említettük: a fénysebesség, így a törésmutató kis mértékben függ a hullámhossztól, így a fénytörés mértéke különbözik az egyes színek esetén. Ez azt eredményezi, hogy a lencsék fókusz távolsága színfüggő lesz, ami viszont életleníti a képet, színeire bontva azt. A jelenség általában nem számottevő egy egyszerű nagyítólencsénél vagy szemüvegnél, de ha a képet valami módon nagyítjuk, akkor a kis hatás is láthatóvá válik. Ilyen esetet pl. gyenge minőségű fényképezőgépeknél figyelhetünk meg, főleg a látómező széle felé: egy fényes fehér tárgy szélei felé elmosódottan többféle színt láthatunk.

A diszperzió ellen úgy lehet védekezni, hogy nem egy egyszerű lencsét használunk képalkotásra, hanem egymás után tett, jól megválasztott anyagú és geometriájú lencserendszert, úgynevezett ragasztott lencsét. Ezek hátránya, hogy a szükséges igen precíz anyagválasztás és megmunkálás miatt nagy az előállítási költsége, ráadásul még ezzel a módszerrel sem tud tökéletes lenni a diszperzió kiküszöbölése.

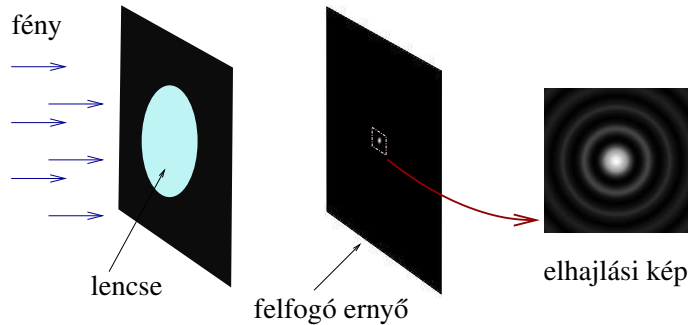
Ettől a hibától a tükrök mentesek.

5.6.3. Fényelhajlás

A hullámoptikában tanultak szerint minden rés (általánosabban: akadály) szélén történik fényelhajlás. Egy lencse, véges mérete miatt szintén akadálynak tekinthető, így a széleinél óhatatlanul bekövetkezik ez a jelenség. Ez ellen védekezni nem lehet, mert ez a fény hullámtulajdonságából adódik.

Az elhajlás mértéke a normál méretű lencsék esetén a fok törtrésze, hisz a fény hullámhossza sokkal kisebb, mint a lencsék mérete. Ezért ez a jelenség sokszor nem vehető észre. Kis lencsék vagy a kép felnagyítása esetén azonban jelentkezik a hatása, és ez a jelenség adja az optikai rendszerek egyik legfontosabb korlátját, mivel meghatározza a legkisebb részleteket, melyek egy adott rendszerrel megfigyelhetők. Ez ugyanis azt jelenti, hogy bár a geometriai optika szerint egy párhuzamos nyalábot egy hibáktól mentes lencse egyetlen pontba fókuszál, az elhajlás miatt ez a „pont” valójában egy kis korongocska lesz, melyet egyre halványodó koncentrikus körök vesznek körül, ahogy azt az 5.28. ábra mutatja.

Ezt az esetet a rés fényelhajlásához hasonlóan azzal a szöggel szokás jellemezni, amely az eredeti iránytól való eltérést mutatja meg: esetünkben erre azt a szöget választják, amely a lencse közepéből az elhajlási kép első sötét köréhez és a kör középpontjához húzott egyenesek szöge. Matematikai bonyolultsága miatt itt nem részletezhető okokból erre a φ



5.28. ábra. Lencse szélén létrejövő fényelhajlás hatása.

szögtávolságra igaz, hogy

$$\sin \varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (5.7)$$

ahol D a lencse átmérője, λ a fény hullámhossza.

Vegyük észre, mennyire hasonlít ez a résen való elhajlás esetére ((5.3) egyenlet); tulajdonképpen csak az 1,22-es szorzó jelenti a különbséget.

A gyakorlatban jó közelítés, ha azt tételezzük fel, hogy a fényelhajlás a lencsén átmenő fényt az előbbi formulából számolható φ szöggel szórja szét. Látjuk ugyan az 5.28. ábrán, hogy a középső fényes folton kívül egyre halványodó körök is vannak, azaz van fény, mely ennél a φ szögnél jobban eltérül, de a legtöbb esetben ezek fényereje annyival kisebb, mint a központi fényes, φ sugarú területé, hogy ezek nem játszanak lényeges szerepet.

Az előzőekben bevezetett φ szög szokásos elnevezése: **felbontóképesség**.

Ezt tehát azt jelenti, hogy egy párhuzamos nyaláb nem egy 0 méretű pontba, hanem egy kis területre, az úgynevezett elhajlási korongba gyűlik össze a fókuszpont környékén. Az elhajlási korong sugara az elmondottak szerint:

$$r_e = f \tan \varphi.$$

A gyakorlatban szinte mindig olyan esetekkel találkozunk, amikor $\varphi \ll 1$, de ekkor $\sin \varphi \approx \tan \varphi$, ezért az elhajlási korong mérete (5.7) felhasz-

nálásával kifejezhető:

$$r_e = 1,22\lambda \frac{f}{D}. \quad (5.8)$$

Ha tehát azt akarjuk, hogy a fényelhajlás ellenére kis helyre fókuszáljuk a fényt, akkor vagy kisebb hullámhosszat kell választanunk, vagy olyan lencsét, melynek az f/D aránya kicsi.

5.7. Egyszerű optikai berendezések

Az előzők alapján sok olyan jelenség és berendezés megérthető, melyekkel a mindennapokban találkozhatunk.

5.7.1. Az emberi szem képalkotása

Az emberi szem képalkotása a gyűjtőlencsék képalkotásán alapul: a szemgolyónk elején levő szemlencse a szemgolyó belső oldalán valódi képet állít elő a környezetről, amit speciális idegvégződések elektromos jelekké alakítanak, amik az idegpályákon az agyba mennek. Maga a képalkotás tehát egyszerű optikai jelenségen alapul, de a hatékony működés végett néhány figyelemre méltó megoldás alakult ki szemünkben, amikről röviden érdemes említést tenni.

A szemgolyó mérete rögzített, ezért a különböző távolságú tárgyakra való élesre állást az biztosítja, hogy a szemlencse rugalmas anyagú, és az őt felfüggesztő izmok feszítettségének változtatásával a szemlencse görbülete, így fókusz távolsága változtatható. A szemben tehát a képtávolság rögzített és a tárgy távolságnak megfelelően a leképező lencse fókusz távolsága változik. A szemlencse vagy a felfüggesztő izmok betegsége vagy öregedése vezet a legáltalánosabb látáshibákhoz: ha a szemlencse nem tud elég rövid fókusz távolságra beállni, a közeli-, ha pedig nem tud nagy fókusz távolságra állni, a távoli tárgyokról nem tudunk éles képet alkotni. Ezeket a látáshibákat a szem elé tett lencsékkel, azaz szemüveggel vagy kontaktlencsével viszonylag egyszerű korrigálni.

Megemlítendő még, hogy a szemlencse előtt egy színes hártya, az úgynevezett szivárványhártya (írisz) található. Ennek színe az, amit egy arcra tekintve a szem színével azonosítunk. Ennek közepén egy kör alakú lyuk, a pupilla található, melynek átmérőjét a szem 2 és 8 mm között változtatni tudja. Ezen változtatások a megvilágításhoz való alkalmazkodást szolgálják: teljes sötétben 8 mm-re is kitágulhat a pupilla (igaz, ezt nem láthatjuk meg, épp a sötét miatt), erős napsütésben viszont összehúzódik 2 mm-esre.

A fejezet elején említettük, hogy a szem 380 és 760 nm közötti hullámhosszakra érzékeny. Fontos tudnunk, hogy ez érzékenység ezen a tartományon belül egyáltalán nem egyenletes. Nappali megvilágítás mellett legérzékenyebbek az 550 nm körüli (sárgászöld) fényre vagyunk, 400 és 700 nm-nél az érzékenység kb. a maximális érzékenység századára esik le, a határként megadott 380 és 760 nm-es értékeknél pedig már csak a maximális érzékenység mintegy tízezred része mérhető.

A fentiek természetesen csak egy durva áttekintést adnak az emberi látásról. Az emberi szem csodálatosan oldja meg a torzítások, a diszperzió kiküszöbölését, a színlátást, az erősen változó megvilágításhoz való alkalmazkodást (nemcsak a pupillaméret változtatásával). Mindezek azonban túlmutatnak jegyzetünk keretein.

5.6. példa: Számoljuk ki az emberi szem elvi maximális felbontóképességét 2 mm pupillaátmérő esetén!

Megoldás: (5.7) szerint kiszámolható a felbontóképesség, ha ismert a hullámhossz és a lencse átmérője. Hullámhossznak vegyük azt, ahol az emberi szem a legérzékenyebb, azaz 550 nm-t:

$$\sin \varphi = 1,22 \frac{5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{0,002 \text{ m}} = 0,000336,$$

ahonnan

$$\varphi = 0,0192^\circ = 1,15'.$$

Az emberi szem elvi felbontóképessége tehát nappali fény esetén mintegy 1 ívperc.

Érdekes, hogy szemünkben az érzékelő idegsejtek pontosan ennek megfelelő sűrűséggel helyezkednek el, így az 1'-es érték egyúttal az emberi szem tényleges felbontóképessége is.

Néha előfordul, hogy egy ember szemében az érzékelők sűrűbben helyezkednek el, és ők alacsony megvilágítás mellett, kitágult pupillával akár 1/4–1/3' felbontással tudnak nézni.

5.7.2. Az egyszerű nagyító

A gyűjtőlencsével tudunk látszólagos képet alkotni, ha $t < f$, ahogy azt az 5.24. ábrán már bemutattuk. Említettük azt is, hogy ez az az eset, amikor a mindennapi gyakorlatban a lencsét egyszerűen szemünk elé tartva

nagyítjuk a tárgyak képét. Nézzük meg most ezt konkrétan, hogy az egyszerű nagyító működését jobban megérthessük.

Fejezzük ki (5.6) és (5.5) alapján a képméretet, mint a tárgytávolság- és méret függvényét. (5.5) alapján:

$$k = \frac{1}{1/f - 1/t} = \frac{ft}{t - f}.$$

(5.6) és az előző formula szerint a kép mérete:

$$K = T \frac{k}{t} = T \frac{f}{t - f}.$$

A lencse „nagyító képességét” a korábban bevezetett $N = K/T$ mennyiség nem adja meg helyesen, ugyanis az előzőek szerint $K/T = f/(t - f)$ -fel definiálni, és így ha $t \rightarrow f$ ($t < f$), akkor $K/T \rightarrow -\infty$. A képméret tehát a végtelenbe tart, ha a tárgy közeledik a fókuszponthoz. Tapasztalatból tudjuk, hogy a végtelen nagy nagyítást nem kapunk egy egyszerű lencsével. Ennek az az oka, hogy bár $t \rightarrow f$ esetén $|K/T| \rightarrow \infty$, de az előző formula szerint a képtávolság abszolút értéke is a végtelenbe tart, mert a $k = ft/(t - f)$ formula nevezője 0-hoz tart.

Ha tehát a tárgy közelít a fókuszponthoz, akkor a képméret és a képtávolság nagysága egyaránt minden határon túl nő: a látszólagos kép egyre nagyobb, de egyre távolabb kerül szemünktől.

Az a mennyiség, amely megmutatja, mekkora is egy lencse „nagyító képessége” a kép látszó szögével kapcsolatos. Erre az α szögre igaz, hogy:

$$\tan \alpha = \frac{K}{k},$$

ugyanis ha szemünk közvetlen a lencse mögött helyezkedik el, akkor egy k távolságban levő K méretű képet nézünk.

Mihez lehet ezt a szöget viszonyítani? Nyilván ahhoz a maximális szöghöz, amely alatt szabad szemmel láthatjuk a T méretű tárgyat. Ezt akkor látjuk a legnagyobb szög alatt, ha a lehető legközelebből nézzük, úgy, hogy még élesnek lássuk. Ezt a legkisebb távolságot a **tisztánlátás távolságának** nevezzük. Konkrét értéke személyfüggő, de átlagos elfogadott értéke felnőtt ember esetén:

$$d_0 = 0,25 \text{ m}.$$

A tárgyat tehát szabad szemmel legfeljebb olyan α_0 szög alatt láthatjuk, melyre

$$\tan \alpha_0 = \frac{T}{d_0}.$$

Most már értelmezhetjük a lencse nagyítását, mint a két szög (α és α_0) hányadosát:

$$N_l = \frac{\alpha}{\alpha_0}.$$

Feltételezve, hogy kis szögekről van szó, a szög tangense közelítőleg megegyezik a szög radiánban vett értékével, így:

$$N_l \approx \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_0} = \frac{K/k}{T/d_0} = \frac{T/t}{T/d_0} = \frac{d_0}{t}.$$

t nem lehet akármilyen kicsi, mert ahhoz, hogy a tárgyat élesen lássuk, szükséges, hogy a kép távolabb legyen tőlünk a tisztánlátás távolságánál, azaz $|k| > d_0$ legyen. (A látszólagos képalkotásnál $k < 0$.) Fejezzük ki (5.5)-ből $1/t$ -t:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{k}.$$

Mivel a tisztán látáshoz szükséges, hogy $k < -d_0$ legyen, ezért

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{f} + \frac{1}{d_0},$$

amit a nagyítás előző formulájába beírva:

$$N_l < d_0 \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{d_0} \right) = \frac{d_0}{f} + 1.$$

Az egyszerű lencse maximális nagyítása tehát:

$$N_{l,m} = 1 + \frac{d_0}{f}. \quad (5.9)$$

Érdekes, hogy ez nagyítás függ a tisztánlátás távolságától, azaz kissé személyfüggő. Például kisgyerekek esetén $d_0 = 15$ cm is előfordulhat, azaz az ő számukra a nagyítás kisebb, mint egy felnőtt esetén, akinek 25 cm a tisztánlátási távolsága.

Amikor tehát egy boltban kapható nyeles nagyító lencsére az van írva, hogy 5-szörös nagyítású, akkor ez az előzőek szerint $f = 6,25$ cm-es fókusz távolságot jelent. ($d = 25$ cm-rel számolva.)

Felmerülhet az az ötlet, hogy vegyünk egy $f = 1$ mm fókusz távolságú lencsét, és ezzel, mint egyszerű lencsével 251-szeres nagyítás érhető el. Ez elvileg így is van, a gyakorlatban azonban ez számtalan ok miatt

nem kivitelezhető. Például ha egy ilyen lencsét szemünk elé tartva akar-nánk használni, annak átmérője legalább szemlencsénk 8 mm-es méretét meg kellene haladnia. Olyan lencse viszont, melynek fókusztávolsága nyolcada az átmérőjének nem készíthető erős torzítás, színezés és egyéb, a képet tönkretevő torzítások nélkül. Másik ok: kezünk legkisebb reme-gése használhatatlanná tenné az így kapott képet. A gyakorlatban ezért 15–20-szorosnál erősebb nagyítást egyszerű nagyítólencsével nem szokás alkalmazni.

5.7. példa: Mekkora fókusztávolságú lencse szükséges, ha egyszerű nagyító üzem-módban 8-szoros nagyítást szeretnénk vele elérni?

Megoldás: (5.9) átrendezésével a fókusztávolság kifejezhető:

$$f = \frac{d_0}{N_l - 1}$$

Ide $d_0 = 0,15$ m-t és $N_l = 8$ -at beírva:

$$f = 0,0214 \text{ m} = 21,4 \text{ mm}$$

adódik.

Tehát kb. 21 mm-es fókusztávolság szükséges a nyolcszoros nagyításhoz.

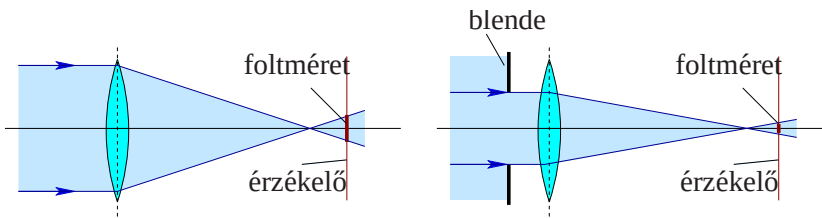
5.7.3. A fényképezőgép

Az egyszerű fényképezőgépekben egy lencse, a jobb minőségűekben egy lencserendszer képezi le a tárgyakat a fényképezőgépben levő fényérzé-keny részre. A hagyományos fényképezőgépekben a fényérzékeny rész egy speciális anyagú film, melynek anyaga a beeső fény hatására kémiai változásokat szenved el, amit azután az előhívásnak nevezett kémiai folya-matban láthatóvá teszünk és rögzítünk. A mostanában elterjedő digitális fényképezőgépekben a kép érzékelése speciális elektronikával történik, mely a fénylektromos hatás segítségével érzékeli pontról-pontra a beeső fény intenzitását (több hullámhossztartományban is, hogy színes képet alkothassunk.)

A fényképezőgép élesre („fokuszálás”) állítása az objektív és az érzékelő távolságának változtatásával történik. Ezzel az a cél, hogy a tárgy éles képe épp az érzékelőre kerüljön, azaz tulajdonképp a tárgy távolságához tartozó képtávolságba kell helyezni a lencsét (objektívet) az érzékelőtől. Ezt a fentebb tanult $1/f = 1/k + 1/t$ törvény alapján tehetjük meg. Látszik, hogy rögzített fókusztávolság esetén a közelebbi tárgyakhoz (t csökken) nagyobb objektív-érzékelő távolság tartozik (k nő). Ez a kapcsolat egyáltalán nem

lineáris: ha $t \gg f$, akkor t -től függetlenül $k \approx f$, azaz egy bizonyos távolság felett már nem kell az élesre állítással törődni, csak $k = f$ -et beállítani. (Azaz „végtelenre fókuszálni”). Közeli tárgyak esetére viszont k erősen függ t -től, így ha kicsit is hibázunk a fókuszálásban, a kép életlen lesz.

Fontos paraméter az objektív átmérője is. Első pillanatra azt gondolnánk, minden körülmények közt a minél nagyobb objektív-átmérő kívánatos, mert az több fényt gyűjt be és a felbontóképesség is nagyobb. Könnyű azonban belátni, hogy nagy objektívátmérő esetén a kissé félrefokuszált kép életlenebb lesz, mint kisebb objektívátmérő esetében. (Lásd az 5.29. ábrát.)



5.29. ábra. A mélységélesség és a lencseátmérő kapcsolata.

Természetesen nem az a megoldás, hogy különböző átmérőjű objektíveket cserélgetünk a fényképezőgépen, hanem hogy a fény útjába változtatható méretű lyukat (blendét) helyezünk, ami igényünknek megfelelően csökkenti a hatásos objektívátmérőt.

Már ebből az egyszerű áttekintésből is látszik, mennyire összetett a jó fénykép készítése: nagy objektívátmérő esetén fényesebb a kép, de a nem pontosan fókuszált tárgyak képe életlenebb. A fényképezni kívánt témától függ, mekkora életlenedés engedhető meg a különböző, fényképezett tárgyak között. Ráadásul nagy objektívátmérőnél az objektív kisebb tervezési vagy gyártási hibái is erősebben jelentkeznek. Ha kicsire kell venni az objektívátmérőt a blendével, kevesebb fény jut az érzékelőre, amit esetleg csak hosszabb ideig tartó fénygyűjtéssel (exponálással) ellensúlyozhatunk, de ekkor félő, hogy a tárgy vagy maga a fényképezőgép elmozdul a felvétel alatt, életlenné téve a képet.

Látszik tehát, mennyi optikai ismeretet igényel, hogy a fényképezés legalapvetőbb fogalmait is megértsük.

5.8. példa: Fényképezőgépünk objektívje 35 mm fókusztávolságú. Ezt max. 38 mm-re tudjuk eltávolítani a filmtől az élességszabályzóval.

Legalább milyen távol kell lenni a tárgynak a lencsétől, hogy éles legyen a kép? Ha egy tárgyat a lehető legközelebből fényképezünk, mekkora része fér rá a 24 mm-es filmkockára?

Megoldás: Éles képet akkor kapunk, ha a lencse és a film távolsága épp a képtávolság, azaz feladatunkban a maximális képtávolság:

$$k_{max} = 38 \text{ mm.}$$

Az (5.5) törvényből ($1/f = 1/k + 1/t$) nyilvánvaló, hogy a legkisebb tárgytávolság épp a legnagyobb képtávolságnál áll fenn, ezért a t_{min} minimális tárgytávolságra igaz, hogy:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k_{max}} + \frac{1}{t_{min}},$$

ahonnan:

$$t_{min} = \frac{k_{max}f}{k_{max} - f} = 443 \text{ mm}$$

(5.6) szerint $K/T = k/t$, ahol $K = 24 \text{ mm}$. Innét a keresett tárgyméret, ami ráfér a legközelebből készített képre:

$$T = K \frac{t_{min}}{k_{max}} = 280 \text{ mm.}$$

5.9. példa: Egy digitális fényképezőgép képe a hosszabbik oldal mentén 2200 képpontot tartalmaz. Ezzel a géppel tudunk olyan beállítással is képet készíteni, amikor ebbe a hosszabbik oldalba egy 20° -os látószögű terület fér bele.

Legfeljebb mekkora lehet a lencsén való fényelhajlást jellemző φ szög, ha nem akarjuk, hogy az elhajlás miatt életlen képet kapjunk? Legalább mekkora objektívtávmérő kell ennek biztosításához a teljes látható tartományban?

Megoldás: A feladat szövege szerint a vizsgált beállítások mellett egy képpont

$$\alpha = \frac{20^\circ}{2200} = 0,00909^\circ$$

szögtartományt tartalmaz.

Ha azt szeretnénk, hogy az elhajlás hatása ne látszódjon, akkor az elhajlást jellemző φ szögnek ennél kisebbnek kell lenni, tehát

$$\varphi < 0,00909^\circ \quad (= 0,55').$$

(5.7) szerint

$$1,22 \frac{\lambda}{D} < \sin(0,00909^\circ) = 1,59 \cdot 10^{-4},$$

ahonnan a keresett határ az objektívátmérőre:

$$D > \frac{1,22\lambda}{1,59 \cdot 10^{-4}} = 7690\lambda.$$

Az objektívátmérő tehát legalább 7690-szerese a hullámhossznak. Ha minden látható hullámhosszon teljesíteni akarjuk a feltételt, akkor a legnagyobb, azaz a mélyvörös fény 760 nm-es hullámhosszán is teljesülni kell ennek, így a legkisebb objektívátmérő ebben az esetben:

$$D > 7,6 \cdot 10^{-7} \cdot 7690 = 0,0058 \text{ m} = 5,8 \text{ mm}.$$

Tehát legalább 6 mm-es átmérőjű lencse kell a feltételek teljesítéséhez.

A fényképezésben természetesen más feltételeink is vannak, mint az itt számolt. Például az objektív által begyűjtött fény mennyisége is fontos, ezért egy igazán jó gép ennél nagyobb objektívátmérővel rendelkezik. A megvilágítással kapcsolatos számítások azonban meghaladnák tárgyunk kereteit.

5.7.4. A vetítőgép

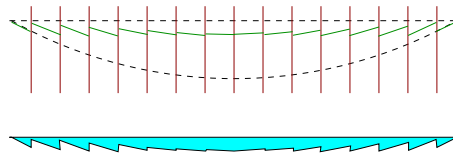
A vetítőgépekben a fény útja bizonyos értelemben fordított, mint a fényképezésben: itt általában egy kicsi tárgyról (pl. diafilm-kockáról, írásvetítő fóliáról) alkotunk egy nagy valódi képet, amit egy vásznon jelenítünk meg.

A vetítőgépek lényege is egy gyűjtőlencse, vagy a hibák kiküszöbölése miatt inkább egy gyűjtőlencse-rendszer, ami az erősen megvilágított tárgy képét vetíti ki. A konkrét esetekben azonban néhány egyéb optikai eszközre is szükség van.

Az írásvetítőben pl. a kivetítendő fóliát vízszintesen kell elhelyezni, hogy ne kelljen speciálisan rögzíteni a lecsúszás ellen, a képnek viszont egy függőleges falfelületen kell megjelennie. Ezt a legtöbb esetben úgy érik el, hogy a fény útjába egy ferdén elhelyezett síktükörrel tesznek, mely 90°-kal elforgatja a képet. Ez a képalkotás lényegét nem befolyásolja, csak a kényelmes irányba tereli a képet.

Külön probléma a vetítőknél a megfelelő erősségű megvilágítás elérése. Ehhez egy erős fényforrás fényét lencsével (esetleg tükörrel) külön fókuszálják. Ennek az úgynevezett „kondenzorlencsének” nincs szerepe a képalkotásban, csak a fényforrás fényét sűríti a kivetítendő tárgyon. Ezért a kondenzorlencsének nem is kell nagyon jó minőségűnek lennie. Ezt meg is figyelhetjük pl. az írásvetítők esetén: a fólia helye alatti részben általában egy nagy kondenzorlencse található, melynek vastagságát és

súlyát úgy csökkentik, hogy az eredetileg szabályos lencse alakot lépcsőzetesen összenyomják (5.30. ábra), ami természetesen nagy hibát okoz a leképezésben, de kondenzorlencseként, pontosabban „kilapított” formában kondenzorlemezként a minőség elfogadható.



5.30. ábra. Kondenzorlemez alakjának származtatása egy lencséből.

A vetítőgépek méretcsökkenése az utóbbi időben az alkalmazások miatt felgyorsult, de még nagy tartalékok állnak rendelkezésre e téren. A méretcsökkenés elvi határát ugyanis csak a vetítőlencse szélein történő fényelhajlás jelenti, ami már egy 5–10 mm lencseátmérő esetén is elegendő felbontást biztosít mondjuk egy nagyfelbontású számítógép- vagy DVD kép kivetítésére. Megfelelő fényerős képelőállítás és a járulékos technikai problémák (pl. hűtés) megoldása esetén nincs elvi akadálya gyufásdoboz nagyságú vetítőgépek készítésének. Ezek megjelenése egy vetélytársa lehet a hagyományos TV- és monitor készülékeknek.

5.10. példa: Olyan helyen kell vetítést rendezni diavetítővel, ahol a vetítőlencse és a vászon távolsága 9 m. A 36 mm-es diakockák képe 3 m-es kell hogy legyen, hogy mindenki jól lássa a képet.

Mekkora legyen a vetítőlencse fókusztávolsága? Milyen messze legyen a lencse a filmtől?

Megoldás: Éles képalkotáskor a kép épp a vásznon keletkezik, azaz a lencse és a vászon 9 m-es távolsága a képtávolság: $k = 9$ m.

A szövegben a tárgy (a diakocka) és a kép mérete is adott, a szokásos jelölésekkel: $T = 0,036$ m ill. $K = 3$ m.

A lencse és a film távolsága az ismeretlen t tárgytávolság. De ez (5.6) alapján ($K/T = k/t$) könnyen kifejezhető:

$$t = k \frac{T}{K} = 0,0108 \text{ m} = 108 \text{ mm}.$$

A képalkotásra vonatkozó (5.5) összefüggésből ($1/f = 1/k + 1/t$) az ismeretlen fókusztávolság kis számolással kifejezhető:

$$f = \frac{tk}{k+t} = 0,1067 \text{ m} = 106,7 \text{ mm}.$$

5.11. példa: Egy írásvetítő lencséje 40 cm fókusztávolságú. Azt akarjuk, hogy ez egy 21 cm széles fóliáról 3,2 m széles éles képet adjon a vásznon.

Milyen messze tegyük a vetítőt a vászontól? Milyen messze lesz ekkor a lencse a fóliától?

Megoldás: A szokásos jelölésekkel a feladat adatai:

$$f = 0,4 \text{ m}, \quad T = 0,21 \text{ m}, \quad K = 3,2 \text{ m}$$

A leképezés két törvénye (5.5) és (5.6):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}, \quad \frac{K}{T} = \frac{k}{t}.$$

Az előző feladatoktól eltérően az előző két egyenlet mindegyike 2-2 ismeretlent tartalmaz, így ezeket együtt, egyenletrendszerként kell megoldanunk.

Fejezzük ki pl. a másodikból t -t:

$$t = k \frac{T}{K}$$

és írjuk ezt be az elsőbe:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{K}{kT} = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{K}{T} \right).$$

Innen már a képtávolság kifejezhető:

$$k = f \left(1 + \frac{K}{T} \right) = 6,50 \text{ m}.$$

Ezt t fenti kifejezésébe beírhatjuk:

$$t = k \frac{T}{K} = f \left(1 + \frac{K}{T} \right) \frac{T}{K} = f \left(\frac{T}{K} + 1 \right) = 0,426 \text{ m}.$$

A vetítőgépet tehát olyan helyre kell tennünk, ahol lencséje 6,5 m-re van a vászontól, és a lencse ekkor 42,6 cm-re van a fóliától.

Tanulságos ez a feladat, mert valós életből vett adatokkal dolgozik, és átgondolva a megoldás menetét észrevehetünk több olyan dolgot, amit a valóságban is megfigyelhetünk. Pl. látszik, hogy ha nagyobb képméretet akarok, nagyobb képtávolság kell, ami viszont kisebb tárgytávolságot jelent. Nagyobb képet tehát a vetítő vászontól való távolításával kaphatunk, de ekkor a lencsét kissé közelebb kell vinni a kivetítendő fóliához, amire az élességszabályzó kerék ad módot.

5.7.5. Optikai háttértárolók optikája

Az optikai tárolókban a hordozóanyag egy optikai tulajdonsága változik helyről-helyre és ez hordozza a tárolt információt.

A hagyományos **CD-lemezek** esetén ez egy visszaverő felület fényhullámhossz negyedrésze nagyságrendű domborodó mintáját jelenti. A beeső, majd onnan visszaverődő fény így kb. fél hullámhossznyi útkülönbséggel érkezik vissza a kibocsátás helyére, ahol egy fix referenciasugárral interferáltatva az erősítés vagy kioltás annak megfelelően történik, hogy a visszaverő felület az adott helyen sima vagy kidomborodó volt.

Az írható és újraírható CD- és DVD lemezek esetében nincs ilyen domborodó felület, hanem egy fix visszaverő réteg van, melyet speciális műanyag réteg von be. Az íráskor egy erős lézer a bevinni kívánt információnak megfelelően jobban vagy kevésbé felmelegíti a műanyag réteget, melynek olyan speciális tulajdonsága van, hogy felmelegítve törésmutatóját kissé megváltoztatja. A megváltozott törésmutató fix frekvencia esetében megváltozott hullámhosszat jelent, ami a visszavert sugár fázisváltozását eredményezi, amit az eredeti CD-hez hasonlóan interferenciával lehet megvizsgálni.

Mindebből látszik, hogy az írható CD lemezek tartalmát hőhatás vagy a műanyag réteg öregedése tönkre teheti, míg az eredeti CD kevésbé érzékeny ezekre a behatásokra.

A **magnetooptikai lemezek** esete ezektől különbözik: itt egy mágneses felületet tapogat le egy fókuszált, polarizált fénynyaláb. A visszavert fény polarizációs síkja a letapogatott felület mágnesezettsége függvényében kissé elfordul, és ez teszi lehetővé a leolvasást.

Érdekes optikai probléma, hogyan lehet egyáltalán az optikai háttértárolók esetében megfelelően kicsi méretű letapogató és író fénysugarat létrehozni. A diszperzió és a fényelhajlás ugyanis egyaránt az ellen dolgozik, hogy igen kicsi pontba tudjuk egy fényforrás fényét fókuszálni. A nagyon kis helyre való fókuszálást az alábbi módon érik el az optikai adattárolókban:

- Nagyon egyszínű és párhuzamos nyaláb használata. Ez a mai gyakorlatban lézer használatát jelenti, mert azok fénye ilyen. (Lásd a lézerekről szóló fejezetben.)
A párhuzamosság az elemi geometriai optikai megfontolások miatt szükséges, az egyszínűség pedig azért, hogy a diszperzió hatása elhanyagolható legyen.
- A nyaláb keresztmetszetéhez képest rövid fókusztávolság használata. A fentebb levezetett (5.8) összefüggés az elhajlási korong sugarára:

$r_e = 1,22\lambda \cdot f/D$. Az f/D arány csökkentésével ez is csökkenthető.

- Kisebb hullámhossz használata. Az előző formulából ennek a szerepe is látszik. Fizikai okokból régebben csak nagyobb hullámhosszúságú, vörös tartományban működő lézerek voltak előállíthatók. Az első CD-k esetén ez 780 nm volt, a DVD-k esetén ez lement 655 nm-re, és mára már létezik sorozatban gyártható kék színű lézer is, melynek hullámhossza 400 nm körüli, így pusztán emiatt felére csökken az elhajlási korong átmérője, azaz negyedére a területe, így adott területen négyszer annyi letapogatható pont fér el. Az új optikai tárolók ennek megfelelően kék fényt használnak.

Természetesen mindez csak egy gyors betekintés az optikai tárolók működési elvébe. A valóságban sok technikai probléma megoldása szükséges a megfelelő működéshez, melyekre itt nem tudunk kitérni. Jól látszanak viszont az elmondottakból, hogy alapos hullámoptikai ismeretek nélkül ezen berendezések működése nem volna érthető.

5.12. példa: Egy fényforrás párhuzamos, egyszínű, 680 nm hullámhosszúságú fényt bocsát ki. Ezt a fényt egy 3 mm átmérőjű, 30 mm fókusztávolságú lencsével fókuszáljuk.

Mekkora lesz annak a területnek az átmérője, melyre a fókuszált fény túlnyomó többsége esik?

Megoldás: Az előzőek szerint itt az elhajlási korong átmérőjét kell meghatároznunk:

$$d_e = 2r_e = 2 \cdot 1,22 \cdot 6,8 \cdot 10^{-7} \frac{0,03}{0,003} = 1,66 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,0166 \text{ mm}.$$

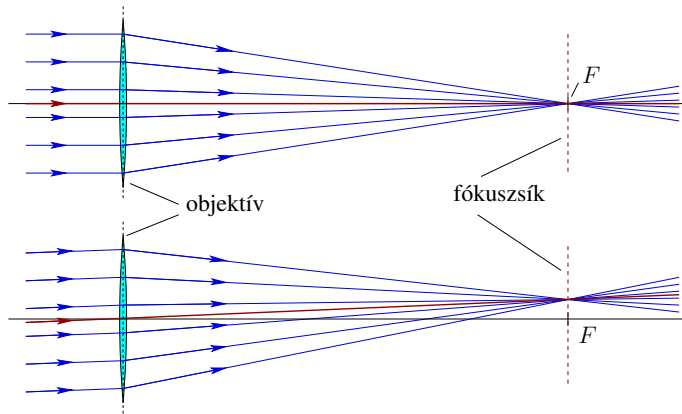
Egy ilyen esetben tehát majdnem két századmilliméter átmérőjű az a terület, amelyre széteszlik a fókuszált nyaláb.

5.8. Összetett képalkotó eszközök

5.8.1. A távcsövek működése

A távcsövek működésének az a specialitása, hogy ezekkel olyan tárgyakat vizsgálunk, melyek messzire vannak. A tárgyakról jövő fény először egy gyűjtőlencsével vagy homorú tükörrel találkozik, ami valódi képet alkot róla. Ezt, a tárgy (objektum) fényét először leképező lencsét vagy tükröt **objektívnek** nevezzük. A valódi képpel többféle dolog történhet, amiről rövidesen szólunk, de előbb vizsgáljuk meg ennek elhelyezkedését és méretét.

Az elmondottak szerint a tárgy valódi képe lényegében fókusz távolságnyra lesz az objektívtől, hisz ha a szokásos jelölésekkel $t \gg f$ (messze van a tárgy), akkor az $1/f = 1/k + 1/t$ törvényben $1/t$ elhanyagolható $1/f$ mellett, így $f \approx k$. A kép tehát az objektív tengelyére merőleges, a fókuszponton átmenő síkban, az úgynevezett **fókusz síkban** keletkezik. Ezt mutatja be az 5.31. ábra egy tengelyen levő és egy attól eltérő irányban látszó tárgy esetére.



5.31. ábra. Távcső objektívjének képalkotása.

Ez az ábra hasznos, de a sok berajzolt vonal miatt áttekinthetetlen. Ezért a továbbiakban csak a lencse közepén átmenő sugarat rajzoljuk be, észben tartva, hogy a többi sugár a fókusz síkban találkozik ezzel. (Ezt már itt is kiemeltük piros színnel.)

A képméretet könnyen kifejezhetjük a $K/T = k/t$ összefüggésből:

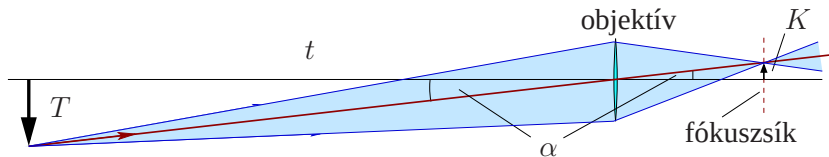
$$K = k \frac{T}{t} \approx f \frac{T}{t}.$$

A probléma az, hogy azokban az esetekben, amelyekben távcsövet használunk, többnyire nem ismert sem a tárgytávolság, sem a tárgy mérete. A tárgy látószöge viszont ismert lehet, így ha a tárgy egyik vége a tengelyen van, akkor a másik vég irányának és a lencse tengelyének szöge az 5.32. ábra szerint:

$$\tan \alpha = \frac{T}{t}.$$

Így viszont:

$$K = f \tan \alpha.$$



5.32. ábra. Távcső objektívjének képalkotása.

A távcső tehát egy α látószögű tárgyról ilyen méretű képet állít elő a fókusz síkban.

5.13. példa: A telihold $0,5^\circ$ látószög alatt látszik a Földről. Mekkora méretű képet alkot erről egy 1 m fókusztávolságú objektív?

Megoldás: Egyszerű behelyettesítéssel az előzőek szerint:

$$K = f \tan \alpha = 1 \cdot \tan 0,5^\circ = 0,0087 \text{ m} = 8,7 \text{ mm}.$$

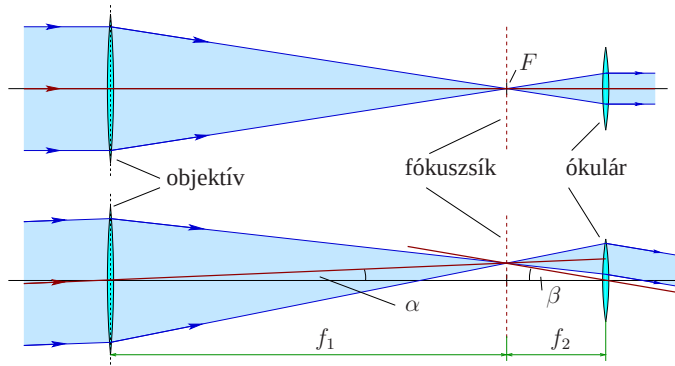
A távcső fókusz síkjában kialakuló képet fotóanyag vagy elektronikus érzékelő segítségével akár közvetlenül is rögzíthetjük, de ha közvetlen nézegetésre akarjuk felhasználni, akkor tovább kell nagyítani, mert ez általában elég kicsi lesz. (Lásd az előző példát.) A legegyszerűbb esetben ez a tovább nagyítás egy másik gyűjtőlencsével történik, aminek a szokásos elnevezése kissé régies hangzású: **ókulár**.

A legegyszerűbb távcsőnek tehát az objektívje és az ókulárja egyaránt egy-egy gyűjtőlencse. Ezt a távcsövet **Kepler-távcsőnek** nevezzük.

A Kepler-távcső normál működése során az ókulárral, mint egyszerű nagyítólencsével nézzük a tárgyról kialakult képet, azaz a tárgy látszólagos képét vizsgáljuk. Legkényelmesebb a szemünknek akkor, ha az így előállított virtuális kép tőlünk igen távol van, azaz az ókulár fókuszpontja közelítőleg az objektív fókusz síkjára esik, mert ekkor az ókulár által létrehozott kép igen távoli, de nagy méretű lesz. (Ha ugyanis $t < f$, de $t \approx f$, akkor $1/f = 1/k + 1/t$ miatt $|k| \gg f$, viszont $|K| = |k|T/t \approx |k|T/f \gg T$.) Valójában ugyanis szemünk a tárgyak szögméretét érzékeli, azaz egy kétszer messzebb levő, de kétszer akkora tárgyat ugyanakkorának látunk.

A Kepler-távcső normál üzemmódjában tehát az objektív és az ókulár fókuszpontja egybeesik. Ebben az esetben rajzoltuk be két párhuzamos nyaláb sorsát az 5.33. ábrán. Az áttekinthetőség kedvéért csak a nyaláb szélső sugarait, rajzoltuk be kékkel, a köztes sugarak által bejárt területet

halványan satíroztuk és a két lencse lencseközépnek megfelelő nevezetes sugármenetét emeltük ki pirossal.



5.33. ábra. Két párhuzamos nyaláb útja a Kepler-távcsőben

A tanultak alapján könnyen bizonyíthatjuk a következőket:

- Az igen távoli tárgyról párhuzamosan érkező nyalábok párhuzamosan hagyják el a Kepler-távcsövet, ha a két lencse fókuszpontja egybeesik.
- Az ábrán alulról érkező fénynyaláb a szemlencse után felülről érkezik. Ez azt jelenti, hogy egy, az optikai tengely alatt levő pontot a szemlencsébe nézve felül látunk, azaz fordított állású képet kapunk.
- A belépő nyaláb kisebb szöget zár be az optikai tengellyel, mint a kilépő. Mivel az optikai tengely irányában levő pontszerű fényforrást a távcsőben is az optikai tengelyen látunk (5.33. ábra), ezért egy olyan fényforrás képe, amely nem a tengelyen van nagyobb szögtávolságra látszik a tengelytől, mint ténylegesen van. Ez viszont azt jelenti, hogy a távcső nagyít.

Bebizonyítható, hogy nemcsak a tengely és a többi irányból érkező fénysugarak szöge növekszik meg a távcsövön való áthaladás után, hanem tetszőleges két pont látószöge N -szeresére változik. Ezt az N számot **nagyításnak** nevezzük.

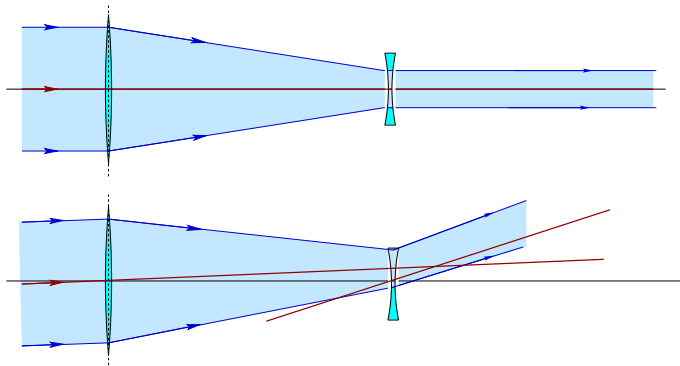
Az 5.33. ábra alapján könnyen bebizonyítható, hogy kis szögek esetén ez a nagyítás

$$N = \frac{f_1}{f_2}$$

ahol f_1 az objektív, f_2 az okulár fókusz távolsága.

Ez az összefüggés csak az optikai tengellyel kis szöget bezáró sugarak esetére lesz igaz. Nagyobb szögekre a távcsövek torzítanak. Ennek és az egyéb torzításoknak csökkentésére az okulárt a gyakorlatban szinte mindig több lencséből összetett rendszer helyettesíti.

Nem a Kepler-távcső az egyetlen távcsőtípus. A történetileg első távcső, az ún. **Galilei-távcső** vázlatát az 5.34 ábrán láthatjuk. Itt az okulár szórólencse. A sugármenetek hasonlóan végigkövethetők, mint a Kepler-távcsőnél, itt ezt terjedelmi okokból nem tesszük meg. Bebizonyítható, hogy a Galilei-távcső egyenes állású képet ad, valamint az, hogy nagyítása a két fókusz távolság hányadosa.

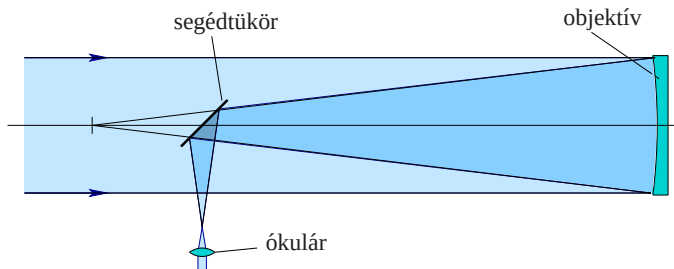


5.34. ábra. Galilei-távcső.

A Galilei-távcső tehát nem fordítja meg a képet, mint a Kepler-távcső és rövidebb is annál: mégis a gyakorlat azt mutatja, hogy jó minőségű képet nagy nagyítással nem lehet kapni vele. (Nehezen küszöbölhetők ki a képtorzítási és a színezési hibák.) Ezért a legfeljebb 5–6-szoros nagyítású színházi vagy játék látcsöveket leszámítva minden távcső alapvetően Kepler-távcső jellegű, vagyis az okulár gyűjtőlencse.

A legnagyobb csillagászati távcsövek objektívje azonban nem lencse, hanem homorú tükör. A fentiek szerint ennek képalkotási tulajdonságai lényegében megegyeznek a lencséével, viszont sok szempontból előnyösebb. Pl. a tükörnek nincs meg a fent említett színező hibája, könnyebb elkészíteni, ezen kívül a tükör hátulról alátámasztható, így nem törik el a saját súlya alatt. A tükör egyetlen hátránya, amint azt már fentebb említettük,

hogy azonos oldalon képződik a kép, mint a tárgy, ezért segédtükrökkel kell gondoskodni a fény oldalra vagy hátra való tereléséről, ahol azután az okulár vagy a fényérzékeny film illetve elektronikus érzékelő elhelyezhető. Az első ilyen távcsövet Isaac Newton tervezte és építette. Ebben egy sík segédtükör vetíti ki oldalra az objektívként szolgáló homorú tükör képét és itt helyezkedik el az okulár is. (Lásd 5.35. ábra.)



5.35. ábra. Newton-rendszerű tükrös távcső vázlata.

5.8.2. A távcsövek felbontóképessége

Eddig a távcsövek működését a geometriai optika törvényszerűségei alapján vizsgáltuk. Azonban tudjuk, hogy a geometriai optika csak közelítő értelemben igaz, pontos számításokhoz figyelembe kell venni a fény hullámtulajdonságát is.

A fény hullámtulajdonságának legfontosabb hatása a távcsövek esetén, hogy a fény az objektív szélein elhajlik, így egy kevés fény a geometriai optikából számolt iránytól eltérően is megy, ahogy azt az 5.6.3. fejezetben már tárgyaltuk. Ennek megfelelően pontszerű fényforrások képe nem lesz pontszerű, hanem egy kissé el fog kenődni. Ez pedig korlátozza a távcső teljesítőképességét, hisz pl. két csillagot vagy a kiterjedt tárgy két közeli pontját nem látjuk külön, ha ezek az elhajlási korongok egymásba lógnak. Másrészt, nagy nagyítás esetén esetleg megpillanthatjuk magukat az elhajlási korongokat, azaz a pontszerű források helyett foltokat látunk, ami a kép élességét csökkenti.

Ezt az élességcsökkenést a fentebb, az (5.7) egyenletben megadott szögérték jellemzi, melyet a távcső **felbontóképességének** nevezzük. Az elnevezés oka, hogy ez a szög mutatja meg, hogy mekkora az a legkisebb látószög, amely alatt levő két pontot meg tudunk különböztetni a távcsőben.

A fényelhajlásról szóló fejezetben láttuk, hogy normál méretű lencsék felbontóképessége igen kicsi, a fok törtrésze. Nézzük meg, milyen felbontóképességű egy távcső azon a hullámhosszúságon, ahol az emberi szem a legérzékenyebb, azaz 550 nm-nél. Írjunk be $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$ m-t az (5.7) egyenletbe:

$$\sin \varphi = 1,22 \frac{5,5 \cdot 10^{-7}}{D} = \frac{6,71 \cdot 10^{-7}}{D}.$$

Igen kis szögek esetén radiánban mérve $\sin \alpha \approx \alpha$. Ezt kihasználva és átváltva a felbontóképességet radiánról ívmásodpercre a következő, a gyakorlati életben való becslésre alkalmas formulát kapjuk:

$$\varphi = \frac{6,71 \cdot 10^{-7}}{D} = \frac{6,71 \cdot 10^{-7} \cdot 180/\pi \cdot 60 \cdot 60}{D} = \frac{0,138''}{D}. \quad (5.10)$$

Pl. egy $D = 7$ cm átmérőjű objektív felbontóképessége kb. $2''$. Ez azt jelenti, hogy 1 km távolságban $1000 \text{ m} \cdot \tan 2'' \approx 1$ cm az a távolság, amennyire levő két pontot még épp fel tudunk bontani a távcsővel.

Ez természetesen csak egy elvi határ. A gyakorlatban a lencse hibája, a levegő remegése és sok más egyéb okból ez az érték nem érhető el.

Az eddigiekből következően nem alkalmazhatunk akármekkora nagyítást egy távcsőnél. Az emberi szem felbontóképessége ugyanis kb. $\varphi_0 = 60''$. Amennyiben a nagyítás akkora, hogy az elhajlási korong felnagyított képe nagyobb ennél, akkor a pontszerű fényforrásokat korongnak látjuk, azaz a kép elmosódik. Ez tehát olyan N_{max} nagyításnál következik be, amire $N_{max}\varphi = \varphi_0$ ahonnan az elvi maximális nagyítás:

$$N_{max} = \frac{\varphi_0}{\varphi} \approx 430D. \quad (5.11)$$

Néha szokás ennek kétszeresét esetleg —nagyon ritkán— háromszorosát használni. Olyan esetekben történik ez, amikor a kép nagyon kicsi részletei érdekesek, így ugyanis szemünk kényelmesen fel tudja bontani a közeli pontokat is.

Sokkal nagyobb nagyítás viszont homályos képet eredményez, amiből semmilyen alak nem áll össze, csak egy csomó „pacát” látunk.

Bár nem a fény hullámtulajdonságának következménye, de a teljeség kedvéért megemlítjük, hogy létezik egy olyan nagyításérték, aminél kisebbet nem célszerű használni. Ennek oka a következő:

Az 5.33. ábrán látható, hogy ha az objektív átmérője D , akkor a belépő D szélességű sugárnyaláb $d = D \cdot f_2/f_1 = D/N$ szélességűként lép ki a távcsőből. Amennyiben ez szélesebb, mint amit szemünk be tud fogni, a fény jelentős része elvész.

Éjszaka az ember pupillája (az a rész, ahol a fény a szemünkbe léphet) maximálisan 8 mm átmérőjűre tágulhat ki. Ezért pl. csillagászati távcsövek esetén teljesülnie kell a $d < 8$ mm egyenletnek, azaz innét $N > D/8$ mm adódik. Éjszakai használat esetén tehát az a nagyítás, aminél kisebbet nem érdemes használni:

$$N_{min} = \frac{D}{8 \text{ mm}}. \quad (5.12)$$

Pupillaméretünk nappali fényben ennél az értéknél kisebb, verőfény esetén 2–3 mm. Ekkor viszont úgys van elég fény, tehát elveszhet belőle valamennyi. Az ókulár által összegyűjtött fényre tehát főként éjszaka vagy félhomályban kell vigyázni, amikor a pupillaméret a fenti 8 mm közelében van.

5.14. példa: Egy vadásztávcső objektívje 50 mm átmérőjű. Mennyi az ilyen objektívvel elérhető maximális- illetve a minimális célszerű nagyítás?

Megoldás: A maximális nagyítás (5.11) szerint:

$$N_{max} = 430 \cdot 0,05 = 21,5.$$

A minimális nagyítás (5.12) alapján:

$$N_{min} = \frac{50 \text{ mm}}{8 \text{ mm}} = 6,25.$$

Ez a két érték összecseng azzal, hogy a boltban kapható 50 mm objektívátmérőjű távcsövek közt szokásos nagyítások: 7, 10, 15 és 20-szoros, azaz ezen határok között maradnak az értékek.

5.15. példa: Tőlünk 1,5 km-re elmenő autók rendszámát szeretnénk leolvasni egy távcső segítségével. A rendszám akkor olvasható biztonságosan, ha 1 cm-es részleteket el tudunk különíteni. Legalább mekkora objektívátmérő és nagyítás kell ehhez?

Megoldás: Az 1 cm-es távolság 1,5 km-ről

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{1 \text{ cm}}{1,5 \text{ km}} = 0,000382^\circ = 1,38''$$

szög alatt látszik.

Távcsövünk felbontóképessége tehát ennél jobb kell legyen. (5.10) szerint

$$1,38'' = \frac{0,138''}{D},$$

ahonnan

$$D = 0,10 \text{ m}.$$

A szükséges nagyítás abból határozható meg, hogy a φ szög alatt látszó részleteket az emberi szem felbontóképességét jellemző $\varphi_0 = 60''$ értékig kell nagyítani, azaz:

$$N\varphi = \varphi_0,$$

ahonnan

$$N = \frac{\varphi_0}{\varphi} = \frac{60''}{1,38''} = 43,5.$$

Legalább 10 cm-es objektívátmérő és 43,5-szeres nagyítás szükséges tehát, hogy 1,5 km-ről leolvashassuk a rendszámokat.

A feladat eredménye hihető. A gyakorlatban azonban 1,5 km-es távolságon a légkör remegése vagy egy enyhe páráság is számottevően rontja a láthatóságot. Ezért bármilyen jó is a távcsövünk, kedvező légköri viszonyok is szükségesek a példabeli feladat megoldásához.

5.16. példa: Egy $f_1 = 60 \text{ cm}$ fókusz távolságú, $D = 8 \text{ cm}$ átmérőjű lencséből szeretnénk Kepler-távcsövet készíteni. Két szemlencsét szeretnénk hozzá venni, úgy, hogy egyikkel a maximális nagyítást (amikor még nem éleltenedik el a kép), a másikkal pedig az éjszakai fényben minimálisan célszerű nagyítást kapjuk.

Milyen fókusz távolságú szemlencsét kell beszereznünk?

Mekkora az a legkisebb távolság a Holdon, amekkora távolságban levő két pontot még éppen külön tudunk választani a távcsővel?

Megoldás: A maximális nagyítás a fentiek szerint

$$N_{max} = 430 \cdot D = 34,4.$$

Az ehhez tartozó szemlencse fókusz távolsága könnyen kifejezhető: $f_2 = f_1/N = 1,74$ cm. Ez tehát a maximális nagyításhoz tartozó okulár fókusz távolsága.

A fentiek szerint a minimálisan célszerű nagyítás

$$N_{min} = \frac{80 \text{ mm}}{8 \text{ mm}} = 10.$$

Az ehhez tartozó okulár fókusz távolsága pedig nyilván $60 \text{ cm}/10 = 6$ cm.

Távcsövünk felbontóképessége (5.10) szerint

$$\varphi = \frac{0,138''}{D} = 1,725''.$$

Mivel a Hold átlagosan 380 000 km-re van a Földtől, ezért a Hold felszínén az ilyen látószögben levő pontok távolsága

$$d = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \tan 1,725'' \approx 3200 \text{ m}.$$

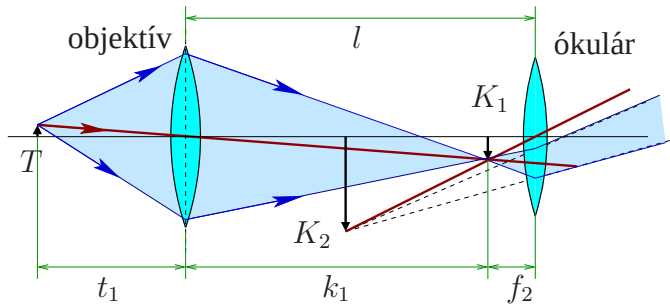
A legkisebb részlet, amit a Holdon ezzel a távcsővel (elvileg) megfigyelhetünk, 3,2 km méretű. (Ez az érték az elvileg elérhető legjobb esetre vonatkozott. A levegő remegése, az optika kis hibái és több más ok miatt a tényleges érték ennél kicsivel nagyobb lesz.)

5.8.3. A mikroszkóp működése

A mikroszkóp – az előbb tárgyalt távcsővel ellentétben – kis méretű, közeli tárgyak tanulmányozására szolgál.

Alapötlete az, hogy a tárgyról az objektívvel egy nagyított valódi képet állítunk elő, amit az okulárral, mint egyszerű nagyítóval nagyítunk tovább. Ezt mutatja az 5.36. ábra. (Ennek nézésekor vegyük figyelembe, hogy a legtöbb mikroszkóp praktikus okokból függőleges tengelyű, de itt az ábra kényelmes elhelyezése miatt, és azért, hogy jobban észrevehetőek legyenek a közös vonások a távcsővel, vízszintes tengelyt használtunk.)

A mikroszkóp tehát az igen kicsi T tárgyról egy nagyított K_1 képet állít elő, amit az okuláron keresztül K_2 -nek látunk. Kérdés, hogyan értelmezhető a nagyítás fogalma mikroszkóp esetére? Nyilván nem egyszerűen a K_2/T hányadosról van szó, mivel ha a K_1 méretű kép az okulár fókuszpontjának közelébe esik, K_2 tetszőleges határig növekszik. Itt ugyanarról van szó, mint amit az egyszerű nagyító lencse esetén már megvizsgáltunk korábban az 5.7.2. fejezetben, hisz az okulár valójában egyszerű nagyítóként működik a mikroszkópban: $N_2 = 1 + d_0/f_2$ -szeresre nagyítja az objektív által létrehozott K_1 méretű valódi képet. (d_0 az emberi szem tisztánlátási távolsága, f_2 az okulár fókusz távolsága.)



5.36. ábra. A mikroszkóp működésének vázlata.

Az objektív pedig $N_1 = K_1/T = k_1/t_1$ -szeres nagyított képet állít elő. Ennek konkrét értéke az objektív f_1 fókusz távolságától és az objektív és az okulár l távolságától függ, hisz K_1 -nek az okulár fókusz síkján belülre kell esni. Egész pontosan: a szemnek akkor kényelmes a mikroszkópot használni, ha K_1 közel az okulár fókusz síkjában van, mert ekkor a szemlélt K_2 kép igen távolinak (de nagy) látszik, ami a szem nyugalmi, távolra néző állapotának felel meg, ezért $k_1 + f_2 = l$.

Az objektív nagyításához tehát a k_1/t_1 hányadost kell meghatároznunk. $1/f_1 = 1/k_1 + 1/t_1$ alapján

$$N_1 = \frac{k_1}{t_1} = k_1 \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{k_1} \right) = \frac{k_1}{f_1} - 1 = \frac{l - f_2}{f_1} - 1.$$

Így a mikroszkóp eredő nagyítása az objektív és az okulár nagyításának szorzataként kiszámolható:

$$N = N_1 \cdot N_2 = \left(\frac{l - f_2}{f_1} - 1 \right) \left(1 + \frac{d_0}{f_2} \right).$$

A gyakorlatban $N_1 \gg 1$ és $N_2 \gg 1$, így az előző képletben a $+1$ és -1 -es tag elhanyagolható. Így viszont a nagyítás közelítő formulája:

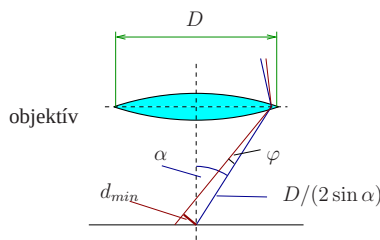
$$N \approx \frac{l - f_2}{f_1} \frac{d_0}{f_2} = \frac{d_0(l - f_2)}{f_1 f_2}.$$

Láthatjuk tehát, minél kisebb fókusz távolságú lencsákat kell a mikroszkópokhoz használni, ha nagy nagyítást akarunk elérni. A nagyítás elvileg tetszőlegesen növelhető a mikroszkóp l hosszának növelésével. A nagyítás

növelése előtt a gyakorlatban azonban számos korlát áll. Az egyik ezek közül a lencsék torzításával kapcsolatos: igen nagy nagyításnál csak nagyon gondosan megtervezett és pontosan csiszolt lencsékkel lehet torzításmentes, a látómező széle felé is éles képet alkotni. Jelentkezik a diszperzió zavaró színező hatása, amit összetett lencsék segítségével vagy nagyon egyszínű megvilágítással lehet csökkenteni.

Különleges probléma a mikroszkópoknál a megvilágítás kérdése: N -szeres nagyítás N^2 -szeres területre húzza szét a tárgy fényét, így erős nagyításkor speciálisan erős megvilágításra van szükség. Ezt megfelelő, fókuszált megvilágítás segítségével lehet biztosítani.

A távcsövek esetéhez hasonlóan azonban semmilyen módon nem lehet kiküszöbölni a fényelhajlás jelenségét, ami az objektív által alkotott kép felbontóképességét korlátozza. A kör alakú, D átmérőjű objektíven való fényelhajlást jellemző φ szögre igaz, hogy $\sin \varphi = 1,22\lambda/D$. Az objektíven áthaladó sugarak tehát ilyen mértékű szögbizonytalanságot „szereznek” a fényelhajlás miatt. Ez a szög a távcső esetén jó jellemző volt, a mikroszkópnál azonban érdekesebb távolságra átszámolni ezt, azaz feltenni a kérdést: mi az a legkisebb távolság, amelyre levő pontok elkülöníthetők a mikroszkópban.



5.37. ábra. A mikroszkóp felbontásának számításához.

Az 5.37. ábra a mikroszkóp objektívjének környékét ábrázolja. A lencse tengelye környékén elhelyezkedő tárgy a lencse pontjai közül a szélsőktől van a legmesszebb, és az ábra alapján látható, hogy ez a távolság $D/(2 \sin \alpha)$, ahol α az a szög, amely alatt a lencse sugara a tengelyen levő tárgytól látszik. A φ szögbizonytalanság ekkora távolságon

$$d_{min} = \frac{D}{2 \sin \alpha} \tan \varphi$$

távolságbizonytalanságnak felel meg.

Kihasználva, hogy $\varphi \ll 1$, $\tan \varphi \approx \sin \varphi = 1,22\lambda/D$, így:

$$d_{\min} = \frac{D}{2 \sin \alpha} \frac{1,22\lambda}{D}.$$

Ez tehát a legkisebb távolság, melyre levő pontokból érkező fénysugarak φ -nél nagyobb különbségű iránnyal érkeznének a lencse széléhez, tehát továbbhaladásuk után is megkülönböztethetők.

Tehát a mikroszkóp felbontóképessége:

$$d_{\min} = \frac{0,61\lambda}{\sin \alpha}. \quad (5.13)$$

A mikroszkóp felbontóképessége tehát kétféle módon javítható:

- Csökkentjük a hullámhosszat. Kék színben tehát kissé finomabb részletek láthatók, mint vörösben. Szokták azt a trükköt is használni, hogy az objektív és a tárgy közötti részt nem levegővel, hanem nagy törésmutatójú folyadékkal töltik ki. Ebben a törésmutató arányában kisebb a látható fénysugarak hullámhossza, így egy kicsit javítható a felbontás.
- Növeljük $\sin \alpha$ értékét. Mivel a tárgy a mikroszkóp objektívje fókuszpontján kívül kell essen, ezért ez rögzített objektív-átmérő mellett csak úgy lehetséges, hogy a fókusz-távolságot csökkentjük. Ezzel a megoldással az a probléma, hogy a mérethez képest kis fókusz-távolságú lencsákat igen nehéz torzításmentesre készíteni.

A gyakorlatban $\sin \alpha$ 0,5 és 0,8 közötti értékeket szokott felvenni. Ekkor (5.13) szerint $d_{\min} \approx \lambda$, azaz a mikroszkóppal megpillantható legkisebb részlet kb. az alkalmazott fény hullámhosszának felel meg.

Zárásként megjegyezzük, hogy itt csak a mikroszkópok működésének alapvonásaival ismerkedtünk meg. A valóságban egy jó mikroszkóp előállításához a különféle torzítások kiküszöbölésére szolgáló lencserendszerek, a megfelelő megvilágítás, a szórt fények kiküszöbölése, a megfelelő precíziós finommechanikai mozgató és az ember számára kényelmes szög alatt történő betekintés problémáival mind foglalkozni kell. Ezt azonban csak speciális optikai kurzusok keretén belül van mód megtenni.

5.9. Kérdések és feladatok

5.9.1. Elméleti kérdések

1. Hogyan nevezzük a látható fénynél kissé nagyobb frekvenciájú elektromágneses hullámokat? Mondjon példát a mindennapokból, amikor

ennek hatását érzékeljük!

2. Milyen hullámnak nevezzük a 20 m hullámhosszúságú elektromágneses hullámokat?
3. Mit nevezünk tiszta színnek?
4. Rendezze növekvő hullámhossz szerint sorba a következő színeket: sárga, kék, vörös.
5. A víz törésmutatója 1,33, egy üvegfajtáé pedig 1,5. Melyikben megy lassabban a fény?
6. Írja fel a Snellius-Descartes törvényt!
7. Mi a koherenciahossz? Hagyományos fényforrásokra kb. mekkora az értéke?
8. Miért nem láthatunk a hétköznapi életben környezetünkben szabad szemmel fénnel kapcsolatos interferenciajelenségeket?
9. Milyen polarizáltságú egy nyugodt tó felszínéről visszaverődő napfény? Miért? Mikor lehet tökéletesen síkban polarizált ez a fény?
10. Mondjon példát, hogy egy átlagos szobában ülve honnét jut a szemünkbe részben polarizált fény!
11. Miért nem tapasztaljuk a fény hullámtulajdonságainak hatását a hétköznapi méretű tárgyak esetében?
12. Mi történik egy fénysugárral, ha a fény hullámhosszánál sokkal kisebb méretű résen halad át?
13. Mit nevezünk optikai rácsnak?
14. Egy egyszínű fénnel megvilágított optikai rács mögötti ernyőn jól láthatók az erősítési irányoknak megfelelő fényes vonalak. Csökken vagy nő ezek távolsága, ha az optikai rácsot egy olyanra cseréljük, melyen a rések közelebb vannak egymáshoz?
15. A vörös vagy a kék fény első erősítési irányai közül melyik nagyobb szögű azonos optikai rácson való elhajlás esetén? Miért?
16. Egyszínű fénysugár a hullámhossz 100-szorosa átmérőjű kör alakú nyíláson halad át. Milyen képet kapunk a nyílás mögött elhelyezett ernyőn?
17. Létrehozható-e olyan fényforrás, melynek nyalábja tökéletesen párhuzamos? Miért?

18. Milyen körülmények közt alkalmazhatjuk a geometriai optikai közelítést a fény leírására?
19. Mikor beszélünk arról, hogy egy rendszer látszólagos képet alkot egy tárgyról?
20. Két, azonos átmérőjű és anyagú lencse van a kezünkben. A szeleknél mindegyik azonos vastagságú, de az első középen vastagabb, mint a második. Melyiknek nagyobb a fókusz távolsága?
21. A látszólagos vagy a valódi kép vetíthető ki ernyőre? Miért?
22. Miért nem tud a síktükör valódi képet alkotni egy tárgyról?
23. Rajzoljon fel egy olyan esetet, amikor egy gyűjtőlencse valódi képet alkot! Jelölje be mindhárom nevezetes sugármenetet!
24. Rajzoljon fel egy olyan esetet, amikor egy szórólencse látszólagos képet alkot! Jelölje be mindhárom nevezetes sugármenetet!
25. Rajzoljon fel egy olyan esetet, amikor egy homorú tükör látszólagos képet alkot! Jelölje be mindhárom nevezetes sugármenetet!
26. Rajzoljon fel egy olyan esetet, amikor egy domború tükör látszólagos képet alkot! Jelölje be mindhárom nevezetes sugármenetet!
27. Lehet-e egy gyűjtőlencse által alkotott valódi kép pontosan ugyanakkora, mint a tárgy? Mit mondhatunk ekkor a tárgytávolságról?
28. Miért érdemes minél nagyobb átmérőjű lencsét használni a távcsövekben azon kívül, hogy a nagyobb lencse több fényt gyűjt össze?
29. Egy lencsétől folyamatosan távolodik egy tárgy. Hogyan változik valódi képének mérete és távolsága a lencsétől? Miért?
30. Egy írásvetítő éles képet ad a vásznon, de a kép túl kicsi. Közelebb vagy távolabb kell vinni a vászontól? Csökkenteni vagy növelni kell a vetítőlencse és a fólia távolságát? Miért?
31. Igaz-e mindig, hogy ha egy gyűjtőlencse által alkotott valódi kép nagyobb, mint a tárgy, akkor a képtávolság is nagyobb, mint a tárgytávolság? Válaszát indokolja!
32. Mi a fizikai jelentése annak, ha egy gyűjtőlencse képalkotásának számításakor a képtávolság negatívnak adódik?
33. Milyen hullámhosszon a legérzékenyebb az emberi szem?
34. Hogyan oldja meg a szem a különböző távolságú tárgyak éles képének

előállítását?

35. Miért van szükség a vetítógépekben arra, hogy a fényforrás fényét egy külön kondenzorlencsével vagy -lemezzel összegyűjtsük?
36. Hogyan jelentkezik a lencsék diszperziójának jelensége képalkotáskor?
37. Miért van kapcsolat a CD-jellegű adathordozók adatsűrűsége és a használt szín között?
38. Rajzolja fel egy Kepler-távcső fő optikai elemeit!
39. Miért képződik a távcsőben a tárgyak képe közel a fókuszsíkon?
40. Mondjon két fontos okot, amiért a távcsövekben nagyobb átmérőjű objektívet érdemes alkalmazni!
41. Lehetséges-e fénnel működő mikroszkóppal 5 nm méretű tárgyakat vizsgálni? Miért?
42. Két, 5 mm átmérőjű lencsénk van. Az egyik 8 mm, a másik 4 mm fókusz távolságú. Melyik alkalmasabb mikroszkóp objektívjének? Miért?

5.9.2. Kidolgozott feladatok

5.1. feladat: Egy madártoll megfelelően választott részén egyenletes távolságra egyforma, párhuzamos szálak találhatók. Átnézve rajta azt találjuk, hogy a vörös színű fény irányát 3° -kal téríti el az első erősítési irányba. Becsüljük meg ez alapján, milyen távol vannak egymástól a tollat alkotó szálak!

Megoldás: A madártoll ebben az esetben optikai rácsként viselkedik. Az első erősítési irányra alkalmazva az (5.1) egyenletet:

$$\sin \alpha_1 = 1 \frac{\lambda}{a},$$

ahonnan a rések távolsága:

$$a = \frac{\lambda}{\sin \alpha_1}.$$

A feladat szerint $\alpha_1 = 3^\circ$, a vörös fény hullámhossza pedig a 7. táblázat szerint 760 és 625 nm közt van. Egy közepes, 700 nm-es értékkel számolva:

$$a = \frac{7 \cdot 10^{-7}}{\sin 3^\circ} = 1,34 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

A madártoll finom szálai tehát kicsivel több, mint egy századmilliméternyire találhatók egymástól.

5.2. feladat: Egy lámpa 3 m-re van egy fehér falfelülettől. A falon a lámpa valódi képét akarjuk előállítani egy 20 cm fókusz távolságú lencsével.

Hova helyezzük a lencsét, hogy éles képet kapjunk? Mekkora lesz a nagyítás?

Megoldás: A lencse és a lámpa távolsága a t tárgytávolság, a lencse és a fal távolsága pedig a k képtávolság. A feladat szerint ezek egyikét sem ismerjük, csak az összegüket, azaz a lámpa és a fal távolságát:

$$k + t = l,$$

ahol $l = 3$ m.

A leképezés törvénye (5.5) szerint $1/f = 1/k + 1/t$, ahol $f = 0,2$ m a lencse fókusz távolsága.

Az előző két egyenlet elegendő k és t meghatározására. Fejezzük ki az elsőből k -t: $k = l - t$ és írjuk be ezt a másodikba:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l-t} + \frac{1}{t}.$$

A nevezőkkel beszorozva mindkét oldalt:

$$t(l-t) = ft + f(l-t).$$

A zárójelek felbontásával és elemi átrendezéssel t -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$t^2 - tl + fl = 0.$$

Ennek megoldásai a másodfokú egyenlet megoldóképletével:

$$t_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4fl}}{2} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - fl}.$$

Általában tehát két megoldásunk van, melyek a lámpa és a fal közti szakasz felezőpontjára szimmetrikusan helyezkednek el.

Feladatunk adataival:

$$t_{1,2} = 1,5 \pm 1,28,$$

tehát a két megoldás:

$$t_1 = 2,78 \text{ m}, \quad t_2 = 0,22 \text{ m}.$$

Az ezekhez tartozó képtávolságok $k = l - t$ alapján:

$$k_1 = 0,22 \text{ m}, \quad k_2 = 2,78 \text{ m}.$$

A két esethez tartozó nagyítások:

$$N_1 = \frac{k_1}{t_1} = 0,079, \quad N_2 = \frac{k_2}{t_2} = 12,6.$$

Érdekes, hogy két megoldásunk van. Ezek létezését a gyakorlatban egy lencse segítségével könnyű kipróbálni: a lámpáról nagyított és kicsinyített képet is kaphatunk a falon. A két eset közül a nagyított eset megfigyelése a nehezebb, mert ekkor a nagyítás miatt a kép viszonylag fényszegény lesz, ami nehezíti a megfigyelést, ha a lámpa közvetlen, lencse mellett elmenő és szóródó fényét nem zárjuk ki a kép közeléből.

5.3. feladat: Egy írásvetítő lencséje $f = 40$ cm fókusztávolságú. A lencse 3,5 m-re van a vetítővászonról. Mekkora betűkkel írjunk a fóliára, ha azt akarjuk, hogy a kivetítéskor azok képe 15 cm-es legyen? Mekkora lesz a 21 cm méretű fólia kivetített képe?

Megoldás: A feladat megoldásánál figyeljünk arra, hogy két tárgy, a betű és az egész fólia is szerepel, így ezeket meg kell különböztetnünk: 1-es indexet kapnak a betű, 2-eset a fólia méretei. (A kép- és tárgytávolságok közösek, mert a betű a fólián van rajta.)

A szokásos jelöléseket alkalmazva:

- a képtávolság $k = 3,5$ m,
- a fókusztávolság $f = 0,4$ m,
- a betű (1-es tárgy) képének mérete $K_1 = 0,15$ m,
- a fólia (2-es tárgy) mérete $T_2 = 0,21$ m.

Az élesre állás feltétele: $1/f = 1/k + 1/t$. Innen az ismeretlen tárgytávolság (a lencse és a fólia távolsága):

$$t = \frac{kf}{k - f} = 0,452 \text{ m.}$$

A vetítő nagyítása tehát:

$$N = \frac{k}{t} = \frac{k - f}{f} = 7,75.$$

Ez a nagyítás vonatkozik a betűre és a fóliára is, azaz a kért méretek könnyen meghatározhatóak:

$$N = \frac{K_1}{T_1},$$

ahonnan:

$$T_1 = \frac{K_1}{N} = 0,019 \text{ m.}$$

Továbbá:

$$N = \frac{K_2}{T_2},$$

amiből

$$K_2 = N \cdot T_2 = 1,63 \text{ m.}$$

Tehát 19 mm-es betűkkel kell a fóliára írunk, a fólia képének mérete pedig 163 cm-es lesz.

5.4. feladat: Egy számítógép-projektor 800 oszlopos képet vetít ki. Mekkora legyen a kivetített kép vízszintes mérete, hogy a 8 m-es terem végéből nézve is épp külön lehessen látni a képpontokat?

A vetítőlencse fókusz távolsága 70 mm, a vetítő belsejében előállított kis kép (ezt vetíti ki a gép) mérete 55 mm. Milyen messze legyen a lencse a vászontól? (Az emberi szem felbontóképessége $1/60^\circ$.)

Megoldás: Az emberi szem felbontóképessége $1/60^\circ$. Ezért 8 m-ről a legkisebb látható részlet mérete:

$$d_{\min} = 8 \text{ m} \cdot \tan \frac{1^\circ}{60} = 0,00233 \text{ m} \quad (= 2,33 \text{ mm}).$$

A teljes képméret, azaz a kivetített kép vízszintes mérete ennek 800-szorosa, azaz:

$$K = 800 \cdot d_{\min} = 1,86 \text{ m.}$$

A feladat szövege alapján a szokásos jelölésekkel: $f = 0,07 \text{ m}$, $T = 0,055 \text{ m}$.

Tudjuk, hogy $1/f = 1/k + 1/t$ és $K/T = k/t$.

Ebben a két egyenletben f , K és T ismert, így a két ismeretlen mennyiség, k és t kifejezhető. Pl. az első alapján:

$$k = t \frac{K}{T},$$

amit a másodikba beírva:

$$\frac{1}{f} = \frac{T}{Kt} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{T}{K} + 1 \right),$$

ahonnet:

$$t = f \left(\frac{T}{K} + 1 \right) = 0,072 \text{ m.}$$

Így már a képtávolság is kifejezhető:

$$k = f \left(\frac{T}{K} + 1 \right) \frac{K}{T} = f \left(1 + \frac{K}{T} \right) = 2,43 \text{ m.}$$

A vetítőlencsét tehát kb. 2,4 m-re kell elhelyezni a vászontól.

5.5. feladat: A Hubble űrtávcső objektívjének átmérője 2,4 m. Ha 500 nm hullámhosszúságon készít képet, akkor mekkora az a legkisebb távolság, amekkora esetén a Marson levő tereptárgyak elkülöníthetők, ha a Mars távolsága 70 millió kilométer?

Megoldás: (5.7) alapján a távcső felbontóképessége meghatározható:

$$\varphi = \sin^{-1} \left(1,22 \frac{\lambda}{D} \right) = (1,456 \cdot 10^{-5})^{\circ} = 0,052''.$$

(Figyelem! A távcső felbontóképességét *nem* (5.10) alapján kell meghatározni, mert nem a szabad szemre jellemző 550 nm-es hullámhosszon van használva!)

Ekkora szög alatt 70 millió km-ről nyilván

$$d = 70 \cdot 10^6 \cdot 1000 \tan \varphi = 17\,800 \text{ m}$$

távolság látszik.

A Marson tehát mintegy 18 km-esek azok a részletek, melyek elvileg megpillanthatók a Hubble űrtávcsővel 500 nm-es hullámhosszat használva.

A számolás során kihasználhattuk volna, hogy kis szögekről van szó, tehát $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ (radiánban).

5.9.3. Gyakorló feladatok

1. Egy optikai rács minden cm-en 330 vonal van. Erre a rácsra egy ismeretlen hullámhosszúságú fény érkezik. A rács mögött 2 m-rel elhelyezett ernyőn a csíkok távolsága 3,3 cm. Mekkora a beeső fény hullámhossza?
2. Milyen fókusz-távolságú lencsét kell használnunk egy 4 mm átmérőjű párhuzamos, 780 nm hullámhosszúságú lézernyaláb fókuszálására, ha a fókuszált terület átmérője nem haladhatja meg a 200 nm-t?
3. Egy írásvetítővel a 21 cm-es fóliát 3 m-esre nagyítva szeretnénk kivetíteni. A vetítő lencséjének fókusz-távolsága 40 cm.
Milyen messze tegyük az írásvetítőt a vetítővászonról, ha éles képet akarunk kapni a megadott méretben?
4. Egy gyertya 2 m távolságra van egy faltól. A fal és a gyertya közé teszünk egy lencsét, ami a gyertya éles képét állítja elő a falon. Ezután a lencsét 1,5 m-rel közelebb visszük a falhoz, és ekkor is éles képet kapunk. Mekkora a lencse fókusz-távolsága? Melyik esetben nagyobb a kép, mint a gyertya és hányszor?

5. Mekkora nagyítást használhatunk egy $D = 10$ cm objektívtávmérőjű távcsővel, ha azt akarjuk, hogy a kép éles legyen. (Azaz ne lehessen észrevenni az objektív szélén történő elhajlás hatását.)
6. Egy 5 cm átmérőjű, 60 cm fókusztávolságú lencsénk van. Ezt szeretnénk egy távcső objektívjeként felhasználni.
Mekkora az a nagyítás, aminél nagyobb nem érdemes használni? (Nem jönnek elő újabb részletek.) Mekkora fókusztávolságú okulár (szemlencse) kell ehhez?
Mekkora az a nagyítás, aminél kisebbet nem érdemes alkalmazni, az elvesző fény miatt? Milyen okulár kell ekkor?

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika III., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- Feynmann, Leighton, Sants: Mai fizika III., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

Felhasznált irodalom:

- Ábrahám György (szerk.): Optika, Panem-McGraw-Hill, 1997.

6. Elektromos és mágneses terek

6.1. Elektrosztatikai alapfogalmak

Az elektromosságtan néhány alapjelenségét már az ókori görögök ismerték, de ezek első módszeres vizsgálata William Gilbert nevéhez fűződik. A 16. század végén ő különböztette meg a két eltérő fajtájú elektromos töltést, amelyek a) prémmel dörzsölt borostyánkőben, ill. b) selyemkendővel megdörzsölt üvegpálcán jelennek meg. A 18. század végén Benjamin Franklin az a) töltést pozitívnak, a b) töltést pedig negatívnak nevezte el.

Gilbert megfigyelte, hogy az azonos fajta töltések taszítják, az ellentétes fajtájúak pedig vonzzák egymást. A 18. század második felében C. A. Coulomb ezt a hatást mennyiségileg precíz matematikai formában írta le. Ezért a pontszerű töltés egymásra gyakorolt hatását megadó összefüggést Coulomb-törvénynek nevezzük.

Coulomb-törvény:

A Q pontszerű töltésű test a q pontszerű töltésűre

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \underline{e} \quad (6.1)$$

erővel hat, ahol $\underline{r}$ a Q töltésből a q -ba mutató vektor, $r = |\underline{r}|$, $\underline{e} = \underline{r}/r$ egységvektor, ϵ_0 a vákuum dielektromos állandója: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$.

A töltések között légüres tér (vákuum) van.

A töltések közötti hatást úgy lehet megmagyarázni, hogy körülöttük elektromos terek alakulnak ki. Legyen az egyik töltés Q , a másik q ($q \ll Q$) az u.n. próbatöltés. Akkor a Q körüli teret az

$$\underline{E} = (1/q)\underline{F} \quad (6.2)$$

elektromos térerősség-vektor jellemzi. A képlet alapján ezt úgy is meg lehet fogalmazni, hogy az adott $\underline{r}$ pontban elektromos térerősségvektor számértékileg egyenlő azzal a Coulomb-erővel, ami az ebben a pontban elhelyezett egységnyi nagyságú pozitív töltésre hat.

Ugyanakkor, az elektromos térerősség-vektor nem függ attól, hogy az adott pontban van-e próbatöltés. Ez azt jelenti, hogy az elektromos térerősség-vektor a tér minden pontjában értelmezve van. Más szóval, az elektromos térerősség egy vektortér. A vektortérben erővonalakat lehet bevezetni.

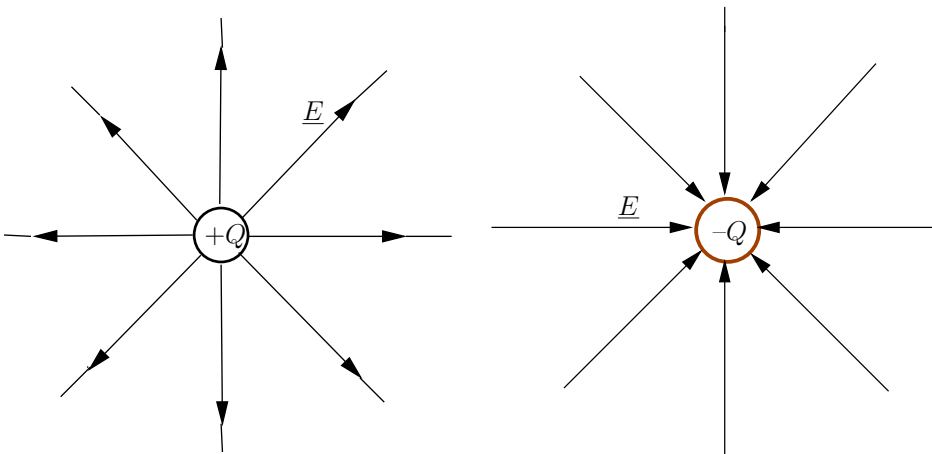
Erővonal:

Azt a vonalat, amelynek minden pontjában az elektromos térerősség vektorra érintőirányú erővonalnak nevezik.

A térerősség mértékegysége $\text{N}/(\text{As})$ vagy másképp V/m .

A Q pontszerű töltés által létrehozott elektromos tér erővonalai olyan egyenesek, amelyek a Q töltéstől indulnak minden irányba, mivel az $\underline{E}$ térerősség-vektor (ugyanúgy mint az $\underline{F}$ erő) párhuzamos az $\underline{e}$ (és $\underline{r}$) vektorral. A térerősség-vektor a Q -tól kifelé halad, ha a Q töltés pozitív, és a Q -felé, ha Q negatív.

A 6.1. ábrán bemutatjuk a pozitív és a negatív töltések által keltett elektromos tér erővonalait.



6.1. ábra. A pozitív és a negatív töltés által keltett elektromos tér erővonalai

A fenti definíció szerint a tér minden pontján erővonal megy keresztül. Ez alatt azt értjük, hogy minden pontban értelmezve van egy és csakis egy elektromos térerősségi vektor és ez a vektor az $\underline{r}$ helyvektornak folytonos függvénye.

Fogalmazzuk meg röviden az elektromos tér erővonalainak legfontosabb tulajdonságait:

- Az erővonalak a pozitív töltésekből indulnak ki és a negatív töltésekbe torkollnak.
- Az erővonalak csak töltéseknél (és nem a tér akármilyen pontján) kezdődhetnek vagy végződhetnek.

- Az erővonalak nem metszhetik egymást.
- Az elektromos tér erővonalai nem lehetnek zárt görbék.

Az utolsó tulajdonság arra utal, hogy az *elektromos tér örvénymentes vektortér*. Ennek matematikai kifejezése:

$$\operatorname{rot} \underline{E} = 0, \quad (6.3)$$

ahol „rot” egy vektor-differenciáloperátor, a rotáció. A 6.3 egyenlet tehát így olvassuk: rotáció $\underline{E} = 0$. Tetszőleges $\underline{A}$ vektor esetén $\operatorname{rot} \underline{A}$ szintén vektor, amelynek komponensei rendre

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

A (6.3) egyenlet egy tetszőleges C zárt görbe menti integrál formájában is megadható:

$$\oint_C \underline{E}_\tau dl = 0, \quad (6.4)$$

ahol $\underline{E}_\tau$ a térerősség-vektornak a görbé érintőjének irányába eső komponense az adott pontban.

Az (6.3) és (6.4) egyenletek az elektrosztatika első alapegyenletének (axiómájának) egymással ekvivalens megfogalmazása. Kesőbb látni fogunk, hogy ezek az egyenletek az elektromosságtan négy alapegyenletének (az u.n. Maxwell-egyenleteknek) az egyik, elektrosztatika esetén érvényes redukált alakja.

Az erővonal bevezetésénél csak a vektor irányát vettük figyelembe. A gyakorlatban hasznosnak és szemléletesnek bizonyult az az eljárás, amely az adott pontban figyelembe veszi a térerősség-vektornak nemcsak az irányát, de a nagyságát is.

Eszerint az erővonalakat olyan sűrűn húzzuk meg, hogy a rájuk mérőleges egységnyi felületen annyi erővonal haladjon át, amennyi az adott pontban a térerősség-vektor nagysága (számértékileg).

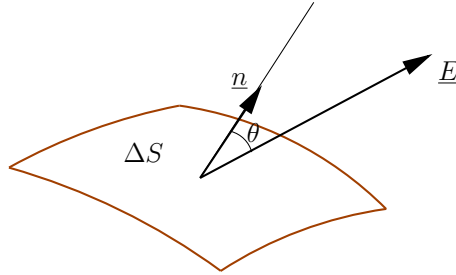
Ezzel az eljárással szemléltethető lesz az erővonalkép, és bevezethető az elektromos tér fluxusa (vagy erővonalfluxusa) is.

Fluxus:

Az S felületen átmenő elektromos fluxus egyenlő az S felületet átszűrő erővonalak számával.

Fontos, hogy ebben a definícióban nem feltételeztük, hogy S az erővonalakra merőleges.

A ΔS elemi felületen keresztül $E_n \Delta S$ erővonal halad át, ahol E_n az $\underline{E}$ térerősség-vektornak a ΔS -re merőleges komponense: $E_n = |\underline{E}| \cdot \cos \theta$. (ld. 6.2. ábra). Ebből következik, hogy a fluxus előjeles mennyiség.



6.2. ábra. Fluxus az elemi felületen keresztül

Egy makroszkópikus S felületen átmenő fluxus

$$\Psi = \int_S E_n dS. \quad (6.5)$$

Legyen S egy R sugarú zárt gömbfelület Q ponttöltéssel a közepén. Amint láttuk, a Q által indukált elektrosztatikus tér erővonalai a Q -ból induló (ha $Q > 0$, akkor kifelé irányított) egyenesek, és így ezek merőlegesek a gömbfelületre. Vegyük fel az origót Q -ban. Vákuumban a gömbfelület pontjaiban a térerősség-vektor

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \underline{e}.$$

Mivel most $E_n = |\underline{E}|$ állandó az egész zárt felületen, ezért az átmenő fluxus könnyen számítható, mivel $|\underline{E}| = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ az integrál alól kivihető, és

$$\oint_S dS = 4\pi R^2,$$

vagyis a fluxus

$$\Psi = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (6.6)$$

Figyeljük meg, hogy ez a fluxus állandó, nem függ az R távolságtól. Vagyis bár a meglévő erővonalak ugyan távolodnak egymástól, de új erővonalak nem alakulnak ki.

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a gömbfelület helyett más zárt felületen átmenő fluxust számoljuk ki. (Ennek bizonyításától eltekintünk.)

Eddig egy töltéssel volt dolgunk. Bizonyítás nélkül fogadjuk el, hogy több töltés hatása összeadódik (szuperpozíció elve).

Fogalmazzuk most meg az elektrosztatika másik alaptörvényét (axiómáját), az u.n. Gauss-tételt, ami a (6.6) képlet általánosítása.

Gauss-tétel:

Egy tetszőleges zárt felületen átmenő elektromos fluxus egyenlő a felület által közbezárt töltések ε_0 -val osztott előjeles összegével:

$$\Psi = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i. \quad (6.7)$$

A (6.7) egyenlet az elektromágnesesség alapvető Maxwell-féle egyenlet-rendszerének a másik egyenlete.

Eddig azt feltételeztük, hogy a töltés pontszerű. Ha a töltés egy kiterjedt testen található, akkor fontos tudni, hogy a töltés a testen hogyan oszlik el. Ha eloszlása egyenletes, akkor a ϱ töltés sűrűségére a következő képletet használjuk:

$$\varrho = \frac{Q}{V},$$

ahol V a test térfogata. Ha pedig az eloszlása nem egyenletes, a töltés sűrűsége az $\underline{r}$ test pontjának függvénye: $\varrho = \varrho(\underline{r}) = dQ/dV$. Ekkor egy makroszkópikus V térfogatban lévő töltést a

$$Q = \int_V \varrho(\underline{r}) dV$$

térfogati integrál adja meg.

Ha a test vezető anyagból áll (fém), akkor a töltések a felületen helyezkednek el. Ebben az esetben az η felületi töltéssűrűséget vezethetjük be. Ha a töltések egyenletesen vannak elosztva a felületen, akkor a felületi töltéssűrűség $\eta = Q/S$, általánosan $\eta = dQ/dS$.

Ezekben az esetekben az előző (6.7) képlet jobb oldalán $(1/\varepsilon_0) \sum_i Q_i$

helyett

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \eta dS$$

szerepel.

6.1. példa: Vákuumban egy gömb formájú 10 cm sugarú testben a töltések egyenletesen oszlanak el. Az összes töltés $Q = 2 \cdot 10^{-8}$ C. Számoljuk ki a térerősség-vektor nagyságát a gömb középpontjától 1 m távolságban.

Megoldás: Képzeljünk el egy $R = 1$ m sugarú S gömbfelületet a test középpontja körül. Mivel a töltések egyenletesen oszlanak el a testben, és mivel az S gömbfelület, ezért a gömbszimmetria miatt a fluxus és a térerősség-vektor nagysága nem változik az egész S felületen. Vagyis,

$$4\pi R^2 \cdot |\underline{E}| = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

ahonnan

$$|\underline{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} = 180 \text{ V/m}.$$

Látható, hogy az eredményben nem szerepel a gömb sugara (10 cm), csak az volt fontos, hogy kisebb mint R .

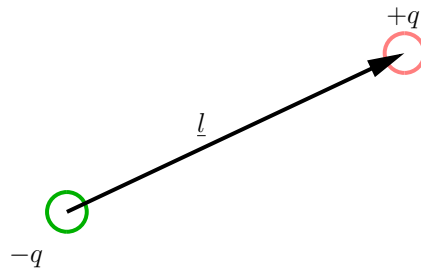
Megjegyezhetjük továbbá, hogy ha a töltések egyenletesen oszlanak el a gömb alakú testben vagy (vezetők esetén) a gömb alakú test felületén, akkor a fluxus számításakor úgy lehet eljárni (és ugyanazt az eredményt kapjuk), mintha az összes töltés a gömb középpontjában lenne koncentrálódva.

A technikában és a természettudományban gyakran találkozunk az un. elektromos dipólussal.

Elektromos dipólus:

egyenlő nagyságú, egymástól l távolságban lévő, de ellenkező előjelű $-q$ és $+q$ töltések elektromos dipólust alakítanak.

(Ld. a 6.3. ábra)



6.3. ábra. Elektromos dipólus

Dipólnyomaték (dipólusmomentum):

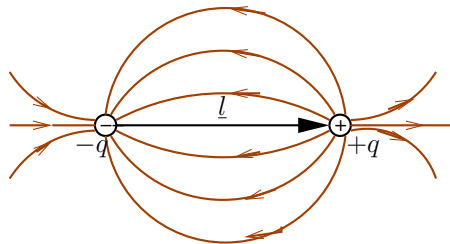
A $\underline{d}$ vektort:

$$\underline{d} = q \cdot \underline{l}, \quad (6.8)$$

dipólnyomatéknak nevezzük, ahol $\underline{l}$ a negatív töltéstől a pozitívba mutató, a két töltést összekötő vektor.

A pontszerű dipólus ($|\underline{l}| \ll r$ esetén) által keltett térerősség-vektor kifejezhető a dipólnyomaték segítségével:

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\underline{e}(\underline{d} \cdot \underline{e}) - \underline{d}}{r^3}. \quad (6.9)$$



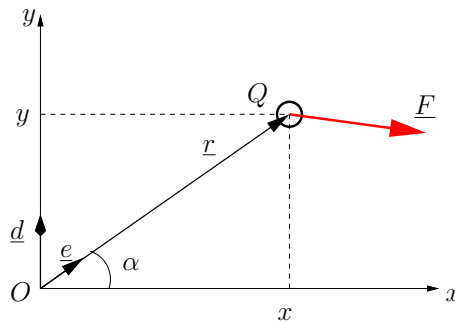
6.4. ábra. Az elektromos dipólus erővonalai

A 6.4. ábrán láthatóak az elektromos dipólus erővonalai. Jegyezzük meg, hogy

a dipólus összes erővonala a pozitív töltésnél kezdődik és a negatívnál végződik.

6.2. példa: Egy $2 \cdot 10^{-6}$ Cm (coulomb-méter) dipólnyomatékú dipólus vákuumban helyezkedik el. Tőle 50 cm távolságban és a dipólnyomaték vektorához 60 fokos irányban egy $5 \cdot 10^{-5}$ C töltés van. Milyen erővel hat a dipólus a töltésre?

Megoldás: Vezessük be a koordináta-rendszert úgy, hogy az origó legyen a dipólusnál, az y tengely pedig legyen párhuzamos a dipólnyomatékkal. (ld. a 6.5. ábrát).



6.5. ábra. Dipólus által ható erő

Akkor a $\underline{d}$ vektor vetületei $(0; |\underline{d}|)$, $|\underline{d}| = 2 \cdot 10^{-6}$, az $\underline{e}$ vektoré pedig $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Számszerűen $\underline{d} = (0; 2 \cdot 10^{-6})$, $\underline{e} = (\sqrt{3}/2; 1/2) = (0,866; 0,5)$. Jegyezzük meg, hogy $\alpha = 30^\circ$ ($\pi/6$).

A $\underline{d}$ és $\underline{e}$ vektorok skaláris szorzata egyenlő $|\underline{d}|/2$, így a $3\underline{e}(\underline{d} \cdot \underline{e}) - \underline{d}$ vektor komponensei $|\underline{d}|(3\sqrt{3}/4, -1/4)$ lesznek. Figyelembe vesszük, hogy az erő $\underline{F} = Q \cdot \underline{E}$. Egyszerű számítások után $\underline{F} = (1,1675 \text{ N}, -0,2247 \text{ N})$, abszolút értéke pedig $|\underline{F}| = 1,1890 \text{ N}$.

Az elektromos erőter energiataralommal bír. Ennek jellemzésére szolgál az energiasűrűség e , amelynek definíciója az egységnyi térfogatban lévő energia (számértékileg). Pontosabban, a ΔV térfogatban tárolt ΔW_E elektromos energiával kifejezve

$$e = \frac{\Delta W_E}{\Delta V},$$

ami $\Delta V \rightarrow 0$ határesetben $e = dW_E/dV$. Az $\underline{E}$ térerősség-vektor ismeretében az elektromos energiasűrűség adott pontban (vákuumban):

$$e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \underline{E}^2. \quad (6.10)$$

Az elektromos energiasűrűség ismeretében tehát megadhatjuk egy kis ΔV térfogatban lévő, elektromos eredetű energiát, ez $e\Delta V = (1/2)\varepsilon_0 \underline{E}^2 \cdot \Delta V$ lesz.

A 6.3 illetve a 6.4 alakban megfogalmazott első alapegyenletből (különbösen ennek 6.4 alakjából) következik, hogy az elektrosztatikus erőterben az erőter által végzett munka nem függ az úttól, csak a kezdő- és végpontok helyzetétől. Vagyis a mechanikában tanultak szerint az erőterhez rendelhető potenciális energia, az u.n. elektrosztatikus potenciális energia.

Az elektromos tér potenciális energiája (a végtelen távoli vonatkoztatási ponthoz viszonyítva):

A Q pont-töltés által keltett elektromos térben egy $\underline{r}$ helyen lévő q töltés W potenciális energiája egyenlő azzal a munkával, amely ahhoz szükséges, hogy ezt a q töltést egy végtelen távoli pontból az $\underline{r}$ pontba hozzuk.

Gyakorlatilag „végtelen távoli pont”-ként olyan távoli pontot lehet elképzelni, ahol a tér hatása már nem jelentkezik, azaz $\underline{E} = 0$ vehető.

Ha Q és q a pontszerű testeken lévő töltések, a potenciális energia

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Qq}{r}. \quad (6.11)$$

Figyeljük meg, hogy a potenciális energia definíciójában nincs szó arról, hogy milyen úton kerül a q töltés az $\underline{r}$ pontba, mivel a munka nem függ a konkrét pályától. Ez jellemző a potenciális erőterekre. Ki lehet mutatni, hogy a (6.1) képletben szereplő Coulomb-erő

$$\underline{F} = -\text{grad } W,$$

vagyis

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial W}{\partial z},$$

ahol X, Y, Z - az $\underline{F}$ erő komponensei, „grad” pedig a gradiens differenciáloperátor, (és így olvassuk, $\underline{F}$ egyenlő mínusz gradiens W). Így $\underline{F}$ valóban értelmezi a potenciális erőteret, és W az ennek megfelelő potenciális energiája.

Az előbb definiált potenciális energia segítségével bevezetjük az **elektromos tér feszültségét**:

$$U(\underline{r}) = \frac{1}{q} W. \quad (6.12)$$

Itt is igaz, hogy a feszültség egy egységnyi pozitív töltésnek a potenciális energiája (számértékkileg). Másrészt, a feszültség nem függ a térben lévő q töltéstől, vagyis $U(\underline{r})$ csak a tér jellemzője.

A feszültség mértékegysége „volt”: $J/C = V$.

Eddig a potenciál és a feszültség tárgyalásakor azt feltételeztük, hogy a töltés pontszerű. Az elosztott töltés által indukált elektromos tér feszültségét az $\underline{R}$ pontban a következő képlet adja meg:

$$U(\underline{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\varrho(\underline{r}) dV}{|\underline{R} - \underline{r}|}. \quad (6.13)$$

Itt a töltéssűrűség helyfüggő, pl. a $\varrho = \varrho(x, y, z)$ háromváltozós függvénnyel írjuk le, továbbá ekkor $dV = dx dy dz$ és $\underline{r}$ koordinátái x, y, z .

A vezetőekben a töltés a külső felületen helyezkedik el, ahol η a feszültségsűrűség. E töltés által keltett tér feszültsége:

$$U(\underline{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\eta dS}{|\underline{R} - \underline{r}|}. \quad (6.14)$$

A feszültség ismeretében (6.12) alapján q ponttöltés elektrosztatikus potenciális energiája egy $\underline{R}$ helyvektorú pontban

$$W(\underline{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\varrho(\underline{r}) dV}{|\underline{R} - \underline{r}|}. \quad (6.15)$$

Ha a töltések egyenletesen oszlanak el egy gömbön belül pl. ha a töltés egyenletesen oszlik el a térfogatban, azaz $\varrho = \text{const}$, akkor a feszültség a gömbön kívül

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (6.16)$$

ahol $r > R$ az adott pont távolsága a gömb középpontjától. Itt R a gömb sugara. Ugyanezt kapjuk fém esetében is, ahol a felületi töltéssűrűség állandó.

Néha szükségünk lehet a feszültség ismeretére a vezető gömbön belüli pontokban is, vagy a gömb felületén. Ebben az esetben a feszültség állandó, tehát vezetőre (fémre)

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (6.17)$$

$r \leq R$ esetén.

Az elektromos tér feszültségével kapcsolatban bevezetjük a **kapacitás** fogalmát. Legyen két vezető, amelyeknek töltései $+Q$ és $-Q$. Az ilyen rendszert **kondenzátornak** nevezik. A pozitív töltésű vezetőből kiinduló erővonalak mind a negatív töltésű vezetőben végződnek, és nem nyúlnak a végtelenbe.

A kettőjük közötti feszültség lineárisan függ a Q töltés nagyságától és ezenkívül a vezetők geometriájától, valamint az egymáshoz viszonyított helyzetüktől.

A kondenzátor kapacitása:

A feszültség és a kondenzátor töltései közötti együtthatót nevezik a kondenzátor C kapacitásának:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (6.18)$$

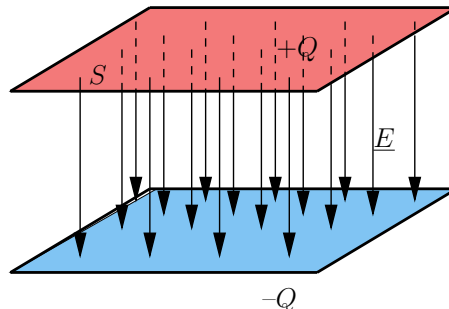
A kapacitás mértékegysége: C/V , amit „farad”-nak (jele F) nevezünk.

Nézzünk néhány példát az egyszerű és gyakran előforduló kondenzátorokra. Tételezzük fel, hogy a töltések között vákuum van.

Ha a két vezető síkjellegű S területű lemez (un. síkkondenzátor), akkor

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \quad (6.19)$$

ahol d a két lemez közötti távolság. A képletben feltételeztük, hogy d kicsi az S nagyságához képest: $d \ll \sqrt{S}$. (Ld. 6.6. ábra)



6.6. ábra. Síkkondenzátor

Két koncentrikus gömbfelületből álló kondenzátor (gömbkondenzátor)

kapacitása

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}, \quad (6.20)$$

ahol R_1 és R_2 a gömbfelületek sugarai ($R_1 > R_2$).

R sugarú gömb kapacitása (a távoli testekkel szemben)

$$C = 4\pi\epsilon_0 R, \quad (6.21)$$

ami (6.20)-ból $R_1 \rightarrow \infty$ határesetben kapható meg.

Két l hosszúságú koncentrikus vezető henger (hengerkondenzátor) kapacitása

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln(R_1/R_2)}. \quad (6.22)$$

Határozzuk meg most a síkkondenzátor lemezei közötti elektromos tér térerősségét és energiasűrűségét. Ha a kondenzátor lapokra igaz, hogy $d \ll \sqrt{S}$, akkor a felületek jó közelítéssel végtelen nagynak tekinthetők és ekkor szimmetria megfontolásokból kiderül, hogy $\underline{E}$ homogén és merőleges a felületre. Ekkor, ha egy igen kicsi δq elemi töltést az egyik lemezről a másikra mozgatunk, a térerősség változatlan marad és a tér $W = \delta q \cdot U$ nagyságú munkát végez a töltésen. Ugyanezt a munkát a térerősség segítségével is kifejezhetjük. Mivel a mozgás iránya egyezik az $\underline{E}$ térerősség-vektor irányával, és mivel a töltésre ható erő egyenlő $\underline{F} = \delta q \cdot \underline{E}$, a végzett munka egyenlő $W = \delta q |\underline{E}| d$, ahol d a két lemez közötti távolság. Mivel $W/\delta q = U$, a térerősség-vektor abszolút értéke:

$$|\underline{E}| = \frac{U}{d}. \quad (6.23)$$

Most pedig számítsuk ki a kondenzátorban tárolt e elektromos energia sűrűségét. A fenti (6.23) képlet alapján

$$e = \frac{\epsilon_0}{2} |\underline{E}|^2 = \frac{\epsilon_0 U^2}{2d^2}.$$

A kondenzátorban tárolt összes energia tehát $W_e = e \cdot V = e \cdot S \cdot d$ segítségével kapható. Felhasználva (6.19)-et

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 U^2 \frac{S}{d} = \frac{1}{2} C U^2, \quad (6.24)$$

ami $Q = U \cdot C$ segítségével

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} \quad (6.25)$$

alakba írható.

6.3. példa: Számoljuk ki egy gömbkondenzátor kapacitását, ha a külső gömb sugara 10 cm, a belső gömbé pedig 9,5 cm.

Megoldás: A gömbkondenzátorra vonatkozó (6.20) képletben szereplő adatok: $R_1 = 0,1 \text{ m}$, $R_2 = 0,095 \text{ m}$, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$. Így

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{0,1 \cdot 0,095}{0,005} = 0,2114 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 0,2114 \text{ nF}.$$

6.2. Magnetosztatikai alapfogalmak

Már a régi kínaiak tudták, hogy bizonyos fajta vasérből alkotott tű meghatározott irányban helyezkedik el, mégpedig egyik vége északra, a másik pedig délre mutat. Ennek a jelenségnek a magyarázata a mágneses jelenségek körébe vezet. A Földet mágneses tér veszi körül, és a mágneses iránytű e tér erővonalai irányába áll be.

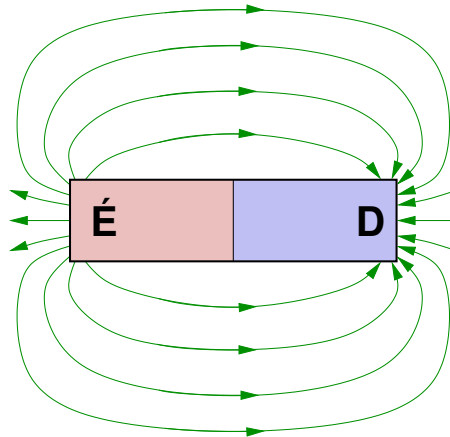
A mágneses tér, – úgy mint az elektromos tér –, vektortér, és ezért itt is be lehet vezetni az erővonalakat.

Egy állandó mágnes által indukált tér erővonalai az u.n. északi és déli pólusokat kötik össze, az északi pólusban kezdődnek és déli pólusban végződnek. A mágneses tér erővonalait látni is lehet, ha a mágnes körül apró vasreszelék szemcséket szórunk el. A mágneses tér hatására a vasreszelék szemcséi beállnak a tér erővonalai mentén. Egy mágnesrúd körül kialakult tér erővonalait a 6.7. ábrán láthatjuk.

Jegyezzük meg, hogy az elektromos töltésektől eltérően északi és déli pólusok külön-külön nem léteznek, ezeket nem lehet szétválasztani, vagyis nincs külön mágneses töltés. Ha egy mágnesrudat kettétörünk, mind a két részén újra lesznek déli-északi póluspárok, azaz csak mágneses dipólusok léteznek. Tehát mágnesség szempontjából alapvető fontos az u.n. mágneses dipólnyomaték $\underline{m}$.

H. C. Oersted a 19. század első negyedében felfigyelt arra, hogy elektromos vezeték közelében az iránytű a vezetéken és a mágnesű középpontján átfektetett síkra merőleges helyzetet foglal el. Később ezt, a vezetéken lévő áram mágneses hatását, a Biot-Savart törvény mennyiségileg is megfogalmazta.

A mágnesrúd által keltett tér és a vezetéken mozgó áram által indukált mágneses tér különbözőnek tűnik. Ampère francia fizikus elsőként tételezte fel azt, hogy e két jelenségnek ugyanaz az oka. Ma már tudjuk, hogy ez



6.7. ábra. Mágnesrúd erővonalai

így van, és ennek az oka az, hogy az atomokban lévő köráramok elemi mágneset képeznek (a köráramok és mágneses dipólnyomatékok közötti kapcsolatot lásd később).

Az elektronok mozgásai között megkülönböztetünk pályán való mozgást és saját tengelyük körüli mozgást (ez az u.n. spin, amelyet a Bevezetés az atomfizikába c. fejezetben közelebbről megismerhetünk). A pörgő elektronokat kis köráramoknak képzelhetjük el. A kvantummechanikából ismert, hogy például a vas atomjaiban az elektronok többsége a saját tengelye körül egy irányba pörög, vagyis többségüknél a spin kvantumszáma ugyanaz.

Ha az elektron atommag körüli mozgását vizsgáljuk, az elektron mágneses dipólnyomatékát figyelembe kell venni. Szintén kvantummechanikai megfontolásokból kapjuk, hogy az m dipólnyomaték abszolút értéke csak diszkrét értéket vehet fel:

$$|m| = \frac{eh}{4\pi m} l,$$

ahol e az elektron töltése (un. elemi töltés), m az elektron tömege, h a Planck-állandó, l pedig nem negatív egész, a pályamomentum kvantumszám. Ha $l = 1$, akkor

$$|m| = \mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ J m}^2/\text{V s}, \quad (6.26)$$

ami az u.n. **Bohr-felé magneton**, a mágneses dipólnyomaték atomfizikai

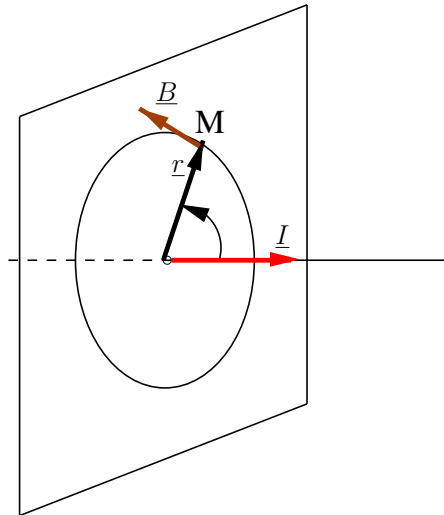
lépékű egysége. Ilyen atomokból, – mint elemi mágnesekből – áll a mágnesrúd.

Az egyenes vezetõn átfolyó I áram által keltett mágneses tér erővonalai a vezetõre merõleges síkokban elhelyezkedõ koncentrikus körök, amelyeknek középpontjai a vezetõn vannak.

A mágneses tér „erõsségét” a $\underline{B}$ mágneses indukció vektor jellemzi. A Biot-Savart törvény alapján, például, hosszú, egyenes vezetéken átfolyó I erõsségû áram által egy adott M pontban keltett mágneses tér indukció vektora

$$\underline{B} = \frac{\mu}{2\pi r^2} [\underline{I} \times \underline{r}], \quad |\underline{B}| = \frac{\mu I}{2\pi r}, \quad (6.27)$$

ahol μ u.n. mágneses permeabilitás, vákuumban $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$, az $\underline{I}$ vektor nagysága megegyezik az áramerõsséggel, iránya pedig megfelel az áram irányának, az $\underline{r}$ pedig az M és a vezeték közötti vektor, amely merõleges a vezetékre és az M felé irányul. Az $\underline{r}$ vektor az M ponton áthaladó a vezetékre merõleges síkban helyezkedik el (ld. 6.8. ábrát).



6.8. ábra. Mágneses indukció

A (6.27) képlet alapján a $\underline{B}$ vektor merõleges az $\underline{I}$ és az $\underline{r}$ vektorokra, így $\underline{B}$ a fent említett síkban helyezkedik el, és vektor egyenesét a mágneses tér az M ponton keresztül átmenõ körjellegû erővonalának érintõje adja. Irányának pedig olyannak kell lenni, hogy az $\underline{I}$ vektor végébõl visszanezve

a $\underline{B}$ vektor iránya az óramutató járásával ellenkező kel hogy legyen. A mágneses indukció mértékegysége „tesla”: $T = V \cdot s / m^2$.

A dielektrikus állandót és a mágneses permeabilitást fontos kapcsolat összeköti:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}, \quad (6.28)$$

ahol c a fény sebessége vákuumban.

A mágneses tér erővonalaira jellemző, hogy nem csak ebben az esetben, hanem mindig zárt görbék, vagyis a mágneses tér örvényes vektortér. A mágneses tér indukcióvektorára igaz, hogy

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0, \quad \text{vagy másképpen} \quad \oint_S \underline{B}_n dS = 0. \quad (6.29)$$

ahol S egy zárt felület.

A (6.29)-al megadott törvény az elektrodinamika újabb alapegyenlete (axiómája), ez a Maxwell-egyenletek közül egy újabb. A bal oldalon az u.n. differenciális alak szerepel. Az itt megjelent „div” egy újabb vektoroperátor, a divergencia. (Ezt úgy olvassuk, hogy divergencia $\underline{B} = 0$.) Egy vektor (így pl. a $\underline{B}$ vektor) divergenciája a következő skálaris függvény:

$$\operatorname{div} \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

ahol B_x, B_y, B_z a $\underline{B}$ vektor három komponense, mindegyik az x, y, z koordináta-komponensek három változós függvénye. A deriváltak pedig parciális deriváltak.

A jobb oldalon szereplő integrális alakban a $\underline{B}$ vektornak egy zárt felületre vett integráljáról mondjuk, hogy az nulla, vagyis zárt felületen átment mágneses fluxus mindig nulla. Ez tehát azt jelenti, hogy nincs mágneses töltés. A formulában B_n az indukcióvektor felületnél lévő értékének felület normálisa irányába mutató komponense, dS pedig a felületelem nagysága.

Tetszőleges formájú és irányú vezeték esetében az indukált mágneses tér indukció-vektora az alábbi formában írható fel, ami a Biot-Savart törvény általános formája:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_l \frac{d\underline{l} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}, \quad (6.30)$$

ahol $d\underline{l}$ vektor – vezeték eleme, – a vezeték egy pontjában az oda húzott érintő mentén az áram irányába mutat, $\underline{r}$ vektor pedig a vezeték aktuális

pontját és azt a pontot köti össze, ahol az indukció vektorát határoztuk meg.

Most alakítson a vezeték zárt görbét. Először legyen ez a görbe síkgörbe. Megmutatható, hogy az áramkör úgy viselkedik, mint egy mágneses dipólus. Ennek a dipólnyomatéka

$$\underline{m} = I A \underline{n}.$$

Itt A az áramkör által kifeszített felület, $\underline{n}$ pedig az áramkör síkjára merőleges egységvektor úgy, hogy a vektor végétől az áram irányát az óramutatóval ellentétes irányúnak figyeljük meg. A képlettel kapcsolatban fontos kiemelni, hogy benne nem a görbe hossza szerepel, hanem az általa körbefogott terület.

Ha a zárt görbe nem síkjellegű, akkor az általa körbefogott felületet képletesen kis ΔS elemekre kell felosztani, és minden egyes elemi felületen meg kell fogalmazni az elemi dipólnyomatékokat: $\Delta \underline{m} = I \cdot \Delta S \cdot \underline{n}$, majd ezeket összeadni. Az így kapott vektor precízen a következő integrál segítségével írható le:

$$\underline{m} = \int_A I \cdot \underline{n}(\underline{r}) dS.$$

Az $\underline{m}$ mágneses dipólnyomatékokat képviselő áramkör által keltett mágneses tér indukcióját az $|\underline{r}| \gg \sqrt{A}$ távolságokra a következő összefüggés adja:

$$\underline{B} = \mu \frac{3\underline{e}(\underline{m}) - \underline{m}}{|\underline{r}|^3}. \quad (6.31)$$

Figyeljük meg, hogy ez mennyire hasonlít az elektromos dipólus által indukált elektromos tér térerősség kifejezésére.

Az erővonalak körök lesznek azokban a síkokban, amelyek merőlegesek a görbe adott pontjához húzott érintőkre.

Nézzük meg a Biot-Savart törvény alkalmazását és a megjelenő mágneses erővonalakat néhány egyszerű, de az alkalmazás szempontjából fontos esetben.

Az R sugarú I árammal átjárt, köralakú vezető esetén a kör központjában az indukciós vektor $\underline{B}$ nagysága

$$|\underline{B}| = \frac{\mu I}{2R},$$

és $\underline{B}$ merőleges a kör alakú vezető síkjára.

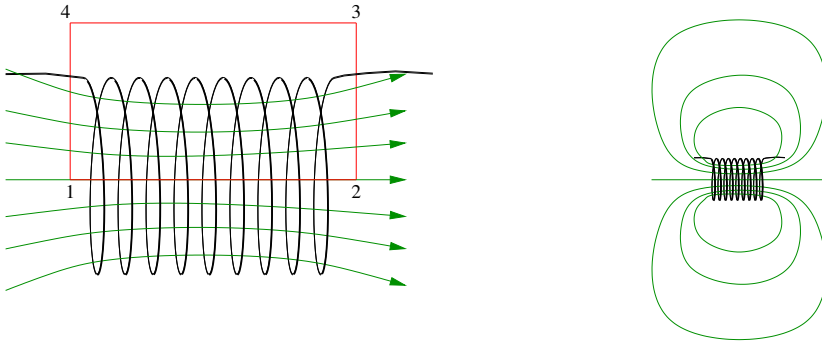
Most tegyük fel, hogy nem egy, hanem több áram folyik át egy felületen. Ekkor a felületen lévő tetszőleges zárt görbén számított mágneses indukció cirkulációjára igaz, hogy

$$\oint_C B_\tau dl = \mu \sum_k I_k, \quad (6.32)$$

ahol a jobboldali összeg a zárt görbével körülhatárolt felületen átfolyó áramok I_k erősségeinek összege. A bal oldalon B_τ a $\underline{B}$ vektor érintő irányú, a görbe adott dl elemi hosszához tartozó u.n. tangenciális komponense.

Ez a mágneses tér u.n. **gerjesztési törvénye**. (Ez egy újabb Maxwell-egyenlet, alaptörvény, vagyis axióma.) Ennek a törvénynek az alkalmazásához tekintsük az alábbi esetet.

Ha egy vezető drótot egy henger felületére N -szer feltekercselünk, u.n. szolenoidot kapunk. A szolenoid által keltett mágneses tér indukciós vektorát a következőképpen kapjuk. Feltesszük, hogy a szolenoid igen hosszú, $l \gg \sqrt{A}$, ahol A a henger keresztmetszet felülete. A szolenoid belsejében a tér jó közelítéssel homogén és a henger tengelyével párhuzamos. A



6.9. ábra. A szolenoid erővonalai

(6.32) tételt a 6.9. ábrán látható 1,2,3,4 görbére kiértékelve csak az $1 \rightarrow 2$ szakaszon kapunk járulékot, $|\underline{B}| \cdot l$. (A $2 \rightarrow 3$ illetve $4 \rightarrow 1$ szakaszokon $B_n \approx 0$, illetve $\underline{B} \approx 0$, mint a $3 \rightarrow 4$ szakaszon.) A törvény jobb oldala pedig μIN -t ad. Így megkapjuk, hogy a szolenoid belsejében:

$$B = |\underline{B}| = \mu \frac{I \cdot N}{l}, \quad (6.33)$$

ahol l a szolenoid hossza.

Ami az erővonalakat illeti, ezek hasonlítanak a mágnesrúdra jellemző vonalakra. $\underline{B}$ irányát pedig úgy kapjuk meg, hogy a vektor végéből, ami jellemzi az erővonal irányát, a vezetéken átfolyó áram iránya az óramutató járásával ellenkező legyen.

A mágneses térben mozgó töltésekre erő hat. Ezt az erőt a következő u.n. Lorentz-törvény adja meg.

Lorentz-törvény:

A mágneses térben $\underline{v}$ sebességgel mozgó q töltésre ható erő

$$\underline{F} = q\underline{v} \times \underline{B}. \quad (6.34)$$

Ennek segítségével kimutatható, hogy a vezetékre a benne áramló töltések miatt ható erő

$$\underline{F} = I\underline{l} \times \underline{B}, \quad (6.35)$$

ahol az $\underline{l}$ vektor nagysága megegyezik a vezeték hosszával, iránya pedig az I áram irányával.

A Lorentz-erőt a továbbiakban a részecskék mágneses térben történő mozgásának tanulmányozásakor fogjuk használni. Fontos megjegyezni, hogy a mágneses tér csak a mozgó töltésekre hat. Ez abból is látszik, hogy (6.34)-ben a $\underline{v}$ sebességvektor szerepel. Tehát, például egy mágnesrúd semmi hatással sem lesz egy nyugvó töltésre.

Továbbá, a vektorszorzat definíciójából következik, hogy $\underline{F}$ vektor merőleges mind a $\underline{v}$, mind a $\underline{B}$ vektorokra. Mivel

$$\underline{v} = \frac{d\underline{s}}{dt},$$

ezért $\underline{F} \perp \underline{v}$ miatt $\underline{F} \perp d\underline{s}$. Ugyanakkor, az elemi munka $\delta W = \underline{F} \cdot d\underline{s}$, ahonnan látszik, hogy $\delta W = 0$. Vagyis, kicsit meglepő, de a mágneses tér nem végez munkát.

A mágneses erőter energiataralommal bír. A mágneses energiasűrűséget a következő képlet adja:

$$e_m = \frac{1}{2\mu} \underline{B}^2. \quad (6.36)$$

6.3. Töltött részecskék mozgása vákuumban

Az elektromágneses térben (és nemcsak stacionárius térben) egy töltött testre ható erő:

$$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}). \quad (6.37)$$

Newton II. törvénye ($\underline{F} = m\underline{a}$) adja az alábbi

$$m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = q \left(\underline{E} + \frac{d\underline{r}}{dt} \times \underline{B} \right) \quad (6.38)$$

vektor-differenciálegyenletet, amelynek a megoldása írja le a test mozgását.

Ha az elektromágneses tér inhomogén, vagyis mind az $\underline{E}$ elektromos térerősség-vektor, mind a $\underline{B}$ mágneses indukció vektora az $\underline{r}$ helyvektor és t idő függvényei, a (6.38) vektor-differenciálegyenlet, vagy az ezzel ekvivalens, három csatolt skaláris egyenletből álló egyenletrendszer megoldása bonyolult, és analitikai módszerekkel általában nem oldható meg. Ilyenkor csak numerikus módszerek alkalmazása vezethet el a (közelítő) megoldáshoz.

A következő két alfejezetben azokat a nagyon egyszerű eseteket vizsgáljuk meg, amikor egy pontszerű test vagy csak elektromos, vagy csak mágneses térben mozog, és ezek a terek homogének, vagyis nem függenek sem az $\underline{r}$ -től, sem a t -től. Ezekkel az idealizált esetekkel eléggé gyakran találkozunk a gyakorlatban, illetve sokszor lehet a jelenséget ilyen módon elég kielégítően modellezni.

6.3.1. Mozgás homogén elektromos térben

Nézzük meg először a töltött részecskék mozgását homogén elektromos térben. Ekkor a tér minden pontjában az $\underline{E}$ térerősség-vektor ugyanaz, és nem változik az időben. Akkor a (6.38) differenciálegyenletet a következő formában írhatjuk fel:

$$\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \eta \underline{E}, \quad \underline{E} = \text{const}, \quad (6.39)$$

ahol $\eta = q/m$ az u.n. **fajlagos töltés**. Az elektron esetében $\eta = 0,1759 \cdot 10^{12} \text{ C/kg}$.

A megoldáshoz szükségünk van a kezdeti értékekre: az $\underline{r}_0 = \underline{r}(0)$ kezdeti helyvektorra és a $\underline{v}_0 = \underline{v}(0)$ kezdő sebességre.

A (6.39) vektoregyenletet írjuk fel három skaláris egyenletből álló egyenletrendszerként:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \eta E_x, \\ \ddot{y} = \eta E_y, \\ \ddot{z} = \eta E_z. \end{cases}$$

Látszik, hogy ez gyakorlatilag három egymástól független egyenlet, és

ezeket külön-külön oldhatjuk meg:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \eta E_x t^2 + v_{0x} t + x_0, \\ y(t) = \frac{1}{2} \eta E_y t^2 + v_{0y} t + y_0, \\ z(t) = \frac{1}{2} \eta E_z t^2 + v_{0z} t + z_0. \end{cases}$$

Itt x_0, y_0, z_0 az $\underline{r}$, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} a $\underline{v}_0$ vetületei.

Válasszuk meg úgy a koordinátarendszert, hogy a megoldást a legegyszerűbb formában kapjuk meg. Ha adott a koordinátarendszer, az adott és az általunk választott koordinátarendszerek között mindig meg lehet fogalmazni a kapcsolatot, és az eredményt utólag ki lehet fejezni az adott koordinátarendszer változóival.

Legyen az origó az $\underline{r}_0$ pontban, vagyis a kezdeti időpontban a részecske az origóban helyezkedik el. Továbbá, a z tengely legyen párhuzamos az $\underline{E}$ vektorral, vagyis $E_x = E_y = 0$, $E_z = |\underline{E}| = E$. Végül legyen a $\underline{v}_0$ vektor az yz síkban, vagyis $v_{0x} = 0$. Akkor a (6.40) egyenletek a következő formában írhatók át:

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = v_{0y} t, \\ z(t) = \frac{1}{2} \eta E t^2 + v_{0z} t. \end{cases}$$

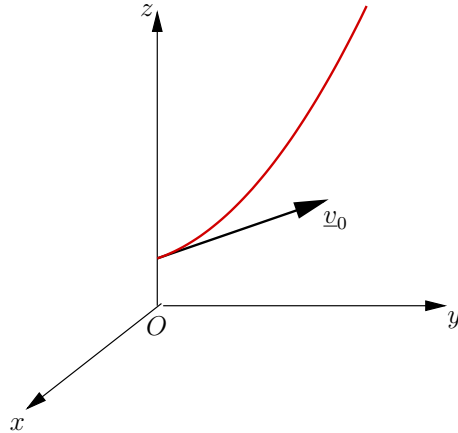
A pálya egyenletét úgy kapjuk meg, hogy kiküszöböljük a t időt. Az (6.40) képlet első egyenletéből látszik, hogy a mozgás az $x = 0$ (vagy yz) síkban zajlik, és így a pálya síkgörbe lesz. Ha most a második egyenletből kifejezzük a t -t: $t = y/v_{0y}$, és ezt behelyettesítjük a harmadik egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$z = \frac{\eta E}{2v_{0y}^2} y^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0y}} y. \quad (6.40)$$

Vagyis, hogy a pálya – egy parabola az $x = 0$ síkban. Így a részecske pályája a homogén elektromos térben jellemzően parabola. (Ld. 6.10. ábra)

Nézzünk meg egy speciális esetet az elektromos térben zajló mozgásra. Világos, hogy a (6.40) egyenletet nem lehet alkalmazni, ha $v_{0y} = 0$, ami annak az esetnek felel meg, hogy a $\underline{v}_0$ kezdeti sebességi vektor párhuzamos az $\underline{E}$ térerősség-vektorral. Ezért a fenti 6.40 egyenletrendszer második egyenlete $y = 0$ lesz. Így a pálya egyenletei $x = 0$, $y = 0$, vagyis, ez egy egyenes, ami párhuzamos a z koordináta-tengellyel, és így az $\underline{E}$ vektorral. Ez azt jelenti, hogy a részecske sebességének iránya ebben az esetben az elektromos térben nem változik.

Maga a sebesség vektor változik, és a részecske vagy gyorsul, vagy lassul, attól függően, hogy a $\underline{v}_0$ iránya egybeesik-e az $\underline{E}$ irányával, vagy ellentétes vele.



6.10. ábra. A részecske pályája a homogén elektromos térben

6.3.2. Mozgás homogén mágneses térben

Nézzük meg egy részecske mozgását homogén mágneses térben. A tér minden pontjában a $\underline{B}$ indukció vektora ugyanaz, és nem változik az idővel. Ekkor az (6.38) differenciálegyenletet a következő formában írhatjuk fel:

$$\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \eta \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \times \underline{B} \right), \quad \underline{B} = \text{const.}$$

Írjuk fel ezt a vektor-egyenletet skalár egyenletrendszer formájában:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \eta(\dot{y} B_z - \dot{z} B_y), \\ \ddot{y} = \eta(\dot{z} B_x - \dot{x} B_z), \\ \ddot{z} = \eta(\dot{x} B_y - \dot{y} B_x). \end{cases}$$

Most nem három, egymástól független differenciálegyenletet kaptunk, hanem egy igazi csatolt differenciálegyenlet rendszert. Minden egyenletben mind a három változó: x , y és z is szerepel (illetve valamelyik időszerinti deriváltja), és ezeket az egyenleteket együtt kell megoldani.

A három egyenletből álló egyenletrendszer megoldására itt is szükségünk van a kezdeti értékekre: az $\underline{r}_0 = \underline{r}(0)$ kezdeti helyvektorra és a $\underline{v}_0 = \underline{v}(0)$ kezdő sebességre.

Ismét válasszuk meg úgy a koordinátarendszert, hogy a megoldást a legegyszerűbb formában kapjuk meg. Legyen az origó az $\underline{r}_0$ pontban, vagyis a kezdeti időpontban a részecske az origóban helyezkedik el. Továbbá,

a z tengely legyen párhuzamos a $\underline{B}$ vektorral, vagyis $B_x = B_y = 0$, $B_z = |\underline{B}| = B$. Végül, legyen $\underline{v}_0$ vektor az yz síkban, vagyis $v_{0x} = 0$. Akkor a (6.41) egyenletek a következő formában írhatók át:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \eta \dot{y} B, \\ \ddot{y} = -\eta \dot{x} B, \\ \ddot{z} = 0. \end{cases}$$

Ebben a koordinátarendszerben a harmadik egyenletet külön meg lehet oldani:

$$z(t) = v_{0z} t. \quad (6.41)$$

A (6.41) első két egyenletét együtt kell megoldani. Az első egyenletből következik, hogy

$$\dot{x} = \eta y B + C_1, \quad (6.42)$$

ahol C_1 -et a kezdeti feltételek határozzák meg. Mivel $\dot{x} = v_x$ és $v_x(0) = y(0) = 0$, azt kapjuk, hogy $C_1 = 0$. Továbbá, most a második egyenletet a következő formában írhatjuk fel:

$$\ddot{y} = -\eta^2 B^2 y,$$

vagy

$$\ddot{y} + (\eta B)^2 y = 0.$$

Ilyen típusú differenciálegyenlettel már találkoztunk a fizika tanulása közben, például a harmonikus rezgőmozgásnál. Írjuk fel az egyenlet megoldását az ott tanulthoz hasonló formában:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (6.43)$$

ahol $\omega = \eta B$. Ha $t = 0$, $y(0) = 0 = A \sin(\phi)$, ahonnan következik, hogy $\phi = 0$.

A (6.43) egyenlet deriválásával kapjuk hogy: $v_y = \dot{y} = A \omega \cos(\omega t)$. Ha $t = 0$, $v_y(0) = v_{0y} = A \omega$. Így $A = v_{0y}/\omega$ és

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{\eta B} \sin(\omega t). \quad (6.44)$$

Most ezt használjuk fel (6.42)-ben és integráljuk ezt a differenciálegyenletet:

$$x = -\frac{v_{0y}}{\eta B} \cos(\omega t) + C_2.$$

A kezdeti feltételekből számoljuk ki a C_2 -t. Mivel $x(0) = 0 = -v_{0y}/(\eta B) + C_2$, látható, hogy $C_2 = v_{0y}/(\eta B)$. Így

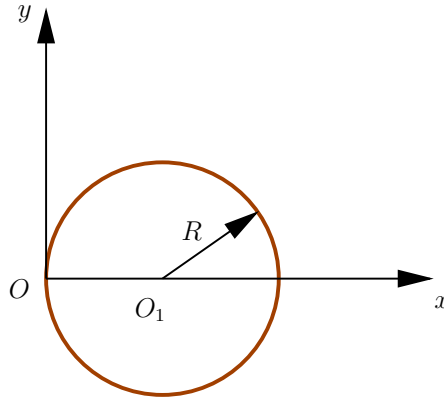
$$x(t) = \frac{v_{0y}}{\eta B}(1 - \cos(\omega t)). \quad (6.45)$$

A (6.45), (6.44) és (6.41) egyenletek írják le a részecske mozgását homogén mágneses térben.

Nézzük meg, milyen pályán mozognak a részecskék. Először látszik, hogy

$$\left(x - \frac{v_{0y}}{\eta B}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_{0y}}{\eta B}\right)^2,$$

ami nem más, mint egy $v_{0y}/(\eta B)$ sugarú $v_{0y}/(\eta B)$ középpontú kör. (Ld. a 6.11. ábra)



6.11. ábra. A pálya vetülete az xy -síkra

Vagyis, a pálya vetülete az xy -síkra egy kör, és a kör mentén a részecske mozgása körmozgás $\omega = \eta B$ körfrekvenciával. Hozzá adódik a z irányú állandó sebességű mozgás (6.41). Így a részecske pálya a homogén mágneses térben jellemzően spirál.

A spirál második paraméterét, a menetemelkedést, a következő megfontolásból számoljuk ki. A részecske körmozgásának periódusa

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\eta B}. \quad (6.46)$$

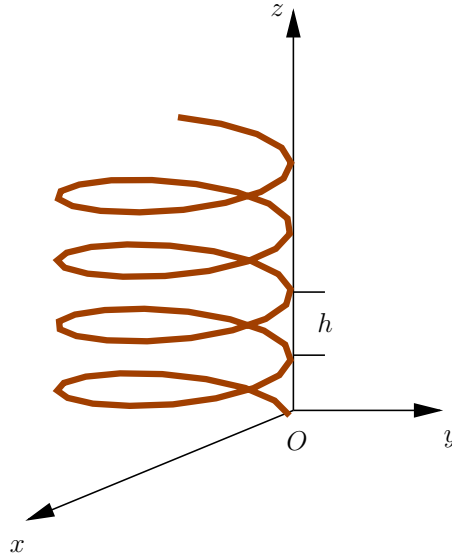
Ez az idő alatt a részecske egy teljes kört tesz meg, és, ugyanakkor a z irányban a $v_{0z} \cdot T$ utat tesz meg, ami megegyezik a h menetemelkedéssel:

$$h = \frac{2\pi v_{0z}}{\omega}.$$

Mivel $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, $v_{0z} = v_0 \cos\theta$, ahol $v_0 = |\underline{v}_0|$, ahol θ a $\underline{B}$ és $\underline{v}_0$ közötti szög, a spirál paraméterei: a kör R sugara és a h menetemelkedés, a következő formában írhatóak fel:

$$R = \frac{v_0}{\omega} \sin\theta, \quad h = \frac{2\pi v_0}{\omega} \cos\theta, \quad \omega = \eta B. \quad (6.47)$$

(Ld. a 6.12. ábra)



6.12. ábra. Spirál-pálya a mágneses térben

Fent megjegyeztük, hogy homogén mágneses térben a részecske jellemzően spirál-pályán mozog. A mágneses térnek ezt a tulajdonságát széles körben arra használják, hogy ne oszoljon szét a részecskék nyalábja.

Nézzünk meg néhány speciális esetet.

A (6.47) képletből látszik, hogy ha $\theta = \pi/2$, $h = 0$. Így, ha a $\underline{v}_0$ kezdősebesség vektor merőleges a $\underline{B}$ indukció vektorra, a pálya a körre redukálódik. Vagyis a részecske körmozgást végez.

Egy másik speciális eset akkor jelenik meg, ha $\theta = 0$, vagyis a kezdősebesség vektor párhuzamos a $\underline{B}$ indukció vektorral. Ekkor az R sugár eltűnik, ami azt eredményezi, hogy a pálya egyenes vonalú, a $\underline{B}$ indukció vektorával párhuzamos lesz. Az elektromos térrel szemben, a mágneses tér esetében e mozgás nem csak egyenes vonalú, de egyenletes is lesz, vagyis a sebességvektornak se az iránya, se a nagysága nem változik.

6.3.3. Az elektromos tér munkája. A részecskék gyorsítása

Vizsgáljuk meg, milyen munkát végez az elektromos tér azzal, hogy egy q töltést elmozdít az A pontból a B pontba.

Az elektromos tér potenciális energiájának definíciójából következik, hogy ez a munka $W_{A \rightarrow B} = W_B - W_A$. Továbbá, mivel az elektromos tér – potenciális erőter, ezért érvényes benne a mechanikai (kinetikai + potenciális) energia megmaradási törvénye:

$$\frac{mv_A^2}{2} + W_A = \frac{mv_B^2}{2} + W_B,$$

ahol v_A és v_B a test sebessége az A és a B pontokban. (Feltételezzük, hogy a kinetikai energia csak a translációs mozgást foglalja magában.)

Mivel az U feszültségre az $U = (1/q)W$ kifejezés érvényes, a fenti egyenletből kiszámíthatjuk, hogyan változik a részecske sebessége az elektromos tér hatására. A test sebességének változása

$$v_B^2 = v_A^2 + 2\eta (U_A - U_B). \quad (6.48)$$

Itt $\eta = q/m$ a fajlagos töltés.

Figyeljük meg, hogy a (6.48)-ban η lehet pozitív és negatív is, attól függően, hogy milyen előjelű a q töltés. Az U feszültség is lehet pozitív ill. negatív. Például, egy Q pozitív töltés által keltett térben az U feszültség pozitív, és növekszik e töltéstől mért távolság csökkenésével. Így, ha az A pont távolabb van a Q töltéstől, mint a B pont, $U_A - U_B$ negatív, de ha q is negatív (mint például az elektron esetén), akkor $2\eta (U_A - U_B)$ nyilvánvalóan pozitív, és a q töltés sebessége növekszik: $|v_B| > |v_A|$. De ha $2\eta (U_A - U_B)$ negatív, akkor a sebesség csökken.

Vannak olyan esetek, amikor $|v_B| \gg |v_A|$, ekkor feltételezni lehet, hogy $|v_A| = 0$. Ilyen esettel találkozunk, például, a katódból kijövő elektronok és ionok esetén, amelyek sebessége elenyésző a külső feszültség által gyorsított részecskék sebességéhez képest.

Ebben az esetben a (6.48) képletet át lehet írni mint

$$v_B = v = \sqrt{2\eta U}, \quad (6.49)$$

ahol U a feszültségek különbsége az A és B pontokban:

$$U = U_A - U_B.$$

Gyakran találkozunk olyan esettel, amikor feltételezni lehet, hogy $U_A = 0$, más szóval, matematikailag A egy végtelen távoli pont. Akkor U a B pontbeli feszültség és $U = -U_B$. Ilyenkor a gyorsításra (és eleve a mozgásra) csak akkor kerül sor, ha $\eta U > 0$.

6.4. példa: Számoljuk ki, mennyire gyorsul fel egy elektron, ha 4 V feszültség gyorsítja!

Megoldás: A (6.49) képletet felhasználva azt kapjuk, hogy

$$v = \sqrt{2\eta U} = \sqrt{2 \cdot 0,1759 \cdot 10^{12} \text{ C/kg} \cdot 4 \text{ V}} = 1,186 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Mozgás nagy sebességek esetén. Fontos figyelembe venni, hogy a fenti (6.48), (6.49) képletek csak addig használhatóak (csak akkor vezetnek jó eredményhez), ha a sebesség a fény sebességéhez képest kicsi. Ha a sebesség közelít a fény sebességéhez, figyelembe kell venni a relativisztikus effektusokat. (Lásd a 13. fejezetet.)

A test tömege a sebesség növekedtével növekszik. Ha m_0 a test nyugalmi tömege, az m mozgási tömeg kiszámolható mint

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.50)$$

ahol c a fény sebessége.

A test összes energiája kifejezhető Einstein képletével:

$$E = mc^2.$$

Ha ebbe behelyettesítjük a (6.50)-öt, és kivonjuk az $E_0 = m_0 c^2$ nyugalmi energiát, akkor kapjuk meg az energiának azt a részét, amely a mozgással kapcsolatos, vagyis a mozgási energiát.

A mozgási energia nagy sebesség esetén:

$$E_{mozg} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (6.51)$$

Ebből $v \ll c$ esetén megkaphatjuk, hogy $E_{mozg} \approx m_0 v^2 / 2$, vagyis a jól ismert kinetikus energiát. Itt felhasználtuk a matematikai analízisből ismert relációkat: ha α kicsi ($\alpha \ll 1$), akkor $\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \alpha/2$, és $1/(1 - \alpha) \approx 1 + \alpha$.

A mozgási energia (6.51) kifejezését használjuk fel a sebesség kiszámítására abban az esetben, ha a kezdeti sebesség v_A egyenlő nullával, de a végsebesség várhatóan már nem sokkal kisebb, mint c . Ekkor

$$E_{mozg} = q(U_A - U_B).$$

Ebből (6.51) segítségével $U_A = 0$ és $v_A = 0$ esetén

$$v_B = v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta_0 U}{c^2}\right)^2}}. \quad (6.52)$$

Itt $\eta_0 = q/m_0$, $U = U_B$.

A kérdés az, hogy mikor kell használni a (6.52)-et, és mikor a (6.49)-et. Azt lehet mondani, hogy (6.49) torz eredményekhez vezethet, ha a sebesség megközelíti a fény sebességét. Ilyen esetekkel most már a mindennapi életünkben is találkozunk. Például, a színes televízió képcsövében az elektronok sebessége annyira megközelíti a fény sebességét, hogy a relativitáselmélet figyelmen kívül hagyása észrevehető kép hibájához vezethet.

Ha a test (részecske) sebessége sokkal kisebb, mint a fény sebessége (például, tízszer kisebb), akkor a hiba nem lesz több mint 0,5%, és ha ez a pontosság elfogatható (ami a feladattól, a szituációtól függ), akkor (6.49)-et érdemes alkalmazni.

Természetesen, ebben az esetben a (6.52) képlet is használható, de sokkal több számolással gyakorlatilag ugyanazt az eredményt kapjuk.

A (6.50) képletből következik, hogy ha a testnek az m_0 nyugalmi tömege nem nulla, akkor a test sebessége soha sem lehet egyenlő vagy nagyobb mint c .

Ha pedig egy részecske sebessége egyenlő a fény sebességével, ez azt jelenti, hogy ennek a részecskének nincs nyugalmi tömege.

Ilyen „részecskék” például a látható fény fotonjai, vagy minden más elektromágneses sugárzás fotonjai.

6.5. példa: Mekkora feszültséggel kell gyorsítani egy elektront, hogy a tömege a nyugalmi értéknél 6%-kal nagyobb legyen? Mekkora ilyenkor a sebesség?

Megoldás: Először számoljuk ki a sebességet, amely mellett a tömeg a nyugvó tömegének 1,06-szorosa. A (6.50) képletből következik, hogy

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1,06}\right)^2} = 0,995 \cdot 10^8,$$

vagyis, a sebesség csak háromszor kisebb mint a fény sebessége. Így a relativitáselméletet kell alkalmazni.

A (6.51) képletből megkapjuk, hogy

$$E_{mozg} = (m - m_0)c^2 = qU,$$

ahonnan, mivel $m - m_0 = 0,06 m_0$,

$$U = 0,06 \frac{c^2}{\eta_0} = 0,06 \frac{9 \cdot 10^{16}}{0,1759 \cdot 10^{12}} = 3,07 \cdot 10^4 \text{V}.$$

Ha a feladat megoldásánál nem vettük volna figyelembe a relativitáselméletet, vagyis a (6.49) képletet használtuk volna, akkor a következő eredményt kaptunk volna:

$$U = \frac{v^2}{2\eta} = \frac{0,995^2 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 0,1759 \cdot 10^{12}} = 2,814 \cdot 10^4 \text{V},$$

ami 9%-kal kisebb, mint a fenti pontos eredmény.

Azt, hogy a megfelelő esetekben mennyire fontos a (6.52) képlet használata, a következő példában mutatjuk be.

6.6. példa: Az elektromos tér feszültsége $3 \cdot 10^5 \text{V}$. Számoljuk ki az elektron sebességét a (6.49) képlet, azután a (6.52) képlet alkalmazásával.

Megoldás: A (6.49) képlet szerint az elektron sebessége:

$$v = \sqrt{2\eta U} = \sqrt{2 \cdot 0,1759 \cdot 10^{12} \cdot 3 \cdot 10^5} = 3,25 \cdot 10^8 \text{m/s}.$$

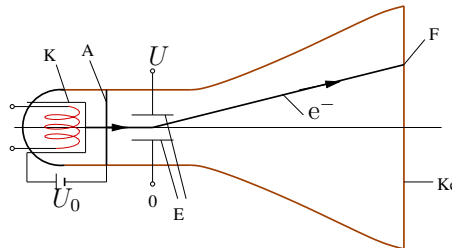
A sebesség (6.52) szerint:

$$v = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{0,1759 \cdot 10^{12} \cdot 3 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{16}}\right)^2}} = 2,33 \cdot 10^8 \text{m/s}.$$

Az első esetben a kapott eredmény lehetetlen: az elektron sebessége nagyobb, mint a fény sebessége! Ebben az esetben a (6.49) alkalmazása nem jogos. A (6.52) használatakor ilyen hibás eredmény nem fordulhat elő.

6.3.4. Képcsövek működése

Az elektromos eltérítésű képcső Az elektromos eltérítésű képcső működésének alapja a következő: A képcső hátuljában egy berendezés elektronokat állít elő, amiket elektromos térrel felgyorsítunk és egy közel párhuzamos nyalábot hozunk létre. Ezt a nyalábot úgy irányítjuk, hogy egyéb külső hatás nélkül az az elöl levő képernyő közepére csapódjon be. Ezen nyaláb irányát úgy szabályozzuk, hogy átvezetjük két fém lemezpár között, amelyek egyike vízszintes, a másika függőleges irányú elektromos teret állít elő. A lemezekre kapcsolt feszültség változtatásával irányítani tudjuk a nyalábot, és azt a képernyő tetszőleges pontjára tudjuk vezetni. A képernyő felülete speciális anyaggal van bevonva, ami a becsapódó elektronok hatására fényt bocsát ki, így láthatjuk a képet.



6.13. ábra. Elektromos eltérítésű képcső vázlata

Az itt leírtakat a 6.13. ábra szemlélteti, ahol „K” – katód, „A” – anód, „E” – eltérítő lemezek, „Ke” – képernyő, „e⁻” – elektron-nyaláb, „F” – fényfolt.

Itt csak a legfontosabb részeket tüntettük fel, továbbá az egyszerűség kedvéért lehangytuk a vízszintes (azaz az ábra síkjára merőleges) irányban való eltérítést okozó lemezeket.

Most nézzük meg pontosabban a folyamat egyes részleteit.

Az elektronok előállításának egyik legegyszerűbb módja az, hogy a képcső hátuljába egy izzószálat helyeznek el, amit elektromos árammal felhevítenek. Ekkor a hőmozgás miatt elektronok szakadnak ki a fém felületéből.

Az elektronok forrásához képest néhány cm-rel előbbre található egy anód, azaz egy fémdarab, ami a forráshoz képest pozitív feszültségre van kapcsolva. Ez a gyorsítófeszültség több ezer volt szokott lenni, és bizonyos készülékeknél (oszilloszkóp) kívülről szabályozható. Az anód alakja változó, a tervezésnél fontos szempont, hogy minél párhuzamosabb nyalábot

állítson elő.

Az elektronokat egy fém lemezpár között vezetjük át. Ezen lemezpár közti feszültséget szabályozva változtathatjuk az elektromos térerősséget, így az elektronok eltérítését is. Az eltérített nyaláb a lemezpárt elhagyva egyenes vonalban repül tovább és végül becsapódik a képernyőbe, ahol emiatt egy fényfolt keletkezik.

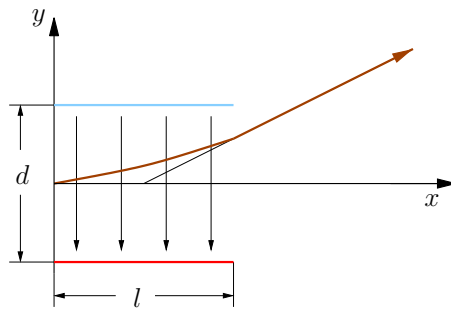
A fényfolt helyzetét tehát szabályozni tudjuk a lemezpárra adott feszültség segítségével, és intenzitása is változtatható, ha az elektronforrást megfelelően szabályozzuk. (Ennek több módja ismeretes, amikre most terjedelmi okokból nem térünk ki. Csak annyit említünk meg, hogy ez a szabályozás TV-képcsövek esetén nagyon gyors kell legyen, míg oszcilloszkópoknál elegendő egy lassú szabályozhatóság.)

Most nézzük meg a folyamat részletes matematikai leírását. Az egyszerűség kedvéért a klasszikus fizikának megfelelő összefüggéseket fogjuk használni.¹⁹

Az elektronokat az U_0 gyorsítófeszültség

$$v_0 = \sqrt{2eU_0}$$

feszültségre gyorsítja fel.



6.14. ábra. Elektromos eltérítés vázlata

A 6.14. ábra jelöléseit használva az elektronok $v_x = v_0$, $v_y = 0$ sebességgel lépnek be az eltérítő lemezek közé. A lemezek között kialakuló térerősség y irányú, és nagysága

$$E = \frac{U}{d},$$

¹⁹Ez azt jelenti, hogy néhány 10 kV gyorsítófeszültség esetén már mérhető hibát követünk el.

ahol U a lemezek közti feszültség, d a lemezek távolsága. Ez azt jelenti, hogy az elektronok y irányban $a = Eq/m_0 = E\eta$ gyorsulással fognak mozogni, így a lemezek között parabolapályán haladnak. (Ld. 6.3.1 fejezet.) Tehát a lemezek közti térben igaz lesz, hogy

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 t, \\y(t) &= \frac{\eta E}{2} t^2, \\v_y(t) &= \eta E t.\end{aligned}$$

Ebből kifejezhető, hogy

$$y(x) = \frac{\eta E}{2v_0^2} x^2, \quad v_y(x) = \frac{\eta E}{v_0} x.$$

Az elektronok $T = l/v_0$ ideig tartózkodnak az l hosszúságú lemezek között, így kilépéskor az y irányú sebességkomponensük $v_y = \eta E T$ lesz.

Tehát a lemezek közül kilépő elektronok y koordinátája és v_y sebessége:

$$\begin{aligned}y(l) &= \frac{\eta E}{2v_0^2} l^2, \\v_y(l) &= \frac{\eta E}{v_0} l.\end{aligned}$$

A kilépés után az elektronok egyenes vonalú egyenletes mozgással mozognak a képernyőig. Ezen egyenes meredeksége (az ábrán feltüntetett x - y koordináta-rendszerben)

$$m = \frac{v_y}{v_0} = \frac{\eta E}{v_0^2} l$$

lesz. Tehát az elektronok eltérítés utáni pályájának egyenlete:

$$y(x) = m(x - l) + y(l) = \frac{\eta E}{2v_0^2} l(2x - l).$$

Könnyű belátni, hogy $y(l/2) = 0$, tehát bármilyen eltérítés esetén az eltérített nyaláb a lemezpár geometriai középpontján átmenő egyenes mentén fog mozogni.

Feltételeztük, hogy az elektromos tér a lemezek között homogén és a képcső egyéb részeiben 0. Ez jó közelítés, de pontos tervezéskor figyelembe kell venni a lemezek közül kihajló erővonalak hatását is. Ez azonban az összefüggések jellegét nem befolyásolja.

Legyen a képernyő L távolságra a lemezpár középpontjától, és $l \ll L$. Ekkor az előbbieket alapján az m meredekségű egyenes mentén mozgó elektronok Y becsapódási koordinátája

$$Y = mL = \frac{\eta E}{v_0^2} lL$$

lesz, amibe a fenti $v_0 = \sqrt{2\eta U_0}$ és $E = U/d$ összefüggéseket beírva

$$Y = \frac{lL}{2dU_0} U$$

adódik.

Az

$$S_e = \frac{dY}{dU} = \frac{lL}{2dU_0}$$

mennyiséget a képcső **eltérítési érzékenysége**nek nevezzük, hisz ez mondja meg, hogy egységnyi eltérítőfeszültség mennyire téríti el fényfoltot a középponttól.

Vegyük észre a következőket:

- Az érzékenység egyenesen arányos az l/d mennyiséggel, tehát nagyobb érzékenységhez egymástól kisebb távolságban elhelyezett hosszabb lemezek kellenek.
- Az érzékenység egyenesen arányos L -lel, tehát hosszabb képcsővel nagyobb érzékenység érhető el.
- Az érzékenység fordítottan arányos U_0 -lal. Ez azt jelenti, hogy kisebb gyorsítófeszültség kell, ha nagyobb érzékenységet szeretnénk elérni. U_0 -t viszont nem csökkenthetjük tetszőlegesen, mert lassúbb elektronok halványabb foltot eredményeznek a képernyőn. Így a konkrét készülékek esetén egy ésszerű kompromisszumra kell törekedni.

Az elektromos eltérítésű képcsővel a következő fő problémák merülnek fel:

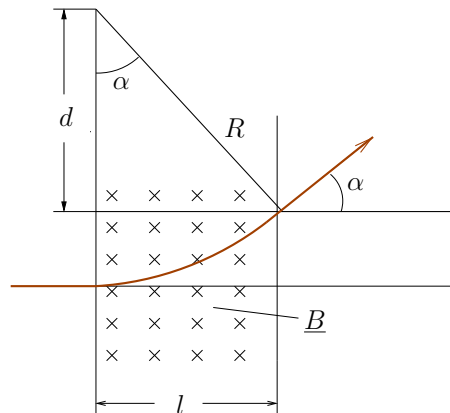
- Nagy eltérítés esetén a nyaláb beleütközhet a lemezek szélébe. Ezen néha úgy segítenek, hogy nem sík, hanem hajlított lemezeket alkalmaznak.
- Nagy eltérítés esetén jelentőssé válik a lemezek széleinél szórt elektromos tér hatása is. Ez a nyaláb fókuszáltságát rontja, valamint azt eredményezi, hogy az $Y(U)$ függvény nem lesz lineáris, tehát az ernyő különböző részein különböző lesz az érzékenység.

- Az érzékenység növelése érdekében l -et érdemes növelni. Ekkor viszont az elektronok hosszabb ideig tartózkodnak a lemezek között, tehát gyorsan változó feszültség hatását nem tudják annyira követni. Ez azt jelenti, hogy ekkor csökken a rendszer határfrekvenciája.

Ezen problémák miatt elektromos eltérítés esetén maximálisan kb. 15° -os eltérítést lehet alkalmazni, ami az ernyőátmérőhöz képest hosszú képcsövet eredményez. (Ezért nem alkalmaznak TV-készülékekben elektromos eltérítést. Egy normál méretű képernyőhöz ugyanis kb. 2 m hosszúságú képcső tartozna.)

A mágneses eltérítésű képcső A mágneses eltérítésű képcső az elektromostól abban különbözik, hogy a cső „nyakrészén” a csövön kívül tekercsek helyezkednek el, és ezeken áramot átfolyatva szabályozható lesz a mágneses tér, így az elektronok mozgási iránya is. A tekercsekkel olyan mágneses teret kell előállítani, ami merőleges a képcső tengelyére.

Becsüljük meg a mágneses eltérítésű képcső érzékenységét. Tegyük fel, hogy a tekercsekkel egy l hosszúságú szakaszon B indukciójú teret állítunk elő. Ekkor az eltérítő részben az elektronok valamilyen R sugarú körpályán fognak mozogni, és utána egyenes vonalban csapódnak bele a képernyőbe. (Ld. 6.15. ábra.) Itt $d = \sqrt{R^2 - l^2}$.



6.15. ábra. Mágneses eltérítés

Az előzőek alapján tudjuk, hogy az elektronok sebessége:

$$v_0 = \sqrt{2\eta U_0},$$

a pályasugár pedig

$$R = \frac{v_0}{\eta B} = \sqrt{\frac{2U_0}{\eta}} \frac{1}{B}.$$

Az ábra alapján látható, hogy az eltérülés α szögére igaz lesz, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{\sqrt{R^2 - l^2}}.$$

Foglalkozzunk az egyszerűség kedvéért a kis szögű eltérítések esetével. Ekkor nyilván $R \gg l$, azaz

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{l}{R}.$$

Az eltérített elektronok tehát egy $\operatorname{tg} \alpha = l/R$ meredekségű egyenes mentén fognak mozogni. Ez azt jelenti, hogy az L távolságban levő képernyő középpontjától $Y = L \operatorname{tg} \alpha$ távolságra csapódnak be, azaz

$$Y = Ll \sqrt{\frac{\eta}{2U_0}} B.$$

A mágneses eltérítésű képcső eltérítési érzékenysége (kis szögek esetére) tehát

$$S_m = \frac{dY}{dB} = Ll \sqrt{\frac{\eta}{2U_0}}.$$

Vegyük észre a következőket:

- S_m tartalmazza az η fajlagos töltést, míg a korábbi S_e nem tartalmazta. Ez azt jelenti, hogy mágneses eltérítés esetén az elektronok és a képcsőben keletkező negatív ionok máshova csapódnak be, míg elektromos eltérítés esetén nem volt különbség köztük. Pontosabban: mivel az ionok fajlagos töltése több ezerszer kisebb az elektronokénál, ezért ha az elektronok a képernyő felületére bárhova csapódnak, az ionok alig fognak eltérülni, és a képernyő közepére, az ún. „ionfolt”-ra fognak becsapódni. Ez az állandó igénybevétel károsíthatja a képernyő közepét, így mágneses eltérítés esetén valahogy gondoskodni kell arról, hogy az ionokat kiszűrjük.
- A gyorsítófeszültség négyzetgyöke szerepel S_m kifejezésében, míg az elektromos eltérítés esetén maga a gyorsítófeszültség volt megtalálható a képletben. Ez azt jelenti, hogy mágneses eltérítés esetén a rendszer kevésbé érzékeny a gyorsítófeszültség változására, mint az elektromos.

A mágneses eltérítés esetén nem lép fel az a jelenség, hogy az elektronok az eltérítő rendszerbe ütköznenek, és a nyaláb fókuszáltsága sem romlik annyira, mint az elektromos esetben. Ezért a mágneses eltérítés nagyobb eltérítési szögeket, így rövidebb képcsöveket tesz lehetővé. (Főleg ez az oka, hogy TV-készülékekben ezt alkalmazzák.)

A mágneses eltérítés egyik fő hátránya, hogy sokkal nagyobb teljesítmény szükséges a működtetéséhez, mint az elektromoséhoz, és a határfrekvencia is általában alacsonyabb.

6.4. Elektromos és mágneses tér anyagokban

6.4.1. Elektromos tér dielektrikumban

Eddig az elektromágneses tereket vákuumban tanulmányoztuk. Vizsgáljuk most meg az elektromos és mágneses tér sajátosságait anyagban.

Már a 18. században az anyagok között megkülönböztettek vezetőket és szigetelőket. A vezetőben, pl. a fémekben, az átlatok testében, a földben a létrehozott elektromos állapot elterjed, a töltés mozoghat.

Már előbb említettük, hogy a vezetőben a töltés a felületen eloszlik. Ezzel szemben a szigetelő anyagokban a töltés nem mozoghat, és elfoglalhatja az egész térfogatot.

A szigetelők, vagy dielektrikumok fontos jellemzőire a kondenzátorok tanulmányozása közben figyeltek fel. Emlékezzünk az un. Faraday-kísérletre, ami abból áll, hogy a síkkondenzátor lapjai közé egy dielektrikum lemezt tesznek. A lapok közötti feszültség, ami vákuumban U_0 értéket mutatott, U értékre csökken ($U < U_0$). Ezért a (6.18) képlet alapján a kondenzátor kapacitása növekszik:

$$C = \frac{Q}{U}, \quad C > C_0 = \frac{Q}{U_0}. \quad (6.53)$$

Ha a dielektrikumot kivesszük, helyreáll az eredeti U_0 feszültség, és közben a Q töltés nem változik.

A kondenzátor kapacitása nagyon erősen változhat attól függően, hogy milyen dielektrikum kerül a kondenzátor lapjai közé. Ezt az ε' relatív dielektromos állandóval mérjük.

Relatív dielektromos állandó (vagy permittivitás):

$$\varepsilon' = \frac{C}{C_0} = \frac{U_0}{U} > 1. \quad (6.54)$$

anyag	ϵ'
Levegő	1,0006
Parafin	1,9–2,2
Üveg	5–7
Kőolaj	2
Etilalkohol	24
Víz	81

9. táblázat. Néhány anyag relatív dielektromos állandója

Néhány anyag relatív dielektromos állandóját a 9. táblázat mutatja.

6.7. példa: A 6.3. példában kiszámítottuk a gömbkondenzátor kapacitását vákuumban. Hogyan változik a kondenzátor kapacitása, ha a gömbfelületek közötti rést vízzel töltjük meg?

Megoldás: A fenti példában a C_0 vákuumbeli kapacitás egyenlő $0,2114 \cdot 10^{-9}$ C/V. Ha a felületek közé dielektrikumot teszünk, akkor a kapacitás növekszik: a (6.54) képlet szerint $C = \epsilon' \cdot C_0$. A víz relatív dielektromos állandója $\epsilon' = 81$. Így $C = 0,1712 \cdot 10^{-7}$ T.

A dielektrikumban nemcsak a feszültség, hanem a térerősség-vektor nagysága is csökken. Ha az adott töltések által indukált elektromos tér térerősség-vektorát vákuumban $\underline{E}_0$ -val jelöljük, a dielektrikum jelenlétében pedig $\underline{E}$ -vel, akkor

$$\underline{E} = \frac{1}{\epsilon'} \underline{E}_0. \quad (6.55)$$

Megjegyezzük, hogy mind a (6.53), mind a (6.55) képletekben feltételeztük, hogy a dielektrikum homogén és izotróp közeg.

A vákuumbeli elektromos és mágneses terek leírására az $\underline{E}$ elektromos térerősség-vektort és a $\underline{B}$ mágneses indukció vektorát vezettük be. Az anyagban kialakuló elektromos és mágneses terek leírására bevezetünk további két vektort: a $\underline{D}$ dielektromos eltolás vektorát (vagy más szóval az elektromos tér indukcióvektorát), és (majd később) a $\underline{H}$ mágneses térerősség vektorát.

Dielektromos eltolás vektora homogén, izotróp anyagban:

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}, \quad (6.56)$$

ahol ϵ a közeg (abszolút) dielektromos állandója.

A teljes (abszolút) dielektromos állandó kifejezhető a vákuumbeli dielektromos állandó és a relatív dielektromos állandó szorzatával:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon'. \quad (6.57)$$

Ebből a képletből az is világos, hogy ε' -nak nincs mértékegysége, az ε -nak és ε_0 -nak pedig megegyezik a mértékegysége.

Fogalmazzuk át a Gauss-tételt a dielektrikumra. A vákuumban érvényes (6.7) reláció átalakul, mivel mind a feszültség, mind az elektromos térerősség-vektor nagysága is csökken (ld. (6.55) képlet).

Gauss-tétel a dielektrikumban:

$$\oint_S D_n dS = \oint_S \varepsilon E_n dS = \sum_i Q_i. \quad (6.58)$$

Megjegyezzük, hogy a Q_i „valódi” töltések mellett a Q_i/ε' -t **szabad töltéseknek** nevezzük.

A dielektrikumban továbbra is érvényes a

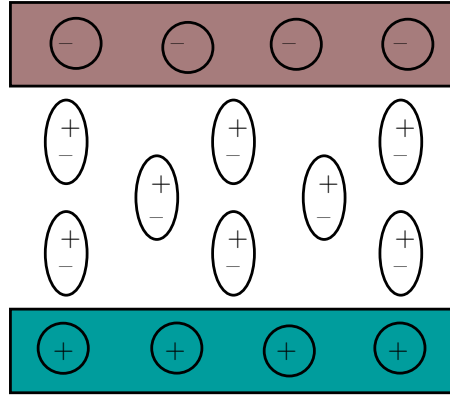
$$\oint_C E_\tau dl = 0$$

egyenlet, vagyis az elektromos tér a dielektrikumban is örvénymentes maradt.

A vákuumban $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$. A dielektrikumban a dielektromos eltolás vektorában belefoglaltunk még egy tagot, a **$\underline{P}$ polarizációt**:

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}. \quad (6.59)$$

Külső elektromos tér hatására a testet alkotó molekulák, atomok, ionok polarizálódnak, a tér irányába (az erővonalak irányába) mutató elektromos dipólus momentumot kapnak, illetve a már meglévő elektromos dipólusok a tér irányába fordulnak. Az így kialakult rendezett dipólusok összegét az egész testben a $\underline{P}$ vektorral lehet jellemezni. (Ld. a (6.16). ábra) Az így kialakuló dipól láncok töltései az anyag térfogatában teljesen kompenzálják egymást, a töltéseket tartalmazó felületekhez – pl. fémhez – érintkező részeiken lévő töltések pedig az őket indukáló szabad töltéseket kompenzálják részlegesen. Ezért lesz a kialakuló térerősség kisebb, mivel azt a kompenzálatlan szabad töltések hozzák létre.



6.16. ábra. Kondenzátor dielektrikummal

A dielektrikumot nem csak a polarizáció jellemzi, hanem az un. belső elektromos tér is, amelynek térerőssége szoros kapcsolatban áll a polarizációval.

Az indukció vektor definíciójából $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$. Ebből és a (6.59)-ből a polarizációra azt kapjuk, hogy

$$\underline{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \underline{E}.$$

Így a $\underline{P}$ homogén és izotróp anyag esetén párhuzamos mind a $\underline{D}$ indukciós vektorral, mind az $\underline{E}$ térerősség-vektorral.

Továbbá, felhasználva a relatív dielektromos állandót, az előző képletet átírhatjuk, mint

$$\underline{P} = \varepsilon_0(\varepsilon' - 1) \underline{E} = \varepsilon_0 \chi \underline{E}, \quad (6.60)$$

ahol $0 < \chi = \varepsilon' - 1$ a **szuszeptibilitás**. Mind az ε , mind a χ az anyagot jellemzik, ezért ezek **anyagállandók**. A (6.60)-ból látszik a $\underline{P}$ vektor (és az $\varepsilon_0 \cdot \chi$ szorzat) fizikai jelentése. Legyen egységnyi a térerősség-vektor (pl. $|\underline{E}| = 1 \text{ V/m}$). Ennek hatására a dielektrikumban kialakuló dipólusmomentum $|\underline{P}|$ nagysága $\varepsilon_0 \cdot \chi$ (számértékileg).

A dielektrikumban kialakuló $\underline{E}_{bel}$ belső elektromos tér térerősség-vektora az $\underline{E}$ külső térerősség-vektor és a polarizációs töltések által kialakított elektromos mikroterek összege.

A gázokban, ahol kis sűrűség mellett a polarizációs effektusok gyengék, a belső elektromos tér gyakorlatilag megegyezik a külső térrel: $\underline{E}_{bel} = \underline{E}$.

Folyadékokban és a szilárd testek többségében ezek az effektusok fontos szerepet játszanak, és a kísérletek azt mutatták, hogy ezekben a közegekben

$$\underline{E}_{bel} = \underline{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0\chi} \underline{P}.$$

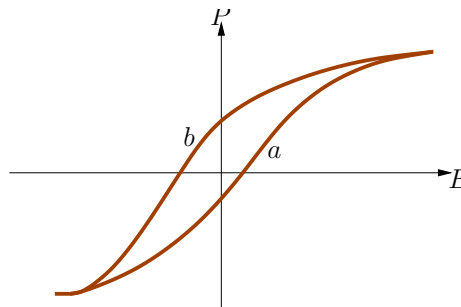
6.4.2. Ferroelektromosság. Piezoelektromosság

Bizonyos dielektromos kristályokban akkor is kialakulhat állandó polarizáció, ha az $\underline{E}$ külső tér hiányzik. Ez a spontán polarizáció a molekulák makrokomplexumainak elektromos hatása. Ezt a jelenséget **ferroelektromosságnak** nevezik.

Fontos, hogy ezeknek a kristályoknak nincsen szimmetria centruma. Az ilyen kristályok további jellemzője az, hogy a relatív dielektromos állandójuk igen nagy lehet.

Ferroelektromosság esetén a $\underline{P}$ polarizáció az $\underline{E}$ -nek már nem lineáris, hanem sokkal bonyolultabb és nem egyértelmű függvénye. Továbbá, ezekben az anyagokban a $\underline{P}$ és a $\underline{E}$ vektorok nem párhuzamosok egymással.

A kristály egy meghatározott tengelyével párhuzamosan alkalmazott $\underline{E}$ elektromos tér növelésével a polarizáció csak bizonyos pontig növekszik, ahol megjelenik a telítődés. (Ld. a 6.17. ábrán az „a” vonalat).



6.17. ábra. P – E függvény: hiszterézis

Ha a térerősség-vektor nagysága csökken, a polarizáció is csökken, de már nem az „a” vonal, hanem a „b” vonal szerint. Ezt a jelenséget **elektromos hiszterézisnek** nevezik.

Megjegyezendő, hogy ez a jelenség csak egy bizonyos hőmérsékletig jellemző. Ezt a karakterisztikus hőmérsékletet Curie-pontnak nevezik. Ha a hőmérséklet magasabb, mint a Curie-pont, a kristályok úgy viselkednek, mint a többi dielektrikum.

Piezelektromosság jelensége a következő: mechanikai feszültség (deformáció) hatására a kristályok polarizálódnak, és a felületükön elektromos töltések alakulnak ki. Ezeket a kristályokat az jellemzi, hogy a szimmetria centrumai nem figyelhetők meg,

A piezelektromosság jelenségét fordított módon használják fel leggyakrabban a gyakorlatban: a felületre bevezetett elektromos feszültség hatására a kristály deformálódik, és ha ez a feszültség gyorsan változik, a felület el kezd mozogni és ezalatt hullámokat generál a környezetben. Így az elektromos jelek mechanikai jelekké, azaz hanggá (vagy, ami gyakoribb, ultrahanggá) alakulnak át.

Az ultrahang ily módon történő kialakulásával és ennek alkalmazásával a hangtanban majd részletesebben foglalkozunk.

6.4.3. Mágneses tér dielektrikumban

A mágneses teret az anyagban a mágneses tér $\underline{B}$ indukcióvektora és a $\underline{H}$ mágneses térerősség-vektor jellemzik. E vektorok közötti viszony a vákuumban nagyon egyszerűen írható le:

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{H}, \quad (6.61)$$

ahol $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/(Am)}$ a vákuumbeli permeabilitás.

Homogén, izotróp anyagban a két vektor közötti kapcsolat hasonlít az előzőre:

$$\underline{B} = \mu \underline{H}, \quad (6.62)$$

de most a μ permeabilitás, mint anyagállandó, függ a konkrét anyagtól.

Az elektromos térhez hasonlóan, a mágneses térben is jelentkezik a polarizáció jelensége, ezért itt bevezetik az $\underline{M}$ mágneses polarizáció vektorát.

Mágneses polarizáció vektora:

$$\underline{M} = \underline{B} - \mu_0 \underline{H}. \quad (6.63)$$

Ha bevezetjük a μ' **relatív mágneses permeabilitást**:

$$\mu' = \frac{\mu}{\mu_0},$$

akkor a mágneses polarizációs vektor a $\underline{M} = (\mu' - 1)\mu_0 \underline{H}$ formában írható fel. Hasznos bevezetni egy újabb anyagállandót, a κ **mágneses szuszceptibilitást** mint $\kappa = \mu' - 1$. Akkor az előző képlet a

$$\underline{M} = \kappa \mu_0 \underline{H} \quad (6.64)$$

formában írható át.

Látszik, hogy $\underline{B}$, $\underline{H}$ és $\underline{M}$ vektorok (homogén, izotróp anyagban) egymással párhuzamosak.

Az elektromos tér ϵ' relatív dielektromos állandójával szemben, amely $\epsilon' \geq 1$, a μ' relatív mágneses permeabilitás lehet nagyobb, de lehet kisebb is, mint 1. Ezzel kapcsolatban az elektromos tér χ szuszceptibilitásával szemben, amely pozitív (vagy legalább nem negatív), a κ mágneses szuszceptibilitás lehet mind pozitív, mind negatív.

Már Faraday felismerte, hogy a mágneses térben minden anyag mágnesessé válik. Az anyagok többségében ez a tulajdonság alig észrevehető, pontosabban, csak speciális eszközökkel mutatható ki. Ugyanakkor, az anyagok között vannak olyanok, amelyek, ha a mágneses térbe helyezzük, erősen megváltoztatják az eredeti mágneses teret és eközben maguk is kifejezetten mágnesesek lesznek. Ilyen anyag például a lágyvas, a kobalt, a nikkal és ezek bizonyos ötvözei.

Azok között az anyagok között, amelyek jelenlétében a mágneses tér csak gyengén változik, megkülönböztetnek **diamágneses anyagokat**, amelyeknél a μ' relatív permeabilitás valamivel kisebb mint 1 (és $\kappa < 0$), és **paramágneses anyagokat**, amelyeknél μ' valamivel nagyobb mint 1 (és $\kappa > 0$). Ezt a „valamivel kisebb vagy nagyobb” kifejezést matematikailag úgy lehet kifejezni, hogy $\mu' = 1 + \kappa$, $|\kappa| \ll 1$.

A diamágneses anyagokhoz tartoznak például a higany, a réz, a víz, az etilalkohol, a nitrogén, a hidrogén. A paramágneses anyagokhoz tartozik a króm, az alumínium, a platina, az oxigén, a levegő.

Mind a dia-, mind a paramágneses anyagokra jellemző, hogy a μ' relatív permeabilitás gyakorlatilag nem függ a $\underline{H}$ mágneses térerősség-vektorától, és ezekben az anyagokban a bennük kialakult mágneses tér csak gyengén különbözik a külső mágneses tértől. Ezt a (6.64) képletből is lehet látni, hogy – mivel κ abszolút értéke kicsi –, az $\underline{M}$ vektor abszolút értéke is kicsi, így a mágneses indukció vektora az anyagban nem sokkal különbözik a $\mu_0 \underline{H}$ -tól (ld. (6.61), (6.62), (6.63) képleteket).

A paramágneses anyagokban a κ mágneses szuszceptibilitás csökken a hőmérséklettel. Ezt a csökkenést a Curie-törvény írja le:

$$\kappa = \frac{C}{T},$$

ahol C a Curie-állandó, T az abszolút hőmérséklet.

Azokat az anyagokat, amelyek jelenlétében az eredeti mágneses tér erősen megváltozik, **ferromágneses anyagoknak** nevezik. Ezekre az jellemző, hogy (6.62) helyett egy $\underline{B} = \underline{F}(\underline{H})$ nemlineáris kapcsolat lép.

Tehát a ferromágneses anyagokban a $\underline{B}$ és az $\underline{M}$ a $\underline{H}$ -tól már nem lineárisan függenek, hanem a függőség sokkal bonyolultabb és nem egyértelmű.

A $\underline{B}$ mágneses indukció vektor és a $\underline{H}$ térerősség-vektor közötti kapcsolatot ekkor hiszterézis jellemzi. Az itt megfigyelhető hiszterézis „rokon” a ferroelektromossággal kapcsolatban bevezetett hiszterézissel. A $\underline{B}$ – $\underline{H}$ görbék nagyon hasonlítanak az ott bemutatott $\underline{P}$ – $\underline{E}$ görbékhez. (Ld. a 6.17. ábra). Itt is megfigyelhető, hogy a $\underline{H}$ bizonyos növelése után az un. „mágneses telítés” következik be, amikor a $|\underline{H}|$ növelésekor a $|\underline{B}|$ többé nem növekszik.

Mivel a hiszterézis eredményeként a ferromágneses anyagban a $\underline{H}$ csökkenésével a $\underline{B}$ indukcióvektor más görbe szerint csökken, az anyagban maradék mágnesezettség alakul ki. Ennek hatására a ferromágneses anyag (speciálisan a lágyvas) permanens mágnessé válik.

Itt érdemes hangsúlyozni, hogy bizonyos hőmérsékleten felett, – az elektromos tér elemzésekor már bevezetett Curie-pont felett –, a ferromágneses anyag elveszíti ezt a tulajdonságát, és úgy viselkedik, mint a paramágneses anyag.

Érdemes továbbá újból kiemelni, hogy állandó (permanens) mágnesek csak ferromágneses anyagokból készíthetők.

A ferromágneses anyagok belsejében ugyanakkora $\underline{H}$ külső tér mellett a $\underline{B}$ indukció vektora és az $\underline{M}$ polarizációs vektor több nagyságrenddel is nagyobb lehet, mint a más anyagokban. Ugyanakkor a mágneses tér erősség-vektora kisebb mint a vákuumban lévő $\underline{H}_0$ térerősség-vektor. Ezt a jelenséget „lemágnesezésnek” (vagy „mágnestelenítésnek”) nevezik. Ennek hatására a belső mágneses tér százszor kisebb is lehet, mint a külső tér. Ehhez hasonló jelenséggel az elektromos tér esetében is találkoztunk, amikor (ld. (6.55) képlet) azt láttuk, hogy a dielektrikumban az elektromos térerősség-vektor kisebb mint vákuumban.

A μ' relatív permeabilitás (és ezzel együtt a κ mágneses szuszceptibilitás) nagyon nagy, néhány száz is lehet. Azon kívül, mind a μ' , mind a μ , mind a κ bonyolult módon függenek a hőmérséklettől és a $\underline{H}$ mágneses tér erősség-vektorától. A μ' -t és a κ -t most már nem lehet anyagállandónak nevezni.

6.5. Töltött részecskék mozgása vezetőkben és félvezetőkben

A vezetők az különbözteti meg a dielektrikumoktól, hogy bennük a töltés mozoghat. Ismert, hogy a fémekben a szabad elektronok közvetítik az áramot. A fémekben szabad elektronoknak azokat az elektronokat nevezik, amelyek „kiszabadultak” az egyes atomok kötéséből, de a fémekben marad-

tak, vagyis az egész testhez, az atomok sokaságához (komplexumához) kötődnek, és ilyen módon mozoghatnak a testen belül. (Bővebben lásd 11.4. alfejezet.)

A vezetőkben (és a félvezetőkben) a töltéshordozók mozgásának két fajtáját ismerjük. Az egyik a **driftáram**, amikor a töltéshordozók a külső elektromos tér hatására hoznak létre áramot. A másik a **diffúziós áram**, amikor a töltéshordozók koncentrációkülönbségéből adódik az áram.

6.5.1. Elektromos áramlás drift révén

Külső tér hiányában az elektronok a gázmolekulákhoz hasonlóan kaotikus mozgást végeznek. Mivel ez a mozgás minden irányban ugyanazzal a valószínűséggel történik, az átlagos sebességvektor egyenlő nullával. Kaotikus mozgásban az elektronok két ütközés közötti átlagos időintervallumát a τ ütközési időnek, a megtett utat pedig l szabad úthossznak nevezik.

Külső elektromos tér hatására megjelenik a sebességnek egy kitüntetett iránya, az átlagsebesség vektora, amely párhuzamos a térerősség-vektorral. Nézzük meg az elektron mozgását két ütközés között a külső tér hatására. Az elektronra $-e\mathbf{E}$ erő hat, ahol $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ az elemi töltés, és mivel az elektron töltései negatívak, a töltés $q = -e$. A Newton-törvény alapján

$$m\mathbf{a} = -e\mathbf{E},$$

vagy

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (6.65)$$

Feltételezve, hogy az elektromos tér állandó, azt kapjuk, hogy az $\mathbf{a}$ gyorsulás szintén állandó. Mivel a kaotikus mozgás átlagsebessége nulla, a két ütközés között az átlagsebesség $\mathbf{E}$ irányú komponense nullától $\mathbf{a} \cdot \tau$ -ig növekszik, állandó gyorsulással. Így a két ütközés közötti átlagsebesség

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{\tau}{2} |\mathbf{a}|,$$

és mivel ez megegyezik az $\mathbf{E}$ irányú driftmozgás sebességével, a v -t driftsebességnek nevezik. Az előző (6.65) képletet figyelembe véve megkapjuk, hogy

a *driftsebesség*:

$$v = -\frac{e\tau}{2m} E. \quad (6.66)$$

Vezessük be az elektronok μ mozgékonyágát és a σ fajlagos vezetőképességet:

$$\mu = \frac{e\tau}{2m}, \quad \sigma = e\mu n, \quad (6.67)$$

ahol n a szabad elektronok koncentrációja. Így a driftsebesség

$$v = -\mu E. \quad (6.68)$$

Az elektronok által keltett

drift áram erőssége:

$$j = -e \cdot n \cdot v = \sigma E. \quad (6.69)$$

A Newton-törvény alkalmazásakor implicit módon feltételeztük, hogy a külső elektromos térnek nincs hatása az ütközési időre. Ez igaz, ha a kaotikus mozgás sebességének abszolút értéke sokkal nagyobb, mint a tér által indukált driftsebesség. Ez a feltétel általában teljesül.

6.8. példa: Számítsuk ki az elektronok driftsebességét a rézben a $0,15 \text{ V/m}$ téreősség hatására!

Megoldás: Az elektronok mozgékonyága a rézben $\mu = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$. Így a driftsebesség abszolút értéke: $|v| = \mu|E| = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$.

A fenti példában kiszámított driftsebesség $6,6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ volt. Ugyanakkor, a kaotikus mozgásra jellemző sebesség nagysága 10^5 – 10^6 m/s .

A félvezetőkben a töltéshordozók közé sorolják a pozitív töltéshordozókat, un. lyukakat is. Ezeknek töltése $q = +e$. A fentiekhez hasonlóan bevezethetjük a lyukak driftsebességét, amelynek abszolút értéke megegyezik az elektronok driftsebességével, és a lyukak koncentrációját p . Szintén bevezethető a lyukak vezetőképessége és a lyukak által keltett áramerősség.

6.5.2. Elektromos áram diffúzió révén

Az áramot elindíthatja a töltéshordozók koncentrációkülönbsége is. Egyensúly esetén (többek között homogén koncentráció esetén) a kaotikus mozgásban nincs kitüntetett irány. Ha pedig a koncentráció nem homogén, az ütközések hatására kialakul egy kitüntetett irány, és – külső erőter hiányában – a részecskék áramlása oda irányul, ahol alacsonyabb a részecskék koncentrációja. Ezt úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a mozgás kitüntetett iránya, a **diffúzióirány**, párhuzamos a koncentrációgradiens vektorával. (A

gradiens fogalmával már korábban találkoztunk, amikor bemutattuk, hogy az elektromos tér potenciális erőter.)

Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy az x tengely iránya megegyezzen a koncentrációgradiens irányával. Ha $n(x)$ a részecskék (például elektronok) koncentrációja és $x_2 = x_1 + \Delta x$, akkor ebben a koordináta-rendszerben

$$n(x_2) = n(x_1) + \Delta x \cdot \frac{\partial n}{\partial x}(x_1) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x_1) + \dots$$

Feltételezve, hogy Δx kicsi, és a függvény x_1 helyen nem szinguláris, a fenti képlet jobb oldalán a két első tagon kívül az összes többi elhanyagolhatjuk. A gradiens definíciójából következik, hogy a fenti módon megválasztott koordináta-rendszerben a gradiens abszolút értéke egyenlő $\partial n / \partial x$ -szel.

Legyen $n(x_1) < n(x_2)$, ha $x_1 < x_2$. Egy-egy részecske minden irányba ugyanazzal a valószínűséggel indulhat. De, – mivel az x_2 pontban a részecskék száma nagyobb, mint az x_1 pontban –, az x_2 -ből az x_1 irányba több részecske indul el, mint az x_1 -ből az x_2 irányba. Ez ahhoz vezet, hogy az $n(x_2) - n(x_1)$ különbségnek megfelelő részecskék áramlása indul el az x_1 pont irányába, és így a részecskék Φ fluxusa arányos a $\partial n / \partial x$ -szel.

Részecskék áramlása:

Egységnyi idő alatt az x irányra merőleges egységnyi felületen keresztül átmenő részecskék száma (számértékileg a Φ fluxus) egyenlő:

$$\Phi = -D \frac{\partial n}{\partial x},$$

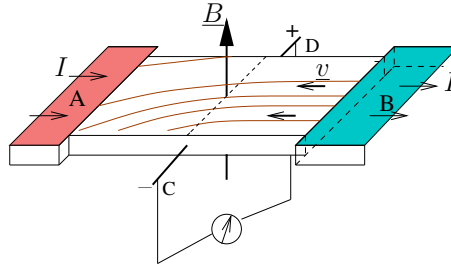
ahol D a részecskékre vonatkozó diffúziós állandó.

Így, az elektronok koncentrációkülönbsége miatt elinduló elektromos áramsűrűség

$$j = -e \cdot \Phi = eD \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (6.70)$$

6.5.3. A Hall-effektus

Legyen egy vékony fémlemez mágneses térben, amelynek a $\underline{B}$ indukcióvektora merőleges a lemezre. A lemez hosszirányában ($A \rightarrow B$) áram halad át, amelynek áramerőssége legyen I . Akkor a lemez haránt irányú középvezetési vonalának C és D végpontjai között U_H feszültség jelentik meg. (Ld. a 6.18. ábra). Ez az u.n. Hall-effektus. A feszültség nagysága



6.18. ábra. Hall-effektus

$$U_H = R_H \frac{IB}{d}, \quad B = |\underline{B}|, \quad (6.71)$$

ahol d a lemez vastagsága, $R_H < 0$ pedig a Hall-állandó.

Ennek a jelenségnek a magyarázata a következő. Fémekben az elektromos áramlás hordozói elektronok, amelyek mozgási iránya – mivel negatív töltésűek –, ellentétes az I áramlás irányával. Legyen az elektronok sebessége $\underline{v}$. Az ábrából látszik, hogy $\underline{v}$ ellentétes az I irányával.

Mágneses térben a mozgó töltésekre a Lorentz-erő hat, amelynek vektorra

$$\underline{F} = q(\underline{v} \times \underline{B}) = -e(\underline{v} \times \underline{B});$$

és ez az erő úgy hat az elektronokra, hogy azok a rajzolt vonalaknak megfelelően eltérnek az egyenestől. Így a C pontnál több elektron lesz, mint a D pontnál, és ez a lemez középvonalán negatív feszültség kialakulásához vezet.

A klasszikus elektrodinamika keretében kimutatható, hogy a Hall-állandó nagysága

$$|R_H| = \frac{1}{ne}, \quad (6.72)$$

ahol n a szabad elektronok koncentrációja. Ha a Hall-állandót a kísérletekből ismerjük, a fenti képletből kiszámíthatjuk a szabad elektronok n koncentrációját, és, ha a fajlagos vezetőképességet is ismerjük ($\sigma = e \cdot n \cdot \mu$), akkor az elektronok μ mozgékonyágát is kiszámíthatjuk.

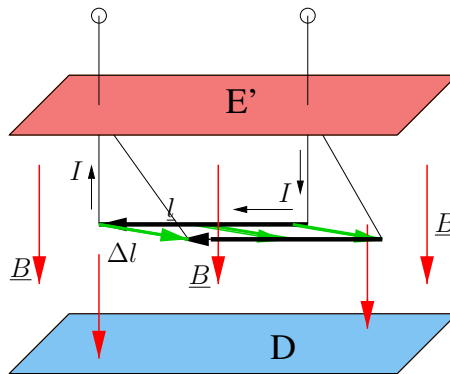
A Hall-effektusnak még egy alkalmazására hívjuk fel a figyelmet. Ennek segítségével meg lehet határozni a félvezető típusát, vagyis azt, hogy n-típusú-e vagy p-típusú. Ez abból adódik, hogy az n-típusú félvezetőkben a többségi töltéshordozók negatív töltésű elektronok, a p-típusúban pedig pozitív töltésű lyukak. Ennek megfelelően alakul ki a Hall-feszültség iránya.

6.6. Váltakozó elektromos és mágneses terek

6.6.1. Az indukció

Az elektromos és mágneses terek között szoros kapcsolat van. Ennek a kapcsolatnak a szorossága indokolttá teszi, hogy ezeket a tereket egy térként, elektromágneses térként kezeljük.

Az indukció jelenségével elsőként Michael Faraday foglalkozott, aki észrevette, hogy állandó mágneses térben a felfüggesztett vezető bizonyos irányba elmozdul, úgy, hogy közben metszi a mágneses tér erővonalait. A 6.19. ábrán I nyíl mutatja az áram irányát, Δl pedig az elmozdulást. Az elmozdulás iránya függ a vezetőben folyó áram irányától. A Lorentz-



6.19. ábra. Faraday indukciós kísérlete

törvény alapján könnyű kiszámítani, hogy milyen irányba mozdul el a vezető. (Az állandó mágneses tér leírásában bemutattuk, hogy a mozgó töltésre a Lorentz-erő hat (ld. a 6.2. alfejezet), amelynek hatása egy egyenes vezetőben folyó áram esetén (6.35): $\underline{F} = I[\underline{l} \times \underline{B}]$. Itt $\underline{B}$ a mágneses tér indukcióvektora, I az áramerősség, az $\underline{l}$ vektor hossza a vezető hosszával azonos, és iránya az áram irányával megegyező.)

Az előző jelenségnek a fordítottja is igaz: ha a felfüggesztett vezetőt úgy mozgatjuk, hogy az mozgás közben metszi a mágneses tér erővonalait, akkor a vezetőben áram keletkezik. Ez az u.n. **indukált áram**. Az áramlás iránya attól függ, hogy milyen irányba mozgatjuk a vezetőt a mágneses tér erővonalaihoz képest.

Zárt vezetőkörben szintén indukált áram keletkezik, ha egy állandó mágneest közelítünk hozzá, vagy távolítunk. Ha a vezető több körből áll,

vagyis ha szolenoiddal kísérletezünk, akkor az indukált áram annál erősebb lesz, minél több menetű a szolenoid. Ezeket a jelenségeket **elektromágneses indukciónak** nevezzük.

Ezeket a Faraday által vizsgált jelenségeket az **indukciófluxus** Φ (vagy mágneses fluxus) változásával lehet magyarázni

A Φ indukciófluxust az elektromos tér fluxusához (ld. (6.5)) hasonlóan vezetjük be. Legyen S a zárt vezetőhurok által körülvelt felület, B_n pedig a $\underline{B}$ vektor S -re merőleges komponense. Akkor

az **indukciófluxus**:

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (6.73)$$

Továbbá, az I indukált áram erőssége mellett vezessük be az U **indukált feszültséget**:

$$U = R \cdot I, \quad (6.74)$$

ahol R a zárt vezetőhurok teljes ellenállása.

Most fogalmazzuk meg Faraday indukciós törvényét az indukciófluxus segítségével.

Faraday indukciós törvénye:

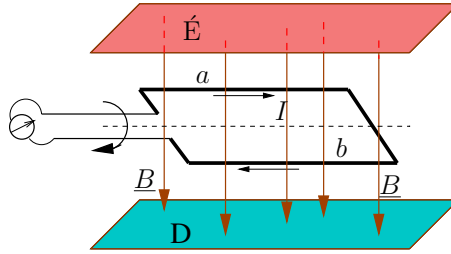
A zárt vezetőben indukált feszültség egyenlő a vezető által határolt felületen átmenő indukciófluxus változásának sebességével:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.75)$$

A képletben szereplő mínusz az un. Lenz-szabály kifejezése: Az indukciós áram mindig úgy irányul, hogy az általa indukált mágneses tér indukcióvektora csökkenti az indukciót létrehozó változást.

Ezzel kapcsolatban említsük meg a 6.2. alfejezetben bevezetett mágneses indukciót. A zárt vezetőben indukált áram szintén mágneses indukciót hoz létre, amelynek nagyságát kör alakú vezető esetén a kör középpontjában (6.27) adja meg. Ez a mágneses indukcióvektor olyan irányú, hogy „akadályozza” az indukciófluxus változását.

Most nézzük meg az indukció további néhány esetét, amelyek az alkalmazás szempontjából fontosak.



6.20. ábra. Indukált áram a keret mozgása közben mágneses térben

Legyen a zárt vezető egy derékszögű keret, és ez a keret forogjon az állandó mágneses tér erővonalaira merőleges tengely körül. (Ld. 6.20. ábra.)

Tételezzük fel, hogy a keret forgása állandó ω szögsebességgel történik. Nézzük meg, hogyan változik ebben az esetben az indukált áram erőssége. A keret síkja és a mágneses tér erővonalai közötti szög

$$\alpha = \omega \cdot t$$

(Itt figyelmen kívül hagyjuk az esetleges kezdő fázist.) Ennek megfelelően $B_n = |\underline{B}| \sin(\alpha)$, ami a $\underline{B}$ vektor felületre merőleges komponense, és ez ugyanaz az egész kerettel körülvelt felületen, mivel $\underline{B}$ állandó. Mivel a keret által körülvelt S felület nem változik, a (6.73) képletből

$$\Phi = |\underline{B}| \sin(\alpha) \cdot S.$$

Így,

$$\Phi = |\underline{B}| \cdot S \cdot \sin(\omega t), \quad (6.76)$$

és (6.75)-ből az indukált feszültségre

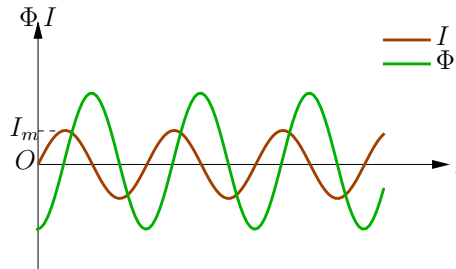
$$U = -|\underline{B}| \cdot S \cdot \omega \cos(\omega t)$$

kapjuk.

Most számítsuk ki az indukált áram erősségét:

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{|\underline{B}| \cdot S \cdot \omega}{R} \cos(\omega t). \quad (6.77)$$

Ez **váltakozó elektromos áram**, amelynek erőssége és iránya szinuszosan változik. (Ld. 6.21. ábra.) Az ábrán indukciófluxus és indukált áram az idővel történő változását mutatjuk. Az I_m a maximális áramerősség,



6.21. ábra. Indukciófluxus és az indukált áram erőssége

amelyet az áram akkor ér el, ha a keret felülete merőleges a mágneses tér erővonalaira ($\alpha = \omega t = \pi/2$).

Tehát, a vezető a és b szakaszain más és más irányú indukált áram keletkezik. Az áram erőssége a forgás közben változik, mivel változik az indukciófluxus. Amikor forgás közben a derékszögű keret merőleges lesz az erővonalakra, az áram megszűnik. A további forgás alatt mind az a , mind a b szakaszokon keletkezett indukált áram az előbbivel ellenkező irányú lesz.

Az így kapott váltakozó áram f frekvenciája és az ω a forgás szögsebessége (vagy körfrekvenciája) között

$$\omega = 2\pi f \quad (6.78)$$

a kapcsolatot.

Ezt az indukciós jelenséget a gyakorlatban széles körűen felhasználják. Minden generátor ezen elv alapján működik. Csak ott nem egy keret forog, hanem egy hengerre egyszerre sok keretet szerelnek fel. A generátor segítségével a mechanikai (rotációs) energia elektromos energiává alakul át.

Az alkalmazás szempontjából fontos másik indukciós eset a következő.

Legyen két vezető tekercs közel egymáshoz. Az egyikbe vezessünk váltakozó elektromos áramot. A Biot-Savart törvény szerint minden elektromos áram mágneses teret indukál, és mivel a mágneses tér függ az áram erősségétől, ezért váltakozó áram váltakozó mágneses teret indukál.

Most nézzük meg a másik tekercset. Ez a tekercs váltakozó mágneses térben helyezkedik el, és a Faraday-törvény alapján indukált áram keletkezik benne, amelynek erőssége arányos a mágneses tér indukciófluxusának deriváltjával.

Tételezzük fel, hogy az áramló váltakozó I_1 áram szinusz jellegű. A (6.30)-ból következik, hogy a mágneses tér $\underline{B}$ indukcióvektorának nagysága lineárisan függ az áram erősségétől (mivel e képletben a többi tag nem változik), ezért a $|\underline{B}|$ időbeni váltakozása szintén szinusz-függvénynek felel meg. A Φ indukciófluxus ebben az esetben arányos a $|\underline{B}|$ -vel, és ezért az is szinusz-függvényként függ az időtől. Az már a szinusz-függvény tulajdonsága, hogy annak a deriváltja (ami meghatározza, hogyan függ az időtől az indukciófluxus változásának sebessége), szintén szinusz-függvény jellegű (pontosabban, koszinusz lesz, de a $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$ összefüggés miatt ez az állítás igaz). Így a második tekercsben keletkező indukált áram erősségének az időtől való függése is szinusz-függvénynek felel meg.

Jegyezzük meg, hogy e függvények mind ugyanazzal a frekvenciával (és periódussal) rezegnek. Vagyis, az első tekercsben folyó áram és a második tekercsben indukált váltakozó áram ugyanolyan frekvenciájúak.

Ezt az indukciós esetet **kölcsönös indukciónak** nevezik. Az első tekercs által indukált Φ indukciófluxus függ az ott folyó áram I_1 erősségétől, és ez a függés, a Biot-Savart-törvény, illetve a (6.73) képlet szerint, lineáris:

$$\Phi = M \cdot I_1,$$

ahol M egy az elrendezésre jellemző állandó. A Faraday-törvény szerint a második tekercsben folyó indukált áram U_2 feszültsége:

$$U_2 = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

Be lehet mutatni, hogy ha ebben a kísérletben felcseréljük a két tekercs szerepét, akkor érvényes a következő reláció:

$$U_1 = -M \frac{dI_2}{dt},$$

ahol M ugyanaz. Ezt az M együtthatót **kölcsönös induktivitásnak** nevezik.

A kölcsönös indukció jelenségét használják fel a transzformátorokban, amelyek segítségével az áram feszültsége és erőssége átalakítható, de a váltakozó elektromos áram frekvenciája változatlan marad.

A váltakozó elektromos és mágneses terekkel kapcsolatban fontos megjegyzés, hogy egy zárt tekercsben a váltakozó áram magában a tekercsben is feszültséget indukál.

Ezt a jelenséget **önindukciónak** hívják. Az U indukált feszültség ekkor

$$U = -L \frac{dI}{dt}. \quad (6.79)$$

Az itt szereplő L együtthatót **önindukciós együtthatónak** vagy **induktivitásnak** nevezik.

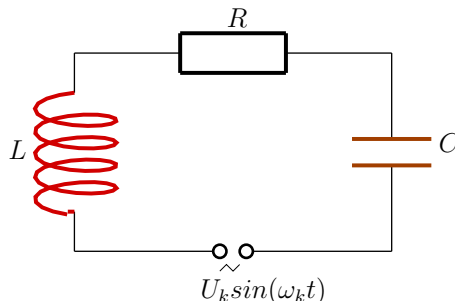
Ezt a jelenséget a gyakorlatban az elektromágneses sugárzás körében (pl. antennák stb.) használják fel.

Az alkalmazásokról szólva megjegyezzük, hogy az alfejezetben elsőként említett a vezető elmozdulásával kapcsolatos kísérletet váltakozó áram esetén például, a hangszóróban használják fel, ahol az elektromágneses jel mechanikai hanghullámokká alakul át.

6.6.2. A rezgőkör

A 6.1. alfejezetben a kondenzátorokkal foglalkoztunk és definiáltuk azok C kapacitását. Ha egy kondenzátort a vezetők zárt körébe kapcsoljuk, akkor az egyenáram nem folyhat kondenzátoron. Váltakozó áram esetén azonban a töltések jellege és mennyisége az áram váltakozásával váltakozik a kondenzátor lemezein. Ezzel együtt váltakozik a kondenzátor feszültsége. Ez úgy fest, mintha a váltakozó áram „átmenne” a kondenzátoron, vagyis, hogy a kondenzátor átengedi a váltakozó áramot. Fontos, ezen kívül, hogy a kondenzátoron átmenő váltakozó áram fázisban megelőzi a feszültséget.

Hozzunk létre un. **rezgőkört**, amelyben sorba kapcsoljuk az R ohmos ellenállást, az L induktivitású tekercset és a C kapacitású kondenzátort.



6.22. ábra. RLC rezgőkör

Továbbá, legyen ez a kör hozzákapcsolva az $U_k \sin(\omega_k t)$ váltakozó feszültséghez. (Ld. 6.22. ábra) Hogy miért „rezgő” a neve ennek a zárt körnek, később fog kiderülni. Ezt a rezgőkört soros RLC-körnek nevezik.

Kirchhoff II. törvénye szerint zárt áramkörben az elektromos feszültsé-

gek előjeles összege nulla. Így az RLC-kör esetén

$$U_k \sin(\omega_k t) = -RI - L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

Itt a jobb oldalon a második tag a tekercs Faraday-törvény szerinti feszültsége (ld (6.79)), a harmadik tag pedig a kondenzátor feszültsége (ld. (6.18)). Az ohmos tag azért negatív, mert az áram a nagyobb feszültségű U_1 helyről folyik a kisebb feszültségű U_2 helyre, így $U = U_2 - U_1 < 0$.

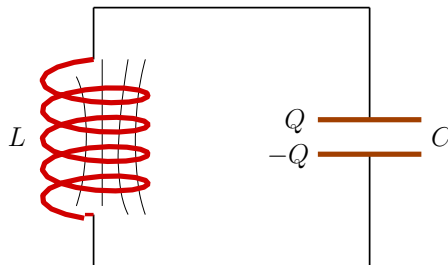
Vegyünk figyelembe, hogy a töltésmegmaradásból következően $dQ + Idt = 0$, ahol Idt egy zárt felületen átfolyó áram, dQ meg ebben a zárt felületbe zárt térfogatban a töltésváltozás, vagyis

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad \text{és így} \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{d^2Q}{dt^2}. \quad (6.80)$$

Ekkor, átrendezés után Q -ra nézve a következő másodrendű lineáris differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C \cdot L} Q = \frac{U_k}{L} \sin(\omega_k t). \quad (6.81)$$

Először vizsgáljuk meg egy egyszerű esetet, amikor az áramkörben csak egy tekercs (L) és egy kondenzátor (C) van összekapcsolva. Ezt a rezgőkör az LC-oszcillátornak is hívják (Ld. 6.23. ábra).



6.23. ábra. LC-oszcillátor

Ha a kondenzátor lemezein töltések vannak, és ennek megfelelően a kondenzátor lemezei között $U = Q/C$ feszültség keletkezik, a vezetőkben a pozitív töltéstől a negatív irányába áram indul el, és ennek a kisülésnek hatására a feszültség csökken. Ugyanakkor a tekercsben mágneses tér indukálódik, és az elektromos tér energiája a mágneses tér energiájává

alakul át. A tekercsben a mágneses térrel egyidejűleg keletkező önindukció hatására az áram a feszültség megszűnésével (a kisülés végével) nem szűnik meg, hanem tovább folyik, amíg a kondenzátor lemezein nem jelennek meg a töltések, de ezek már az előzővel ellentétes előjelűek. Ezután az áram újra indul, de az ellentétes irányba. Így elektromágneses rezgések keletkeznek.

Ugyanezt az eredményt kapjuk matematikai úton, ha a fenti (6.81) egyenletben feltételezzük, hogy U_k és R egyenlők nullával. Akkor ez az egyenlet a

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{C \cdot L} Q = 0 \quad (6.82)$$

egyenletre redukálódik.

Ilyen típusú egyenlettel és annak a megoldásával már találkoztunk a mechanikai harmonikus rezgésnél. A megoldás itt is szinusz függvény A amplitúdóval:

$$Q = A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C \cdot L}}. \quad (6.83)$$

Ha a kondenzátor lemezeiben a kezdeti időpontban áram nincs és a töltés Q_0 , akkor az amplitúdó $A = Q_0$, és a fázis $\phi = \pi/2$.

Ugyanúgy, mint a mechanikai rezgések esetén, ez idealizált eset, mivel a rezgőkörben az R ellenállás nem nulla, akkor sem, ha az ohmos ellenállás hiányzik, mert, például, a tekercsnek és a többi vezető drótnak is van ellenállása. Ezért R -t a rezgőkör teljes ellenállásának nevezik, amely magába foglalja az összes elem ellenállását.

Ha most az (6.81) egyenletben $U_k = 0$, de R -t figyelembe vesszük, akkor:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C \cdot L} Q = 0, \quad (6.84)$$

és az egyenlet megoldása (ha $R < 2\sqrt{L/C}$):

$$Q = A e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \psi). \quad (6.85)$$

Itt:

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{R}{2L},$$

és most $A = (\omega_0/\omega_{cs})Q_0$, és $\psi = \arctg(\omega_{cs}/\beta)$. A megoldás feltételében szereplő $\sqrt{L/C}$ -t a **rezgőkör hullámellenállásának** nevezik, a β -t pedig **csillapítási tényezőnek**.

A (6.85) tökéletesen megegyezik a mechanikából ismert csillapított rezgés képletével, amikor a rezgés amplitúdója az időben exponenciálisan

csökken. Ezt a jelenséget meg lehet figyelni, ha a rezgőkörbe oszcilloszkópot iktatunk be. Mivel

$$U = \frac{Q}{C},$$

a feszültségre a (6.81)-ből a következő kifejezést kapjuk:

$$U = \frac{A}{C} e^{-\beta t} \sin(\omega_{cs} t + \psi). \quad (6.86)$$

Az oszcilloszkópon keletkező kép meg fog felelni a (6.86)-nek.

Fontos, továbbá, hogy rezgés közben az elektromos és a mágneses tér energiáinak összege is csökken az amplitúdóval együtt, mivel az ellenállásban az energia egy része hőenergiává alakul át és az szétterjed a környezetben.

A mechanikai rezgéseknél a harmonikus és csillapított rezgéseken kívül tanulmányoztuk a kényszer- (vagy gerjesztett) rezgőmozgást is, amikor a differenciálegyenlet jobb oldalán nem nulla, hanem egy függvény szerepel, amely a kényszererő hatását írja le.

Elektromágneses rezgésnél ennek a (6.81) egyenlet felel meg, ahol a jobboldali függvény a külső váltakozó feszültség.

A (6.81) egyenlet megoldása két részből áll: a rezgőkör saját csillapított rezgéséből és a kényszerrezgésből. Mivel a megoldás első része eléggé gyorsan eltűnik, itt csak a kényszer rezgőmozgással foglalkozunk.

Megjegyezzük, hogy vannak olyan esetek, amikor nagyon fontos a rezgés első része, a saját csillapított rezgés. Például, ha nagy feszültségű külső erőt kapcsolunk be, a legelején a saját rezgés fontos szerepet játszhat, és nagy kellemetlenséget okozhat azzal, hogy hirtelen erősíti az áram intenzitását.

Könnyű belátni, hogy ha a (6.81) egyenletet elosztjuk a C kapacitással, akkor az $U = Q/C$ miatt az U feszültségre gyakorlatilag ugyanazt az egyenletet kapjuk mint (6.81), csak a jobb oldali függvény most $U_k/(C \cdot L) \sin(\omega_k t)$ lesz. Írjuk fel ennek az egyenletnek a megoldását:

$$U = A_k \sin(\omega_k t + \gamma), \quad (6.87)$$

ahol

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_k^2}} \frac{U_k}{C \cdot L}, \quad \gamma = \arctg \frac{2\beta \omega_k}{\omega_k^2 - \omega_0^2}. \quad (6.88)$$

Kényszerrezgés esetén, mivel $I = dQ/dt$, az áramerősség:

$$I = I_0 \cos(\omega_k t + \gamma), \quad I_0 = A_k C \omega_k, \quad (6.89)$$

és

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

segítségével az áramerősség amplitúdóját átírhatjuk mint

$$I_0 = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_k - \frac{1}{C\omega_k}\right)^2}}. \quad (6.90)$$

Ebből láthatjuk, hogy a nevezőben szereplő mennyiség hasonló szerepet játszik, mint az Ohm-törvényben az R ellenállás. Ezért a

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_k - \frac{1}{C\omega_k}\right)^2} \quad (6.91)$$

kifejezést „látszólagos”, vagy „váltakozó áramú ellenállásnak”, más neven **impedanciának** nevezik.

Ha a kényszererő ω_k körfrekvenciája megközelíti a rezgőkör ω_0 saját körfrekvenciáját, akkor mind a feszültség, mind az áramerősség amplitúdója a maximális értéket éri el. Az ω_0 definíciója szerint ez akkor történik meg, ha $\omega_k = 1/(LC)$. Akkor

$$A_k = \frac{1}{2\beta\omega_0} \frac{U_k}{C \cdot L} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_k.$$

Ezt a jelenséget – úgy mint mechanikában –, **rezonanciának** nevezik és ugyanúgy, mint mechanikában, bizonyos esetekben, kellemetlenséget okozhat. Ugyanakkor sok olyan esettel találkozunk, amikor ez a jelenség a mindennapokban nélkülözhetetlennek bizonyult (például rádióban, TV-ben stb.).

6.7. Maxwell-egyenletek. Elektromágneses hullámok

6.7.1. Maxwell-egyenletek

A rezgőkörben a kondenzátorok feltöltésekor vagy kisütésekor a vezetőben áram folyik. Az áram a Biot-Savart törvény alapján mágneses teret indukál, és e mágneses tér erővonalai a vezető (drót) körüli körök, amelyek sűrűsége változik az áram váltakozásával. Egy-egy időpillanatban ezek a körök a vezető körül több „csövet” alakítanak.

Ugyanakkor, ezek a csövek nem zártak, mivel a kondenzátor lemezei között váltakozó feszültség alakul ki, de „igazi” áram nem. Maxwell

feltevése szerint ez a váltakozó feszültség is indukál mágneses teret, és ennek erővonalai a fent említett csövek felületein haladnak. A kondenzátor lemezei között az időben váltakozó dielektromos eltolás vektora, pontosabban annak idő szerinti deriváltja áramsűrűségként viselkedik. Ennek megfelelően a kondenzátor lemezei között is képzeljünk el áramot. Ezt az áramot Maxwell után **eltolási áramnak** nevezik. Ennek áramerőssége ebben az esetben megegyezik a vezetőben folyó áraméval.

Ennek megfelelően bevezetjük az **eltolási áramsűrűséget**, mint

$$\underline{J}_e = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}.$$

Egy zárt felületen átment I áramerősség és a $\underline{J}$ áramsűrűség között (általában) igaz a következő reláció:

$$I = \oint_S \underline{J}_n dS.$$

Ezért zárt felületen az eltolási áram I_e erőssége:

$$I_e = \oint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS. \quad (6.92)$$

Tehát, eltolási áram nem csak a kondenzátorral kapcsolatban jelenik meg, hanem Maxwell szerint bármilyen váltakozó elektromos tér (örvényes) mágneses tér forrása, és ezt az eltolási áram jeleníti meg.

Az eltolási áram fogalmának bevezetése lehetőséget adott Maxwellnek, hogy zárt formában fogalmazzon meg egy, az elektromágnes térre vonatkozó egyenletrendszer, amely összekapcsolja a tér általános jellemzőit: az elektromos és a mágneses térerősséget ($\underline{E}$ és $\underline{H}$), az elektromos és a mágneses indukciót ($\underline{D}$ és $\underline{B}$), továbbá a $\underline{J}$ áramsűrűséget és a ρ elektromos töltéssűrűséget. Maxwell elmélete magába foglalja a már ismert tételek általánosítását is (Gauss-, gerjesztési, elektromágneses indukciós törvények). Az elektromágneses tér elméleteként, lehetőséget biztosít olyan feladatok megoldására, amelyek az elektromos és mágneses terekkel, a töltések és az áramok eloszlásával kapcsolatosak. Ez az elemélet makroszkopikus, vagyis nem vonatkozik a mikrovilágból ismert részecskék elektromágneses tulajdonságaira.

Az egyik Maxwell-egyenlet kapcsolatos az eltolási áramokkal. A vákuumban a gerjesztési törvény a (6.32) képlet formában írható fel:

$$\oint_C \underline{H}_\tau dl = \sum_k I_k. \quad (6.93)$$

Időfüggvény esetben azonban a gerjesztési törvénynek is változnia kell. Maxwell szerint az I_e eltolási áramoknak is szerepelniük kell a jobb oldali összegben. Ekkor a gerjesztési törvényt magába foglaló Maxwell-egyenletet integrál alakban kapjuk meg:

$$\oint_C H_\tau dl = \sum_k I_k + \oint_C \frac{\partial D_n}{\partial t} dS. \quad (6.94)$$

Differenciális formában ez az egyenlet a következő alakú:

$$\text{rot} \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}. \quad (6.95)$$

A következő Maxwell-egyenlet az elektromágneses indukció törvénye (6.75):

$$U = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \text{ahol} \quad \Phi = \int_S B_n dS$$

a (6.73)-ban bevezetett indukciófluxus.

A 6.1. alfejezetben bemutattuk, hogy $\underline{F} = -\text{grad} W$. Mivel $\underline{E} = (1/q)\underline{F}$, és $U = (1/q)W$, ezért $\underline{E} = -\text{grad} U$. Ebből a képletből következik, hogy

$$U = \oint_C E_\tau dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (6.96)$$

Ez az elektromos indukciót leíró Maxwell-egyenlet integrál alakja. Ezt az egyenletet is felírhatjuk differenciálformában, mint

$$\text{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}. \quad (6.97)$$

A következő egyenlet integrál alakját a Gauss-egyenlet (6.7) adja, amelyet most átírunk:

$$\oint_S D_n dS = q, \quad (6.98)$$

ahol a jobb oldalon a zárt felület által közbezárt összes szabad töltés szerepel. Ha bevezetjük a ϱ töltéssűrűséget, akkor

$$q = \int_V \varrho dV,$$

vagyis a (6.98) integrálaltnak megfelelő differenciálalak:

$$\operatorname{div} \underline{D} = \varrho. \quad (6.99)$$

A negyedik egyenlet differenciális alakja a (6.29) egyenlet:

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0, \quad (6.100)$$

vagy, integrálformában

$$\oint_S \underline{B}_n dS = 0. \quad (6.101)$$

Ezzel felírtuk a Maxwell-féle egyenletrendszert mind integrálformában: (6.94), (6.96), (6.98), (6.101), mind a differenciál alakban: (6.95), (6.97), (6.99), (6.100). A négy Maxwell-egyenlet axióma, tehát a tapasztalaton alapul. Jegyezzük meg, hogy ha a kezdeti és a peremfeltételek adottak, a Maxwell-egyenletrendszernek egy és csakis egy megoldása van.

Most szedjük össze táblázat formában a Maxwell-egyenleteket integrál- és differenciálalakban, továbbá fontos szerepet játszó az u.n. kontinuitási egyenletet és a három u.n. anyagegyenletet.

A Maxwell-egyenletek:

Integrálalak	Differenciális alak
$\oint_C \underline{H}_\tau dl = \sum_k I_k + \oint \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$	$\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$
$U = \oint_C \underline{E}_\tau dl = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$
$\oint_S \underline{D}_n dS = q$	$\operatorname{div} \underline{D} = \varrho$
$\oint_S \underline{B}_n dS = 0$	$\operatorname{div} \underline{B} = 0$

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{J} = 0.$$

Az anyagegyenletek:

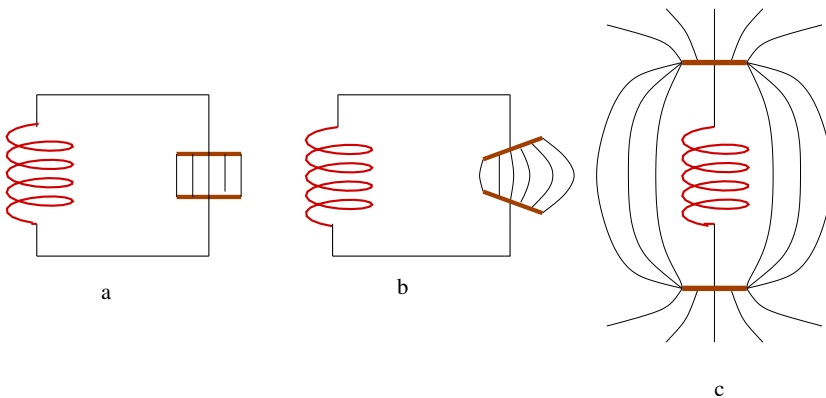
$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E}, \quad \underline{B} = \mu \underline{H}, \quad \underline{J} = \sigma \underline{E}.$$

6.7.2. Elektromágneses hullámok kialakulása

Ahogy már az előbbieken bemutattuk, ideális esetben ($R = 0$) az RLC rezgőkörben rezgőmozgás alakul ki. A Maxwell-elmélet szerint, az RLC körben az áram, – az eltolási áramot is beszámítva –, körbe folyik. A kondenzátor lemezei között az eltódási áram hatására mágneses tér alakul ki, amelynek erővonalai bezárják a „csöveket” a vezető körül.

Legyen a rezgőmozgás kezdeti ideje az az időpont, amikor a kondenzátor lemezein maximális töltés alakul ki. A rezgőmozgás periódusának negyedével később az indukciós tekercsben az elektromos energia mágneses energiává alakul át. Ugyanakkor, a kisülés hatására a kondenzátor lemezein megszűnnek a töltések. A periódusidő következő negyedével később a mágneses energia alakul át elektromos energiává, amely a kondenzátor lemezei között jelenik meg. Közben az összes energia, – az elektromos és mágneses energia összege –, nem változik.

A kondenzátor két lemeze között az elektromos tér erővonalai, a lemezek peremeit nem számítva, egyenesek lesznek. (Ld. 6.24.-a. ábra.) Ha



6.24. ábra. Az elektromágneses hullámok alakulása

most a kondenzátor lemezeit szétnyitjuk, az elektromos tér erővonalainak formája a két lemez közötti egyenesekből görbévé változnak (ld. 6.24.-b. ábra), és nemcsak a kondenzátor lemezei között helyezkednek el, hanem

kinyúlnak a lemezeken kívüli térbe. Ugyanakkor, ha a lemezek közötti távolság még nem nagy, az energia összege nem változik.

Ha ezt a távolságot növeljük, az erővonalak tovább távolodnak a lemezektől, és gyakorlatilag már nem a lemezek között záródnak össze. Ebben az esetben a rezgőkör energiájának egy része elvész sugárzás formájában.

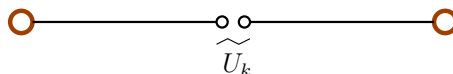
A határesetet a 6.24.-c. ábra mutatja, amikor a kondenzátor lemezei teljesen nyitva vannak (un. nyitott rezgőkör). Ekkor az erővonalak annyira messzire nyúlnak, hogy az energia tekintélyes része már kisugárzik elektromágneses hullámok formájában kisugárzódik.

Meg kell jegyezni, hogy a kisugárzott hullámok tulajdonságai nem feltétlenül egyeznek meg a rezgőkörben végbemenő rezgőmozgásokéval. De, ha a rezgőkörben a rezgőmozgások harmonikusak, a kibocsátott hullámok szintén harmonikusak lesznek, és azok frekvenciája is megegyezik. Ehhez még egy feltételnek kell teljesülnie, nevezetesen, hogy a közeg, amelyben a sugarak terjednek, lineáris legyen, vagyis ε és μ paraméterek ne függjenek az $\underline{E}$ elektromos és $\underline{H}$ mágneses terek erősségeitől. Ilyen közeg, például, a levegő.

A nyitott rezgőkört gyakran a dipólushoz hasonlítják, amelynek töltései természetesen váltakoznak. Egy dipólus elektromos terének erővonalait a 6.4. ábra mutatja.

Itt is el kell mondanunk, hogy a leírt eset ideális, nemcsak azért, mert az R ellenállást figyelmen kívül hagytuk, hanem azért is, mert a gyakorlatban ebben a csillapított rezgésben az energia nagyon gyorsan csökken. Ha elektromágneses hullámok sugárzására a nyitott rezgőkört akarjuk felhasználni, energiaforrásra van szükségünk, és ez a forrás nem lehet más, mint egy váltakozó, harmonikus jellegű külső feszültség.

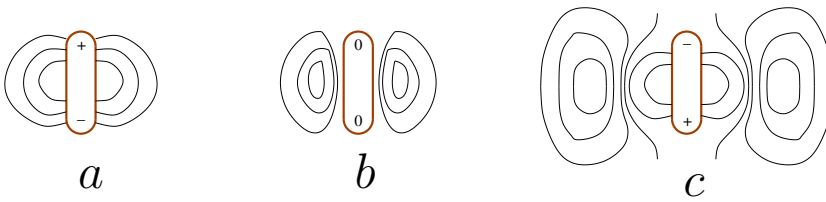
Hullámok sugárzásával kapcsolatos kísérletet elsőként 1888-ban Heinrich Hertz végzett. A Hertz-dipólus két rúdból állt, amelyek egymás után egyenes vonalban helyezkedtek el, és a külső végeiken kis gömbök voltak (ld 6.25. ábra).



6.25. ábra. A Hertz-dipólus

A két rúd közötti résbe váltakozó feszültséget kapcsoltak. Ez a két rúd, vagy egyszerűen két drót, lineáris antennaként működik. Ebben a nyílt rezgőkörben az L induktivitás és a C kapacitás nem egy helyre lokalizálódik, hanem az egész antennában hosszirányban oszlik el. Megjegyezzük, hogy mind L , mind C kicsik, és ezért, – a (6.83) képlet szerint –, a rezgőkör saját körfrekvenciája nagy.

A 6.26. ábra vázlatos formában mutatja be a kisugárzott hullámok keletkezését és kiterjedését. A 6.26.-a. ábra mutatja a $t = 0$ időpontban



6.26. ábra. Az elektromágneses hullámok kiterjedése

az elektromos tér erővonalait, amikor az antenna végein, a gömbökben maximális töltések lokalizálódnak. A $t = (1/4)T$ időpontra az elektromos energia mágneses energiává alakul át, ugyanakkor az antenna gömbjeiben nem lesznek töltések. Ezért az erővonalaknak zártaknak kell lenniük. Ezt mutatja a 6.26.-b. ábra. Ezután ezek az erővonalak eltávolodnak a dipólustól, és a $t = (1/2)T$ időpontra a dipólusra lezáródott erővonalak azonosak lesznek az 6.26.-a. ábrán bemutatottakkal, csak a töltések kicserélődnek, és ennek megfelelően az erővonalak iránya az előzővel ellentétes lesz.

Az elektromágneses hullámokban mindig jelen van mind az $\underline{E}$ térerősségű elektromos tér, mind a $\underline{H}$ térerősségű mágneses tér. A hullámok által szállított energia-áramsűrűséget az $\underline{S}$ Poynting-vektor írja le, amelynek a definíciója:

$$\underline{S} = [\underline{E} \times \underline{H}]. \quad (6.102)$$

Az elektromágneses hullámokban síkhullám esetén az $\underline{E}$ és a $\underline{H}$ fázisai egybeesnek, és e két vektor közötti (és abszolút értékeik közötti) kapcsolatot a következő képlet adja:

$$\underline{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\underline{e} \times \underline{H}], \quad (6.103)$$

ahol az $\underline{e}$ egységvektor a sugárzás irányába mutat. A képletben szereplő

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

neve impedancia.

6.9. példa: Egy vákuumbeli pontban egy elektromágneses síkhullám elektromos térerősség-vektorának nagysága $|\underline{E}| = 9 \text{ V/m}$. Mekkora nagyságú a Poynting-vektor ebben a pontban?

Megoldás: A Poynting-vektor:

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}.$$

Mivel $\underline{E}$ és $\underline{H}$ merőlegesek egymásra, $|\underline{S}| = |\underline{E}| \cdot |\underline{H}|$. Vákuumban egy sugárban az elektromos és mágneses térerősség nagyságai közötti viszony (6.103) alapján

$$|\underline{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |\underline{E}|.$$

Tehát

$$|\underline{S}| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |\underline{E}|^2 = 2,15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

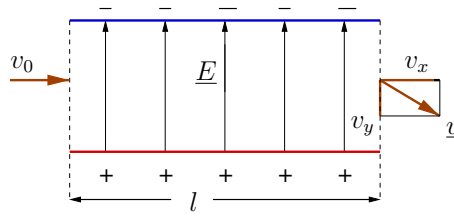
A jelenlegi adók által kisugárzott hullámok hossza nagyon széles határok között változik. Csak megjegyzésként említjük, hogy a 0,03 mm és 30 km közötti hosszúságú hullámokat Hertz-féle hullámoknak nevezik. Az, hogy milyen hullámokat használnak, attól függ, hogy milyen célt szolgálnak és milyenek a körülmények. Például, a TV-ben és a rádiólokációban csak az ultrarövid hullámokat használják: $\lambda < 10 \text{ m}$. Ugyanakkor, a víz alatti vagy föld alatti kommunikációban az alkalmazható hullámok hossza több, mint 10 km.

6.8. Kérdések és feladatok

6.8.1. Kidolgozott feladatok

6.1. feladat: Az elektron a homogén elektromos tér erővonalaira merőlegesen 10^4 km/s sebességgel lép be. A térerősség 6000 V/m . (ld. 6.27. ábra). Milyen sebességgel lép ki 5 cm út után?

Megoldás: Az ábra szerint a kilepő elektron $\underline{v}$ sebessége vízszintes irányú v_x és a függőleges irányú v_y sebesség összetevők eredője. Az erővonalakra merőleges



6.27. ábra. Az elektron sebessége

irányú összetevő változatlan, vagyis $v_x = v_0$. A v_y összetevőt a következőképpen számítjuk ki.

Mivel az elektronra a térben $\underline{F} = q\underline{E}$ állandó erő hat, az elektron a függőleges irányban állandó gyorsulással mozog, amely Newton II. törvénye alapján:

$$\underline{a} = \frac{1}{m} \underline{F} = \frac{q}{m} \underline{E}.$$

A gyorsulás ideje a vízszintes l hosszú út befutása esetén

$$t = \frac{l}{v_0},$$

és így a függőleges sebesség összetevő

$$v_y = |\underline{a}| \cdot t = \frac{q}{m} |\underline{E}| \cdot \frac{l}{v_0} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6000 \cdot 0,05}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^7} = 5,33 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

$$v = |\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1,133 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

6.2. feladat: Elektromos térben két pont között a feszültségkülönbség 0,5 V. Mennyivel változik a 10^5 C/kg fajlagos töltésű részecske kezdeti 500 m/s sebessége, ha a részecske az egyik pontból a másikba kerül?

Megoldás: Elektromos térben az energia megmaradási törvényből következik, hogy

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -q(U_2 - U_1).$$

Tételezzük fel, hogy $U_2 - U_1 > 0$, ugyanakkor $q < 0$. Akkor a részecske sebessége nyilvánvalóan növekszik, és

$$v_2^2 = v_1^2 - \eta(U_2 - U_1) = 500^2 + 2 \cdot 10^5 \cdot 0,5.$$

Vagyis, $v_2 = 592 \text{ m/s}$.

Ha a töltés $q > 0$, a sebesség csökken, és akkor $v_2 = 387 \text{ m/s}$.

6.3. feladat: A réz szabad elektronjainak mozgékonyasága $\mu = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$. Számítsuk ki az elektronok ütközési idejét!

Megoldás: A mozgékonyaságot definiáló képletből az ütközési idő:

$$\tau = \frac{2\mu}{\eta},$$

ahol $\eta = 0,1759 \cdot 10^{12} \text{ C/kg}$ az elektronok fajlagos töltése. Ezekből az adatokból kiszámítjuk az ütközési időt:

$$\tau = 5 \cdot 10^{-14} \text{ s}.$$

6.4. feladat: Az alumínium fajlagos ellenállása $0,029 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$, sűrűsége 2700 kg/m^3 , atomsúlya 27 g/mol , és 3 vegyértékű. Határozza meg az Al belsőjében az elektronmozgékonyaságot! Mekkora az elektronok átlagsebessége, ha egy 1 mm^2 keresztmetszetű Al-huzalban 2 A erősségű áram folyik?

Megoldás: 1 m^3 Al 2700 kg tömegű, ezért $2700/0,027 \text{ mol}$ anyag

$$n_0 = \frac{2700}{0,027} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{28}$$

Al atomot tartalmaz. Minden atom 3 vezetési elektront ad a kristálynak, mivel 3 vegyértékű fém. Ezért az elektronok koncentrációja

$$n = 3n_0 = 1,8 \cdot 10^{29} \frac{1}{\text{m}^3}.$$

A $\sigma = en\mu$ összefüggés alapján az elektronmozgékonyaság

$$\mu = \frac{\sigma}{en}.$$

Mivel a fajlagos vezetőképesség reciproka a fajlagos ellenállásnak: $\sigma = 1/\rho$, az elektronmozgékonyaság számszerűen:

$$\mu = \frac{1}{\rho en} = 1,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}.$$

Az áramsűrűsége ismert, hogy $j = \bar{v}en$. Mivel az I áramerősség az áramsűrűség és a vezeték A keresztmetszetének szorzata, az elektronok átlagos sebessége

$$\bar{v} = \frac{I}{enA} = 6,94 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

6.10. példa: Sárgarézből húzott egyenes drót hossza 20 cm, keresztmetszete $0,5 \text{ mm}^2$. A drótot 1 V feszültségre kapcsolták. Milyen mágneses indukciót indukált a dróton folyó áram a tőle 1 m távolságban lévő pontban?

Megoldás: A sárgaréz fajlagos ellenállása $\varrho = 0,08 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$. A drót ellenállása $R = \varrho \cdot l/A$, ahol a drót hossza $l = 0,2 \text{ m}$, keresztmetszete $A = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, és így

$$R = \frac{0,08 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 0,032 \Omega.$$

Az Ohm-törvény szerint $U = R \cdot I$, ahol U a feszültség, I pedig az áramerősség. Ezért $I = 1 \text{ V} / 0,032 \Omega = 31,25 \text{ A}$. Most a (6.27). képlet alapján számoljuk ki a mágneses indukciót:

$$|B| = \frac{\mu_0 \cdot |I|}{2\pi \cdot r},$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$, a távolság pedig $r = 1 \text{ m}$. Így a mágneses indukció $|B| = 0,625 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

6.11. példa: Legyenek egy derékszögű keret oldalai 20 cm és 10 cm. A keretet sárgaréz drótból készítették, amelynek a keretmetszete 2 mm^2 . Milyen szögsebességgel kell forgatni a keretet a $0,25 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ indukciójú mágneses térben, hogy az indukált váltakozó áram amplitúdója (maximuma) $0,3 \text{ A}$ legyen?

Megoldás: A (6.77)-ből következik, hogy az áram amplitúdója egyenlő: $I = B \cdot S \cdot \omega / R$. Számoljuk először a keret ellenállását: $R = \varrho \cdot l/A$. A keresztmetszet $A = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, a drót hossza $l = 0,6 \text{ m}$. A sárgaréz fajlagos ellenállása $\varrho = 0,08 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$. Így az ellenállás $R = 0,024 \Omega$. Továbbá, a keret felülete $S = 0,02 \text{ m}^2$. Most a fenti képlet szerint számoljuk ki a szükséges szögsebességet:

$$\omega = \frac{I \cdot R}{B \cdot S} = 1440 \frac{1}{\text{s}}.$$

Megjegyezzük, hogy az eredmény alapján ki tudjuk számítani, hányszor fordul meg a keret egy másodperc alatt. Egyidejűleg ez lesz az indukált áram frekvenciája is:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 229 \text{ Hz}.$$

6.12. példa: Legyenek egy derékszögű keret oldalai 30 cm és 10 cm. A keretet alumínium drótból készítették, amelynek a keretmetszete 2 mm^2 . Milyen az indukált váltakozó áram amplitúdója (maximuma), ha a keretet mágneses térben 1 s alatt 200-szor forgatjuk? A mágneses tér indukciója $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ T}$.

Megoldás: A (6.77)-ből következik, hogy az áram amplitúdója egyenlő: $I = B \cdot S \cdot \omega / R$. Számoljuk ki először a keret ellenállását: $R = \varrho \cdot l/A$. A keresztmetszet $A = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, a drót hossza $l = 0,6 \text{ m}$. Az alumínium fajlagos ellenállása

$\varrho = 0,29 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m}$. Így az ellenállás $R = 8,7 \cdot 10^{-3} \Omega$. Továbbá, a keret felülete $S = 0,02 \text{m}^2$, a szögsebessége $\omega = 2\pi f = 1257$.

Most a fenti képlet szerint számoljuk az indukált váltakozó áram amplitúdóját:

$$I = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02 \cdot 1257}{8,7 \cdot 10^{-3}} = 1,44 \text{ A}.$$

6.13. példa: Mekkora a Poynting-vektor nagysága egy 60 W sugarzási teljesítményű, pontszerű, monokromátikus lámpától 3 m távolságban? Tételezzük fel, hogy minden irányába egyenletesen sugározza a fényt.

Megoldás: A Poynting-vektor nagysága azt mutatja, hogy mennyi energia megy át egységnyi idő alatt egységnyi felületen, ha a sugár merőleges a felületre. A teljesítmény pedig azt mutatja, hogy a forrás mennyi energiát bocsájt ki egységnyi idő alatt. Mivel feltételek szerint a hullámok gömb jellegűek és mivel az átmenő energiamennyiség egyenletesen oszlik el a gömb felületén, a Poynting-vektor

$$|\underline{S}| = \frac{P}{A},$$

ahol P a forrás teljesítménye, A a gömb felülete. Az adatok szerint $P = 60 \text{ W}$, $A = 4\pi \cdot R^2 = 4\pi \cdot 3^2$, és így

$$|\underline{S}| = 0,53 \text{ W/m}^2.$$

6.8.2. Gyakorló kérdések és feladatok

1. Milyen jellegű az elektrosztatikus tér? Milyen terek csoportjába tartozik?
2. Egy pontszerű töltéstől 2 m távolságra 100 V/m a térerősség. Milyen távol kell mennünk, hogy 25 V/m legyen?
3. Két pontszerű töltés közötti távolság harmadára csökken. Hogyan változik a köztük ható erő?
4. Az elektrosztatikus tér két pontja között végzett munka hogyan függ az úttól?
5. Mik az elektromos erővonalak? Hogyan van definiálva az irányuk?
6. Mi az elektromos fluxus?
7. Hogyan jellemezhető elektromos erővonalakkal az elektromos tér térerősség-vektorának iránya és nagysága?
8. Hogyan definiáljuk az elektrosztatikus tér feszültségét?

9. Mit nevezünk elektromos dipólusnak?
10. Mennyi $0,01\text{ C}$ töltéstől 6 m távolságban lévő $3 \cdot 10^{-4}\text{ C}$ töltés potenciális energiája vákuumban?
11. Mekkora munkát kell végezni, hogy egy 1 As negatív töltésű testet vákuumban egy 10 As pozitív töltésű testtől 10 cm távolságban lévő pontból „végtelenbe” mozgassuk?
12. Mekkora munkát kell végezni, hogy egy $0,4\text{ C}$ töltésű testet vákuumban, sugárirányba 40 cm távolságra mozgassuk el a 6 C töltésű testtől 20 cm távolságban lévő pontból?
13. Egy 90 cm hosszú vízszintes helyzetű dielektrikum rúd két végén $2 \cdot 10^{-8}\text{ C}$ és $8 \cdot 10^{-8}\text{ C}$ nagyságú, azonos előjelű töltéssel rendelkező gömbök vannak. A rúdon súrlódásmentesen csúszkál egy töltött, a rúdra fűzött kis golyó.
Hol van egyensúlyban ez a golyó a rúdon? Mikor stabil és mikor nem ez az egyensúly? Mekkora az elektromos térerősség az egyensúlyi pontban?
14. Két, egymástól l távolságra lévő, egyenlő sugarú vezető gömbön $Q_1 = 3 \cdot 10^{-9}\text{ C}$, ill. $Q_2 = 7 \cdot 10^{-9}\text{ C}$ egyenmű töltés helyezkedik el. A gömböket összeérintjük, majd l távolságra húzzuk szét egymástól. Igazoljuk, hogy a gömbök most nagyobb erővel hatnak egymásra, mint összeérintésük előtt!
15. Mi a kapcsolat egy ellenállás feszültsége ($U(t)$) és a rajta átfolyó áramerősség ($I(t)$) között?
16. Mi a kapcsolat egy kondenzátor töltése és a rá eső feszültség között?
17. Mi a kapcsolat egy kondenzátor töltése és a rajta átfolyó áramerőssége között?
18. Síkkondenzátor lemezei 9 cm sugarú körlapok. Mekkora a lemeztávolság, ha a kondenzátor kapacitása $45\text{ }\mu\text{F}$? A lapok között levegő van.
19. Vízszintes síkban elektromos dipólus helyezkedik el, amelynek dipólnyomaték vektora észak felé irányul és 2000 Asm nagyságú. Milyen erő hat a 3 C töltésű, a dipólustól keletre 4 m távolságban lévő részecskére, ha feltételezzük, hogy a dielektromos állandó a vákuumnak felel meg?
20. Vízszintes síkban elektromos dipólus helyezkedik el, amelynek nyoma-

tékvektora észak felé irányul és 100 Cm nagyságú. Melyek a térerősség jellemzői a dipólustól 5 m távolságban dél-keletre lévő pontban, ha feltételezzük, hogy a dielektromos állandó a vákuumnak felel meg?

21. Léteznek-e mágneses töltések, és ha igen, hogyan definiálhatóak?
22. Egy pozitív töltésű, nyugvó test közelébe egy mágnes északi pólusát helyezzük. Milyen irányú erő hat a testre?
23. A mágneses tér egy pontjában elhelyezett töltött részecske nyugalomban maradt. Mit tudunk ez alapján mondani az ott lévő mágneses térről?
24. Milyen fontos, alapvető fizikai állandó írható fel az ϵ_0 és a μ_0 segítségével?
25. A részecske mozgására milyen pálya jellemző a homogén elektromos térben?
26. Lehet-e, és ha igen, mikor egyenes vonalú a részecske mozgása homogén elektromos térben?
27. Homogén elektromos térben egy töltött részecske mozog. Az elektromos térerősség-vektor párhuzamos az x tengellyel és 3 V/m nagyságú, továbbá a $t = 0$ időpontban a részecske az x tengely $x = 2 \text{ m}$ pontjában van, a sebessége párhuzamos a z tengellyel és nagysága $2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. A részecske fajlagos töltése $2 \cdot 10^7 \text{ C/kg}$. Mi a mozgás pályájának az egyenlete?
28. Homogén elektromos térben egy töltött részecske mozog. Az elektromos térerősség-vektor párhuzamos az x tengellyel és 5 V/m nagyságú. A $t = 0$ időpontban a részecske az x tengely $x = 1 \text{ m}$ pontjában van, a kezdeti sebesség vektora az xy síkban van, $\pi/6$ szöget zár be az y tengellyel, hossza pedig 10^4 m/s . A részecske fajlagos töltése $5 \cdot 10^7 \text{ C/kg}$. Mi a mozgás pályájának az egyenlete?
29. Homogén elektromos tér térerőssége 1000 N/C , iránya függőlegesen fölfelé mutat. Ebbe a térbe behelyezünk egy 10 g tömegű, $2 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ pozitív töltésű golyót. Mekkora a golyó gyorsulása? Mekkora lesz a golyó sebessége 2 s után?
30. Homogén mágneses térben töltött részecske mozog. Kezdősebessége nem párhuzamos a tér indukciós vektorával. Milyen pályán mozog a részecske?
31. Lehet-e, és ha igen, mikor egyenes vonalú a részecske mozgása homo-

gén mágneses térben?

32. Egy elektron keleti irányba repül egy északi irányú homogén mágneses térben. Milyen irányú erővel hat a mágneses tér az elektronra?
33. Egy töltött részecske kezdeti sebessége merőleges a homogén mágneses tér indukcióvektorára. Milyen görbén mozog a részecske és melyek ennek a görbének a paraméterei, ha a részecske kezdeti sebessége 30000 m/s , az indukcióvektor nagysága 10^{-3} T , a fajlagos töltés pedig $1,5 \cdot 10^8 \text{ C/kg}$?
34. Egy töltött részecske kezdeti sebessége párhuzamos a homogén mágneses tér indukcióvektorával. Milyen görbén mozog a részecske és melyek ennek a görbének a paraméterei, ha a részecske kezdeti sebessége 25000 m/s , az indukcióvektor nagysága $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$, és a fajlagos töltés $1,3 \cdot 10^8 \text{ C/kg}$?
35. Egy töltött részecske kezdeti sebességvektora a homogén mágneses tér indukcióvektorával $\pi/6$ szöget képez. Milyen görbén mozog a részecske és melyek ennek a görbének a paraméterei, ha a kezdeti sebessége 20 km/s , fajlagos töltése $7 \cdot 10^7 \text{ C/kg}$, az indukcióvektor értéke $1,4 \cdot 10^{-2} \text{ T}$?
36. A homogén mágneses térbe érkező elektronok sebesség vektora $\pi/3$ szöget képez a mágneses indukcióvektorral, nagysága pedig $7 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Milyen nagyságúnak kell lennie legalább az indukcióvektornak, hogy a részecske pályájának sugara kisebb legyen, mint 2 cm ?
37. Elektromos tér két pontja között a feszültség $1,2 \text{ V}$ -ról $0,8 \text{ V}$ -ra változik. Mennyivel változik a 200 m/s sebesség, ha egy 10^5 C/kg fajlagos töltésű részecske az egyik pontból a másikba kerül?
38. A két pont közötti mozgás közben a pontszerű töltés sebessége $2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ -ről $4 \cdot 10 \text{ m/s}$ -ra változik. Mekkora e pontok feszültségei közötti különbség, ha a részecske fajlagos töltése $0,5 \text{ C/kg}$?
39. Elektronokat gyorsítunk 500 kV -os feszültséggel. Mekkora az elektronok sebessége és tömege a gyorsítás végen?
40. Egy elektront a fénysebesség $0,85$ -szörösére gyorsítunk. Mekkora a test tömege? Mekkora feszültséggel lehet ezt elérni? Klasszikusan számolva ugyanaz a feszültség mekkora sebességre gyorsítaná az elektront?
41. Mekkora feszültséggel kell gyorsítani egy elektront, hogy a tömege a nyugalmi értéknél 5% -kal nagyobb legyen? Mekkora ilyenkor a

sebesség?

42. Egy elektrosztatikus eltérítőrendszer lemezei között a feszültség 400 V. Egy protont ebben a térben körpályán mozgatunk. Mekkora az elektromos tér által végzett munka egy teljes kör megtétele során?
43. Elektromos eltérítésű képcsőnél az eltérítő lemezek hosszát növeljük. Hogyan változik emiatt az eltérítési érzékenység és a határfrekvencia?
44. Az ionfolt jelensége miért lép föl a mágneses eltérítésű képcsőnél, és miért nem lép fel az elektromosnál?
45. Egy képcsőben növeljük a gyorsítófeszültséget. Nő vagy csökken ezáltal az eltérítési érzékenység?
46. Miért nem lehet elérni nagy eltérítést az elektromos eltérítésű képcsővekben?
47. A mágneses eltérítésű képcsőn a mágneses térhez érkezéskor az elektronok sebessége $8 \cdot 10^7$ m/s. Az eltérítő tekercs hossza 3,5 cm, a mágneses tér indukciója $9 \cdot 10^{-3}$ T. Mekkora távolságra van az elektron beesési pontja a képernyő középpontjától, ha a képernyő 20 cm távolságra van a mágneses tértől?
48. Lehet-e a relatív dielektromos állandó 1-nél nagyobb? És kisebb?
49. Mi a kapcsolat a szuszceptibilitás és a relatív dielektromos állandó között?
50. Mit nevezünk driftsebességnek?
51. A mi a különbség a diffúziós és a drift áram között?
52. Két anyag azonos elektronmozgékonyysággal rendelkezik, de az elsőnek nagyobb a vezetőképessége. Mit mondhatunk ez alapján a töltéshordozó- koncentrációk viszonyáról?
53. Egy vezetékben az elektronok átlagosan 1 mm/s sebességgel mozognak. Hogyan szállíthatják az információt mégis közel fénysebességgel?
54. Vékony, vagy vastag vezetők esetén lesz nagyobb a Hall-effektus mértéke?
55. Milyen erővel hat a mágneses tér egy vízszintes síkban lévő 30 cm hosszú vezetékre, ha a vezetékben folyó áram erőssége 15 A? A mágneses indukció vektora merőleges a síkra és nagysága 5 Vs/m^2 .
56. Egy anyagdarabot egy tekercs által létrehozott állandó mágneses térbe helyezünk, majd kis idő múltán kikapcsoljuk a tekercset. Azt tapasztal-

taljuk, hogy ezután is marad mágneses tér az anyagdarab közelében. Mágnesesség szempontjából milyennek nevezzük az ilyen anyagokat?

57. Ha emelni akarjuk egy RLC-kör sajátfrekvenciáját, akkor növelni vagy csökkenteni kell a kondenzátor kapacitását?
58. Mit mutat meg egy áramköri elem impedanciája?
59. Milyen összefüggés adja meg az elektromágneses hullám által szállított energia-áramot?
60. Mit mutat a Poynting-vektor iránya és nagysága?

7. Termodinamika

7.1. Alapfogalmak

7.1.1. Állapothatározók, állapotegyenlet

Egy termodinamikai rendszer állapotát termodinamikai változók jellemelik. E változók két csoportba sorolhatók, az extenzív és az intenzív közé. Az extenzív változók a rendszer anyagmennyiségének változásával arányosan változnak, ilyenek a térfogat (V), a tömeg (m), és a mólszám (n). Az intenzív mennyiségek pedig az anyagmennyiségtől függetlenek; ilyen a hőmérséklet (T) és a nyomás (p).

Ha a homogén és izotrop rendszer egyensúlyban van (az egyensúlyi állapottal később, a 7.2. pontban foglalkozunk), akkor a rendszer állapotát megadó állapotváltozók a következők: a nyomás (p), a térfogat (V), a hőmérséklet (T) és a mólszám (n).

A közöttük fennálló összefüggés az **állapotegyenlet**:

$$f(p, V, T, n) = 0. \quad (7.1)$$

7.1.2. Hőmérséklet

A hőtan egyik alapfogalma a hő. A hő mennyisége közvetett módon, a hőmérséklet változó segítségével mérhető. Mindennapi életünkben a hőmérséklet – az ember hőérzetének kvantitatív kifejezője – mérésére a Celsius-féle skálát használjuk, ahol 0°C felel meg az olvadó jég hőmérsékletének, 100°C pedig normális légnyomás mellett a forró víz gőzének. Ahhoz, hogy egy testnek megmérjük a hőmérsékletét (feltételezve, hogy az 0°C és 100°C között van) fel kell osztani a hőmérséklet 0°C és 100°C közötti intervallumát 100 egyenlő részre. Ez nem egyszerű feladat. A mindennapi életben ez a feladat a hőmérő segítségével oldható meg.

Az egyik legelterjedtebb hőmérő – a higanyhőmérő. A higanynak több előnyös jellegzetes termodinamikai tulajdonsága van: a hőtágulása kicsi és egyenletes, az olvadáspontja pedig alacsony: -39°C .

Maga a hőmérő egy edényből, és az ebből kiálló vékony csőből áll. A hőmérséklet emelkedésének hatására a higany térfogata növekszik, és a higany oszlopának magassága a csőben nagyobb lesz. Ebből is világos, hogy miért kell a csőnek vékonynak lennie: mivel a higany hőtágulása kicsi, az oszlop magasságának változása különben túlságosan kicsi lenne. Ha a csőben (vagy a mellette elhelyezett tárgyon) jelezzük a 0°C és 100°C

hőmérsékletnek megfelelő oszlop magasságát, ezt az intervallumot elosztjuk 100 egyenlő részre, akkor egy rész fog megfelelni a hőmérséklet egy fokú változásának.

Sajnos, ez a hőmérő nem elég pontos akkor, ha tudományos, vagy finom technikai méréseket kell végeznünk. Azonkívül, nem használható túl alacsony (kisebb mint -39°C), vagy nagyon magas hőmérséklet esetében. A hőmérőkben napjainkban nemcsak folyadékokat, de fémeket is alkalmaznak. Léteznek, továbbá, gázhőmérők, gőznyomáshőmérők, ellenállás-hőmérők stb. Különböző esetekben különböző hőmérőket használnak, attól függően, milyen hőmérséklet-intervallumról van szó, és milyen pontossággal kell végezni a méréseket.

A tudományban a **Kelvin-féle (abszolút) skálát** használják.

A Kelvin-féle hőmérsékleti értéket a Celsius-féle értékből úgy kapjuk meg, hogy a Celsius-féle értékhez hozzáadunk 273,15 fokot: $T_K = T_C + 273,15$.

Vagyis, 0°C megfelel 273,15 K -nek. Tehát a Celsius és a Kelvin skála fokbeosztása azonos, csak a nullapontjuk különbözik.

Megjegyezzük, hogy a Kelvin-féle skálában szereplő K az SI mértékegység-rendszernek az egyik alapegysége.

A Celsius és Kelvin skálákon kívül léteznek (és használatban vannak) más skálák is. Például, a Fahrenheit-, vagy a Rankine-féle skálák. Ha a Fahrenheit-féle hőmérsékletből a Kelvin skálára akarunk áttérni, akkor a következő képletet kell használni:

$$T_K = \frac{T_F - 32}{1,8} + 273,15.$$

A Kelvin- és Rankine-féle skálák közötti kapcsolatot a következő képlet adja:

$$T_K = \frac{T_R}{1,8}.$$

Látható, hogy a Celsius és a Kelvin-féle skálák között sokkal több a hasonlóság, mint a többiekkel: egy foknyi változás a Celsius-skálában megfelel a Kelvin-skála 1 foknyi változásának.

Ugyanakkor egy foknyi változás a Fahrenheit- és Rankine-féle skálákban 1,8 K változásnak felel meg a Kelvin-skálában.

A továbbiakban a Kelvin-féle hőmérsékletet T betűvel, index nélkül jelöljük.

7.1.3. Hőkapacitás

Testek érintkezésekor a hőmérsékletek kiegyenlítődnek és a hőmérséklet megváltozása Q hőmennyiség felvételével vagy leadásával jár. Például, a hőmérséklet 5 fokra való növekedéséhez ötször annyi hőmennyiséget kell juttatni a testbe, mint amennyi az 1 fokra való növekedéshez szükséges. A fenti szabályból meghatározhatjuk a hőkapacitást. Legyen a felvett (leadott) hőmennyiség (dQ).

A hőkapacitás:

Ha a hőmennyiséget Q -val jelöljük, akkor a C hőkapacitás a következő képlettel határozható meg:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (7.2)$$

Tehát C számértékileg az a hőmennyiség, amelyre a hőmérséklet 1 fokkal való növekedéséhez szükség van. A hőkapacitás mértékegysége J/K.

A hőmérséklet eléggé széles határai között a hőkapacitást állandónak és a hőmérséklettől függetlennek lehet elfogadni.

A C hőkapacitás függ a test, vagy a rendszer nagyságától. Ezért C helyett gyakran használják a fajhőt.

Fajhő (c):

az 1 kg tömegű mennyiségre vonatkozó hőkapacitás (számértékileg).

Így, $C = m \cdot c$.

Főleg a gázok és folyadékok esetében szokás használni a mólhőt.

Mólhő (c'):

az 1 mol mennyiségre vonatkozó hőkapacitás (számértékileg).

A fajhő, ill. a mólhő nemcsak a rendszer anyagától, de a hőátadás körülményeitől is függ. Ezért különböztetünk meg pl. állandó nyomás mellett vett c_p , és állandó térfogaton vett c_v fajhőt.

A hőátadáskor azonban gyakran sem a térfogat, sem a nyomás nem marad változatlan.

A hő az energia egyik formája. Ezzel az energiával mechanikai munkát is lehet végezteni. Ennek példája a gőzgép. És fordítva, mechanikai munka révén nemcsak a test helyzeti (vagy mozgási) energiáját lehet növelni, hanem hőt is lehet termelni, például súrlódással. További példa:

két test rugalmatlan ütközése, ahol az összes mechanikai energia csökken, ugyanakkor a testek hőmérséklete kicsit növekszik. Vagyis a mechanikai energiának egy része áttanszformálódik hőenergiává.

A hőmennyiség mértékegységeként – mint az energia esetében általában – az SI mértékegység-rendszerben a Joule-t [J] használják. Ugyanakkor az irodalomban, különböző kézikönyvekben még gyakran találkozunk a régi, az SI-rendszerhez nem tartozó hőmennyiség mértékegységgel, a kalóriával, aminek a jele: „cal”. Ezért megadjuk a kapcsolatot az SI-beli energia-mértékegység J és a cal között. Ez az ún. **mechanikai egyenérték A**: $A = 1\text{J}/1\text{cal} = 0,2388$. A fordított reláció: $1\text{cal} = 4,1868\text{J}$.

7.1. példa: Ismeretlen tömegű ólom puskagolyó 200 m/s sebességgel csapódik be egy fába, és ott megáll. Feltéve, hogy a keletkezett hőnek $2/3$ -a a golyóba jut, $1/3$ -a pedig a fába, hány fokkal emelkedik a golyó hőmérséklete? Az ólom fajhője $c = 129,8\text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Megoldás: A feladat szerint az összes mozgási energia átalakult hőmennyiséggé. A mozgási energia nagysága $mv^2/2$. Ennek $2/3$ része jut be a golyóba, vagyis $Q = mv^2/3$ [J]. A golyó hőkapacitása $m \cdot c$. A hőkapacitás definíciójából következik, hogy

$$Q = m \cdot c \Delta T,$$

ahol ΔT a hőmérséklet változása. Mivel most

$$mv^2/3 = m \cdot c \Delta T,$$

azt kapjuk, hogy $\Delta T = v^2/3c$, vagy, elemi számítások után, $\Delta T = 102,7^\circ\text{K}$. Ennyivel növekszik a golyó hőmérséklete.

7.1.4. A termodinamika I. főtétele

A hőmennyiség szoros kapcsolatban áll a másik alapvető termodinamikai fogalommal: a test, vagy a rendszer belső energiájával. A belső energia a testet (rendszert) alkotó részecskék - atomok, molekulák - rendezetlen mozgásának, ún. hőmozgásának energiája. Fontos, hogy a belső energiát, E -t, a rendszer két állapota közötti belső energiamegváltozás jellemzésére használjuk. Forgalmilag hasonló a helyzet, mint a potenciális energia esetén volt. Tehát a belső energia változása a számunkra fontos mennyiség.

Az egyik legfontosabb fizikai (és természettudományi) törvény az **energiamegmaradás törvénye**. A termodinamikában ezt az I. főtétele tartalmazza:

A termodinamika I. főtétele:

A belső energia változása ΔE megegyezik a rendszernek (testnek) átadott hőmennyiség Q és a testen a külső erők (a környezet) által végzett munka W_k összegével:

$$\Delta E = Q + W_k. \quad (7.3)$$

Itt Q lehet mind pozitív, mind negatív. Az utóbbi példájával találkozunk, ha a hő a rendszerből áramlik a környezetbe. Hasonló módon, W_k is lehet mind pozitív, mind negatív. Ha W_k a külső erők (a környezet) által végzett munka, és W_b a rendszer által ugyanabban a folyamatban végzett munka, akkor

$$W_k = -W_b. \quad (7.4)$$

Ezeknek megfelelően a belső energia változása is lehet mind pozitív, mind negatív.

Az I. főtételeből következik az is, hogy nem létezik elsőfajú „perpetuum mobile” (örökmozgó), vagyis olyan gép, ami „semmiből” termelne energiát vagy munkát.

A külső erők (a környezet) által végzett munka többfajta lehet, például a test egészének mozgására fordított munka stb. A termodinamikában elsősorban a rendszer belső állapotát változtató munkát, pl. a táglási vagy összenyomási munkát vesszük figyelembe. Vagyis, a termodinamika I. főtételeiben csak olyan munka szerepel, amely hatására például csökken vagy növekszik a rendszer térfogata V .

7.1.5. Állapotfüggvény

Definiáljuk az I. Tételben szereplő munkát elemi folyamatra. Természetesen ez attól is függ, hogy milyen folyamatról van szó.

Elemi munka δW_b :

Az elemi munka, amelyet a rendszer p nyomás esetén a térfogat dV elemi változásakor végez:

$$\delta W_b = p dV. \quad (7.5)$$

Itt δ -vel azt jelöljük, hogy ez a kifejezés általában nem teljes differenciál.

Ha a belső erők munkájának eredménye a térfogat növekedése ($\Delta V > 0$), akkor ez az elemi munka pozitív.

Leggyakrabban az elemi munka nem teljes differenciál, és ebből az következik, hogy ha a rendszer (p_1, V_1) állapotból (p_2, V_2) állapotba kerül, a

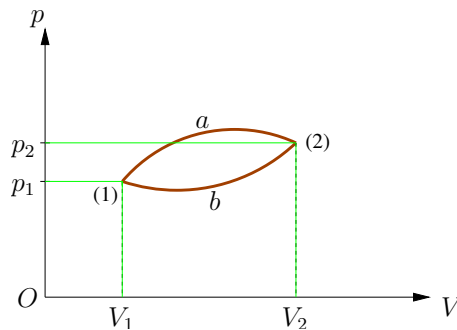
végzett munka függ attól, hogy milyen módon ment át a rendszer az egyik állapotból a másikba, vagyis milyen volt a $p = p(V)$ függvény.

Jegyezzük meg, hogy ez a jelenség nemcsak a termodinamikában jelentkezik, hanem gyakorlatilag bárhol, ahol a végzett munkát számolják. Csak akkor nem függ a munka a megtett konkrét pályától, ha az erőter potenciálos, vagyis az erő konzervatív (ld. 1.4. alfejezet).

A nyomás $V_1 \rightarrow V_2$ folyamán végzett munkája, a belső erők munkája a következő integrállal fejezhető ki:

$$W_b = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (7.6)$$

Nézzük meg a 7.1. ábrát:



7.1. ábra. p-V diagram: munka mennyiségének szemléltetése

Az (1) állapotból a rendszer átkerül a (2) állapotba. Az a és b görbék két különböző $p = p(V)$ függvényt ábrázolnak. A határozott integrál geometriai értelmezéséből az következik, hogy az integrál értékének (vagyis a végzett munkának) a görbe alatti terület felel meg. Ez a terület függ attól, hogy milyen módon, a vagy b görbén jutott át a rendszer az (1) állapotból a (2) állapotba. A fentiek igazok lesznek W_k -ra is, mivel $W_k = -W_b$.

Nézzük meg a belső energia változását. Ha az (1) állapotban a rendszer belső energiája E_1 , a (2)-ben pedig E_2 , akkor a belső energia változása

$$\Delta E = E_2 - E_1.$$

A rendszer minden állapotához a belső energia egy-egy értéke tartozik. Vagyis, a belső energia az állapotot jellemzi, és ilyen értelemben állapot-határozóinak egyértékű függvénye. Ebből az következik, hogy $E_2 - E_1$

nem függ attól, hogy a rendszer milyen módon került az (1) állapotból a (2) állapotba. Matematikailag ez azt jelenti, hogy E elemi változása esetén dE teljes differenciál. Ennek értelmében a termodinamika I. főtétele elemi folyamatra

$$dE = \delta Q + \delta W_k.$$

Tehát a δQ hőmennyiség és a δW_k elemi munka nem teljes differenciálok, összegük azonban már az. ΔE tehát nem függ attól, hogy milyen úton, a vagy b (ld. a 7.1 ábrát) kerül át a rendszer az (1) állapotból a (2)-be. Eközben a különböző pályákon más és más munkát végeznek a külső erők, és eközben más és más hőmennyiség kerül a rendszerbe. Ezeknek összege pedig már nem függ a pályától.

Az I. főtétel fenti formája csak a térfogati munka esetén

$$\delta Q = dE + p dV = dE + \delta W_b \quad (7.7)$$

alakú.

Ha az anyagmennyiség változatlan (n mólszám állandó), akkor az állapotegyenlet miatt két állapothatározó, pl. p és T határozza meg az állapotot, és

$$E = E(p, T).$$

Az olyan függvényt, amely az adott állapotot jellemezi, **állapotfüggvénynek** nevezzük. A belső energia az egyik állapotfüggvény.

7.2. Az ideális gázok termodinamikája

7.2.1. Az ideális gázok állapotegyenlete

Már a 18. században felfedezték, hogy állandó mennyiségű gázokra a következő összefüggés érvényes:

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} \quad (7.8)$$

A kifejezésben szereplő állandó függ a gáz mennyiségétől. Ezt figyelembe véve írjuk fel az ideális gázok állapotegyenletét:

Az ideális gázok állapotegyenlete:

$$pV = nRT, \quad (7.9)$$

ahol n a mólszámmal mért gázmennyiség, $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ - az univerzális gázállandó.

Fontos (és első pillantásra váratlan), hogy R az összes, ideálisnak mondható gázra ugyanaz. (Ezért is nevezik „univerzális”-nak.)

A (7.9) egyenlet az ideális gázok definíciójaként is elfogadható. Megjegyezzük, hogy p -re és T -re vonatkozóan normális („hétköznapi”) körülmények között a gázokat, így a levegőt is, ideális gázoknak tekinthetjük.

Felvetődik a kérdés: mikor nem lehet a gázt ideálisnak tekinteni? Akkor, ha a körülmények nem „hétköznapiak”. Például, ha az un. ritka gázt vizsgáljuk, amikor p nagyon kicsi (mint a Föld atmoszférájának felső rétegeiben). Vagy a nyomás nagyon nagy. Vagy nagyon pontos elemzésre és eredményekre van szükségünk. Ha a nyomás nagy, akkor nem az ideális, hanem a valóságos gáz állapotegyenletét kell használni. (Ezzel később röviden foglalkozunk.) A ritka gázoknál a helyzet még bonyolultabb: ebben az esetben kinetikai elméletet vagy statisztikus fizikát kell alkalmazni. Még egy példa a nem ideális gázra: a nagyon alacsony hőmérsékletű gáz.

A (7.8) képletből világos, hogy a termodinamikai hőmérséklet T nem lehet negatív vagy nulla. Ezért is nevezzük a Kelvin-féle skálát abszolútnak.

Ha a gáz mennyiségét a részecskék számával N mérjük, akkor más gázállandót kell használnunk, az un. **Boltzmann-állandót**: k . Mivel egy mólbán $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ darab részecske van (Avogadro-szám), $N = n \cdot N_0$ és

$$k = R/N_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K},$$

így (7.9) egyenlet a

$$pV = NkT \quad (7.10)$$

formában átírható.

7.2. példa: Hogyan változik a nyomás az állandó tömegű ideális gázban, ha a hőmérséklet 5°C -ről 30°C -ra változik, a térfogat pedig 10%-kal csökken?

Megoldás: A kezdeti állapotot jelöljük 1. indexszel: $p_1, V_1, T_1 = 278^\circ\text{K}$. A megváltozott állapotot 2. indexszel jelöljük: $p_2, V_2, T_2 = 303^\circ\text{K}$. Ismert továbbá, hogy a térfogat 10%-kal csökkent, vagyis $V_2 = 0,9 V_1$. Mivel

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \text{const},$$

vagy

$$\frac{p_1 V_1}{278} = \frac{p_2 V_1 \cdot 0,9}{303},$$

ebből elemi számítások után megkapjuk, hogy $p_2 = 1,21p_1$, vagyis a nyomás 21%-kal növekedett.

7.2.2. A Maxwell-féle eloszlási függvény

Az állapothatározók p, V, T az ún. **makro- (vagy fenomenológiai) paraméterek**. A makroparaméterek használata (néha implicit módon) azt feltételezi, hogy a közeg folytonos, vagyis, a közegből tetszőleges (határesetben végtelen) kis térfogatelemet lehet elkülöníteni, és ezek tulajdonságai ugyanolyanok lesznek, mint a közeg egészének, és így ezek a makroparaméterek azokra is alkalmazhatóak. Márpedig ismert, hogy a közeg részecskékből áll, atomokból és molekulákból, és ezeknek a részecskéknak saját mozgásuk van. Egy részecskének (molekulának, atomnak) a hőmérsékletét pedig nem lehet se mérni, se definiálni, nem is beszélve a molekulák közötti üregekről.

Ezért indokolt és szükséges megállapítani a kapcsolatot a makroparaméterek és a részecskékre jellemző mikroparaméterek között. Ezek a **mikroparaméterek**: a részecskék átlagos sebessége, ütközési gyakorisága, a két ütközés között eltelt átlagos idő és távolság, stb. A mikro- és makroparaméterek közötti kapcsolatok megállapítása a gázok molekuláris (kinetikai) elméletének a feladata.

Természetesen, egy részecske sebességét nem lehet megfigyelni, megállapítani. Ezért statisztikai módszereket szükséges használni, ezért használják pl. az átlagos sebességet, stb.

A molekulák (atomok) sebesség szerinti eloszlása, ha a gáz egyensúlyban van, megfelel a Maxwell-törvénynek (vagy Maxwell-féle statisztikának). Egy részecske sebességének, mint vektornak, három komponense van, az adott koordináta-rendszerben ezek v_x, v_y, v_z .

Maxwell-féle statisztika kifejezése:

Azon molekulák (atomok) száma, amelyeknek sebesség-komponensei v_x és $v_x + dv_x$, v_y és $v_y + dv_y$, v_z és $v_z + dv_z$ között vannak:

$$dN = N \cdot A \cdot e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z = N \cdot f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z, \quad (7.11)$$

ahol N az összes részecske száma, m a részecske (molekula, atom) tömege.

Itt $f(v_x, v_y, v_z)$ az un. **eloszlási függvény**. A v_x, v_y, v_z komponenseket adottaknak tekintjük. Azonkívül feltételeztük, hogy a gázban áramlás nincs, vagyis a részecskék csak kaotikus, rendezetlen, un. Brown-féle mozgást végeznek. (Ezt a mozgást hőmozgásnak is nevezik.)

Az A együtthatót úgy választják meg, hogy az összes részecske száma N legyen. Ezt úgy tudjuk kiszámítani, hogy a fenti kifejezést integráljuk minden lehetséges sebesség szerint, vagyis a sebesség mindhárom komponense szerint a $(-\infty, \infty)$ intervallumon. Az így kapott érték:

$$A = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}. \quad (7.12)$$

A Maxwell-eloszlás első direkt kísérleti ellenőrzését a huszadik század huszadik éveiben Stern ill. Lammert végezték. A kísérleti eredmények jó megegyezést mutattak az elmélettel.

7.3. példa: A 20°C hőmérsékletű 1 mól mennyiségű oxigén gázban hány molekulának a sebessége esik mind a három egymásra merőleges irányban a 200 és 201 m/s közötti intervallumba?

Megoldás:

Először számoljuk ki a (7.11) és (7.12) képletekben szereplő $m/(2kT)$ mennyiséget. Az oxigén molekulatömege 32 g/mol. Így egy molekula tömege $m = \mu/N_0$, $\mu = 0,032$ kg/mol, és

$$\frac{m}{2kT} = \frac{\mu}{2kN_0T} = \frac{\mu}{2RT} = 6,57 \cdot 10^{-6}.$$

(Emlékezőként, $R = kN_0$.) Továbbá, $v_x = v_y = v_z = 200$ m/s, $T = 293$ K és

$$\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} = 0,7886.$$

Mivel a feladat szerint $N = N_0 = 6,012 \cdot 10^{23}$ és $dv_x dv_y dv_z = 1 \text{ m}^3/\text{s}^3$, így a (7.11) képlet alapján

$$dN = 8,266 \cdot 10^{14}.$$

Ha a kérdés úgy szólt volna, hogy hány molekulának a sebessége 200 m/s, akkor a válasz: nulla. Mert ez azt feltételezte volna, hogy a sebességnek abszolút pontosan 200 m/s-nak kellett volna lennie, és ennek a valószínűsége nulla.

Az előbb a (7.11) Maxwell-féle eloszlási függvény használatánál azt szabtuk feltételnek, hogy a rendszer **egyensúlyi állapotban** van. Fordítva is lehet fogalmazni: a rendszer egyensúlyi állapotban van, ha a részecskék sebessége kielégíti a Maxwell-féle eloszlási függvényt. Ha a rendszer nincs

egyensúlyi állapotban, akkor például a hőmérséklet elveszti a szokásos értelmezését, és ennek az állapotnak a vizsgálata már nem a termodinamika feladata, hanem az általános gázkinetikai elméletnek és a statisztikus fizikának.

Nem egyensúlyi állapotot figyelhetünk meg, ha például gáz áramlik egy üres kamrába (vákuumba). Az első pillanatban a gáz nem lesz egyensúlyban, és a részecskék sebessége még nem felel meg a Maxwell-féle eloszlásnak.

Másik példa a lökeshullám a ritka gázban, ahol a lökeshullám már nem felület, hanem réteg. Ebben a rétegben a gáz szintén nincs egyensúlyi állapotban. Ritka gázokra általában jellemző, hogy több időre van szükség ahhoz, hogy a nem egyensúlyi állapotú gázban egyensúly alakuljon ki.

A továbbiakban azt feltételezzük, hogy a rendszer egyensúlyi állapotban van.

Gyakran szükségünk van a molekulák sebesség-abszolút értéke $v = |v|$ szerinti eloszlására. Vagyis, azt akarjuk tudni, hány részecskénél esik a sebesség abszolút értéke a v és $v + dv$ közötti intervallumba. Ez a szám

$$dN = N \cdot 4\pi A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv = N \cdot 4\pi f(v) \cdot v^2 dv. \quad (7.13)$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$f = A e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

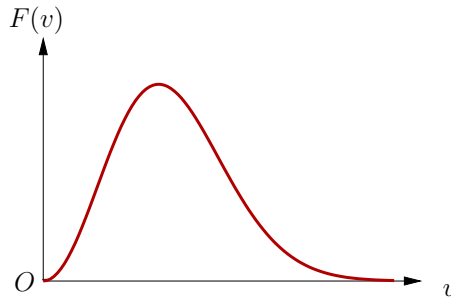
A 7.2. ábra mutatja a sebesség abszolút értéke szerinti eloszlási függvény görbáját. Itt az $F(v)$ függvény:

$$F(v) = 4\pi f(v) \cdot v^2. \quad (7.14)$$

Az $f(v_x, v_y, v_z)$ Maxwell-féle eloszlási függvényben szerepel a hőmérséklet T (makroparaméter), illetve a részecskék sebessége (mikroparaméter). Ez lehetővé teszi kapcsolatteremtést a mikro- és makroparaméterek között.

Továbbá, a (7.11) képlet lehetőséget ad a molekulák átlagos sebességének kiszámítására. Ez azért lehetséges, mert az f és F függvényeknek súlyfüggvény szerepük van. Így, az x irányú sebesség négyzetének átlagát ($\overline{v_x^2}$ -ot) a következő integrál adja:

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) v_x^2 dv_x dv_y dv_z = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} v_x^2 dv_x dv_y dv_z,$$



7.2. ábra. Maxwell-féle eloszlási függvény

aminek az értéke $\overline{v_x^2} = kT/m$. Ebből következik, hogy

$$\frac{m\overline{v_x^2}}{2} = \frac{1}{2}kT.$$

A Maxwell-féle eloszlási függvény szimmetrikus a sebességvektor komponenseire nézve. Így a $\overline{v_y^2}$ -re és $\overline{v_z^2}$ -re is hasonló eredmények érvényesek:

$$\frac{m\overline{v_y^2}}{2} = \frac{m\overline{v_z^2}}{2} = \frac{1}{2}kT.$$

Mivel $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$, azt kapjuk, hogy

egy részecske átlagos transzlációs mozgási energiája

$$\overline{E_1} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT. \quad (7.15)$$

Figyeljük meg, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk az

$$F(v) \cdot v^2 dv = 4\pi A e^{-\frac{mv^2}{2kt}} \cdot v^2 \cdot v^2 dv$$

eloszlás v szerinti integrálásával 0 és ∞ között.

Fontos megjegyezni, hogy (7.15) a részecskéknek az **átlagos** mozgási energiája. Egy konkrét részecskének természetesen lehet (és lesz is) más mozgási energiája: nagyobb, vagy kisebb, mint az átlagos.

A fenti (7.15) képlet megmutatja a makro- (hőmérséklet) és mikro- (átlagos mozgási energia) paraméterek közötti kapcsolatot. A képlet a hőmérséklet mechanikai értelmezéseként is szolgálhat.

Az N részecskéből álló gázmennyiség translációs energiája

$$E = N \frac{m \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} N k T. \quad (7.16)$$

Ebből megkapható az átlagos kvadratikus sebesség: $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3kT/m}$.

Megjegyezzük, hogy ez nem a molekulák átlagos sebessége. A molekulák sebesség-nagyságának átlagát ($\bar{v}$ -ot) szintén a Maxwell-féle eloszlási függvény segítségével kaphatjuk meg, ha kiszámítjuk a következő integrált:

$$\bar{v} = \int_0^\infty F \cdot v \cdot dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Ez a kifejezés különbözik a fenti kvadratikus sebességtől, de a különbség nem nagy; pontosabban, mindkettő ugyanazon nagyságrendű: $\sqrt{\overline{v^2}}$ 8,5%-kal nagyobb mint $\bar{v}$.

7.4. példa: Számítsuk ki az oxigén molekuláinak átlagos kvadratikus sebességét, ha a gáz hőmérséklete 20°C.

Megoldás:

Az oxigén molekulatömege 32 g/mol. Így egy molekula tömege $m = \mu/N_0$, ahol $\mu = 0,032$ kg/mol, $N_0 = 6,012 \cdot 10^{23}$ 1/mol az Avogadro-szám. A Boltzmann-féle állandó pedig kifejezhető mint $k = R/N_0$, ahol $R = 8,31$ J/(mol·K) – univerzális gázállandó. Ezért a fenti (7.15) képletből megkapjuk:

$$\overline{v^2} = \frac{3RTN_0}{N_0\mu} = \frac{3RT}{\mu},$$

és mivel $T = 293^\circ\text{K}$, az átlagos kvadratikus sebesség $\sqrt{\overline{v^2}} = 477,8$ m/s.

7.2.3. Az ekvipartíció tétele

A gázok molekuláris elméletében nagyon fontos szerepet játszik az un. **ekvipartíció tétele**. Az „ekvipartíció” szó „egyenletes eloszlás”-t jelent.

A haladó (transzlációs) mozgás energiája:

$$E_{tr} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2}. \quad (7.17)$$

Egy test – így molekulák is –, mozgását a translációs mozgáson kívül a forgás (rotáció) is jellemzi.

Egy merev test rögzített tengely körüli forgásának energiája

$$E_r = \frac{1}{2} \theta \omega^2, \quad (7.18)$$

ahol θ az adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, ω pedig a szögsebesség.

A forgási mozgásban θ megfelel a tömegnek, a szögsebesség ω pedig hasonló szerepet játszik, mint a sebesség v a haladó (transzlációs) mozgásban.

Ha a testen három speciálisan választott egymásra merőleges tengelyt (az ún. főtengeleket) jelöljük ki, akkor a forgási energiát a következő formában írhatjuk fel:

$$E_r = \frac{1}{2} \theta_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \theta_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \theta_3 \omega_3^2, \quad (7.19)$$

ahol θ_j ($j = 1, 2, 3$) a három főtengelekre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, ω_j pedig a szögsebességvektor három komponense.

A fenti (7.17) és (7.19) képletek egy konkrét testre vonatkoznak. Ugyanakkor, képtelenség megfigyelni egy-egy molekula mozgását, vagyis szükség van arra, hogy az átlagos sebességen kívül az átlagos szögsebességet is bevezessük, pontosabban, a szögsebességvektor komponensek négyzetének átlagát $\overline{\omega_1^2}, \overline{\omega_2^2}, \overline{\omega_3^2}$, amelyek a Maxwell-féle eloszlási függvényhez hasonló szögsebességi eloszlás segítségével számolhatóak ki. Így a gáz részecskéinek átlagos energiája

$$\overline{E}_1 = \frac{m \overline{v_x^2}}{2} + \frac{m \overline{v_y^2}}{2} + \frac{m \overline{v_z^2}}{2} + \frac{\theta_1 \overline{\omega_1^2}}{2} + \frac{\theta_2 \overline{\omega_2^2}}{2} + \frac{\theta_3 \overline{\omega_3^2}}{2}. \quad (7.20)$$

Általában tehát a gáz részecskéinek energiája a translációs és rotációs energia összege. Látjuk, hogy ebben az esetben egy molekulának 6 szabadsági fok van.

Általánosan, ha a rendszer energiája a hely- és impulzuskoordináták (vagy általános sebességkoordináták) homogén, másodfokú függvénye, akkor energiakifejezésben szereplő kvadratikus tágok számát szokás a szabadsági fokok számának (f) nevezni. (Ez gyakran nem egyezik meg a mechanikai szabadsági fokok számával.) Ekkor a rendszer átlagos energiája

$$\overline{E}_1 = f \frac{kT}{2}. \quad (7.21)$$

Ez az **ekvipartíció tétele**.

A (7.20) első három tagjára ezt bemutattuk az előző fejezetben. Boltzmann kimutatta, hogy azokban a rendszerekben, amelyek egyensúlyi állapotban vannak, ez érvényes a többi szabadsági fokokra is.

Az ekvipartíció tétele szavakban:

az egy szabadsági foknak megfelelő átlagos energia egyenlő $kT/2$ -vel.

Az N részecskéből álló gázmennyiség energiája

$$E = N \frac{f}{2} kT = \frac{f}{2} nRT, \quad (7.22)$$

ahol n – a mólból megadott gázmennyiség (mólszám).

Ha a gáz kétatomos molekulákból áll (úgy mint oxigén vagy nitrogén, és így ez jellemző a levegőre is), a részecske szabadsági fokszáma 5, mivel a forgás két tengely körül zajlik; pontosabban, a harmadik tengelyre vonatkozóan, – ami összeköti az atomokat a molekulán belül –, a tehetetlenségi nyomaték elhanyagolható nagyságú, mivel az atommagok sugara (ahol az atom tömegének döntő része található) több nagyságrenddel kisebb, mint az atomok egymástól (és a másik két tengelytől) való távolsága. Ezért ennek a forgásnak a részesedése az energiában elhanyagolható.

Így, ha a levegőben a kis mennyiségű széndioxidot figyelmen kívül hagyjuk, a levegőt kétatomos gáznak minősíthetjük, és a molekulák átlagos energiáját $(5/2)kT$ -nek fogadhatjuk el.

7.5. példa: Számítsuk ki a szénmonoxid molekula átlagos kvadratikusan átlagolt sebességét ($\sqrt{\overline{\omega^2}}$) 25°C hőmérséklet esetén, ha a CO molekula tehetetlenségi nyomatéka $1,46 \cdot 10^{-46} \text{ kgm}^2$.

Megoldás:

Az ekvipartíció tétele szerint a kétatomos molekula átlagos rotációs energiája

$$\frac{1}{2} \theta_1 \overline{\omega_1^2} + \frac{1}{2} \theta_2 \overline{\omega_2^2} = \frac{2}{2} kT. \quad (7.23)$$

A tehetetlenségi nyomatékra igaz, hogy $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, mivel a CO molekula forgásszimmetrikus a két atomot összekötő tengelyre nézve. Továbbá, a hőmérséklet $T = 298^\circ\text{K}$, és a Pitagorasz-tétel alapján $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2$.

Ezért a fenti képletből megkapjuk, hogy $\theta \overline{\omega^2} = 2kT$, ahonnan következik, hogy $\sqrt{\overline{\omega^2}} = 7,51 \cdot 10^{12} \text{ 1/s}$.

7.2.4. Az ideális gázok hőkapacitása

A hőkapacitás definícióját a (7.2) képletben adtuk meg. Ennek általánosabb formája az 1 kg-ra , vagy az 1 mólra vonatkozó hőkapacitás: fajhő ill. mólhő. Nézzük meg az ideális gázokra vonatkozó állandó térfogaton vett mólhőt: c'_V . Állandó térfogat esetén az elemi belső munka (ld. (7.5)) $\delta W_b = p dV = 0$, mivel $dV = 0$. Akkor a (7.3) egyenletből következik, hogy $Q = \Delta E$, és a (7.2) definícióból

$$C_V = \frac{dQ}{dT} = \frac{dE}{dT}. \quad (7.24)$$

Az ideális gázban $E = (f/2)NkT = (f/2)nRT$ (ld. (7.22)), ahonnan az állandó térfogaton vett hőkapacitás

$$C_V = (f/2)nR,$$

és az egy mólra eső hőkapacitás ($n = 1$), vagy

az állandó térfogaton vett mólhő:

$$c'_V = \frac{f}{2} R. \quad (7.25)$$

Figyeljük meg, hogyan függ a belső energia a hőmérséklettől. Feltételezve, hogy a gáz mennyisége 1 mól, megkapjuk, hogy

a belső energia változása:

$$dE = c'_V dT, \quad E - E_0 = c'_V (T - T_0). \quad (7.26)$$

Most nézzük meg az állandó nyomás mellett vett c'_p mólhőt. Az elemi munka most nem nulla: $\delta W_b = p dV$, de mivel p állandó, könnyű kiszámolni a munkát. Ha a térfogat V_1 -ről V_2 -re, változik, $W_b = p(V_2 - V_1)$ (ld (7.6)). Mivel egy mól esetén $pV = RT$, a belső munkát könnyű a hőmérséklet függvényeként kifejezni: $W_b = R(T_2 - T_1)$. Így $Q = \Delta E + R\Delta T$, $\Delta T = T_2 - T_1$, és a differenciálás után, (7.22)-t használva megkapjuk, hogy

az állandó nyomás mellett vett mólhő:

$$c'_p = \frac{dQ}{dT} = \frac{dE}{dT} + \frac{d(RT)}{dT} = \frac{f}{2}R + R = \frac{f+2}{2}R. \quad (7.27)$$

Így

$$c'_p = c'_V + R. \quad (7.28)$$

A két mólhő (és, általában, a hőkapacitás) aránya az ideális gázok esetén

$$\kappa = \frac{c'_p}{c'_V} = \frac{f + 2}{f}. \quad (7.29)$$

A levegő esetén, amit jó közelítéssel 2 atomos gáznak fogadhatunk el, figyelmen kívül hagyva a kis mennyiségű széndioxidot, $\kappa = 7/5 = 1,4$.

Ezeket az adatokat, amelyek a mólhőre, vagy κ -ra vonatkoznak, kísérletek is megerősítették.

7.2.5. A szabadsági fokok „befagyása”

Kísérletek közben kiderült, hogy nagyon alacsony hőmérséklet esetén a hőkapacitás nem felel meg a fenti (7.25) és (7.27) képleteknek, hanem kisebb annál, mint ami ezekből a képletekből következne. Például, ezzel a jelenséggel találkozunk a hidrogén gáz esetében, ha a hőmérséklet alacsonyabb mint 80°K. Ezt úgy lehet értelmezni, hogy a szabadsági fokok száma csökken. Ezt a jelenséget a szabadsági fokok „befagyásának” nevezik.

Ennek a jelenségnek a magyarázata a következő lehet. Amint – majd később tanulni fogjuk –, a molekulák rotációs spektruma nem folytonos (ugyanúgy mint a vibrációs spektrum), vagyis a rotációs (és vibrációs) energiája nem lehet bármilyen nagyságú. Ugyanakkor, a rotációs energia szintjei között nem nagy a távolság, ezért a szobahőmérséklet körülményei között a molekulák translációs energiája nagyobb, mint a rotációs energia szintjei közötti különbség, és ütközéskor a translációs energia egy része áttanszformálódhat rotációs energiává. Ha pedig a hőmérséklet T elég alacsony, akkor az átlagos translációs energia $E_{tr} = 3kT/2$, kisebb lehet mint a rotációs energia szintjei közötti különbség, ami nem függ a hőmérséklettől. Ezért ütközéskor a rotációs energia nem tud változni, mivel a változásához szükséges energiát nem tud felvenni. Ilyen esetekben a rotációs energia nem játszik szerepet az energia változásában. Ebből világos, hogy alacsony hőmérsékletnél a szabadsági fokok száma valóban csökken.

Magas hőmérsékleti körülmények között a helyzet hasonló, csak a „befagyás” helyett a szabadsági fokok száma nő. Szobahőmérséklet vagy alacsonyabb hőmérséklet esetén a vibrációs energia szintjei közötti különbség sokkal nagyobb, mint az átlagos translációs energia. (Majd fogjuk látni, hogy a vibrációs energia szintjei közötti különbség többszöröse a rotációs energiáénak.) Ezért a vibrációs energiának megfelelő szabadsági

fokok nem szerepelhetnek a hőkapacitás képletében. Magas hőmérséklet esetén az átlagos translációs és rotációs energia együttesen már nagyobb lehet, mint a molekulák vibrációs energia szintjei közötti különbség. Így, ütközés közben, változhat a részecske vibrációs energiája is, és ezzel együtt, természetesen, változik a translációs és a rotációs energia is. Ezért változik a hőkapacitás.

Szobahőmérséklet esetén ez a jelenség annyira ritka, a nagy translációs energiájú részecskék aránya annyira kicsi, hogy ez nem játszik jelentős szerepet az energia változásában.

7.3. Szilárdtestek termodinamikája

7.3.1. Hőtágulás

Az ideális gázok állapotegyenletéből következik, hogy állandó nyomás mellett a gázok térfogata lineárisan függ a hőmérséklettől. Ha az abszolút hőmérséklet 10% -kal növekszik, a térfogat szintén 10%-kal lesz nagyobb.

A szilárdtestek térfogata a hőmérséklettel szintén növekszik, de sokkal kisebb mértékben. Ez az ún. **hőtágulás**.

Legyen a test hosszúsága T_0 hőmérsékleten l_0 , T_1 hőmérsékleten l_1 . Ha a hőmérséklet változása nem túl nagy, a szilárdtestek hosszváltozása az α **lineáris hőtágulási együttható** segítségével írható le:

$$l_1 = l_0(1 + \alpha\Delta T), \quad \text{ahol} \quad \Delta T = T_1 - T_0,$$

vagy

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \Delta T, \quad \text{ahol} \quad \Delta l = l_1 - l_0. \quad (7.30)$$

Ennek alapján becsülhetjük meg a térfogat változását is.

Legyenek egy téglatest alakú test élei l_{0x}, l_{0y}, l_{0z} , és így térfogata $V_0 = l_{0x} \cdot l_{0y} \cdot l_{0z}$. A hőmérséklet változásának hatására a test mérete mind a három irányban változik: $l_x = l_{0x}(1 + \alpha\Delta T)$, $l_y = l_{0y}(1 + \alpha\Delta T)$, $l_z = l_{0z}(1 + \alpha\Delta T)$, és így térfogata

$$V_1 = V_0(1 + \alpha\Delta T)^3 = V_0(1 + 3\alpha\Delta T + 3\alpha^2\Delta T^2 + \alpha^3\Delta T^3)$$

lesz. Mivel α nagyon kicsi, ezért az α^2 -et és az α^3 -öt tartalmazó tagokat el lehet hanyagolni, ezért $V_1 = V_0(1 + 3\alpha\Delta T)$, vagyis a térfogati tágulásra **lineáris közelítést** használunk. Így

$$\Delta V = V_0 \cdot \beta \Delta T, \quad \Delta V = V_1 - V_0, \quad \beta = 3\alpha, \quad (7.31)$$

ahol β -t **térfogati hőtágulási együtthatónak** nevezik.

7.6. példa: Egy acél sín hosszúsága 0°C hőmérsékletnél 20m. Milyen hosszúsága lesz a sínnek -30°C és 30°C hőmérséklet esetén, ha az acél lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1,0 \cdot 10^{-5} 1/\text{K}$?

Megoldás:

A hőmérséklet változása $\Delta T = \pm 30^\circ\text{K}$, a lineáris hőtágulás

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = \pm 6 \cdot 10^{-3} \text{m},$$

vagyis a hosszúság csökkentése ill. növekedése 6mm.

A példából látszik, hogy a hőtágulás nem nagy. De ez nem jelent azt, hogy ezt a hosszváltozást minden esetben figyelmen kívül lehet hagyni. Például, legyen a sín keresztmetszete $S = 10 \text{ cm}^2$, és legyen acélból, amelynek Young-modulusza $E = 2,15 \cdot 10^{11}$. Ha a sínek között 0°C hőmérsékletnél nem hagyunk rést, akkor 30°C hőmérsékletnél a szomszéd sínre ható erő (a fenti példa adataival)

$$F = E \cdot S \cdot \Delta l / l_0 = 6,45 \cdot 10^4 \text{ N},$$

vagyis az erő egy több mint hattonnás test súlyának felel meg.

Megjegyezzük, hogy vannak olyan esetek (főleg nagy hőmérsékletű változásokor, ill. bizonyos anyagok esetében) amikor a lineáris közelítés helyett a másodfokú (esetleg még a harmadfokú) tagokat is figyelembe kell venni.

7.3.2. Szilárdtestek hőkapacitása

A szilárdtestek atomjai egy rögzített rend szerint helyezkednek el, és egy-egy atomra a rendszer összes többi atomja is hat. Természetesen, legnagyobb hatása a szomszédos és a közelben lévő atomoknak lesz. A mindenhol jövő hatásokat olyan módon lehet modellezni, mintha az atom állandó rezgőmozgásban lenne a körül a pont körül, ahol az összes rá ható erő összege nulla, vagyis az egyensúlyi pont körül. Ez a rezgőmozgás háromdimenziós.

Az egydimenziós rezgőmozgás mozgási energiája $mv_x^2/2$, a testre ható erő pedig $F = -Dx$. Ez az erő potenciális, vagyis létezik egy függvény ($U = Dx^2/2$), amelynek deriváltjával ellenkező irányú az erő: $F = -dU/dx$ (ld. (1.23) képlet). Így, ez a függvény a test potenciális energiája. A test összes (mechanikai) vibrációs energiája egydimenziós mozgás közben ek-

$$E_v = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{Dx^2}{2}.$$

Ha a rezgőmozgás háromdimenziós, úgy, mint a szilárdtestek atomjai esetén, akkor a test összes vibrációs energia

$$E_v = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2} + \frac{Dx^2}{2} + \frac{Dy^2}{2} + \frac{Dz^2}{2}.$$

Potenciális erőterben, a mechanikai energia – a mozgási (kinetikai) és a potenciális energia összege –, a megmaradási törvény alapján a mozgás közben állandó, vagyis E_v nem változik.

Az előző képlet azt mutatja, hogy a szilárd testek atomjainál a szabadsági fokok száma $f = 6$. Ennek alapján a mólhő

$$c' = \frac{f}{2}R = 3R. \quad (7.32)$$

Ez az úgynevezett **Dulong-Petit-szabály**. Jó közelítéssel $c' = 25 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$. A képlet, amit felhasználtunk, (7.25) és állandó térfogat mellett érvényes. Mi a helyzet az állandó nyomás esetén? Az előző alfejezetben láttuk, hogy hőmérséklet-változás hatására a szilárd testek térfogata változik, a hőmérséklet növekedésével a térfogat növekszik. Ugyanakkor, ez a növekedés annyira kicsi, hogy ezt nem érdemes figyelembe venni a mólhő (és általában a hőkapacitás) kiszámításában.

Alapozzuk meg ezt az állítást számokkal. Állandó nyomás esetén

$$\Delta Q = \Delta E + p\Delta V, \quad \Delta V = V_0 \cdot \beta \Delta T.$$

Ezért az állandó nyomás melletti hőkapacitás

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = C_V + pV_0\beta.$$

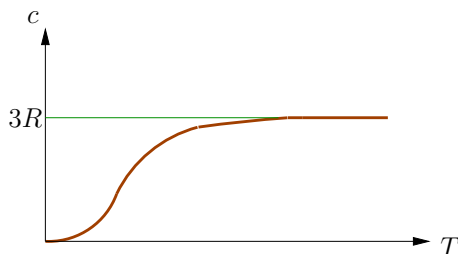
Az állandó nyomáson vett fajhőt úgy kapjuk meg, hogy a fenti kifejezést az m tömeggel elosztjuk:

$$c_p = c_V + p \frac{\beta}{\varrho},$$

ahol $\varrho = m/V_0$ - a test sűrűsége (és $C_V = mc_V$). A vas esetben az előző képlet jobb oldali első tagja értéke $466 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, a második tagjának értéke pedig $4 \cdot 10^{-4} \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, vagyis a c_p és c_V közötti különbség elhanyagolható.

A hőkapacitással kapcsolatos másik megjegyzés az, hogy a gyakorlatban a mólhő csak bizonyos hőmérsékleten felül egyenlő $3R$ -rel. Ezt a jelenséget a 7.3. ábra mutatja.

Alacsonyabb hőmérséklet esetén a mólhő alacsonyabb lesz, ami azt mutatja, hogy csak ettől a bizonyos hőmérséklettől kezdve lesz hattal egyenlő



7.3. ábra. Dulong-Petit szabály

a szabadsági fokok száma. Vagyis itt is a szabadsági fokok befagyásával találkozunk.

Ennek a jelenségnek elméleti magyarázata Debyetől származik. Ez a magyarázat a kristályrács rezgéseinek kvantummechanikai elemzésén alapul.

Az a hőmérséklet, amittől kezdve a fenti (7.32) képlet érvényesül, a különböző anyagokban más és más. Például, az ólomnál a $3R$ képlet már a 200°C -nál érvényes, réznél ugyanez valahol 600°C -nál teljesül, ugyanakkor gyémánt a 1000°C -nál is csak közelíti a $c' = 20 \text{ J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$ értéket.

De vannak olyan anyagok, (főleg azok, amelyeknek kristályrácsa különböző atomokból áll), amelyeknek mólhője sokkal nagyobb, mint $3R$. Például, a klórammónia mólhője $100 \text{ J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$ körül van.

7.4. Körfolyamat

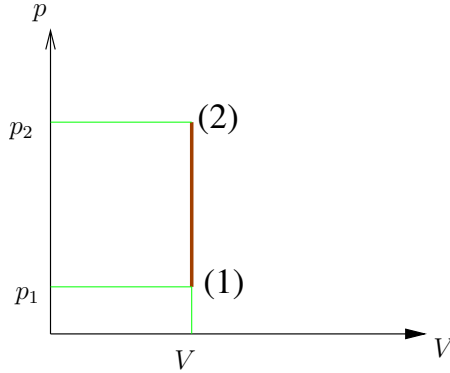
7.4.1. Fő termodinamikai folyamatok

A körfolyamatok tanulmányozása előtt nézzünk meg néhány tipikus termodinamikai folyamatot, amelyek gyakran szerepelnek a körfolyamatokban. Ezekben vizsgáljuk meg a végzett munkát és a hőátadásokat.

1. Izochor állapotváltozás, $V = \text{const.}$

Mivel a térfogat állandó, ezért $dV = 0$, vagyis az elemi munka $\delta W_b = p dV = 0$. Ugyanakkor a hőmérséklet és a nyomás változhat. Az előző képletből és a (7.7.-ből) következik, hogy $\delta Q = dE$, vagyis a környezetből nyert hőmennyiség egészében a belső energia változtatására fordítódik.

Tegyük fel, hogy $p_2 > p_1$, továbbá hogy a mólszám $n = 1$. Akkor $\Delta E = E_2 - E_1 = c'_V(T_2 - T_1)$. Mivel $p_2 \cdot V = RT_2$, $p_1 \cdot V = RT_1$, azt kapjuk,



7.4. ábra. Izochor-folyamat

hogy a felvett hőmennyiség

$$Q = \Delta E = \frac{c'_V \cdot V}{R} (p_2 - p_1) = c'_V \cdot T_1 \frac{p_2 - p_1}{p_1}. \quad (7.33)$$

Ezt a folyamatot mutatja a 7.4. ábrán a $p - V$ diagram.

2. Izobár állapotváltozás, $p = \text{const.}$

Ebben az esetben a munka már nem nulla, de könnyen kiszámítható (ld. (7.6) képletet):

$$W_b = \int_{(1)}^{(2)} p dV = p \int_{(1)}^{(2)} dV = p(V_2 - V_1). \quad (7.34)$$

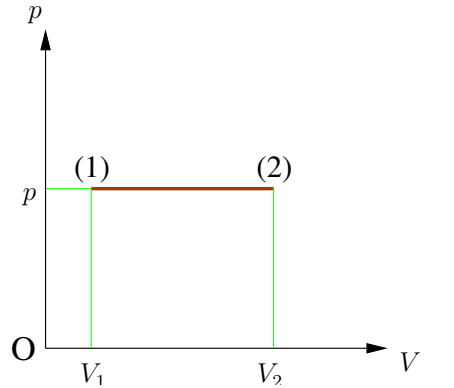
A folyamathoz szükséges hőmennyiséget $W_k = -W_b$ felhasználásával (7.3)-ból kapjuk:

$$Q = \Delta E + W_b = c_V(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1).$$

A mólszám továbbra is $n = 1$.

Mivel $pV_2 = RT_2$, $pV_1 = RT_1$, ezért $p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)$, tehát $Q = (c'_V + R)(T_2 - T_1)$, vagy, mivel $c'_V + R = c'_p$,

$$Q = c'_p(T_2 - T_1) = \frac{c'_p}{R} p(V_2 - V_1). \quad (7.35)$$



7.5. ábra. Izobár-folyamat

Az ilyen folyamat eléggé gyakori a műszaki gyakorlatban. Például, ilyen az állandó terhelésű dugattyúval elzárt hengerben lévő gáz állapotváltozása.

Ezt a folyamatot mutatja a 7.5. ábra.

3. Izotermikus állapotváltozás, $T = \text{const.}$

Az ideális gázok állapotegyenlete ebben az esetben ($n = 1$ továbbra is)

$$pV = RT = \text{const.},$$

vagyis a $p - V$ diagramban (ld. a 7.6. ábra) a p és V kapcsolatot egy parabola szemlélteti:

$$p = RT/V, \quad T = \text{const.}$$

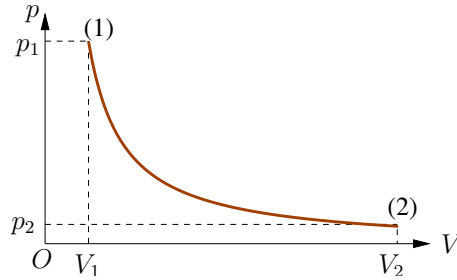
Természetesen, más-más állandó T -nek más-más parabola felel meg.

A munka kiszámításakor használjuk fel, hogy $p = RT/V$, ahol most $T = \text{const.}$, ezért

$$W_b = \int_{(1)}^{(2)} p dV = RT \int_{(1)}^{(2)} \frac{dV}{V}.$$

Eredményként kapjuk:

$$W_b = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (7.36)$$



7.6. ábra. Izotermikus folyamat

Mivel a belső energia nem változik: $\Delta E = c'_V \Delta T = 0$, ezért a hőátadás (hőfelvétel) megegyezik a belső munkával:

$$Q = W_b,$$

vagyis a környezetből nyert hőmennyiség egészében a belső erők munkájának elvégzésére megy.

4. Adiabatus állapotváltozás, $Q = 0$.

Ez az állapotváltozás nagyon fontos szerepet játszik a gyakorlatban és megfelel annak az esetnek, amikor a rendszer el van szigetelve a környezettől, vagyis a környezettel hőcsere nincs.

A termodinamika I. főtételeből következik, hogy

$$dE = -\delta W_b \quad (7.37)$$

(ld. (7.7) és $\delta W_k = -\delta W_b$), vagyis a rendszer munkát csak a belső energia csökkenése árán végezhet.

Mivel $dE = c'_V dT$, így:

$$c'_V dT = -pdV.$$

Az állapotegyenletből következik, hogy $pdV + Vdp = RdT$. Ide az előző egyenletből dT -t helyettesítve,

$$pdV + Vdp = -\frac{R}{c'_V} pdV,$$

ahonnan $c'_p = c'_V + R$ felhasználásával és átrendezés után

$$-c'_p pdV = c'_V V dp.$$

Ebből

$$-\kappa \frac{dV}{V} = \frac{dp}{p}$$

adódik (ahol $\kappa = c'_p/c'_V$), ami valójában egy szeparálható differenciálegyenlet. Ennek megoldása:

$$\kappa \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{p_1}{p_2}, \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa = \frac{p_1}{p_2}.$$

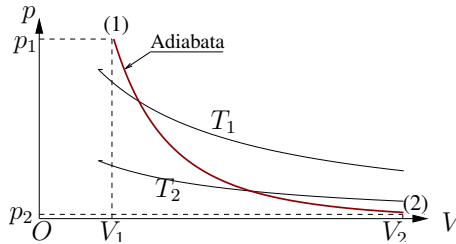
Végül tehát

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa = \text{const.} \quad (7.38)$$

Ez a $p - V$ diagramban egy

$$p = \text{const}/V^\kappa \quad (7.39)$$

alakú görbe, és mivel $\kappa = (f + 2)/f > 1$, ezért V növekedtével gyorsabban csökkenő függvény, mint az izoterm esetben. (Ld. a 7.7. ábra.)



7.7. ábra. Adiabaticus állapotváltozás

A (7.39) képlet alapján ki lehet számolni a munkát. Mivel $p = \text{const}/V^\kappa$, ahol az állandó például $p_1 V_1^\kappa$,

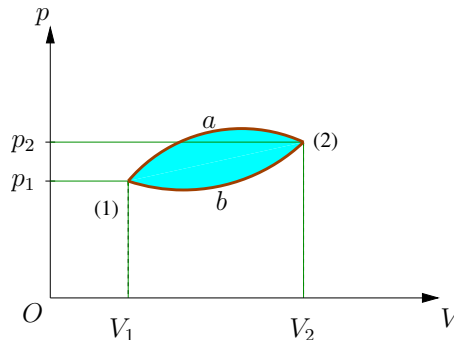
$$\begin{aligned} W_b &= p_1 V_1^\kappa \int_{(1)}^{(2)} \frac{dV}{V^\kappa} = p_1 V_1^\kappa \frac{-1}{\kappa - 1} \left(\frac{1}{V_2^{\kappa-1}} - \frac{1}{V_1^{\kappa-1}} \right) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \right) = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right). \end{aligned} \quad (7.40)$$

(7.40) végső alakjának számításához felhasználtuk, hogy $p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2$. Ezzel a $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$ egyenletet elosztva $V_1^{\kappa-1} T_1 = V_2^{\kappa-1} T_2$, vagyis

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \frac{T_1}{T_2}.$$

7.4.2. Körfolyamatok, hatásfok

A körfolyamatnak az olyan folyamatot nevezzük, amelyben az állapotsíkon (pl. a $p - V$ diagramon) a folyamatot leíró görbe zárt. A 7.8. ábra egy körfolyamatot szemléltet. A folyamat közben a rendszer az (1) pontból az a úton került a (2) pontba, és majd vissza (1)-be a b úton jutott. Ez tehát egy körfolyamat egyszerű példája.



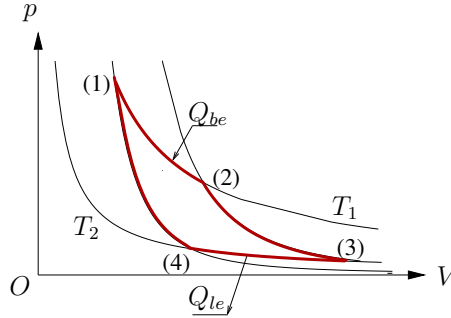
7.8. ábra. Körfolyamat

Mivel az (1)→(2) folyamatban a V térfogat növekszik ($dV > 0$), a belső munka $W_{1\rightarrow 2}$ pozitív. Ugyanakkor az (2)→(1) folyamatban a V térfogat csökken ($dV < 0$), és a belső munka $W_{2\rightarrow 1}$ negatív.

Az ábrából látszik, hogy az a görbe alatti terület nagyobb, mint a b görbe alatti, vagyis $|W_{1\rightarrow 2}| > |W_{2\rightarrow 1}|$, ezért e két munka összege, vagyis a körfolyamat alatt a rendszer által végzett munka (a belső munka W_b) pozitív: $W_{1\rightarrow 2} + W_{2\rightarrow 1} > 0$. Ha a rendszer, az (1) pontból kiindulva a (2) pontba a b görbén jutott volna, és vissza pedig az a görbe szerint mentén történt volna a változás, akkor a rendszer által végzett munka negatív lenne. Összegezve azt lehet mondani, hogy a körfolyamat alatt a rendszer által végzett munka pozitív, ha a változás az óramutató járásával egy irányban történt, és negatív, ha a változás iránya az óramutató járásával ellenkező.

A körfolyamat vizsgálata alatt fontosak a végzett munka, a hőátadások és a hatásfok, aminek pontos definícióját később adjuk meg.

Vizsgáljuk most meg az un. **Carnot-folyamatot** (ld. a 7.9. ábra).



7.9. ábra. Carnot-folyamat

Az (1)→(2) és (3)→(4) szakaszok izotermikus folyamatok, a (2)→(3) és a (4)→(1) szakaszok adiabatikusak.

Lássuk, milyen munkát végzett a rendszer a körfolyamat alatt és ezalatt milyen hőáramlásokra volt szükség.

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow (2): & \text{ Izoterm, } W = RT_1 \ln(V_2/V_1), \quad Q = W, \quad p_1 V_1 = p_2 V_2 \\ (2) \rightarrow (3): & \text{ Adiabat., } W = \frac{p_2 V_2}{\kappa - 1} (1 - (T_2/T_1)), \quad Q = 0, \quad p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa \\ (3) \rightarrow (4): & \text{ Izoterm, } W = RT_2 \ln(V_4/V_3), \quad Q = W, \quad p_3 V_3 = p_4 V_4 \\ (4) \rightarrow (1): & \text{ Adiabat., } W = \frac{p_4 V_4}{\kappa - 1} (1 - (T_1/T_2)), \quad Q = 0, \quad p_4 V_4^\kappa = p_1 V_1^\kappa \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy a két adiabatikus folyamatban végzett munka összege egyenlő nullával. Ez abból következik, hogy ezeken a szakaszokon (7.37). szerint a rendszer által végzett munka egyenlő a belső energia változásának (-1)-szeresével,

$$W_{2 \rightarrow 3} = -(E_3 - E_2), \quad W_{4 \rightarrow 1} = -(E_1 - E_4)$$

Ugyanakkor, $E_1 = E_2 = c'_V T_1$ és $E_3 = E_4 = c'_V T_2$. Ebből nem nehéz belátni, hogy teljesül a fenti megfigyelés: $W_{2 \rightarrow 3} + W_{4 \rightarrow 1} = E_2 - E_3 + E_4 - E_1 = 0$.

Most nézzük meg az izotermikus szakaszok alatt végzett munka összegét:

$$W_{\text{összes}} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

A fenti tábla utolsó oszlopában lévő relációkból a $p_1 V_1^\kappa = p_4 V_4^\kappa$ egyenletet elosztva a $p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa$ egyenlettel, kihasználva továbbá a $p_1 V_1 = p_2 V_2$ és

$p_3 V_3 = p_4 V_4$ egyenleteket a

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\kappa-1}$$

egyenletre jutunk, amiből $V_1/V_2 = V_4/V_3$. Ezért $\ln(V_4/V_3) = -\ln(V_2/V_1)$
Így az izotermikus szakaszokon végzett munkák összege

$$W_{\text{összes}} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (7.41)$$

és ez lesz a körfolyamat alatt a rendszer által végzett összes munka.

A hőátadásra igaz:

$$Q_{be} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad Q_{el} = -RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (7.42)$$

Itt Q_{be} az $1 \rightarrow 2$ folyamat során felvett hőmennyiség, Q_{el} pedig a $3 \rightarrow 4$ folyamat során leadott hőmennyiség. A (7.42) képletben Q_{el} negatív. Tehát:

$$W_{\text{összes}} = Q_{be} + Q_{el}.$$

(A műszaki irodalomban gyakran használják a következő relációt:

$$W_{\text{összes}} = Q_{be} - |Q_{el}|.)$$

Vezessük be a körfolyamat hatásfokának fogalmát.

Az η körfolyamat hatásfoka, más néven a termikus hatásfok:

a végzett (hasznos) munka és a felvett hőmennyiség aránya,

$$\eta = \frac{W_{\text{összes}}}{Q_{be}}. \quad (7.43)$$

A (7.41) és a fenti (7.42) alapján a Carnot-folyamat hatásfokára azt kapjuk, hogy

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (7.44)$$

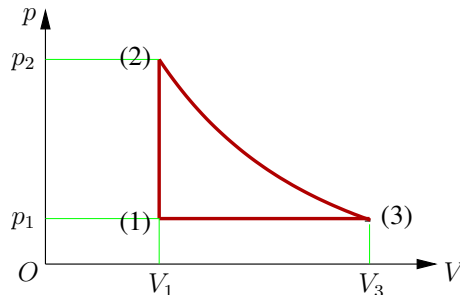
Fontos, hogy a hatásfok mindig kisebb egynél! Az is látszik, hogy ez a hatásfok annál nagyobb, minél kisebb T_2 .

Megjegyezzük, hogy a hatásfokra ilyen egyszerű, csak hőmérséklettel kifejezhető formula csak a Carnot-körfolyamat esetén írható fel.

7.4.3. Hőerőgépek

A körfolyamatok fontos szerepet játszanak a technikában. Gyakorlatilag az összes erőgép, ami a hőenergiát mechanikai energiává alakítja (hőerőgép), körfolyamatszerűen működik.

Ahhoz, hogy lássuk, hogy termodinamikai szempontból hogyan működnek a hőerőgépek, nézzünk meg egy nagyon egyszerű körfolyamatot, ami a 7.10. ábrán látható.



7.10. ábra. Példa egy egyszerű körfolyamatra

Az (1) állapotból a (2) állapotba vezető szakaszban a nyomás változatlan térfogat mellett nő. Ez úgy lehetséges, hogy a rendszerbe a Q_{be} hőmennyiséget vezetjük be (más szóval pumpáljuk be). Közben növekszik a rendszer hőmérséklete. Legegyszerűbb ezt úgy elképzelni, hogy a rendszer közvetlenül érintkezik a környezetben lévő nagy meleg hőtartállyal, amelynek nagysága akkora, hogy a hőmérséklete nem változik a rendszerünk felé irányuló hőátadás közben. Ebben a szakaszban nincs munkavégzés.

A (2) állapotból a (3) állapotba vezető adiabatikus szakasz, az un. expanzió (térfogat-növekedés), amikor a rendszer a munkát azon az áron végzi, hogy belső energiája csökken. A rendszer hőszigetelve van a környezetétől és az előző szakaszban felvett hőenergia egy része mechanikai energiává alakul át. Ebben a szakaszban nincs hőcsere.

Az utolsó, a körfolyamatot bezáró (3) → (1) szakaszban a közeg térfogata csökken úgy, hogy közben a nyomás változatlan marad. Ez úgy lehetséges, hogy közben a rendszerből $|Q_{el}|$ hőmennyiséget vonunk el. Más szóval, a rendszer a környezetében lévő hideg hőtartállyal érintkezik. A térfogat csökkentésével lezajlott munka $W_{1 \rightarrow 3} = p_1(V_1 - V_3) < 0$ külső erők hatására végződik. Ez az un. kompresszió.

Világos, hogy a ciklus alatt végzett munka a termodinamika I. főtéte-

le alapján egyenlő a bevezetett és kivont hőmennyiségek különbségével, mivel a ciklus végén a rendszer állapota megegyezik a ciklus kezdetén lévővel, vagyis a belső energia a körfolyamat végén megegyezik a kezdeti belső energiával, és így

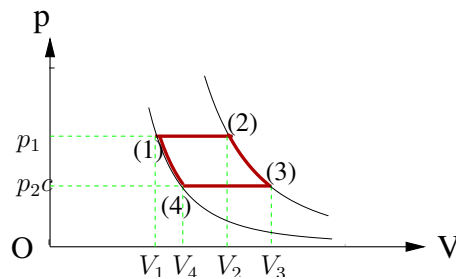
$$W_{\text{összes}} = Q_{be} + Q_{el},$$

a körfolyamat hatásfoka pedig $\eta = W/Q_{be} = (Q_{be} + Q_{el})/Q_{be}$, ($Q_{el} < 0$).

A fent vizsgált körfolyamat demonstrációs jellegű és a gyakorlatban nagyon ritkán alkalmazzák. Ugyanígy, a Carnot-folyamatnak megfelelő hőerőgépeket a gyakorlatban nem alkalmazzák. Ez azzal magyarázható, hogy technikailag nehezen valósítható meg például olyan a 7.9. ábrán a Carnot-folyamatban (1)→(2)-vel jelölt izotermikus expanziós szakasz, amely során hőbevezetés közben a turbinában a hőmérséklet ne növekedne, vagy olyan (3)→(4) kompressziós szakasz, amikor a kompresszorban a hőelvonás közben a hőmérséklet állandó maradna.

Ugyanakkor a Carnot-féle folyamatnak nagyon fontos szerepe van a termodinamikai folyamatok elemzésében, és tegyük hozzá, történelmileg is nagyon nagy szerepet játszott a hőtan fejlődésében.

Nézzük meg most a 7.11. ábrán az un. Joule-féle körfolyamatot.



7.11. ábra. Joule-féle körfolyamat

Itt az (1)→(2) és a (3)→(4) szakaszok izobár jellegű állapotváltozások, a (2)→(3) és a (4)→(1) szakaszok pedig adiabatikusak.

Látszik, hogy most a hő bevezetésével járó expanzió és a hő elvonásával járó kompresszió állandó nyomás mellett történik, amit technikailag sokkal egyszerűbb megvalósítani, mint állandó hőmérséklet mellett.

A Carnot-ciklus „ideálisnak” mondható abból a szempontból is, hogy ekkor a hatásfok nemcsak a legegyszerűbb formában írható fel, hanem a hatásfok a többi ciklushoz képest a legmagasabb.

Megjegyezzük, hogy mind a három fent leírt körfolyamatban a ciklusnak volt olyan szakasza, ahol a hőenergia egy részét a rendszerből kiveztük. Ez a megjegyzés továbbiak miatt fontos.

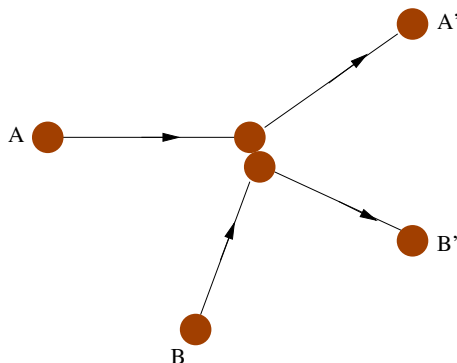
7.5. A termodinamika II. és III. főtétele

7.5.1. A termodinamika II. főtétele

A termodinamika I. főtétele azt mutatja be, hogyan változik a belső energia a különböző folyamatokban. A termodinamika II. főtétele pedig azt mutatja, milyen irányúak, és milyen körülmények között zajlanak ezek a folyamatok.

Termodinamika fontos fogalmai a reverzibilitás és irreverzibilitás. Vagyis egy folyamat lehet reverzibilis (megfordítható) és irreverzibilis (nem megfordítható).

A reverzibilis folyamatok között kezdjük a vizsgálatot egy mechanikából vett példával, két golyó rugalmas ütközésével (ld. 7.12. ábra).



7.12. ábra. Két golyó rugalmas ütközése

Az A és a B pontokból adott $\underline{v}_A$ és $\underline{v}_B$ sebességgel indulva két golyó összeütközik, és az ütközés után ugyanabban az időpontban az A' és a B' pontokba jutnak el, megváltozott $\underline{v}'_A$ és $\underline{v}'_B$ sebességgel. (A sebesség változásának kiszámításától most eltekintünk.)

Ha most az A' és B' pontokból egyszerre visszaindítjuk a golyókat $\underline{v}'_A$ és $\underline{v}'_B$ nagyságú, de ellenkező irányú: $-\underline{v}'_A$ és $-\underline{v}'_B$ sebességgel, akkor a golyók ismét összeütköznek, és az ütközés folyamán a sebességük $-\underline{v}_A$ és $-\underline{v}_B$ -re változik. Így a folyamat visszafordult. Tehát ez a folyamat visszafordítható.

Ez az eset ideális abban az értelemben, hogy itt abszolút rugalmasságot feltételeztük és figyelmen kívül hagytuk a súrlódást. Ha ezeket nem feltételeztük volna, akkor a folyamat már nem lenne megfordítható.

Másik példa: ha egy röplabdában használatos labdát magasba emelünk és onnan elengedünk, akkor a földre csapódás után a labda ugyanolyan magasságra emelkedik, vagyis az ütközés rugalmas. Így ez a folyamat reverzibilis. Közben a mechanikai energia – a kinetikai és potenciális energiák összege –, nem változik.

Ha labda helyett egy ólomgolyóval tesszük ugyanazt, akkor ütközéskor a kinetikai energia egy része hővé alakul át. Így a mechanikai energia megmaradási törvénye nem teljesül. Ez a folyamat irreverzibilis.

A termodinamikában még több példát találunk a meg nem fordítható folyamatokra. Ha izzó fémdarabot dobunk egy vödör vízbe, a fémdarab lehűl, a víz felmelegszik és kiegyenlítődési hőmérséklet alakul ki. Ennek a jelenségnek a fordítója, – hogy kezdetben kezdetben azonos hőfokú vízből és fémdarabból álló rendszer állapota külső behatás nélkül úgy változzon meg, hogy a víz lehűl, a fém pedig a víz lehűlése során felszabaduló hőmennyiségnek megfelelően felmelegszik – minden eddigi tapasztalattal ellenkező jelenség.

A fent tanulmányozott körfolyamatok reverzibilisek voltak, mivel nem vettük figyelembe a súrlódást és a többi jelenséget, amelyek energiavesztéssel járnak, pontosabban azt, hogy az energia egy része kiáramlik a rendszerből a környezetbe. (Ezek közé nem tartozik a Q_{el} kivezetett energia).

Itt először a II. főtételeknek a Plancktól származó definícióját fogalmazzuk meg:

Termodinamika II. főtétele:

Nem lehetséges egy olyan periodikusan működő gépet szerkeszteni, melynek működése során más nem történik, csak egy súly felemelése és a hőtartály lehűlése.

Vagyis nem lehet létrehozni olyan körfolyamatot, mely hőelvonás nélkül dolgozik. Erre vonatkozik az előző fejezet végén tett megjegyezés is.

Ugyanezt fejezi ki másképpen a II. főtétel Thomson-féle megfogalmazása, (ami gyakorlatilag ekvivalens az előzővel), miszerint

nincs a természetben olyan folyamat, amelyben egy test hőt veszít, és az teljesen munkává alakul át.

Az irodalomban az olyan rendszert, amely az összes környezetből felvett hőenergiát mechanikai energiává (munkává) alakítja át, másodfajú „perpetuum mobile”-nek nevezik. A fentiekből világos, hogy

másodfajú „perpetuum mobile” nem létezik.

7.5.2. Entrópia

A II. főtétel más megfogalmazása előtt ismerkedjünk meg az **entrópiával**.

Nézzük meg, hogy a Carnot-féle folyamat különböző részeiben hogyan változik a $\delta Q/T$ hányados és mekkora ezeknek a mennyiségeknek az összege a teljes ciklusban.

Az első szakaszban a hőmérséklet $T = T_1$ állandó és így ezen a szakaszban a beáramló hő és a fenti $\delta Q/T$ hányados összege

$$Q_{be} = Q_1 = W = RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right), \quad \sum \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} = R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

A második és negyedik szakasz adiabatikus, vagyis $\delta Q = 0$. A harmadik szakaszban $T = T_2$ állandó és így ott:

$$Q_{el} = Q_2, \quad \frac{Q_2}{T_2} = R \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right).$$

Mivel $V_2/V_1 = V_3/V_4$, ezért $\ln(V_4/V_3) = -\ln(V_2/V_1)$, vagyis Q_1 és Q_2 ellenkező előjelű.

Az egész ciklusra vonatkozóan a fenti hányados összege:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

amit általánosan úgy is felírhatunk, hogy egy tetszőleges reverzibilis körfolyamatban

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0.$$

Ez végül körintegrálba megy át:

$$\oint \frac{\delta Q^r}{T} = 0. \quad (7.45)$$

Itt a τ felső index a reverzibilis folyamatra utal.

Az, hogy a zárt görbén az integrál egyenlő nullával, azt mutatja, hogy az integrandus teljes differenciál:

$$\frac{\delta Q^\tau}{T} = dS.$$

Ebből az következik, hogy az S egy állapotfüggvény (ugyanúgy, mint az E belső energia, ld. 7.1.5. alfejezet), és ezt nevezik entrópiának.

A reverzibilis folyamatokban az S entrópiát, ugyanúgy mint a belső energiát, csak az S_0 állandó pontosságig lehet meghatározni:

$$S = \int_0^T \frac{\delta Q^\tau}{T} + S_0. \quad (7.46)$$

Itt az S_0 egy test entrópia értéke $T = 0^\circ K$ hőmérsékletnél. Az S_0 -t az első vagy második főtétel alapján nem lehet meghatározni.

Az entrópia másik integrálformája

$$S = \int_A^B \frac{\delta Q^\tau}{T} = \int_A^B dS = S(B) - S(A). \quad (7.47)$$

Ha a reverzibilis folyamat révén a rendszer A -ból B -be jut, akkor a $\delta Q^\tau / T$ hányados integrálja egyenlő a két állapothoz tartozó $S(B)$ és $S(A)$ entrópiák különbségével.

Ha egy folyamat közben az entrópia nem változik, az ilyen folyamatot **izoentrópiкусnak** nevezik.

A fenti (7.45) képlet azt mutatja, hogy reverzibilis folyamatokra az entrópia változása az egész ciklusban egyenlő nullával.

A Carnot-féle ciklusra ezt fenn bemutattuk. A többi körfolyamra is ez igaz, csak ennek bizonyítása bonyolultabb, mint Carnot-ciklus esetén.

Megjegyezzük, hogy a (7.45) képlet által közölt eredmény bizonyos mértékben ideális eset. A körfolyamat általában nem reverzibilis, hanem irreverzibilis folyamat. Az előbbieken, az irreverzibilis folyamatokkal kapcsolatban említettük, hogy a reális folyamatokban a súrlódás és más hasonló (un. disszipatív jelenségek) okokból az energia egy része kikerül a rendszerből a környezetbe. Vagyis, az összes δQ -ból ki kell vonni ezt a hő kiáramlást. Ennek megfelelően a (7.45) képletben szereplő integrál valójá-

ban nem nulla, hanem negatív értékű. Ezért az irreverzibilis folyamatokra a (7.45) relációt a következő formában írjuk át:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (7.48)$$

Ez az un. Clausius-féle egyenlőtlenség. Az integrál egyenlő nullával a reverzibilis folyamatok esetén.

A (7.48) reláció univerzális jellegű, és érvényes minden termodinamikai folyamatra.

Az irreverzibilis folyamatokban

$$dS > \frac{\delta Q}{T}. \quad (7.49)$$

Továbbá, a tetszőleges (reverzibilis és irreverzibilis) hőszigetelt adiabatikus rendszerekben $\delta Q = 0$, és így, az adiabatikus rendszerekben

$$dS \geq 0. \quad (7.50)$$

Ezt az eredményt a **termodinamika II. főtétele**nek nevezik.

*A termodinamika II. főtétele*nek analitikai kifejezése, vagy a termodinamika II. főtétele

Egy hőszigetelt rendszerben az entrópia nem csökkenhet. A valóságban minden folyamat irreverzibilis, és az entrópia csak növekszik, egészen addig, ameddig a rendszer nem jut el az egyensúlyi helyzetbe.

Az entrópia segítségével megfogalmazhatjuk a **termodinamika alapvető relációját**:

$$TdS \geq dE + \delta W_b, \quad (7.51)$$

ami az első és második főtétel összegzése.

Vezessünk be még egy, harmadik állapotfüggvényt.

Szabad energia:

$$F = E - T \cdot S$$

(Az irodalomban ezt a Helmholtz-féle szabad energiának is nevezik megkülönböztetve a „Gibbs-féle szabad energiától”).

A fenti definícióban szereplő $T \cdot S$ -t „kötött energiának” nevezik. Vagyis a belső energia a szabad és a kötött energiák összege. Elnevezésének oka az, hogy izoterm folyamatban

$$dF \leq \delta W_b,$$

ami azt jelenti, hogy a belső energiából csak a szabad energia használható fel a munka végzésre.

7.5.3. A termodinamika III. főtétele

Fent már említettük hogy a (7.46) képletben szereplő, $T = 0^\circ K$ -nak megfelelő S_0 entrópia értéke nem fejezhető ki csak az I. és a II. főtétele alapján.

A Nernst-féle tétel :

tetszőleges izotermikus folyamatban $T = 0^\circ K$ mellett az entrópia nem változik:

$$dS = 0, \quad S = S_0 = \text{const.} \quad (7.52)$$

Ennek alapján be lehet mutatni, hogy $T = 0^\circ K$ -nál a hőkapacitás nullához tart. Ebből a tételből az is következik, hogy $T^\circ K$ nem lehet nulla.

A Nernst-féle tételt gyakran a **termodinamika III. főtétele**nek nevezik.

Planck tovább fejlesztette a Nernst-féle tételt azzal, hogy feltételezte és indokolta, hogy

$$S_0 = 0. \quad (7.53)$$

Ebből és a Nernst-tételből az következik, hogy

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (7.54)$$

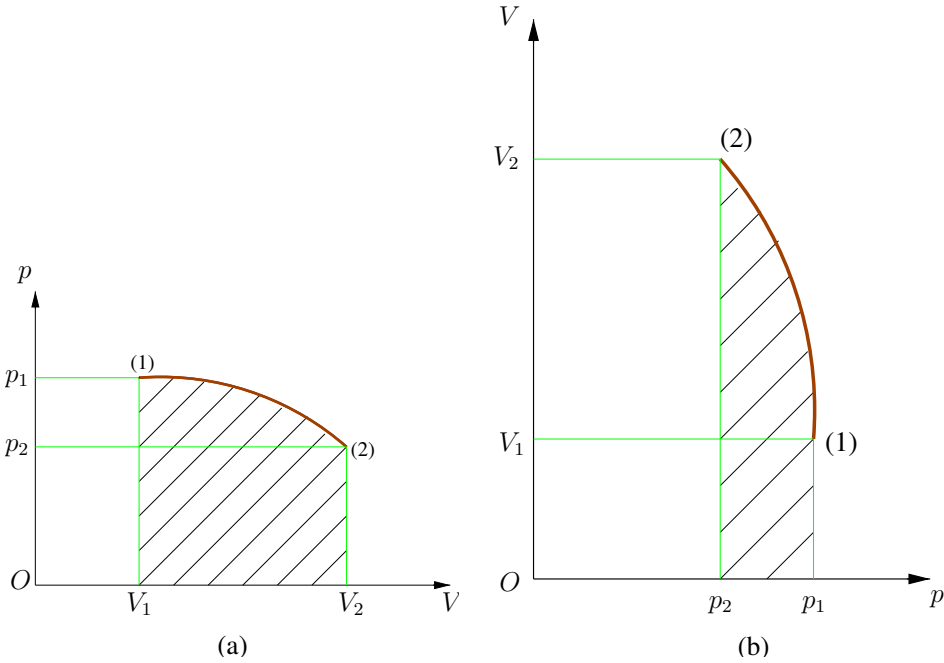
Ezeknek a (7.52), a (7.53) és a (7.54) képleteknek indoklását és magyarázatát a statisztikus fizika adja meg.

7.6. Entalpia. Technikai munka

A hőtan negyedik állapotfüggvénye az entalpia (vagy hőtartalom).

Entalpiának nevezzük a következő állapotfüggvényt:

$$I = E + pV. \quad (7.55)$$



7.13. ábra. Entalpia bevezetése

Ebből a kifejezésből egyértelmű, hogy, mivel E állapotfüggvény, p és V pedig az állapothatározói, I szintén állapotfüggvény. Ehhez a kifejezéshez, és ennek fizikai értelmezéséhez a következő úton jutunk el.

Induljunk ki (7.3)-ból, vagyis $Q = \Delta E - W_k = \Delta E + W_b$. (Itt felhasználunk, hogy

$$-E_k = W_b = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

(ld. (7.6)).

A belső munkának W_k értéket különböző módon lehet kapni (ld. a 7.13.(a,b) ábrák). Ehhez felhasználjuk azt, hogy a határozott integrál a görbe alatti felülettel egyenlő. W_b tehát a 7.13.(a) ábrán a vonalkázott terület. Ezt a területet megkaphatjuk, ha az

$$\int_{p_2}^{p_1} V dp = - \int_{p_1}^{p_2} V dp$$

integrálhoz, ami a 7.13.(b) ábrán vonalkázott terület, hozzáadjuk a p_2 $2 V_2$ O téglap $p_2 V_2$ területét, és levonjuk a p_1 $1 V_1$ O téglap $p_1 V_1$ területet. Az így kapott

$$W_b = p_2 V_2 - p_1 V_1 - \int_{p_1}^{p_2} V dp = -W_k$$

kifejezést használjuk fel a (7.3)-ben, amely most a következőképpen írható át:

$$Q = (E_2 + p_2 V_2) - (E_1 + p_1 V_1) - \int_{p_1}^{p_2} V dp. \quad (7.56)$$

Itt a zárójelekben lévő kifejezés az entalpia, tehát

$$Q = I_2 - I_1 + W_{tech}, \quad (7.57)$$

ahol a jobb oldal harmadik tagját a „rendszer által végzett **technikai munká**”-nak nevezik:

$$W_{tech} = - \int_{p_1}^{p_2} V dp. \quad (7.58)$$

Mivel ebben az esetben (ld. a 7.13. ábra) $p_1 > p_2$, $dp < 0$ és $W_{tech} > 0$.

Ha izobár folyamatot nézünk, ahol $p = const$, akkor a technikai munka $W_{tech} = 0$, és a (7.57) képletből következik, hogy $Q = I_2 - I_1$, vagyis a beáramló hőmennyiség egyenlő a két pontnak megfelelő entalpiák különbségével. Ha pedig az izochor folyamatot vizsgáljuk, ahol $V = const$ ($dV = 0$), akkor a (7.3) képletből megkapjuk, hogy $Q = E_2 - E_1$. Vagyis, hogy mikor érdemes használni a belső energiát ill. az entalpiát, a folyamat jellegétől függ.

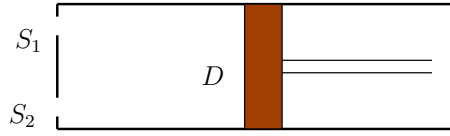
Az első főtétel térfogati munkára érvényes (7.7) kifejezésből a belső energia

$$dE = \delta Q - p dV. \quad (7.59)$$

Az entalpia $I = E + pV$ definíciójából következik, hogy $dI = dE + p dV + V dp$. Így az első főtétel az entalpia segítségével kifejezve

$$dI = \delta Q + V dp, \quad (7.60)$$

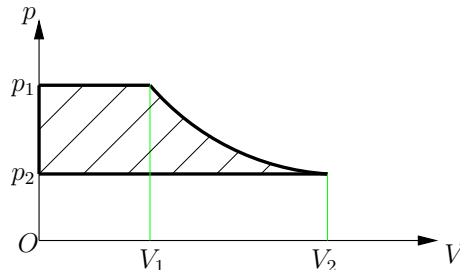
alakú. A fenti következtetés (7.60) és (7.59), valamint $dP = 0$ és $dV = 0$ segítségével közvetlenül megkapható.



7.14. ábra. Egy gép idealizált működése

A „technikai munka” elnevezés megértéséhez lássuk a következő, a technikában gyakran forduló körfolyamatot: lásd a 7.14. ábrát. Az ábrán D a dugattyú, S_1 és S_2 pedig a szelepek.

A kezdeti időpontban a D dugattyú a bal oldali falnál van, vagyis a henger térfogata nulla. Az első szakaszban az állandó p_1 nyomású gáz a zárt S_2 szelep mellett az S_1 szelepen keresztül áramlik a hengerbe és maga előtt tolja a dugattyút addig, míg a térfogat V_1 lesz (ld. a $p - V$ diagramot a 7.15. ábrán). Így a végzett munka $p_1 V_1$.



7.15. ábra. Idealizált gép körfolyamata

A második szakaszban az S_1 szelep is zárva marad és adiabatikus folyamat alatt a nyomás p_1 -ről p_2 -re csökken, miközben a végzett munka

$$\int_{V_1}^{V_2} p dV = W'.$$

A harmadik szakaszban a p_2 nyomás hatására a gáz a nyitott S_2 szelepen keresztül kiáramlik a hengerből. Ekkor a végzett munka $-p_2 V_2$. A negyedik szakaszban a zárt S_2 szelep mellett a nyitott S_1 szelepen a gáz nyomása növekszik: $p_2 \rightarrow p_1$, de a dugattyú még nem mozdul el. Így a ciklus bezáródik.

A ciklus alatt végzett hasznos munka $p_1 V_1 + W' - p_2 V_2$ a 7.15. ábrán a vonalkázott terület. Ugyanakkor látszik, hogy ez pontosan megegyezik a W_{tech} technikai munkával, ha a munkának megfelelő területet a p szerinti p_2 -től p_1 -ig terjedő határozott integrálként vesszük és alkalmazunk a

$$\int_{p_2}^{p_1} V dp = - \int_{p_1}^{p_2} V dp$$

integrál-összefüggést.

7.7. Valódi gázok termodinamikája

Magas nyomás és alacsony hőmérséklet esetén a gázok cseppfolyósodása figyelhető meg. Ez a jelenség azt mutatja, hogy ilyen körülmények között nem használható az ideális gázok modellje. Van der Waals kimutatta, hogy a valódi gázok állapotának leírásánál be kell vezetni a molekulák közötti vonzóerőket (van der Waals-féle erők) és figyelembe kell venni a molekulák kiterjedését.

Alacsony nyomás és magas hőmérséklet esetén a részecskék között a távolság nagy, és a kinetikai energiájuk is nagy. Ez azt jelenti, hogy a molekulák közötti vonzóerő kicsi, a molekulák saját térfogata elenyésző, vagyis az ideális gázok elmélete jó, a tapasztalatnak megfelelő eredményekhez vezet.

Magas nyomásnál és alacsony hőmérsékletnél e két feltétel nem teljesül. Ezért új paraméterek bevezetésére kerül sor.

1) A V térfogatból a gázok – a molekulák által nem foglalt – „kinetikai térfogata” egyenlő $V - b$, ahol b a molekulák kiterjedése. Ha Ω egy molekula saját térfogata, akkor $b = 4N\Omega$, ahol N - a molekulák száma.

2) A gáz belsejében elhelyezkedő molekulákra ható vonzóerők eredője, a szimmetriának köszönhetően, egyenlő nullával. A gáz peremén ez a szimmetria nem teljesül, és így megjelenik a vonzóerők nem nulla eredője. Ennek hatására megjelenik az ún. kohéziós nyomás $p_k = a/V^2$, ahol a a van der Waals-féle erőkkel kapcsolatos paraméter. Ez a nyomás nagyságos erős a folyadékokban (felületi réteg hatása). A gázoknál a szerepe sokkal kisebb.

Az a és b paraméterek az adott közegre jellemző állandók, ún. **van der Waals-állandók**.

Figyelembe véve ezeket az állandókat megkapjuk a valódi gázokra vonatkozó ún. **van der Waals-féle állapotegyenletet**.

Van der Waals-féle állapotegyenletet:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT. \quad (7.61)$$

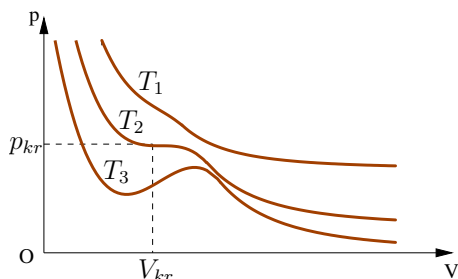
Ez az egyenlet pontosabban írja le a gázok állapotát, mint az ideális gázok állapotegyenlete (7.9).

A (7.61) egyenletet a következő formában átírható:

$$p(V) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}. \quad (7.62)$$

Itt a gáz mennyisége 1 mol. Ez a $p(V)$ függvény a $+\infty$ -hez tart, ha V tart $+b$ -hoz, és nullához, ha V a végtelenhez tart.

Figyeljük meg, hogy egy mól mennyiségű gázt kisebb térfogatra mint b , nem lehet összenyomni.



7.16. ábra. A van der Waals-állapotegyenlet izotermája három különböző hőmérsékletnél ($T_1 > T_2 > T_3$)

A 7.16. ábrán a $p - V$ diagramon a különböző hőmérsékleteknek megfelelő görbék mutatják ennek az egyenletnek a megoldását.

Nézzük meg az ábrán látható görbéket. Alacsony hőmérséklet esetén ez nem monoton csökkenő függvény, vagyis a görbének (peremek kívül) két extrémuma van: egy minimum és egy maximum. A maximum ponttól balra a minimum pontig a V térfogat csökkentésével a p nyomás is csökken. Ez azt mutatja, hogy fontos szerepet kezdenek játszani a molekulák közötti vonzóerők, elkezdődik a halmazállapot változása: a cseppfolyósodás.

A hőmérséklet növekedésével a minimum és a maximum közötti intervallum hossza csökken, és végül lesz olyan hőmérséklet, ahol e két

extrémum pontjai egybeesnek, és ebben a pontban a második derivált nullára változik: ez a vízszintes érintőjű inflexiós pont. A 7.16 ábrán a középső görbe $T = T_2$ -vel megfelel ennek az esetnek. Az ennek megfelelő hőmérsékletet T_{kr} **kritikus hőmérsékletnek** nevezzük, a $p - V$ diagramban e pont koordinátáit pedig V_{kr} és p_{kr} -ként jelöljük.

Ha a T_{kr} adott, a (7.61) van der Waals-egyenlet kapcsolatot teremt a többi p_{kr} és V_{kr} állapothatározó között, vagyis ezek nem függetlenek egymástól. Ezeket a függvényeket a következő un. kritikus együttható kapcsolja össze:

$$\frac{RT_{kr}}{p_{kr}V_{kr}} = \frac{8}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy ez a reláció csak közelítően érvényes.

Ha a kísérletekből ismerjük a T_{kr} és p_{kr} (vagy V_{kr}) értékét, az inflexiós pont tulajdonságaiból ki lehet számítani az a és b van der Waals állandókat:

$$a = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_{kr}^2}{p_{kr}}, \quad b = \frac{V_{kr}}{3} = \frac{1}{8} \frac{RT_{kr}}{p_{kr}}. \quad (7.63)$$

Fordítva is igaz: ha meg vannak adva az a és b van der Waals állandók, akkor a T_{kr} , a p_{kr} és a V_{kr} kritikus állapothatározók kiszámíthatóak a következő képletek szerint:

$$T_{kr} = \frac{8a}{27Rb}, \quad p_{kr} = \frac{a}{27b^2}, \quad V_{kr} = 3b. \quad (7.64)$$

Az alábbi táblázatban bemutatjuk a kritikus állapothatározókat és a van der Waals állandókat néhány a gyakorlatban gyakran előforduló gázra.

Gáz	T_{kr}° (K)	$p_{kr} \cdot 10^{-5}$ (Pa)	$V_{kr} \cdot 10^6$ (m ³)	a (Nm ⁴)	$b \cdot 10^5$ (m ³)
H ₂	33	12,6	79,8	0,024	26,6
N ₂	128	33,5	117,0	0,139	39,1
O ₂	155	49,8	95,4	0,136	31,8

7.7. példa: Számoljuk ki az a és a b paramétereket széndioxid gázra, ha ismert, hogy $T_{kr} = 304^\circ\text{K}$, $p_{kr} = 73,3 \cdot 10^5$ Pa.

Megoldás:

$$a = \frac{27}{64} \frac{8,31^2 \cdot 304^2}{73,3 \cdot 10^5} = 0,367 \text{ Nm}^4, \quad b = \frac{1}{8} \frac{8,31 \cdot 304}{73,3 \cdot 10^5} = 43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

A kiszámított a és b alapján határozzuk meg a V_{kr} kritikus értéket és a p_k kohéziós nyomást. A (7.63) képlet alapján

$$V_{kr} = 3b = 129 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

A kohéziós nyomást számoljuk a „normális”, mindennapi körülményeknél: a nyomás legyen 10^5 Pa , a hőmérséklet pedig 300° K . Ilyen körülmények között egy mól gáz térfogata $V = 0,025 \text{ m}^3$. A kohéziós nyomás:

$$p_k = \frac{a}{V^2} = \frac{0,367}{0,025^2} = 587 \text{ Pa}.$$

Látható, hogy „normális” körülményeknél a kohéziós nyomás sokkal kisebb mint a levegő nyomása. Ekkor b szintén sokkal kisebb mint a gáz térfogata. Mégis ezek a paraméterek fontos szerepet játszanak a termodinamikában.

A T_{kr} kritikus hőmérséklet fontos szerepét az is mutatja, hogy ha $T > T_{kr}$, a gáz nem fogja megváltoztatni a halmazállapotát: bármilyen magas is a nyomás, a gáz nem alakul át folyadékká. Ugyanakkor a $T < T_{kr}$ esetén nagy nyomással változtathatunk a gáz halmazállapotán.

Ha T hőmérséklet magasabb, mint T_{kr} , a (7.62)-tel megadott $p(V)$ függvény monoton csökkenő, és így a hőmérséklet növekedésével a gáz állapotegyenlete közelít az ideális gázok állapotegyenletéhez. (Emlékezzünk, hogy az ideális gáz állapotegyenletének görbéje egy hiperbola.)

A van der Waals-egyenletből megkapjuk, hogy a valódi gázokban a belső energia hőmérsékletfüggése a következő módon írható le:

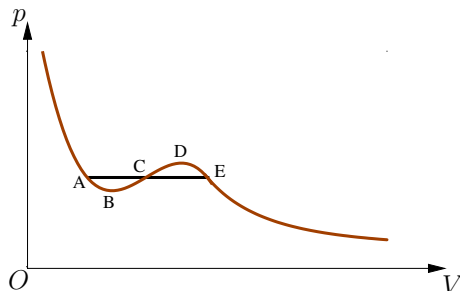
$$E = c'_V T - \frac{a}{V}, \quad (7.65)$$

vagyis, a belső energia nemcsak a hőmérséklettől, de a térfogattól is függ. (Itt a gáz mennyisége 1 mól.)

Az entrópiára a valódi gázok esetén a következő differenciális egyenlőség áll fenn:

$$dS = \frac{c'_V}{T} dT + \frac{R}{V-b} dV. \quad (7.66)$$

Nézzük meg közelebbről a van der Waals egyenlet görbáját, ha $T < T_{kr}$, vagyis, ha a görbén két extrémum pont van. Meg kell állapítani, hogy a görbe azon részein, ahol a térfogat növekedésével a nyomás csökken, a szakasz által rajzolt állapotváltozások megvalósíthatóak. Ugyanakkor az a szakasz, ahol a térfogat növekedésével a nyomás is növekszik, a gyakorlatban elképzelhetetlen. Ez azt jelenti, hogy ezen a részen a van



7.17. ábra. Van der Waals model helyesbítése

der Waals modell nem tükrözi a valóságot. A többi szakaszban azonban a modell helyesen írja le a valóságot.

A gyakorlat azt mutatja, hogy a halmazállapot-változáskor az átmeneti szakaszon, amikor a térfogat növekedésével a folyadék fázisú anyag párolog, a nyomás állandó marad (telített gőz). Vagyis ezen a szakaszon a görbét helyettesíteni kell egy vízszintes egyenessel (ld. a 7.17 ábra).

Azt is mutatja a gyakorlat, hogy ezen a szakaszon egy stabil egyensúly érvényesül.

Arra a kérdésre, hogy hol, milyen magasságban helyezkedjen el ez az egyenes, figyelembe kell venni, hogy az egész átmeneti szakaszon a végzett teljes munka egyenlő nullával. Geometriailag ez azt jelent, hogy az ABCA területnek egyenlőnek kell lenni a CDEC területtel. Ebből ki lehet számítani az AE egyenes helyzetét.

7.8. Kérdések és feladatok

7.8.1. Kidolgozott feladatok

7.1. feladat: Egy 30 literes gáztartályban lévő 10 mol ideális gáz nyomása 831 kPa. Mekkora a hőmérséklete?

Megoldás: A megoldásra a

$$pV = nRT$$

képletet használjuk. Először átírjuk az adatokat SI-rendszerbe:

$$V = 30 \text{ liter} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3, \quad 831 \text{ kPa} = 8,31 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Mivel $n = 10 \text{ mol}$, egyszerű kiszámítani, hogy $T = 300^\circ\text{K}$.

7.2. feladat: Mekkora a tömege a 300 liter térfogatú 27°C hőmérsékletű $3 \cdot 10^5$ Pa nyomású hidrogéngáznak?

Megoldás: Először használjuk fel az előző egyenletet és kiszámítjuk a gáz mennyiségét mólbán. Itt

$$V = 0,3 \text{ m}^3, \quad T = 300^\circ\text{K}.$$

Így $n = 36$ mol. A H_2 hidrogéngáz molekulatömege 2g/mol, ezért a gáz tömege 72 g, vagy 0,072 kg.

7.8.2. Gyakorló kérdések és feladatok

1. Mitől függ az ideális gáz belső energiája?
2. Mit mond ki a termodinamika első főtétele?
3. Hogyan függ az ideális gáz belső energiája a hőmérséklettől?
4. Mekkora a térfogata a 6 mol 27°C hőmérsékletű ideális gáznak 5 MPa nyomáson?
5. Hány mól az az ideális gáz, amelynek nyomása 2 MPa, térfogata 33,24 dm³ és hőmérséklete 400 K?
6. Mekkora a nyomása 10 mol 0°C hőmérsékletű ideális gáznak, ha a térfogata 16,62 dm³?
7. Mekkora térfogatú az a gázpalack, amelyben a 3,2 kg tömegű, 27°C hőmérsékletű oxigéngáz nyomása 12 MPa? Mekkora lenne a gáz térfogata 10^5 Pa nyomáson, ha a hőmérséklete közben nem változhat?
8. Egy autókerék tömlőjében 27°C-on 15 dm³ $2,4 \cdot 10^5$ Pa nyomású levegő van. 47°C-ra melegedve a tömlő térfogata 15,3 dm³ lesz. Mekkora a tömlőben lévő gáz nyomása ezen a hőmérsékletben?
9. Mekkora hőmennyiséget ad át környezetének egy 2 t tömegű beton-tömb, miközben 30°C hőmérsékletről 10°C-ra lehül? (A beton fajhője 879 J/kg·K.)
10. Egy 200 cm³-es lombikot folyadékkal feltöltjük. Ha 50°C-kal felmelegítjük, 10 cm³ folyadék folyik ki belőle. Számítsuk ki a folyadék hőtágulási tényezőjét! (Az üveg lineáris hőtágulási tényezője 10^{-5} 1/°C)
11. Az 54 km/h sebességgel haladó, 600 kg tömegű gépkocsi lefékez és megáll.
a.) Mekkora a fékezés közben az alkatrészek és a környezet által felvett hőmennyiség?

- b.) Mennyivel emelkedik az 5 kg tömegű acél fékberendezés hőmérséklete, ha a hőmennyiség 60%-a a fék belső energiáját növelte? (Az acél fajhője $J/kg \cdot K$.)
12. Mekkora magasságból esett szabadon az a 200 g tömegű ólomgolyó, amely egy hőszigetelő lapon lefékeződve $4^\circ C$ -kal melegedett fel? A mechanikai energia 20%-a a környezetet melegítette. Az ólom fajhője $130 J/kg \cdot K$, $g = 10 m/s^2$.
13. Miről szól az ekvipartíció-tétel és milyen esetekben tapasztalható hozzá képest eltérés?
14. Számolja ki a szénmonoxid CO molekulák átlagsebességét $25^\circ C$ hőmérséklet esetén!
15. Határozza meg a levegő részecskéinek átlagsebességét szobahőmérséklet mellett feltételezve, hogy a levegő 20%-ra oxigén, 80%-ra nitrogén molekulákból áll!
16. Számítsa ki az összes belső energiát 2 mól mennyiségű levegőben $15^\circ C$ hőmérséklet esetén!
17. Mekkora hőmérsékleten egyezik meg az oxigénmolekulák átlagsebessége a hidrogénmolekulák $0^\circ C$ -on tapasztalható átlagsebességével?
18. Hogyan változik a gáz molekuláinak átlagsebessége, ha a hőmérséklet (Kelvin-skálán) kétszer nagyobb lesz?
19. A szénmonoxid CO molekula tehetetlenségi nyomatéka $1,46 \cdot 10^{-46} kgm^2$. Számolja ki a molekulák átlagos kvadratikus szögsebességét $20^\circ C$ hőmérséklet esetén!
20. Hogyan változik a nyomás az állandó tömegű ideális gázban, ha a hőmérséklet $5^\circ C$ -ról $30^\circ C$ -ra változik, a térfogat pedig 10%-kal csökken?
21. Mivel magyarázható a „szabadsági fokok befagyása”?
22. Miért nem éled fel szobahőmérsékleten a legtöbb molekula esetén a rezgési szabadsági fok?
23. Milyen a kétatomos ideális gáz c_p/c_v fajhők aránya? Mekkora ez az arány háromatomos gáz esetén?
24. Egy 50 km hosszú távvezetékét $10^\circ C$ -on szereltek fel. Milyen hosszú lesz az alumíniumból készült vezeték $-30^\circ C$ és mekkora lesz $+20^\circ C$ hőmérsékleten? (Az alumínium lineáris hőtágulási tényezője $2,4 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.)

25. Mekkora hőmérsékletre kell felmelegíteni a 0°C hőmérsékletű rézhuzalt, hogy hossza 0,1%-kal megváltozzon? (A réz lineáris hőtágulási együtthatója $1,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.)
26. Egy körmetszetű forró rudat hosszirányban befogunk. Mekkora erő hat a befogásokra, ha a rúd hőmérséklete 600°C -ról 100°C -ra csökken? A rúd eredeti hossza (600°C fokon) 2 m, az átmerője 10 cm. A Young-modulusz $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, a lineáris hőtágulási együttható pedig 10^{-5} K^{-1} .
27. Milyen munkát végez a rendszer izochor folyamat közben?
28. Milyen képlettel számoljuk ki a végzett munkát izotermikus folyamat közben?
29. Milyen munkát végez a rendszer izobár folyamat közben?
30. Milyen munkát végez a rendszer adiabatikus folyamat közben?
31. Röviden írja le a Carnot-körfolyamatot!
32. Mi a Carnot-féle körfolyamat hatásfoka?
33. Röviden írja le a Joule-körfolyamatot!
34. Mit mond a termodinamika második főtétele az entrópiával kapcsolatban?
35. Hogyan definiáljuk a szabadenergiát?

7.9. A hőátadás módjai

Eddig nem foglalkoztunk részletesen azzal, hogyan történik a hő átadása a testek közt, csak pl. azt mondtuk, hogy a hő magától mindig a melegebb testről a hidegebbre áramlik. Most meg fogjuk nézni, hogyan is történhet ez a hőátadás.

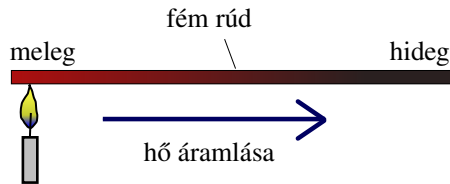
A hőátadásnak három módját ismerjük:

Hővezetés:

Hővezetésről akkor beszélünk, amikor a hő közvetítése során nem történik semmilyen részecskeáramlás, hanem a szomszédos részecskék egymásnak adják át az energiát.

Ez a hőátadási forma elsősorban a szilárd testekre jellemző. Például egy fémrúd egyik végét melegítve egy idő múltán a másik vége is felmelegszik. (Lásd 7.18. ábra.) E folyamat közben a fémrúd anyaga nem változtatta helyét, hanem a felmelegített részen az atomok erősebben kezdtek el rezegni

(hőmozgás) és a szomszédoknak ezt a magasabb energiájú állapotot adták át.

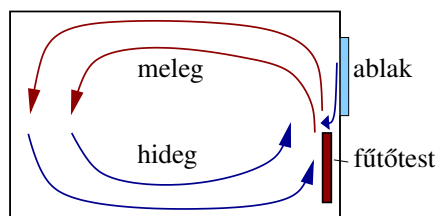


7.18. ábra. Egyszerű példa hővezetésre

Hőáramlás:

A hőáramlás a hőátadás azon módja, melynek során az anyagbeli áramlások során a különböző hőmérsékletű részek helyváltoztatása okozza egy adott helyen a belső energia megváltozását.

A hőáramlás főként a folyadékokra és gázokra jellemző. A mindennapi életben a hőáramlás pl. akkor lép fel, amikor télen a szobát fűtjük. A fűtőtest által felmelegített levegő ugyanis kisebb sűrűségű lesz, mint a többi levegő, felemelkedik, helyére hideg levegő áramlik, az is felmelegedik, ... és az így kialakuló áramlások viszik szét a meleg levegőt a szobában. (Egyszerűsített képet láthatunk a 7.19. ábrán.)



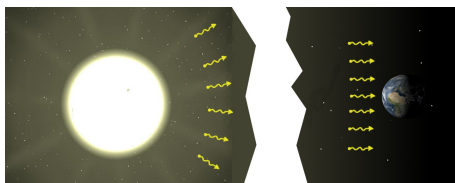
7.19. ábra. Hőáramlás egy szoba belsejében (vázlat)

Hősugárzás:

A hőszugárzás során a hő két test közt nem valamilyen szokásos értelemben vett anyag, hanem elektromágneses sugárzás közvetíti.

A tapasztalat szerint ugyanis minden test a hőmérsékletére jellemző módon elektromágneses sugárzást bocsát ki. Ez a sugárzás a hőmérséklet növelésével erősen növekszik, és hullámhossza is változik.²⁰ Például a szobahőmérsékletű testek sugárzásának maximuma az infravörös tartományba esik, de kb. 500°C felett már jelentős mennyiségű, vörös színű látható fényt is kapunk. A kibocsátott elektromágneses sugárzást a többi test elnyeli, így akár akkor is történhet hőátadás, ha a testeket légüres tér választja el egymástól.

A hősugárzást pl. akkor érzékelhetjük közvetlenül, ha egy nagyon meleg kályha közelében állunk. Ekkor a kályha felé forduló testrészeink erős meleget éreznek. (Ez nem a felmelegített levegőből származik, hisz mondjuk a kályha felé fordított tenyerünk melegszik, míg ugyanekkor kézfejük másik oldala nem.) De a hősugárzás a mindennapokban legtisztább formában a Nap által a Földre szállított energiatranszportban jelentkezik: a Föld és a Nap közötti 150 millió km-es távolságon a bolygóközi közeg olyan ritka, hogy a hővezetés és a hőáramlás szerepe biztosan elhanyagolható, és az energiát az elektromágneses színekép teljes spektrumán fotonok szállítják a Földre. (Lásd 7.20. ábra.) Mindamellet a hősugárzás nemcsak az ilyen szélsőségesen magas hőmérsékletek esetén jelentős, hanem a hétköznapi életben előforduló hőmérsékletek esetén is.



7.20. ábra. A Nap sugárzással közöl hőt a Földdel. (Nem méretarányos vázlat.)

A hőátadás ezen módjai általában egyszerre lépnek fel, csak esetleg egyik közülük sokkal jelentősebb hatású, mint a másik kettő. Például gázok belsejében is fellép hővezetés, de ez általában sokkal kevesebb hőt szállít, mint a hőáramlás. Hasonlóan: gázok belsejében többnyire a hősugárzás is kisebb szerepű, mint a hőáramlás. (Kivétel természetesen akad: pl. a Nap belsejének egy részében nagy nyomáson olyan sűrű és forró a gáz, hogy ott a hősugárzás a jellemző hőátadási forma, ami mellett a hőáramlás

²⁰Erről, azaz a testek hőmérsékleti sugárzásáról a jegyzetben még részletesebben szólni fogunk.

elhanyagolható.)

A következőkben ezek közül a hővezetést és a hősugárzást tárgyaljuk részletesebben, mert a hőáramlás érdemi tárgyalása nem lehetséges áramlástani ismeretek nélkül, ennek alapjait pedig nem feltételezhetjük olvasóinktól.

Előre bocsátjuk azt is, hogy a témakör számtalan alkalmazást nyer mérnöki problémák esetén. Ez a jegyzet azonban alapozó fizika kurzusokhoz íródott, így elsődleges cél, hogy a folyamatok fizikájába nyújtson betekintést, és nem az összetett gyakorlati problémák megoldása. Ezért itt az alapelvekre és az egyszerűbb esetek részletes megértésére koncentrálnunk, meghagyva a megfelelő szaktárgyaknak a bonyolult esetek tárgyalását.

Legelőször néhány alapfogalom tisztázására van szükség, hogy a tényleges hővezetési folyamatokról könnyebben tudjunk beszélni.

7.9.1. Alapfogalmak

Hőáram:

Egy közegben egy kiválasztott felületen mért hőáramnak nevezzük az ott átáramló hő és az átáramlási idő hányadosát. Szokásos jelölésekkel:

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor a fenti definíció az alábbi alakra módosul:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}.$$

A hőáram tehát az elektromos áramerősséghez hasonló mennyiség. (Véletlenül még a szokásos jelölések is megegyeznek, csak áram esetén Q a töltést, itt pedig a hőt jelenti.)

Hőáram-sűrűség (felületé):

Egy közegben egy kiválasztott felületen mért hőáram-sűrűségnek nevezzük a hőáram és a felület hányadosát:

$$J_f = \frac{\Phi}{A}$$

Ezen fogalom bevezetését az indokolja, hogy a hőáram ugyan jól jellemzi mondjuk egy rúd keresztmetszetén a hőátadás összes teljesítményét, de nem jellemző a kis léptékekre, azaz arra, milyen a hőáram nagysága egységnyi felületen.

Észrevehetjük, hogy a hőáram-sűrűség előző fogalma függ a felület irányától. Ha ugyanazon a helyen egy kis felületet más és más irányba fordítunk, a felületen átáramló hő mennyisége más és más lesz. Vegyünk pl. egy fémrudat, melynek egyik végét melegen, másik végét hidegen tartjuk. Ezen nyilván hosszirányban fog a hő áramlani. Így ha egy felületet erre merőlegesen vesszük fel a rúd keresztmetszetében, nagyobb hőáramot és hőáram-sűrűséget mérhetünk rajta, mintha ferdén vettük volna fel. Szélsőséges példaként említhetjük, hogy ha a felület párhuzamos a rúd tengelyével, nem is áramlik át hő rajta, így ekkor a felület hőáram-sűrűsége 0.

A kérdés vizsgálata azt mutatta, hogy a hőáram-sűrűség vektormennyiségként viselkedik, és a felület normálvektorával párhuzamos komponense lesz a felület hőáram-sűrűsége. Ez alapján érthető a következő fogalom bevezetése:

Hőáram-sűrűség vektor:

Egy közeg egy pontjában a hőáram-sűrűség vektor az alábbi módon határozható meg: Keressük meg azt a felületet, amelyik esetén a felület hőáram-sűrűsége a legnagyobb. Az ekkor mérhető hőáram-sűrűség mértéke lesz a hőáram-sűrűség vektor nagysága, a vektor iránya pedig párhuzamos ezen felület normálvektorával és arra mutat, amerre a hő áramlik.

Az előző fogalmak szemléletes jelentése alapján könnyen belátható, hogy

$$J_f = \underline{J} \cdot \underline{n}, \quad (7.67)$$

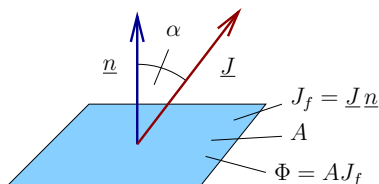
ahol $\underline{J}$ a hőáram-sűrűség vektor, J_f pedig az $\underline{n}$ normálvektorú felület hőáram-sűrűsége.

Szokás az előző egyenletben szereplő skaláris szorzást kifejezni a vektorok nagyságával és bezárt szögükkel: (7.21. ábra)

$$J_f = J \cdot \cos \alpha. \quad (7.68)$$

Az A nagyságú felület hőárama tehát

$$\Phi = J_f A = J \cos \alpha \cdot A.$$



7.21. ábra. A hőáram-sűrűség vektor szemléltetése

Ennek az egyenletnek egy másik értelmezése segít megérteni az összefüggést: $A \cos \alpha$ nem más, mint annak a lapnak a területe, amit az A nagyságú felület $\underline{J}$ -re merőleges síkra való vetítésével nyernénk, azaz a felület hőáramra merőleges komponense.

A hőáram-sűrűség vektor a közeg termodinamikai paramétereitől, pl. hőmérséklet-eloszlásától függ. A termodinamika II. főtétele miatt biztosak lehetünk benne pl., hogy ha nincs anyagáramlás, azaz nincs munkavégzés, akkor a hő melegebb helyről a hidegebb felé áramlik, ezért a hővezetés esetében $\underline{J}$ mindenképp a meleg helyről a hideg felé fog mutatni.

A hőáram ismeretében meg fogjuk tudni mondani, hogy egyes helyeken hogyan változik a belső energia, azaz a hőmérséklet változására tudunk következtetni.

7.10. A hővezetés

7.10.1. Egyenes menti hővezetés

Vizsgáljunk először egy hosszú, egyenes rudat, aminek különböző pontjait különböző hőmérsékleten tartjuk, így benne hő áramlik. A rúd legyen olyan kis keresztmetszetű, hogy keresztirányban elhanyagolhassuk a hőmérséklet-változást. Így ha a rúd mentén vesszük fel az x -tengelyt, akkor a rúd hőmérséklet-eloszlása egy $T(x,t)$ függvénnyel adható meg, mint a hely és az idő függvénye.

Ugyanígy lehet leírni azt az esetet is, amikor ugyan nem kicsi a keresztmetszet, de a körülmények keresztirányban annyira egyformák, hogy ebben az irányban nincs hőmérséklet-változás, így hőáram sem. Ez pl. egy fal esetén áll fenn, amikor a fal egyik és másik oldalát mindenütt azonos hőmérsékletű környezet határolja, így minden változás csak a falra merőleges

irányban történik.

Ezekben az esetekben a hőáram-sűrűség vektor x irányú lesz, ezért nem mint vektorral, hanem csak mint előjeles mennyiséggel kell számolnunk vele.

A tapasztalat és a statisztikus fizikai megfontolások is azt mutatják, hogy a hőáram-sűrűség egyenesen arányos a hőmérséklet hely szerinti deriváltjával, amit a következő törvény fejez ki:

Fick-törvény (egydimenziós):

$$J = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (7.69)$$

ahol λ a test anyagára jellemző állandó, a **hővezetési tényező**

A Fick-törvényben a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a hő áramlása a melegebb helytől a hidegebb irányába történik. Ugyanis ha egy szakaszon T növekszik x növelésével, akkor $\partial T / \partial x > 0$, és ilyenkor negatív irányú hőáramot kapunk. Ez valóban a hidegebb rész felé mutat.

A hőáram tehát a hőmérséklet-eloszlástól függ, az viszont visszahat a hőmérséklet-eloszlásra. Kövessük ezt nyomon számításokkal, először egy, a gyakorlatban fontos speciális, majd az általános, időtől függő esetben.

Néhány anyag hővezetési tényezőjét találhatjuk a 10. táblázatban. (A fejezet során később szükség lesz egyéb, kapcsolódó adatokra, azokat is feltüntettük itt.) Természetesen a keverék összetételű anyagok (pl. beton) esetén ezek csak közepes értékek, mert az összetétel részleteitől függenek a pontos értékek. A levegő és a víz esetén pedig ne feledkezzünk meg arról, hogy azok belsejében a hőátadás uralkodó formája a hőáramlás, de a hővezetésük is kimutatható és ennek jellemzői olvashatók a táblázatban.

Stacionárius hővezetés egyenes mentén. Amennyiben egy anyagot melegítő (vagy hűtő) hatások időben változatlanok, a tapasztalat és az elmélet szerint (lásd a nemstacionárius hővezetésről szóló részt) egy idő múltán a hőmérséklet-eloszlás nem fog időben változni. Ezt az esetet a **stacionárius hővezetés** esetének hívjuk.

Például, ha egy rúd egyik végét melegen, másik végét hidegen tartjuk, a rúd hőmérséklet-eloszlása egy állandó eloszlásfüggvényt vesz fel. Könnyen beláthatjuk, hogy ez a hőmérséklet-eloszlás csak olyan lehet, hogy a hőáram a rúd minden pontjában azonos kell legyen. Képzeltben válasszuk ki ugyanis a rúd anyagának egy kis darabját. Ahhoz, hogy ennek hőmérséklete ne változzon, balról ugyanannyi hőt kell időegységenként

Anyag	λ [W/(m K)]	c [J/(kg K)]	ϱ [kg/m ³]
acél	48	460	7 850
alumínium	204	900	2 710
ezüst	430	235	10 500
gyémánt	2 300	509	3 500
ólom	35	130	11 210
réz	386	385	8 960
vas (nyers)	83	460	7 210
beton	1,1	650	2 500
fenyőfa	0,11	2 805	510
gumi	0,16	2 010	960
poliuretán hab	0,035	1 130	29
szilikon aerogél	0,017	–	2
tölgyfa	0,15	2 386	610
üveg	0,8	795	2 580
levegő	0,026	1 000	1,2
víz	0,61	4 190	1 000

10. táblázat. Néhány anyag főbb hőtani adatai. (A keverék összetételűeknél csak tájékoztató értékek.)

kapnia, mint amennyi jobbra távozik belőle. Ez viszont azt jelenti, hogy a hőáram azonos mindkét oldalán. Ezt a gondolatot a rúd bármely pontjában elismételhetjük, így tényleg az lesz a stacionárius állapot feltétele, hogy a hőáram mindenütt azonos legyen.

A Fick-törvény értelmében ez viszont azt jelenti, hogy homogén rúdban a stacionárius állapotban

$$\frac{\Phi}{A} = J = -\lambda \frac{dT}{dx} = \text{áll.}$$

Mivel most a stacionárius állapotot tanulmányozzuk, ezért T csak a hely függvénye, így ennek hely szerinti deriváltja nem parciális derivált, ezért $\partial T/\partial x$ helyett dT/dx írható.

Amennyiben a rúd anyaga homogén, tehát $\lambda = \text{áll.}$, ez azt jelenti, hogy $dT/dx = \text{áll.}$, azaz $T(x)$ lineáris függvény.

Stacionárius hővezetés esetén tehát egy homogén rúd hőmérséklet-eloszlása lineáris, azaz, ha a széleken $T(0) = T_1$ illetve $T(l) = T_2$ hőmérsékletet tartunk fenn, akkor a hőmérséklet-eloszlást a

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{l}$$

függvény adja meg. (l a rúd hossza, két végpontja $x = 0$ -nál és $x = l$ -nél van.)

Ekkor tehát $T(x)$ meredeksége állandó, így minden pontban igaz lesz, hogy $dT/dx = (T_2 - T_1)/l$. Ezért ekkor a kialakuló hőáram-sűrűség

$$J = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{l} \quad (7.70)$$

lesz.

Egyenes menti hővezetés tartományonként változó közegben. A gyakorlatban igen sokszor előfordul, hogy a hővezetési tényező nem állandó, de nem is folytonosan változik, hanem bizonyos tartományokban más-más, tartományon belüli konstans értéket vesz fel. Ilyen eset pl. az, amikor többretegű anyagon keresztül történik a hővezetés és az egyes rétegek anyagainak hővezetési tényezője eltér. Ekkor $T(x)$ az azonos anyagú tartományok belsejében lineáris lesz, de az egyes tartományokban eltérő meredekségű, még hozzá úgy, hogy a $\lambda dT/dx$ mennyiség mindenütt állandó. Tehát ha λ nagyobb, akkor dT/dx lesz kisebb, azaz a nagyobb hővezetési tényező esetén a hőmérséklet lassabban fog változni. (Lásd a 7.22. ábrán.)

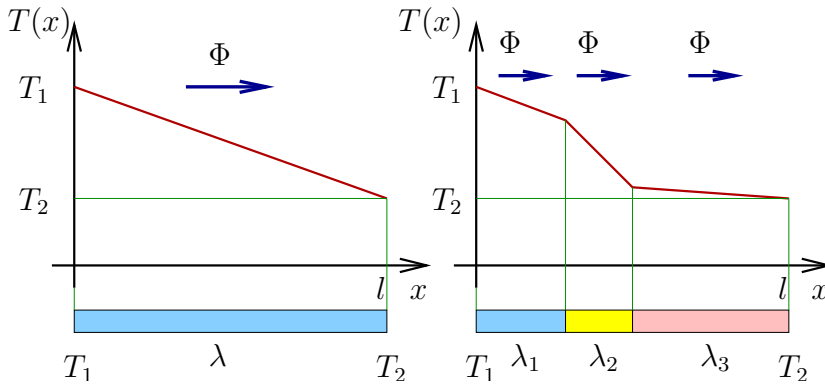
7.8. példa: Egy 20 cm vastag betonfal két oldalának hőmérséklet-különbsége 20°C . Hány watt teljesítményű hő jut át 1 m^2 ilyen betonon?

Megoldás: Egyszerűen csak (7.70)-t kell alkalmazni, ahol $A = 1\text{ m}^2$, $\lambda = 1,1\text{ W/(m K)}$ (10. táblázat szerint), $T_2 - T_1 = 20\text{ K}$, $l = 0,2\text{ m}$:

$$\Phi = -1,1 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot 1\text{ m}^2 \cdot \frac{20\text{ K}}{0,2\text{ m}} = -110\text{ W}.$$

A fal minden négyzetméterén 110 W teljesítménnyel történik a hő transzportja.

Vegyük észre, hogy a két oldali falhőmérsékleteket adtuk meg, nem a két oldalon a levegő hőmérsékletét. Később látni fogjuk, hogy ez nagy különbséget jelent.



7.22. ábra. Stacionárius hővezetés egyenes mentén állandó hővezetési tényező mellett (balra) és szakaszonként állandó hővezetési tényező esetében (jobbra). ($\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_3$)

7.9. példa: Az előző feladatbeli betonfalra 1 cm vastag fenyőfa réteg kerül szoros illesztéssel. Feltéve, hogy a beton és a fenyő burkolat illesztésénél a hőmérséklet mindkét anyagban azonos, mekkora lesz a hőáram, ha az összetett fal két oldalának hőmérséklet-különbsége $\Delta T = 20^\circ\text{C}$?

Megoldás: Legyen a beton szabad oldalán a hőmérséklet T_1 , a fa réteg szabad oldalán T_2 , az érintkezési felületükön T_k . A feladat szövege nem mondja meg, T_1 vagy T_2 a nagyobb, de könnyű belátni, hogy ez nincs hatással a végeredményre. Tegyük fel pl., hogy $T_1 < T_2$. Ekkor:

$$T_2 - T_1 = \Delta T. \quad (7.71)$$

(SI-egységekben számolunk, a mértékegységeket elhagyjuk.)

A betonban a hővezetés egyenlete:

$$J = -\lambda_1 \frac{T_k - T_1}{l_1}. \quad (7.72)$$

(Az 1-es index a beton adataira utal.)

A fában pedig (2-es index):

$$J = -\lambda_2 \frac{T_2 - T_k}{l_2}. \quad (7.73)$$

A (7.71)–(7.73) egyenletek egyenletrendszer alkotnak, melyekben ΔT , l_1 , l_2 , λ_1 és λ_2 ismertek, T_1 , T_2 , T_k és J ismeretlenek. Látszólag tehát 4 ismeretlenhez 3

egyenlet tartozik, de amit a feladat kérdez, a hőáram-sűrűség mégis meghatározható. Ugyanis mindenütt csak a hőmérséklet-különbségek fordulnak elő, így T_1 tetszőlegesen megválasztható szabad paraméterként kezelhető.

Terjedelmi okokból nem részletezve a megoldás lépéseit a végeredmény:

$$J = \frac{\Delta T}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}} = 73,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

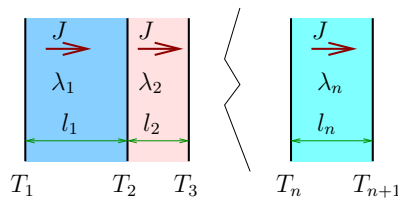
(Útmutatás: $T_2 = \Delta T + T_1$ -et írjuk (7.73)-ba, az így kapott jobb oldalt tegyük egyenlővé (7.72) jobb oldalával. A kapott egyenletből határozzuk meg $T_k - T - 1$ -et és ezt használjuk (7.72) egyenletben.)

A hőellenállás. Az előző példa eredményének szimmetrikussága sejteti, hogy egyszerűsíthetünk az ilyen példák megoldásán. Gondoljunk bele: egy 4 rétegű fal esetén 5 ismeretlenes egyenletrendszert kellene megoldanunk, ami nehézkes, ha nem vesszük észre, hogy bizonyos fizikai tulajdonságok miatt az egyenletek speciális jellegűek, és ez egyszerűsített megoldást tesz lehetővé.

Rendezzük át ugyanis a stacionárius hővezetés alapegyenletét:

$$T_2 - T_1 = -J \frac{l}{\lambda}.$$

Ha több réteg van egymás után, akkor azokban a hőáram-sűrűség azonos lesz, de l és λ különbözni fog, viszont a hőmérséklet-különbségek összeadhatók. Legyen tehát egymás után n darab réteg, melyek paramétereit 1-től n -ig indexeljük, határait pedig legyen $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$ a hőmérséklet, ahogy azt a 7.23. ábra mutatja.



7.23. ábra. Stacionárius hővezetés több rétegen keresztül

Az 1. rétegre alkalmazva az előző összefüggést:

$$T_2 - T_1 = -J \frac{l_1}{\lambda_1}.$$

A 2. rétegben:

$$T_3 - T_2 = -J \frac{l_2}{\lambda_2}.$$

Az i . rétegben pedig:

$$T_{i+1} - T_i = -J \frac{l_i}{\lambda_i}.$$

Ez minden $i = 1, 2, \dots, n$ értékre igaz. Adjuk össze ezt az n darab egyenletet!

$$(T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \dots + (T_{n+1} - T_n) = -J \frac{l_1}{\lambda_1} - J \frac{l_2}{\lambda_2} - \dots - J \frac{l_n}{\lambda_n}.$$

A bal oldalon T_1 és T_{n+1} kivételével minden tag kétszer szerepel, egyszer pozitív, egyszer negatív előjellel, ezért csak a $T_{n+1} - T_1$ marad. Ez jelenti azt, amit korábban jeleztünk, tudniillik, hogy a hőmérséklet-különbségek ilyen esetben összeadódnak. A jobb oldalon viszont a közös J tag kiemelhető. Így az átrendezett alak:

$$T_{n+1} - T_1 = -J \left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_n}{\lambda_n} \right).$$

Megfigyelhetjük, hogy az l_i/λ_i mennyiségek is összeadódnak. Ez tehát egy, a rétegre jellemző mennyiség, melyet célszerű névvel ellátni, mert ez fejezi ki, mennyire nehezen vezeti a hőt a réteg: vastagabb réteg vagy kisebb hővezetési tényező esetén ez nagyobb lesz.

Hőellenállás:

Egy réteg hőellenállásának nevezzük a hőmérséklet-különbség és a rétegen keresztül menő hőáram arányát:

$$R = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{\Delta T}{JA}.$$

Az előzők szerint az i . réteg hőellenállása:

$$R_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{JA} = \frac{l_i}{\lambda_i A}.$$

Az n réteg együttes hőellenállása pedig:

$$R_e = \frac{T_{n+1} - T_1}{JA} = \frac{1}{A} \left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_n}{\lambda_n} \right),$$

azaz

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

A hőellenállás tehát egymás után elhelyezkedő rétegek esetén összeadható.

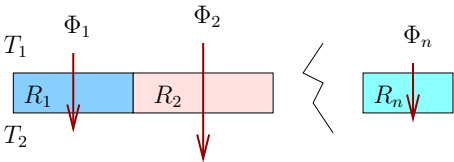
Érdekes megfeleltetés tehető a jól ismert elektromosságtani alapmennyiségek és a hővezetéssel kapcsolatban megismertek között. Ezeket foglalja össze a 11. táblázat.

áramvezetés		hővezetés	
áramerősség	I	hőáram	Φ
áramsűrűség	j	hőáram-sűrűség	J
feszültség	U	hőmérséklet-különbség	ΔT
ellenállás	R	hőellenállás	R

11. táblázat. Analógia az egyenáramú körök jellemzői és a stacionárius hővezetés jellemzői között

Ez a hasonlóság nem szűnik meg akkor sem, ha hőellenállásokat „párhuzamosan kötünk”, azaz ha nem egymás utáni, hanem egymás mellett levő rétegek eredő hőellenállását vizsgáljuk. Ilyen eset a gyakorlatban az, amikor pl. egy összetett fal hőáteresztő képességét vizsgáljuk: a falaknak és az ablaknak más hőellenállásuk van, de szeretnénk kiszámolni eredő hatásukat.

A hőellenállások ilyen párhuzamos kötése esetén nyilván nem a hőáram lesz azonos az egyes komponenseken, hanem a hőmérséklet-különbség. (Lásd 7.24. ábra.)



7.24. ábra. Hőellenállások párhuzamos eredőjének számolásához

Ekkor nyilván:

$$\Phi_i = \frac{T_2 - T_1}{R_i}.$$

Az eredő hőáram pedig a párhuzamosan futó hőáramok összege:

$$\Phi_e = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = (T_2 - T_1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right).$$

Az eredő hőellenállás tehát:

$$R_e = \frac{T_2 - T_1}{\Phi_e} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}},$$

vagy az emeletes törttől mentes alakban:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Az analógia ez elektromos áramkörökkel tehát megmarad: párhuzamos hőellenállások eredőjének reciproka a hőellenállások reciprokának összege.

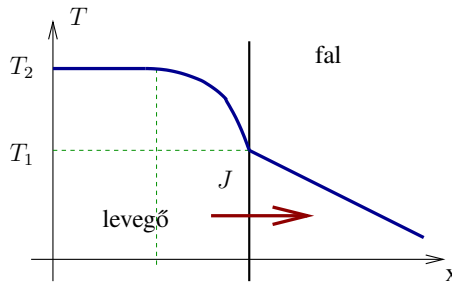
A közeghatárok hőellenállása. Az előző számításokban úgy vettük, hogy a különböző anyagi minőségű közegek érintkezési pontjain mindkét közeg hőmérséklete azonos. Ez valóban így is van, ha pl. különböző fémeket összehegesztünk, így szerkezetük összeolvad. A gyakorlatban azonban sokszor találkozunk olyan esettel, amikor a különböző közegek csak egymáshoz vannak érintve, de nincsenek összeolvasztva, mert az esetleg nem is lehetséges. Ilyen eset pl. az, ami a levegő és a fal érintkezésekor vagy a fal belsejében a különböző anyagú rétegek között kialakul.

A tapasztalat szerint a hőáram-sűrűség itt is a hőmérséklet-különbséggel lesz arányos:

$$J = -\alpha(T_2 - T_1),$$

ahol α a **hőátadási tényező**.

A hőátadási tényező tehát a közegek kapcsolatát jellemzi. Kiszámítása nem egyszerű, mert valójában a kapcsolat részletes elemzését követeli meg. Pl. levegő-szilárd anyag találkozáskor a levegő hőmérséklete valójában egy igen vékony rétegben fokozatosan változik a fal hőmérséklete és a levegő faltól távol eső részeinek hőmérséklete között, és a hőátadási tényező fenti definíciójában igazából a levegő faltól távol eső hőmérsékletét kell szerepeltetni. (Lásd 7.25. ábra.) Ennek megfelelően az így számolt α érték függ a levegő áramlási sebességétől is. A függés pontos alakját csak magas szintű áramlástan ismeretek birtokában lehet a fizika alapelveiből levezetni, de



7.25. ábra. A hőmérséklet alakulása egy levegő-fal határ közelében

a gyakorlatban jó szolgálatot tesznek a kísérletekből származó hőátadási tényező értékek.

Nyugvó, normál állapotú levegő és szilárd testek között a hőátadási tényező értéke 3 és $20 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ közt szokott változni, de ez áramló levegő esetén $100 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ fölé is mehet.

A víz és szilárd testek közt ugyanez az érték sokkal magasabb: nyugvó, szobahőmérsékletű víz esetében $200\text{--}300 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ közötti értékekkel számolhatunk különféle anyagok esetében.

Az előzőek alapján könnyen belátható, hogy a közeghatár

$$R = \frac{1}{A\alpha}$$

hőellenállást képvisel.

Természetesen az a jelenség minden közeghatáron lezajlik. Így pl. egy fal esetén a stacionárius állapotban kialakuló hőmérséklet-eloszlást a 7.26. ábra mutatja.

7.10. példa: Vegyük elő újra a 7.8. feladatban szereplő, 20 cm vastag betonfalat és számoljuk ki mennyi hőáram jut át 1 m^2 -én ha nem a falhőmérsékletek térnek el 20°C -kal, hanem a két oldalán levő levegő hőmérséklete. Mekkora lesz ekkor a falak tényleges hőmérséklet-különbsége?

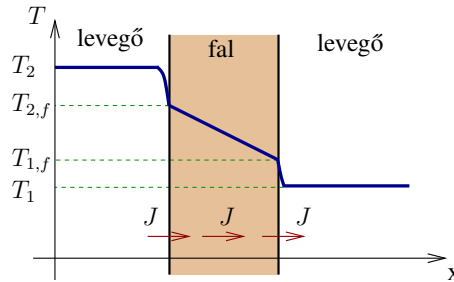
A beton-levegő hőátadási tényezőt vegyük $10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ -nek.

Megoldás: $A = 1 \text{ m}^2$ beton hőellenállása :

$$R_1 = \frac{0,2}{1,1 \cdot 1} = 0,182 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

A beton-levegő határfelületé pedig:

$$R_2 = \frac{1}{10 \cdot 1} = 0,1 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$



7.26. ábra. A hőmérséklet alakulása egy fal esetében

Mivel két beton-levegő határ van problémánkban, ezért az eredő hőellenállás:

$$R_e = R_1 + 2R_2 = 0,382 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Így a hőáram:

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_e} = 52,4 \text{ W}.$$

Mivel ez 1 m^2 -re lett kiszámítva, ezért a hőáramsűrűség számértéke megegyezik ezzel, azaz

$$J = 52,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Egy fal-levegő határon felírva a hőátadás alaptörvényét:

$$J = \alpha \Delta T_h,$$

ahol ΔT_h a hőmérséklet-különbség abszolút értéke a fal és a faltól távoli levegő között.

Innen

$$\Delta T_h = \frac{J}{\alpha} = 5,24 \text{ K}.$$

A 7.26. ábra alapján nyilvánvaló, hogy a fal két oldalának hőmérséklet-különbsége $2\Delta T_h$ -nyival kisebb a két oldalon található levegőrészek hőmérséklet-különbségénél. Azaz a fal két oldalán a hőmérsékletek különbsége:

$$\Delta T_f = \Delta T - 2\Delta T_h = 9,5 \text{ K}.$$

A betonfal két oldalának hőmérséklete tehát csak kb. 9,5 fokkal tér el, ami számottevően kisebb, mint a levegőrészek 20 fokos hőmérséklet-különbsége. Ez összhangban van azzal, hogy ebben az esetben a falon keresztülmennő hőáram sűrűsége sokkal kisebb, mint amit a 7.8. feladatban kaptunk, amikor nem számoltunk a fal-levegő kapcsolat hőellenállásával.

7.11. példa: Egy 8 mm vastag üveglap egyik oldalán 20°C hőmérsékletű szoba, másik oldalán 0°C hőmérsékletű levegő van. Mekkora a hőáram egy ilyen „szigetelés” esetén, ha az üveg felülete 0,5 m², és az üveg-levegő határon a hőátadási tényező 10 W/(m²K), az üveg hővezetési tényezője pedig 0,8 W/(m K)?

Megoldás: A feladatban 3 hőellenállással kell számolnunk: az üveg anyagában történővel illetve az üveg kinti és benti levegővel való kapcsolatával.

Az üveg hőellenállása:

$$R_2 = \frac{d}{\lambda A} = \frac{0,008}{0,8 \cdot 0,5} = 0,02 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Az üveg-levegő határ ellenállása mindkét oldalon azonos:

$$R_1 = R_3 = \frac{1}{\alpha A} = \frac{1}{10 \cdot 0,5} = 0,2 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Az eredő hőellenállás tehát:

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 = 0,42 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Így a hőáram:

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_e} = \frac{20}{0,42} = 47,6 \text{ W}.$$

Egy ilyen egyrétegű üvegen tehát majdnem 50 W hőáram megy a melegből a hideg irányába.

Tanulságos megfigyelni, hogy magának az üvegnek elhanyagolható a hőellenállása az üveg-levegő határhoz képest. Ezért nem sokat nyerünk, ha mondjuk kétszer vastagabb üveget alkalmazunk.

7.12. példa: Számoljuk ki az előző feladatot, ha feltételezzük, hogy a kinti oldalon erős szél fúj, ezért ott a hőátadási tényező $\alpha^* = 50 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ -re növekszik!

Megoldás: Csak az egyik levegő-közeghatár esetét kell újraszámolni:

$$R_3^* = \frac{1}{\alpha^* A} = \frac{1}{50 \cdot 0,5} = 0,04 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Így a módosult eredő hőellenállás:

$$R_e^* = R_1 + R_2 + R_3^* = 0,26 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Így a hőáram:

$$\Phi^* = \frac{\Delta T}{R_e^*} = \frac{20}{0,26} = 76,9 \text{ W}.$$

A hőáram tehát igen jelentősen megnövekedett.

7.13. példa: Mennyi egy olyan, $0,5 \text{ m}^2$ felületű ablak hőellenállása, mely dupla, egyenként 4 mm vastag üveget és közéjük zárva 3 cm vastag légréteget tartalmaz, ha feltételezzük, hogy a levegő és az üvegek közt mindenütt $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ a hőátadási tényező és az üvegek közé zárt levegő áramlása elhanyagolható? Vessük ezt az eredményt össze a 7.11. feladatbeli hőellenállással!

Megoldás: Ekkor több hőellenállás egyforma lesz: 4 levegő-üveg határunk, 2 egyforma üvegünk és egy levegőrétegünk van, aminek hőellenállását számolni kell.

A levegő-üveg átmenetek ellenállása egyenként:

$$R_1 = \frac{1}{\alpha A} = \frac{1}{10 \cdot 0,5} = 0,2 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Az üvegek hőellenállása egyenként:

$$R_2 = \frac{d}{\lambda A} = \frac{0,004}{0,8 \cdot 0,5} = 0,01 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

A légrétegé pedig:

$$R_3 = \frac{d_l}{\lambda_l A} = \frac{0,03}{0,026 \cdot 0,5} = 2,31 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Az együttes hőellenállás:

$$R_e = 4R_1 + 2R_2 + R_3 = 3,13 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Ez lényegesen nagyobb, mint a 7.11. feladatbeli hőellenállás, pedig a felhasznált üvegyanyag mennyisége azonos. A hőellenállást ugyanis részben a közeghatárok hőellenállása, de leginkább maga a bezárt levegőréteg növeli meg.

Egy fontos elhanyagolást tettünk a megoldás során: feltételeztük, hogy a bezárt levegő áramlása elhanyagolható. Ha ez nincs így, akkor a levegő hőáramlással is szállít hőt, ami csökkenti hőellenállását. 3 cm vastag, $0,5 \text{ m}^2$ felületű légrétegnél azonban a levegő belső és az üvegekhez való súrlódása következtében ez a hatás nem lehet jelentős, így nem tévedhettünk nagyot. Ez a számítás azonban nem végezhető el ugyanígy vastag, levegőt tartalmazó térfogatokra, pl. egy teljes szobára.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

Az előző példák is mutatták, hogy a hővezetéssel kapcsolatos fogalmak a hétköznapiakban is fontosak lehetnek.

Érdeemes pár szóban megemlíteni, mitől is függ az emberi **hőérzet**.

Első gondolatunk az lehet, hogy a hőérzet a környezet hőmérsékletét mutatja, de könnyű meggyőződni róla, hogy ez nincs így: ugyanazt a hőmérsékletű levegőt sokkal hidegebbnek érezzük, ha a szél fúj. A most tanult ismeretek alapján meg tudjuk mondani, hogy a hőérzet valójában leginkább a hőáram-sűrűséggel kapcsolatos. Tehát egy testrészünk akkor érzi magát kellemesen, ha a hőáram-sűrűség egy megadott érték, ennél kisebb esetén meleget érzünk, nagyobb hőáram-sűrűség esetén pedig hidegebbet.

Mindez természetesen személyfüggő, de egy átlagos ember bőrfelszíne kb. $1,8 \text{ m}^2$, és akkor érzi jól magát, ha összesen 200 W hőáramot bocsát ki. Ez $200/1,8 \approx 111 \text{ W/m}^2$ hőáram-sűrűséget jelent.

Szervezetünk bonyolultságánál fogva számszerűen követni, honnan is jön össze ez a hőleadás, nem is egyszerű. A következő fő hatások játszanak szerepet:

Hővezetés: ruházatunk segítségével szabályozni tudjuk belsők és a környezet közti hőellenállás értékét úgy, hogy az épp megfelelő hőáram-sűrűséget adjon ki. Az előzőekben tanultak alapján érthető, hogy a vastag, sok levegőt tartalmazó ruháknak lesz nagy a hőellenállása. Az is érthető, hogy szélben több hőt adunk le, mert legkülső ruharétegünk és a levegő közti hőátadási tényező megnövekszik, azaz a hőellenállás lecsökken. Könnyű megválaszolni azt is, miért fázunk jobban azonos hőmérsékletű vízben, mint levegőben, a víz-test hőátadási tényező ugyanis sokkal nagyobb, mint a levegő-test kapcsolaté.

Hősugárzás: erről a következőkben tanulunk részletesen, most csak azt említjük meg, hogy szerepe nem elhanyagolható, és elsősorban ruházatunk fényvisszaverő képességével tudjuk szabályozni.

Párolgás: a hőáramlás speciális formája, melynek során az elpárolgó izzadság nagy energiasűrűségű részecskéi jelentős hőt vonnak el. Ennek mértékét jelentősen befolyásolja, mennyire engedi a környezet és a ruházat a párolgást: nagy páratartalmú levegőn vagy zárt ruházatban nem tud a párolgás olyan mértékű lenni, mint egyébként, így melegebbnek érezzük a környezetet.

Mindezt a képet bonyolítja, hogy testünk belsejében jelentős hőáramlás zajlik részben hővezetéssel, részben hőáramlással (vérkeringés), valamint hogy a párolgás szabályozása elég bonyolultan történik, ezért számszerű eredményekre jutni a témakör legegyszerűbb eseteiben lehet csak. Kvalitatív megfontolásokhoz azonban hasznosak az itt elmondottak.

7.14. példa: Fedetlen testrészeink 110 W/m^2 nagyságú, kifelé irányuló hőáram-sűrűség esetén érzik kellemesen magukat. Ez 25°C -os, nyugvó levegőben lényeges párolgás nélkül megvalósul. Becsülje meg ez alapján a bőr-levegő kapcsolatot jellemző hőátadási tényezőt!

Megoldás: Definíció szerint:

$$\alpha = \frac{J}{\Delta T} = \frac{110}{36 - 25} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}.$$

(Bőrünk hőmérsékletét 36°C -nak vettük.)

Ez a számolás jelentős elhanyagolást tartalmaz: nem számoltunk a hőszugárzás hatásával, pedig az nem elhanyagolható. Ezt a számítást ezért meg fogjuk ismételni a hőszugárzásról tanultaknál.

7.10.2. A Newton-féle lehűlési törvény

Az eddigiekben a stacionárius hővezetéssel foglalkoztunk. Most bepillantunk az időfüggő hővezetési problémák körébe, egy egyszerű, de tanulságos problémán keresztül: megvizsgáljuk, hogyan hűl le egy olyan test, mely környezetével hővezetéssel tartja a kapcsolatot, és a testen belül olyan erős a hőáramlás, hogy a test anyagának minden pontjában azonosnak vehető a hőmérséklet.

Ilyen eset pl. amikor egy lezárt kuktafazék alatt elzárjuk a gázt és hagyjuk kihűlni. Az edény zártsága miatt az áramlási, párolgási veszteség elhanyagolható, a kukta fényes anyaga miatt pedig a sugárzástól tekinthetünk el. (Lásd később.) A kuktán belül pedig az esetleges hőmérséklet-különbségeket közel kiegyenlíti a hőáramlás.

Nem a hétköznapi gyakorlatból vett példa: egy forró fémdarabot hideg vízben hűtve is ez az eset lép fel, mert a fémen belül olyan nagy a hővezetési tényező, hogy a hőmérséklet állandónak vehető.

Mindegyik esetben a környezet olyan nagy hőkapacitású a vizsgált testhez képest, hogy T_k hőmérséklete állandónak vehető. Ezzel szemben a test hőmérséklete valamilyen T_0 értékről indulva egy $T(t)$ függvény szerint változik, méghozzá a termodinamika II. főtétele értelmében hosszú idő múlva T_k -hoz fog tartani, ha nem működtetünk valamilyen speciális hőcserélő berendezést.

Legyen a vizsgált test és a környezet közti hőellenállás R . Ekkor definíció szerint a test és környezete között a hőáram:

$$\Phi(t) = \frac{T_k - T(t)}{R}.$$

(Az előjelek a test szempontjából vannak felvéve: $\Phi > 0$, ha a test kap hő formájában energiát.)

Ha a test más formában nem kap energiát, akkor $\Phi(t)$ a test belső energiájának megváltozását írja le:

$$\frac{dE}{dt} = \Phi(t) = \frac{T_k - T}{R}. \quad (7.74)$$

Normál körülmények közt a test anyagának fajhője független a hőmérséklettől, ezért belső energiája a hőmérséklet lineáris függvénye:

$$E = cm(T - T_r),$$

ahol T_r egy önkényes viszonyítási hőmérséklet, ahol 0-nak vesszük a test belső energiáját, m a hűlő test tömege, c pedig az anyag fajhője.

Ezt beírva a (7.74) egyenletbe:

$$\frac{d(cm(T - T_r))}{dt} = \frac{T_k - T}{R}.$$

Egyszerű átalakításokkal:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_k - T}{Rcm}. \quad (7.75)$$

Ez T -re egy differenciálegyenlet. Aki birtokában van az ilyen egyenletek megoldási módszereinek, az gépiesen megoldhatja, de mi itt inkább egy lassú, de tanulságos utat választunk.

Tudjuk, hogy $T = T_k$ esetén a test egyensúlyban van a környezetével, tehát hőmérséklete nem változik meg a hővezetés miatt. Valóban: $T = T_k$ -t helyettesítve (7.75) egyenletbe $dT/dt = 0$, azaz állandó hőmérséklet adódik. Ez adja azt az ötletet, hogy ne $T(t)$ -t hanem az $U = T - T_k$ hőmérséklet-különbséget tekintsük változónak.

Beírva $T = U + T_k$ -t a (7.75) egyenletbe egyszerű számolással adódik a hőmérséklet-különbséget leíró egyenlet:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{Rcm}U. \quad (7.76)$$

Ez egy könnyen megoldható differenciálegyenlet: mindkét oldalt U -val osztva és idő szerint integrálva:

$$\int \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} dt = \int -\frac{1}{Rcm} dt + C,$$

azaz

$$\ln U = -\frac{t}{Rcm} + C,$$

ahol C egy egyelőre ismeretlen jelentésű integrálási állandó.

Innen a hőmérséklet-különbség időfüggése:

$$U(t) = e^C e^{-\frac{t}{Rcm}}.$$

Tehát a sok fizikai folyamatban megismert exponenciális lecsengés esetével állunk szemben ismét.

A fellépő Rcm szorzatot a rendszer lehűlési időállandójának szokás nevezni és τ -val szokás jelölni:

$$\tau = Rcm. \quad (7.77)$$

A fellépő C integrációs állandó fizikai jelentése egyszerűen megkapható. Számoljuk ki ugyanis $U(0)$ -t:

$$U(0) = e^C e^0 = e^C.$$

Így a hőmérséklet-különbség időfüggése:

$$U(t) = U(0)e^{-t/\tau}.$$

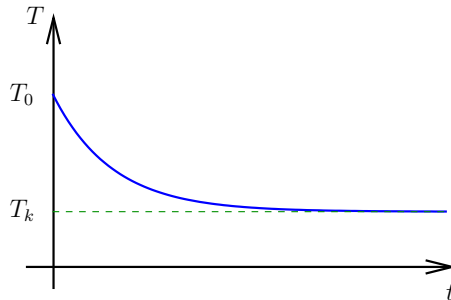
Visszaírva $U = T - T_k$ -t megkapható a test hőmérsékletének időfüggése:

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k)e^{-t/\tau}. \quad (7.78)$$

Ezt az összefüggést szokás **Newton-féle lehűlési törvénynek** nevezni.

Az időállandó szemléletes jelentése ez alapján: ennyi idő alatt csökken e -ad részére a hőmérséklet-különbség. Ez mutatja tehát a folyamatok időskáláját. A $\tau = Rcm$ formula összhangban van azzal, amit józan ésszel várunk: a hőellenállás, a fajhő és a test tömegének növelése egyaránt növeli az időállandót.

Természetesen ez a „lehűlési törvény” felmelegedést is leírhat, ha $T_0 < T_k$.



7.27. ábra. A Newton-féle lehűlési törvény hőmérséklet-idő függvénye

7.15. példa: Egy teafőzőben 0,8 l víz van. A teafőző teste félgömb alakú, melynek átmérője 25 cm. Mekkora az időállandója, ha a hőszugárzástól és hővezetéstől eltekinthetünk, és a hőátadási tényező a kanna és a környező levegő között $6 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$? (A kiöntő és egyéb kis részek felszíne valamint a vékony fém test hőellenállása elhanyagolható.)

Mennyi idő alatt hűl le 100°C -ról 40°C -ra a teáskanna, ha a környezet 20°C -os?

Megoldás: A feladat szerint a teáskanna felszíne egy 25 cm átmérőjű körlap (alja) és egy ugyanilyen átmérőjű félgömb felszínének összege. (Úgy számoljuk, hogy még a tűzhelyen áll, tehát az alját is éri a levegő.)

Azaz

$$A = r^2\pi + \frac{1}{2}4r^2\pi = 3r^2\pi = 0,147 \text{ m}^2.$$

A hőellenállást a feladat szerint a levegő-teáskanna hőkontaktus adja:

$$R = \frac{1}{\alpha A} = 1,13 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Így az időállandó (7.77) szerint:

$$\tau = c m R = 3790 \text{ s}.$$

(A feladat szerint $m = 0,8 \text{ kg}$, mert a víz tömege mellett a kanna tömegét elhanyagoltuk, a víz fajhőjét pedig a 10. táblázatból vettük.)

(7.78)-be beírva a feladat adatait:

$$40 = 20 + (100 - 20)e^{-t/3790},$$

ahonnan

$$t = 3790 \ln \frac{100 - 20}{40 - 20} = 5250 \text{ s} \approx 1,5 \text{ óra}.$$

Tehát ebben az esetben mintegy másfél óráig tart a 40°C -ra való lehűlés.

A valóságban ennél kisebb idő várható, mivel elhanyagoltuk a sugárzási veszteséget és a réseken itt-ott kiszökő gőzből adódó veszteséget. De tökéletesen záró és teljesen fényes kanna esetén ez jó közelítést jelent.

7.16. példa: Hogyan függ egy homogén gömb lehűlését jellemző időállandó a gömb sugarától?

Megoldás: A gömb tömege:

$$m = \varrho V = \varrho \frac{4\pi}{3} r^3,$$

felszíne:

$$A = 4\pi r^2.$$

Ezért a hőellenállás:

$$R = \frac{1}{\alpha A} = \frac{1}{\alpha 4\pi r^2}.$$

Tehát az időállandó:

$$\tau = Rcm = \frac{c\varrho \frac{4\pi}{3} r^3}{\alpha 4\pi r^2} = \frac{c\varrho}{3\alpha} r.$$

Az időállandó tehát egyenesen arányos a gömb sugarával. Ez összecseng a tapasztalattal és a józan ésszel: nagyobb test lassabban hűl ki.

Lehűlés egy állandó forrástag esetében. Fontos, és az előzőben vizsgált lehűlési problémánál alig bonyolultabb eset az, amikor egy test egyrészt a környezetével hőkontaktusban van, másrésztől egy állandó hőáram melegíti. Ilyen pl. egy mikrohullámú sütőben melegített víz esete: a mikrohullámok állandó forrástagként hőt szállítanak a vízbe, de az közben környezetének hőt ad le.

Ekkor a test és környezete közti hőáram így írható fel: (vesd össze (7.74) egyenlettel):

$$\frac{dE}{dt} = \Phi(t) + \Phi_0 = \frac{T_k - T}{R} + \Phi_0,$$

ahol Φ_0 az állandó hőforrástag.

A fentiekhez hasonlóan $E = cm(T - T_r)$ -t beírva ide, majd átrendezve:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_k - T + \Phi_0 R}{Rcm}.$$

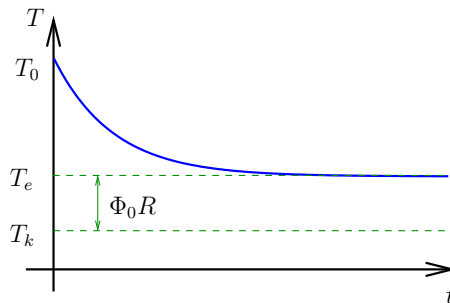
Ekkor az egyensúlyi hőmérséklet nem T_k , lesz, hanem $T_e = T_k + \Phi_0 R$, hisz ekkor lesz az előző egyenlet jobb oldala 0. Ezért most ehhez az egyensúlyi helyzethez viszonyítsuk a hőmérsékletet, azaz vezessük be az $U = T - T_e = T - T_k - \Phi_0 R$ jelölést. Erre a változóra áttérve a

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{Rcm}U$$

egyenletet kapjuk, ami teljesen megegyezik a (7.76) egyenlettel, így megoldása is azonos lesz vele.

Így Φ_0 állandó hőforrás esetén egy homogénnek tekinthető test hőmérséklete az idő függvényében:

$$T(t) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-t/\tau}, \quad T_e = T_k + \Phi_0 R. \quad (7.79)$$



7.28. ábra. A Newton-féle lehűlési törvény hőmérséklet-idő függvénye állandó forrástág esetén

7.17. példa: Egy fazékban 1,5l víz van. A fazékon fedő található, így a párolgás elhanyagolható, de a fazék 12 dm^2 nagyságú felülete a 20°C -os környezettel $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ -es hőátadási tényezőjű kapcsolatban van. (Az edény fala olyan vékony és olyan jó hővezető, hogy annak hőellenállása elhanyagolható.)

Legalább mekkora teljesítménnyel kell melegíteni, hogy a víz fel tudjon forrni benne? Ha ennek a teljesítménynek a kétszeresével melegítjük, mennyi idő alatt forr fel a víz?

Megoldás: A feladat szerint a hőellenállás a víz és a környezet között:

$$R = \frac{1}{\alpha A} = \frac{1}{10 \cdot 0,12} = 0,833 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Ahhoz, hogy a víz képes legyen felforrni, az egyensúlyi hőmérsékletnek el kell érnie a $T_e = 100^\circ\text{C}$ -ot, azaz

$$T_e = T_k + \Phi_0 R,$$

ahonnan:

$$\Phi_0 = \frac{T_e - T_k}{R} = 96 \text{ W}.$$

Tehát legalább 96 W teljesítmény kell ahhoz, hogy a víz elvileg elérhesse a 100°C hőmérsékletet. Az egyensúlyi hőmérsékletet azonban csak aszimptotikusan éri el a test, így ez azt jelentené, hogy csak tetszőleges mértékben közelíti meg a 100°C-ot a víz hőmérséklete. A gyakorlatban ez azt jelentené, hogy nem, vagy csak igen hosszú idő alatt forrna fel.

Ha ezek után kétszeres teljesítménnyel fűtjük a fazekat, akkor az azt jelenti, hogy Φ_0 helyett $\Phi_0^* = 2\Phi_0$ -al kell számolnunk.

Ekkor a hőmérséklet-idő függvény:

$$T(t) = T_e^* + (T_0 - T_e^*)e^{-t/\tau},$$

ahol

$$\tau = Rcm = 0,833 \cdot 4190 \cdot 1,5 = 5240 \text{ s}.$$

$$T_e^* = T_k + \Phi_0^* R = 180^\circ\text{C}.$$

Innen a keresett felforrási idő egyszerűen kifejezhető:

$$t = \tau \ln \frac{T_0 - T_e^*}{T(t) - T_e^*} = 5240 \ln \frac{20 - 180}{100 - 180} = 3630 \text{ s} \approx 1 \text{ óra}.$$

Tehát a minimálisan szükségesnél kétszer nagyobb teljesítménnyel, azaz 192 W-tal melegítve az 1,5 l vizet egy órába telne a felforrálás.

Mindez azt jelenti a gyakorlatban, hogy 500 W fűtőteljesítmény alatt igen nehézkes 1,5 l vizet felforralni.

7.18. példa: Egy kettős falú acél edényben akarunk vizet forralni. Az edény falának egy rétege 2 mm vastag, de a két fal között 5 mm-es légréteg van. Feltehetjük, hogy a fazék teteje is ugyanilyen hőszigetelő tulajdonságú és azt, hogy az edény alakja olyan henger, melynek átmérője és magassága megegyezik.

Mekkora lehet az edény mérete, ha azt akarjuk, hogy 10 W bevitt teljesítménnyel forrásban tudjuk tartani az edény belsejében levő vizet, ha a környezet 20°C-os? Hány liter víz fér bele egy ilyen edénybe?

Az acél és a levegő közti hőátadási tényezőt vegyük 5 W/(m²K)-nek, a fal és a víz közöttit 200 W/(m²K)-nek.

Megoldás: Az előzőekben tanultak alapján a $\Phi_0 = 10 \text{ W}$ -os bevitt hőáramának és az edény falának R hőellenállásának szorzata legalább $T_e - T_k = 80 \text{ K}$ kell legyen, azaz

$$10WR > 80 \text{ K},$$

ahonnet

$$R > 8 \frac{K}{W}.$$

A dupla falú edény hőellenállása a két fal, a három levegő-fal, az egy víz-fal és az egy levegőréteg hőellenállásából adódik. Azt sejtethjük, hogy ezekből az acélfalak belsejében és a víz-acél határon képződő hőellenállás a többihez képest elhanyagolható lesz, de számoljuk ki mindet precízen.

A víz-acél határ (1 db) hőellenállása:

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1 A} = \frac{1}{200A} = 0,005 \frac{1}{A}.$$

(A az edény össz felszíne, amit jelenleg nem ismerünk.)

A 2 mm vastag acélfal hőellenállása egyenként (2 db):

$$R_2 = \frac{d_2}{\lambda_2 A} = \frac{0,002}{48A} = 4,17 \cdot 10^{-5} \frac{1}{A}.$$

Az 5 mm vastag légréteg ellenállása (1 db):

$$R_3 = \frac{d_3}{\lambda_2 A} = \frac{0,005}{0,026A} = 0,19 \frac{1}{A}.$$

Az acél-levegő határfelületek hőellenállása egyenként (3 db):

$$R_4 = \frac{1}{\alpha_2 A} = \frac{1}{5A} = 0,2 \frac{1}{A}.$$

Az együttes hőellenállás így:

$$R = R_1 + 2R_2 + R_3 + 3R_4 = 0,80 \frac{1}{A}.$$

A fenti feltételt alkalmazva:

$$0,80 \frac{1}{A} > 8,$$

azaz

$$A < 0,10.$$

A feladat szerint ha a henger alakú edény alapkörének sugara r , akkor magasság $2r$, így felszíne:

$$A = 2 \cdot r^2 \pi + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2.$$

Tehát a feltétel:

$$6\pi r^2 < 0,1,$$

ahonnet

$$r < 0,073.$$

Ennek az edénynek a térfogata:

$$V = r^2 \pi \cdot 2r = 2\pi r^3 = 0,0024 \text{ m}^3.$$

Elvileg tehát 2,4 l víz fér egy ilyen edénybe.

A megoldás során egy-két elhanyagolással éltünk. Pl. úgy vettük, hogy a teljes belső felület vízzel érintkezik, pedig a fedő és az oldalfal egy része biztosan gőzzel áll kapcsolatban. A gőz-fém hőátadási tényező azonban elég közel áll a víz-fém értékhez, így ha sok víz van az edényben, nem követtünk el nagy hibát. A megoldás menetéből látszik, hogy ha akár a teljes belső felületen a víz-fém kapcsolat helyett levegő-fém kapcsolattal számolnánk, az R_1 helyett egy újabb R_4 -es tagot hozna be, ami a végeredményt mintegy 25%-kal befolyásolná. Elhanyagoltuk azt is, hogy a dupla falú edény falainak valahol érintkezniük kell, mert valaminek tartani kell az edény belsejét. Ez az érintkező felület azonban elég kicsire vehető, ami csak kismértékű hőellenállás-csökkenést okoz.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

Az eddig elmondottak kapcsolatban vannak számtalan jelenséggel, mellyel a hétköznapiakban találkozhatunk.

Például lázméréskor a lázmérő felmelegedése a Newton-féle lehűlési törvénynek megfelelően történik, azaz a hőmérő hőmérséklete exponenciális függvény szerint közelíti meg testünk hőmérsékletét. Ezt valóban tapasztalhatjuk is: a hagyományos hőmérő higanyszála eleinte gyorsan szalad, később csak lassabb vánszorog.

Az előzőekben megoldott hőforrásos feladatok a vízforralással kapcsolatos tapasztalatainkat magyarázzák: ha rossz az edény hőszigetelése, csak nagy melegítési teljesítmény felhasználásával lehet a vizet felforralni, és ha a teljesítmény épphogy elég a forraláshoz, akkor igen hosszú ideig kell várni.

Meg kell azonban említeni, hogy ezek a számítások bizonyos elhanyagolásokat tartalmaztak, melyek néha jogosak, néha nem. Például nem vettük figyelembe a hőszugárzás hatását, pedig –ahogy azt a következő alfejezetben látni fogjuk– az jelentős lehet. Elhanyagoltuk a hőáramlás hatását is, pedig ha pl. nem elhanyagolható légáramlás van az edény körül, az számottevően módosíthatja a hőáramot.

Szintén fontos feltételezés volt, hogy a hűlő testen belül ugyanazt a hőmérsékletet tételeztük fel annak minden pontjában. Ez sokszor nem teljesül, hisz a környezettel kölcsönhatásban lévő felszíni rétegek fognak gyorsabban hűlni. Ha létezik a testen belül hatékony hőátadási jelenség, akkor a

felszíni rétegek hűlése gyorsan átterjedhet az egész testre, így közelítésünk jogos lesz. Ilyen a helyzet pl., ha a test jó hővezető-képességű fémről áll, vagy ha olyan folyadékból, melyen belül hőáramlás tud kialakulni és tudja homogenizálni a hőmérséklet-eloszlást.

Amennyiben a test belső hőmérséklet-eloszlása nem tud kiegyenlítődni, a felszín közelében kisebb lesz a hőmérséklete, mint a belsejében, így a felszín és a környezet közt kisebb hőmérséklet-különbség lesz, ami kisebb hőáramot jelent, tehát ekkor a test lassabban fog kihűlni. Ezen úgy lehet segíteni, hogy előmozdítjuk a testen belüli hőáramlást. Ez az oka annak, hogy a kevergetett tea gyorsabban hűl, mint a nyugton hagyott. A nem kevergetett tea közepén ugyanis meleg marad a folyadék, a falak közelében lehűl, ami kisebb hőáramot jelent, mintha kevergetéssel a meleg részeket is a fal közelébe vinnénk. Ezt érdemes kipróbálni: ha forró teát leteszünk az asztalra és pár percig hűlni hagyjuk, előállhat az az állapot, hogy a bögre oldalát meg bírjuk fogni, mert már kellőképp lehűlt. Ha ekkor hirtelen megkeverjük a teát, érezhetjük az oldalán, hogy megemelkedik annak hőmérséklete.

A gyakorlatban vannak olyan bonyolult esetek, amikor mindez egyszerre jelentkezik. Egyik legérdekesebb a **Mpemba-effektus**. Ez nyitott edényekben tartott víz megfagyasztásával kapcsolatos, a józan észnek látszólagosan ellentmondó megfigyelés. A tapasztalat ugyanis azt mutatja, hogy azonos edényekbe azonos mennyiségű, de különböző kezdő-hőmérsékletű vizet rakva, majd mindegyiket ugyanolyan hűtőgépbe helyezve gyakran előfordul, hogy az fagy meg előbb, amelyik magasabb kezdőhőmérsékletéről indult.

Ez természetesen ellentmondásban van a Newton-féle lehűlési törvénnyel, ami nem a fizika alapelveinek hibáját mutatja, hanem azt, hogy ilyen körülmények között nem jogosak azok a közelítések, melyeket a Newton-féle lehűlési törvény levezetésekor tettünk. A Mpemba-effektus sok körülmény összejátszásából adódhat, és a konkrét elrendezéstől függ, melyik valósul meg. A kísérletek kimutatták, hogy az alábbi hatások vezethetnek erre az érdekes jelenségre:

- A hűtőgépen belül kialakuló hőáramlások. A melegebb edény maga körül erős hőáramlást indíthat be, ami lendületbe hozza a levegőt, és az erősebb hűtőhatást eredményez, még akkor is, amikor a víz már hidegebb.
- A hűtőgépre való hatás. A melegebb víz felmelegíti környezetét és egy ilyen hatást a hűtőgép automatikája észlelhet, és hamarabb bekapcsolhatja a hűtést, mint az eleve hidegebb víz esetén.

- A víz párolgása. A kezdetben melegebb víz kezdetben gyorsan párolog, így csakhamar kevesebb víz marad meg, amit már gyorsabban lehet hűteni.
- A hűlő vízen belül kialakuló áramlások. Ezek a kezdetben melegebb víz esetén erősebbek lehetnek, azaz olyan, mintha ezt valaki kevergetné, ami erősebb lehűlést eredményez, mint a hidegebb induló hőmérséklet esetén.

Legyünk tehát körültekintőek a törvény alkalmazásánál, de ne legyünk túl pesszimisták sem, hisz azért sok esetben alkalmazható.

7.10.3. Nem stacionárius hővezetés egyenes mentén

Eddig csak a stacionárius eset megoldásával foglalkoztunk. A teljesség kedvéért most megmutatjuk, hogyan lehet a fizika alapelveiből levezetni a legegyszerűbb esetben, tehát egyenes mentén, homogén anyageloszlást feltételezve az időfüggő hővezetés miatt a hőmérséklet változását megadó formulát.

Vizsgáljunk egy kicsi, Δx hosszúságú részt x és $x + \Delta x$ koordináták között. Amennyiben a rúd A keresztmetszete állandó, a hőáram a vizsgált rész bal és jobb oldalán $\Phi(x) = J(x)A$ ill. $\Phi(x + \Delta x) = J(x + \Delta x)A$ lesz. Amennyiben a rúd kis darabjának belső energiáját csak a rúdbeli hővezetés változtatja meg, belső energiájának időegység alatti megváltozása a két hőáram megfelelő előjeles összege lesz:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \Phi(x) - \Phi(x + \Delta x).$$

Feltételezve, hogy a rúd anyagának belső energiája lineáris módon függ a hőmérséklettől (azaz a fajhő nem hőmérsékletfüggő), a belső energia az alábbi alakban fejezhető ki:

$$E = c\Delta m(T - T_0),$$

ahol T_0 egy viszonyítási hőmérséklet, ahol 0-nak vesszük a test belső energiáját, c pedig az anyag fajhője. Az viszont nyilvánvaló, hogy $\Delta m = \Delta x \cdot A\rho$. (ρ a rúd anyagának sűrűsége.)

Így

$$\frac{\partial(c\Delta x A\rho(T - T_0))}{\partial t} = \Phi(x) - \Phi(x + \Delta x).$$

A konstans szorzók deriválás alóli kiemelésével és $dT_0/dt = 0$ felhasználásával:

$$c\Delta x A \varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \Phi(x) - \Phi(x + \Delta x).$$

Alkalmazva a $\Phi = JA$ összefüggést:

$$c\varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{J(x) - J(x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ határesetben:

$$c\varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}.$$

Kihasználva a Fick-törvényt ez átírható: (feltételeztük, hogy λ állandó)

$$c\varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Ezt a következő formára szokás hozni:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\varrho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (7.80)$$

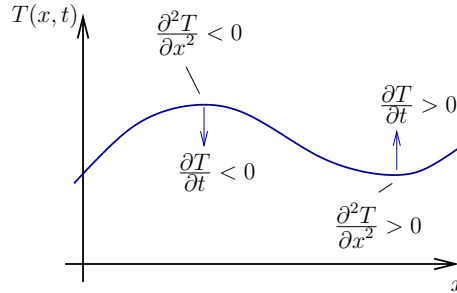
Ez adja meg, hogyan változik a hőmérséklet egy állandó keresztmetszetű rúdban, ha csak a hővezetés okoz energiaátvitelt.

Sajnos, ez egy olyan egyenlet, melynek megoldása meghaladja lehetőségeinket. Mégis, a megoldási módszer ismerete nélkül néhány hasznos megállapítást tehetünk.

A stacionárius megoldás beállításának üteme. Először is könnyű belátni, hogy keresve az időfüggetlen megoldást, ugyanazt kapjuk, mint a stacionárius esetben. Az időfüggetlen megoldás ugyanis $\partial T/\partial t = 0$ -t jelent, amiből (7.80) szerint $\partial^2 T/\partial x^2 = 0$ következik. Ez viszont valóban csak a lineáris helyfüggés esetén áll fenn.

Az is látszik, hogyha a hőmérséklet kezdetben nem lineáris, ez az egyenlet a linearitás felé igyekszik elmozdítani a hőmérséklet-eloszlást. Például ahol $\partial^2 T/\partial x^2 < 0$, ott a hőmérséklet-hely függvény konvex, azaz középtájon a lineárisnál nagyobb értéket vesz fel, de ekkor $\partial T/\partial t < 0$, azaz középen a hőmérséklet csökkenni fog, ami a linearitáshoz közelítő eredményt jelent. Ugyanez fordítva elmondható a $\partial^2 T/\partial x^2 > 0$ esetről. (Lásd a 7.29. ábra.)

Fontos kérdés, hogy a stacionárius állapot beállása milyen sebességgel következik be. Erre most a matematikai eszközök hiánya miatt pontos



7.29. ábra. A nemstacionárius hővezetés lineárisra válásának tendenciája

választ nem tudunk adni, mégis mondhatunk valamit az említett kiegyenlítődési folyamatok lefutásának időbeli sebességéről.

Képzeljünk el ugyanis egy olyan esetet, amikor a hőmérséklet kezdeti eloszlása a hely függvényében szinuszos függvény szerinti:

$$T(x, 0) = T_a \sin(kx).$$

Erre alkalmazva a (7.80) egyenletet, a kezdeti időpontban:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 (T_a \sin(kx))}{\partial x^2} = -\frac{\lambda}{c\rho} T_a \sin(kx) k^2 = -\frac{\lambda k^2}{c\rho} T(x, 0).$$

A hőmérséklet idő szerinti deriváltja tehát minden pontban egy negatív konstansszorosa az abban a pontban vett hőmérsékletnek. Ilyen problémával számtalanszor találkoztunk már az eddigiekben, és ez exponenciálisan lecsengő megoldást jelent, azaz ebben az esetben:

$$T(x, t) = T(x, 0) \cdot e^{-t/\tau},$$

ahol $\tau = c\rho/(\lambda k^2)$.

A szinuszos hőmérséklet-eloszlások tehát e szerint az időállandó szerint csengenek le. A lecsengés időállandója, tehát az az idő, amennyi alatt a hőmérséklet amplitúdója $1/e$ -ad részére csökken $\tau = c\rho/(\lambda k^2)$, azaz függ az anyag hőtani jellemzőitől és a k mennyiségtől, ami hasonló szerepű, mint a rezgéseknél a körfrekvencia volt. Ha a térbeli periódushossza a hőmérséklet-eloszlásnak X , akkor $k = 2\pi/X$, azaz a lecsengés időállandója:

$$\tau = \frac{c\rho}{4\pi^2\lambda} X^2.$$

A nagyobb térbeli hullámhosszúságú szinuszos hőmérséklet-eloszlások tehát hosszabb idő alatt csengenek le, a gyorsabban változók pedig gyorsabban. Alkalmazzuk ezt egy d szélességű falra, melynek végeit 0 hőmérsékleten tartjuk. A széleken csak akkor tud a hőmérséklet 0 lenni, ha oda a szinuszos hőmérséklet-eloszlás zérushelye esik, azaz ha $nX_n = 2d$. (Ez hasonlít az állóhullámok esetére.) Ezek közül a leglassabban lecsengő eset a maximális X értékű, azaz $X_1 = 2d$. Ekkor a lecsengés karakterisztikus ideje:

$$\tau_1 = \frac{c\rho}{4\pi^2\lambda} (2d)^2 = \frac{c\rho d^2}{\pi^2\lambda}. \quad (7.81)$$

Ez az idő adható meg annak becslésére, hogy egy d vastagságú falban nagyságrendileg mennyi idő alatt áll be a stacionárius hővezetés állapota.

A szinuszos megoldásoknak az a nagy jelentősége a hővezetési egyenleteknél, hogy megfelelően választott szinusz- és koszinuszfüggvények súlyozott összegeként bármilyen függvény előállítható. A hővezetés egyenlete pedig lineáris, így két hőmérséklet-eloszlás összegéből indított megoldás olyan lesz, mintha a két, külön-külön kapott megoldást összegeznénk. Ennek részleteibe azonban nem áll módunkba belemenni ebben a bevezető kurzusban.

7.19. példa: Mennyi a stacionárius állapot beállításának karakterisztikus ideje egy 30 cm vastag betonfalban? (A szükséges adatokat vegyük a 10. táblázatból.)

Megoldás: Egyszerű behelyettesítéssel van dolgunk:

$$\tau_1 = \frac{c\rho d^2}{\pi^2\lambda} = \frac{650 \cdot 2500 \cdot 0,3^2}{\pi^2 \cdot 1,1} = 13\,500 \text{ s} \approx 3,7 \text{ óra}$$

Egy 30 cm vastag betonfalban a stacionárius állapot tehát csak sok óra alatt áll be, ami azt jelenti, hogy egy nap alatt a kinti levegő hőmérséklet-változásai nem azonnal éreztetik hatásukat egy ilyen épület belsejében.

Az elmondottak miatt első közelítésben a kinti levegő napi középhőmérsékletével szoktak számolni a házak hőszigetelésének megbecslésekor, de pontos számítások során a nemstacionárius egyenlet megoldását kell keresni változó peremfeltételek mellett.

7.11. A hőszugárzás

Sugárzásos hőáramlásról akkor beszélünk, ha a vizsgált testek közt elektromágneses hullámok által közvetített hőcsere valósul meg. Ez lehet kibocsátás (emisszió) és elnyelődés (abszorpció) is. Látni fogjuk, hogy valójában minden test bocsát ki sugárzással hőt és ez a kibocsátás még szobahőmérsékletű testeknél sem elhanyagolható hőáram-sűrűséget jelent, de a mindennapi esetek többségében ezzel azonos nagyságrendű, a környezetből származó sugárzást nyelnek el a testek. Ha az egyensúly a környezet sugárzása és a vizsgált test között felborul, igen jelentős eredő hőáram-sűrűségek adódhatnak a sugárzásos hőátvitelből.

A hőszugárzás olyan általános jelenség, mely a rádióhullámtól a röntgensugárzásig minden hullámhossztartományban jelentkezhet a kibocsátó test hőmérsékletétől függően. Alapvető oka, hogy a hőmozgás során az anyagok belsejében bizonyos energiaszintek gerjesztődnek és amikor az anyag visszatér alacsonyabb energiájú állapotba, az esetek egy részében a felszabaduló energia fotonok (fényrészecskék) formájában távozik az anyagból. A sugárzás elnyelődése ehhez képest fordított folyamat: a bejövő fotonok energiája alakul át atomi folyamatokon keresztül hővé.

Ezekről a folyamatokról részletesen szólnak a jegyzet 9.1. fejezetében. Itt csak azt jegyezzük meg, hogy a hőmérsékleti sugárzás gázok és folyadékok esetében igen bonyolult módon függ a hőmérséklettől és a frekvenciától, míg szilárd testek esetén ez a függés viszonylag egyszerűen megadható.

7.11.1. Szilárd testek sugárzási törvényszerűségei

Egy tárgyról felénk irányuló elektromágneses hullámok egy része magából a testből származik, másik része a testre külső forrásból ráeső és onnan visszaverődő sugárzás. Az egyszerű eset az, amikor a test nem ver vissza semmit a ráeső sugárzásból, ezért ezt külön elnevezéssel illetjük:

Abszolút fekete test:

Abszolút fekete testnek nevezzük az olyan testet, mely a ráeső elektromágneses hullámokból semmit sem ver vissza.

Abszolút fekete test felől tehát csak a test saját sugárzását észleljük.

Az abszolút fekete test sugárzása. A kísérletek és az elmélet szerint az abszolút fekete testek a tér minden irányába egyenletesen sugároznak és

egy T hőmérsékletű, sík, abszolút fekete lap hőmérsékleti sugárzásának hullámhossz-függése az alábbi függvénnyel jellemezhető:

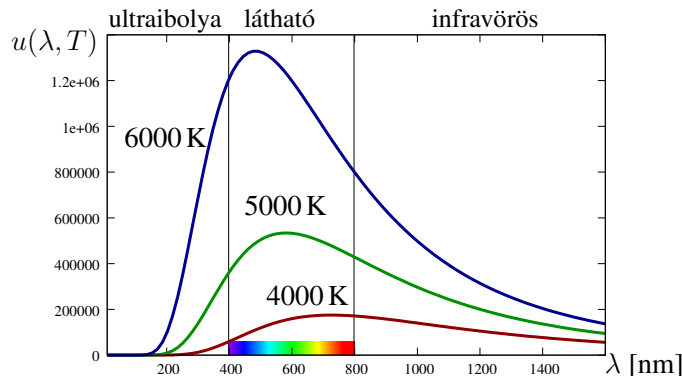
$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (7.82)$$

ahol $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js, az úgynevezett **Planck-állandó**, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K, a **Boltzmann-állandó**, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s a fény sebessége vákuumban, λ pedig a hullámhossz.

Ez az $u(\lambda, T)$ mennyiség az úgynevezett **spektrális intenzitás**, melynek jelentése: λ és $\lambda + d\lambda$ hullámhosszak között a sugárzási intenzitás $u(\lambda, T)d\lambda$.

Erre e kicsit bonyolult fogalomra azért van szükség, mert a testek hősugárzása folytonos, azaz mindenféle hullámhosszat tartalmaz, ezért nincs értelme egy konkrét hullámhosszon az intenzitásnak, csak egy hullámhossz valamilyen környezetében. Mivel most nem fogjuk ténylegesen számításokra felhasználni ezt a függvényt, csak annyit jegyezzünk meg, hogy ez azt jelzi, hogy a hullámhossz függvényében mennyire erős a test sugárzása, azaz ahol $u(\lambda, T)$ nagy értéket vesz fel, ott sugároz a test erősen.

A 7.30. ábrán 4000, 5000 és 6000 K esetére ábrázoltuk $u(\lambda, T)$ -t.



7.30. ábra. Az abszolút fekete test spektrális intenzitása 3 különböző hőmérsékleten

Látható, hogy ezeknek a görbéknek maximuma van, mely függ a test hőmérsékletétől. Kimutatható, hogy ez a maximum olyan λ_m értékeknél következik be, mely a hőmérséklettel egyszerű kapcsolatban van:

Wien-féle eltolódási törvény :

$$T\lambda_m = 0,0029 \text{ Km.} \quad (7.83)$$

Magasabb hőmérsékletekre tehát a fekete test sugárzási maximuma alacsonyabb hullámhosszak felé tolódik el. Ez a tendencia megfigyelhető a 7.30. ábrán is.

Hétköznapi tapasztalatunk is lehet erről az eltolódási törvényről. A szobahőmérsékletű testek esetén a sugárzási maximum az infravörös tartományba esik, így ekkor látható fényt nem tapasztalunk. Erősen hevítve egy testet 500°C körül a maximum egyre jobban megközelíti a látható tartományt és egyre erősebb lesz a sugárzás, így mélyvörös izzást észlelhetünk ilyenkor. 2000 K körül pedig már a sugárzás jelentős része beleesik a látható tartományba, amit narancssárga fénynek érzékelünk. 5000 K körül pedig a látható tartomány közepére esik a maximum, ami azt jelenti, hogy a teljes látható tartomány közel egyenlő intenzitással vesz részt a sugárzásban, így fehér fényt kapunk. Jó közelítéssel ilyen a Nap fénye.

Fontos megjegyezni, hogy az izzított testek színe sok hullámhossz változó intenzitású keverékből áll. A 7.31. ábra mutatja, kb. milyen színűnek látjuk a különböző hőmérsékletű izzó testeket.



7.31. ábra. Izzó testek színe a hőmérséklet függvényében

A sugárzás által szállított össz energia szempontjából érdektelen a sugárzás hullámhossz szerinti eloszlása, csak az összes kisugárzott intenzitás számít. Ezt a (7.82) egyenletben megadott spektrális intenzitás-függvény λ szerinti integrálásával kaphatjuk meg. Maga az integrálás technikailag bonyolult, ezért itt nem végezzük el, csak a végeredményt adjuk meg.

Stefan-Boltzmann törvény :

Egy T hőmérsékletű abszolút fekete test által az összes hullámhosszon kisugárzott teljes hőáram-sűrűség:

$$J = \sigma T^4, \quad (7.84)$$

ahol

$$\sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

az úgynevezett **Stefan-Boltzmann-állandó**.

A test által kisugárzott össz teljesítmény tehát a hőmérséklettől erősen függ. Ez a fenti 7.30. ábrán úgy látható, hogy a magasabb hőmérséklethez tartozó görbék sokkal magasabb értéket vesznek fel minden pontban, mint az alacsonyabb hőmérsékletű esetben, vagyis magasabb hőmérséklet esetén nagyobb a görbe alatti terület.

Mindez jól megfigyelhető olyan izzó testeknél, melyek különböző hőmérsékletű részeket tartalmaznak. Ilyet mutat a 7.32. ábra, amelyen egy lávafolyást láthatunk. Itt a levegővel érintkező részek gyorsan hűlnek, így egyrészt színük sárgáról narancssárgára majd vörösre és mélyvörösre vált, de eközben az intenzitás is erősen csökken. A kihűlt láva pedig szürkés, mert saját sugárzása már igen kismértékű, így a környezetről visszavert fény fog dominálni. (Ebből az is következik, hogy a láva nem abszolút fekete test.)



7.32. ábra. Fokozatosan kihűlő lávafolyás

Érdemes megemlíteni, hogy a Nap és a csillagok sugárzása is bizonyos mértékig jól közelíthető az abszolút fekete test sugárzásával. A Nap és a csillagok nem rendelkeznek szilárd felszínnel, de a gáz olyan sűrű bennük,

és oly nagyok a méreteik, hogy az elektromágneses hullámok csak sugaruk kis törtrészét képesek bennük elnyelődés nélkül megtenni. Így a rájuk eső külső fényt elnyelik (ebben az értelemben feketék), az optikai szempontból vastag gázrétegek pedig a szilárd testekhez teszik őket hasonlatossá.

A képet árnyalja, hogy a Napot körülvevő, ritkásabb gáz (a Nap légköre) a felszín közel fekete test sugárzásából bizonyos hullámhosszakat elnyel, továbbá, hogy a Nap külső rétegei nem teljesen homogén hőmérsékletűek. Mégis jó közelítésben tekinthetjük a Nap színképét az abszolút fekete test színképével azonosnak.

7.20. példa: A Nap átmérője a Földről 0,5 fok alatt látszik. Mérésekből azt is tudjuk, hogy a napsugárzás hőáram-sűrűsége a Föld felszínén 1368 W/m^2 .

Feltételezve, hogy a Nap abszolút fekete testként sugároz, becsülje meg ezen adatok alapján a Nap felszíni hőmérsékletét!

Megoldás: Legyen a Nap sugara r_N , a Nap-Föld távolság a . Ekkor a Nap felszíne:

$$A_N = 4\pi r_N^2,$$

tehát ha a Napot abszolút fekete testnek tekintjük (jól hangzik, de igaz!), akkor felszíne

$$\Phi = \sigma T^4 A_N = \sigma T^4 4\pi r_N^2$$

összes hőárammal bocsátja ki a hőt sugárzás formájában, ahol T a Nap felszínének hőmérséklete. (Ezt kell meghatároznunk.)

Ez a Φ hőáram a tér minden irányában egyenletesen oszlik szét, így a Naptól a távolságban már úgy kell vennünk, hogy egy a sugarú gömb felszínén oszlik szét egyenletesen a sugárzás. Tehát a hőáram-sűrűség a Földnél:

$$J = \frac{\Phi}{4\pi a^2} = \sigma T^4 \left(\frac{r_N}{a} \right)^2.$$

Ebből a keresett hőmérséklet:

$$T = \sqrt[4]{\frac{J}{\sigma}} \sqrt{\frac{a}{r_N}}.$$

a/r_N geometriailag könnyen meghatározható, hisz tudjuk, hogy a Nap átmérője a Földről nézve fél fokos, azaz sugara egynegyed fokos látószögű.

A 7.33. ábra szerint

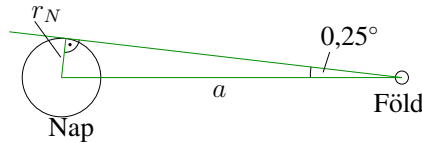
$$\frac{r_N}{a} = \sin 0,25^\circ = 0,00436,$$

így $a/r_N = 229,2$.

Ezt a hőmérséklet fenti kifejezésébe beírva a Nap felszíni hőmérsékletére

$$T = \sqrt[4]{\frac{1368}{5,67 \cdot 10^{-8}}} \sqrt{229,2} = 5970 \text{ K}$$

adódik.



7.33. ábra. A Nap látószöge a Földről nézve

A szürke testek sugárzása. A valódi testek sosem ideális fekete testek, hanem a sugárzás egy részét visszaverik. Ha ez a visszaverő képesség erősen hullámhossz-függő, akkor esetünkben csak igen bonyolult, a hullámhosszakat részletesen figyelembe vevő számítással lehet a sugárzási energiatranszportot figyelemmel kísérni. Szerencsére a gyakorlatban előforduló szilárd testek egy jelentős részének visszaverő képessége közel független a hullámhossztól. Ha ez teljesül, akkor a testet **szürke testnek** vehetjük.

A szürke testek visszaverő képessége tehát csak egyetlen számadattal, a **visszaverési tényezővel** (**reflexiós tényezővel**) jellemezhető, ami azt fejezi ki, hogy a ráeső sugárzás intenzitásának hányad részét veri vissza a test:

$$R = \frac{J_v}{J_b},$$

ahol J_v a visszavert, J_b pedig a bejövő, külső forrásokból származó hőáram-sűrűség.

A szürke testek tehát a beeső sugárzás R -ed részét visszaverik, azaz $(1 - R)$ -ed részét elnyelik.

A sugárzás folyamatának termodinamikai vizsgálata egy érdekes eredményre vezetett:

Kirchhoff-törvény :

A szürke testek sugárzása az azonos hőmérsékletű fekete test sugárzásának $(1 - R)$ -szerese, ahol R a test reflexiós tényezője.

A fekete ($R \ll 1$) testek tehát a beeső sugárzás nagy részét elnyelik, és közel olyan intenzíven sugároznak, mint az abszolút fekete test, míg a fényes felszínű testek ($R \approx 1$) a beeső sugárzás kis részét nyelik el, de saját sugárzásuk sokkal gyengébb, mint egy fekete testé.

Így a Stefan-Boltzmann-törvény szürke testre módosított alakja:

$$J = (1 - R)\sigma T^4. \quad (7.85)$$

Egy A felületű test esetén ez nyilván

$$\Phi = JA = (1 - R)\sigma T^4 A$$

hőáramot jelent.

7.21. példa: Egy sötét színű test reflexiós tényezője 0,3, hőmérséklete 20°C . Hány watt teljesítménnyel sugároz négyzetméterenként ez a test?

Megoldás: (7.85) szerint a hőáram-sűrűség:

$$J = (1 - R)\sigma T^4 = 0,7 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} 293^4 = 292,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Az ilyen test minden négyzetmétere majdnem 300 W teljesítménnyel sugároz.

Első pillanatban meglepően nagynek tűnik ez az érték, mert ilyen testtel a mindennapokban is találkozhatunk (pl. egy asztallap esetében), mégsem hűlnek le gyorsan a sugárzás miatt ezek a testek. A lehűlés azért nem következik be, mert normál körülmények között közel ugyanilyen hőmérsékletű környezet veszi körül a testeket, ami ugyanilyen intenzív sugárzással pótolja a veszteséget. A környezet sugárzásának hiányában a testre igen gyors lehűlés várna.

7.11.2. A környezet sugárzásának hatása

Az előző példákból is látszik, mennyire fontos szerepet játszik a hétköznapiakban a hősugárzás. Ahhoz, hogy az alapvető folyamatokat megértsük, beszélni kell a testeket körülvevő környezet hőmérsékleti sugárzásának testre gyakorolt hatásáról.

Homogén környezet hatása. Vizsgáljuk először a lehető legegyszerűbb esetet, amikor egy sík felületet, melynek hőmérséklete T , minden irányból körbevesz egy T_k hőmérsékletű környezet. A sík felszínét csak az egyik oldalról éri a környezet sugárzása, úgy vesszük, hogy a másik oldala irányában semmilyen hőcsere nem történik.

A termodinamika II. főtétele értelmében a melegebb testről a hidegebb felé fog a hő áramlani, ami azt jelenti, hogy idővel a hőmérsékletkülönbségek kiegyenlítődnek, azaz egyensúlyi állapotban $T = T_k$. A testet

teljesen körülvéve környezetből tehát ugyanakkora hőáram éri a testet, mint amennyit a test kibocsátana, ha környezetével megegyező hőmérsékletű lenne. Egy T_k hőmérsékletű környezet tehát

$$J_e = (1 - R)\sigma T_k^4$$

elnyelt hőáram-sűrűséget, azaz

$$\Phi_e = J_e A = (1 - R)\sigma T_k^4 A$$

hőáramot okoz a testben.

Ez nem a környezet teljes hőárama, mivel a test csak a beeső sugárzás $(1 - R)$ -ed részét nyeli el. A T_k hőmérsékletű környezet tehát ugyanolyan hőáram-sűrűséget kelt, mint a T_k hőmérsékletű abszolút fekete test.

Az eredő hőáram-sűrűség a test és környezete közt tehát

$$J_s = (1 - R)\sigma T^4 - (1 - R)\sigma T_k^4 = (1 - R)\sigma(T^4 - T_k^4). \quad (7.86)$$

Természetesen ebben az esetben „környezet” alatt azon tárgyak összességét kell értenünk, mellyel a vizsgált test elektromágneses hullámokat cserél. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy nem a környező levegő hőmérséklete számít, hanem a test helyéről látható átlátszatlan testeké, mondjuk egy zárt térben a falak belső hőmérséklete.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

Nyílt térben a sugárzás szempontjából környezetnek tekintendő tárgyak összessége akár igen távoli is lehet a vizsgált testtől. Pl. a szabadban azon tárgyak alkotják a sugárzási környezetet, melyekre a vizsgált helyről rálátunk. Oldalt vagy lefelé nézve ezek a környező tereptárgyak, az ég felé fordulva viszont a felhőzet, vagy annak hiányában a világűr. (A Napot most nem vesszük bele a környezetébe, hanem úgy vesszük, hogy abból ideális körülmények közt 1368 W/m^2 hőáram-sűrűség származik.)

Tehát ha egy felület olyan irányba fordul, amerre egy hideg testre látunk rá (mely akár igen távoli is lehet), azaz $T_k \ll T$, jelentős hőáram-sűrűség adódik abból, hogy a test nem kapja vissza ugyanazt a hőt, mint amit kisugároz. Nagy hőmérséklet-különbségek esetén ez igen jelentős érték is lehet, mivel a hőmérsékletek 4. hatványa szerepel az összefüggésekben.

Ilyen eset valósul meg pl. amikor télen egy fűtött helyiségben valaki függöny nélküli tiszta ablak felé fordul, mely a kinti, hideg környezetre enged rálátást, vagy amikor nyáron a szabadban egy zivatarfelhő felé fordulunk. A zivatarfelhőben ugyanis jóval 0°C alatti a hőmérséklet, és

hiába van messze, nagy mérete miatt a látótér jelentős részét kitöltheti. Ilyen esetekre mondja a köznyelv, hogy „Csak úgy sütött a hideg abból az irányból.” Most már tudjuk, hogy még ha ez a fogalmazás pontatlan is, van mögötte valóságtartalom.

Legjobb példa viszont a testek derült éjszakán történő sugárzási hűlése: a derült, por- és páramentes levegő a sugárzások számára átlátszó, így a szabad ég alatt felfelé forduló oldalak sugárzási környezete közelítőleg a világűr, mely hozzávetőleg 3 K hőmérsékletű. Ekkor a sugárzási hűlés igen jelentős lehet, amit meg is figyelhetünk pl. nyári éjszakákon.

7.22. példa: Egy ablak a 20°C-os szobabelsőt választja el a –20°C-os külvilágtól. Mekkora a hőáram-sűrűség ezen keresztül, ha feltételezzük, hogy az ablak teljesen áteresztí a hősugárzást?

Megoldás: Egyszerűen csak a (7.86) egyenletet kell alkalmaznunk $R = 0$ esetben (az ablak nem ver vissza semmit a sugárzásból):

$$J_s = (1 - 0) \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (293^4 - 253^4) = 185,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Ez igen jelentős hőáram-sűrűség. Szerencsére a valódi ablakok nem teljesen átlátszatlanok, különösen nem a szobahőmérsékleten jellemző infravörös tartományban. Egy jó hőszigetelő ablak tehát a látható tartományban jó áteresztő, hogy kilássunk rajta, infravörös tartományban viszont visszaverő tulajdonságú, hogy hősugárzás szempontjából elszigetelje az elválasztott térrészeket. De egy közönséges ablaküveg mindenképp 100 W/m^2 nagyságrendű hőáramot jelent a példabeli körülmények között, ami igen jelentős. Ezt hősugárzásra átlátszatlan üveggel vagy fehér ($R \approx 1$) csipkefüggönnyel jelentősen csökkenteni lehet.

7.23. példa: Egy villanyrezsó platnijának reflexiós tényezője 0,4, átmérője 20 cm, fűtőszálainak maximális teljesítménye $P = 500 \text{ W}$. Mekkora hőmérsékletűre melegszik fel, ha bekapcsolva hagyjuk, de nem teszünk rá edényt?

Tegyük fel először, hogy a platni csak sugárzás útján veszít hőt, azaz hanyagoljuk el a platni-levegő hőkontaktusból származó veszteséget! A környezet hőmérsékletét vegyük 20°C-osnak.

Megoldás: A rezsó platnija hőt vesz fel a fűtőszáltól, és sugárzási kölcsönhatásban áll a környezettel. (A hőkontaktus hatását most elhanyagoljuk.) A platni hőmérséklete akkor állandósul, amikor a felvett és leadott hőáram-sűrűség megegyezik:

$$\frac{P_{\text{fűtés}}}{A} = J_s.$$

Esetünkben $P_{\text{fűtés}} = P = 500 \text{ W}$, a platni felszíne $A = (20 \text{ cm}/2)^2 \pi = 0,0314 \text{ m}^2$, J_s pedig (7.86) alapján számolható.

Így tehát:

$$P = (1 - R)\sigma(T^4 - T_k^4)A,$$

ahonnan a platni egyensúlyi hőmérséklete:

$$T = \sqrt[4]{T_k^4 + \frac{P}{(1 - R)\sigma A}} = \sqrt[4]{293^4 + \frac{500}{0,6 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0314}} = 830,3 \text{ K} = 557,3^\circ\text{C}$$

A platni tehát üresen kb. 557°C -ig melegszik, ami meglehetősen balesetveszélyes.

7.24. példa: Becsüljük meg, mennyire volt jogos az előző példában, hogy elhanyagoltuk a platni és a környező levegő hőkontaktusából adódó hőáramot!

A levegő hőmérsékletét vegyük 20°C -osnak, a hőátadási tényezőt $5 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ -nek.

Megoldás: A hőkontaktusból származó hőáram-sűrűség:

$$\Phi_k = \alpha(T - T_k)A.$$

Az előzőekben kiszámolt T és A értékekkel ez számszerűen:

$$\Phi_k = 84,4 \text{ W}.$$

Ez jóval kisebb, mint a fűtőszálak teljesítménye, azaz jogosnak tűnik esetünkben, hogy azt feltételeztük, hogy a hőt elsősorban a hőszigetelés szállítja el a platniról.

7.25. példa: Hogyan lehetne megoldani az előzőekben tárgyalt platni esetét, ha feltételeznénk, hogy $T_k = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékletű levegővel való hőkontaktus hatását mégis figyelembe kellene venni egy pontos számításhoz?

Megoldás: Ebben az esetben az energiamérleghez a hőkontaktus hatása csatolódik:

$$P = J_s A + \Phi_k,$$

azaz

$$P = (1 - R)\sigma(T^4 - T_k^4)A + \alpha(T - T_k)A.$$

Ez sajnos olyan negyedfokú egyenlet az ismeretlen T hőmérsékletre, melynek algebrai megoldása csak speciális matematikai ismeretek birtokában tehető meg.

Azt sejtethetjük, hogy az itt kapott érték kisebb lesz, mint a korábbi $830,3 \text{ K}$ -es, és a különbség nem lesz túl nagy, ezért akár különböző T értékek próbálgatásával is megközelíthetjük a pontos megoldást. Ez a módszer valójában egy un. numerikus egyenletmegoldás.

Rendezzük át ugyanis az előző egyenletet 0-ra:

$$\frac{P}{A} + (1 - R)\sigma(T_k^4 - T^4) - \alpha(T - T_k) = 0,$$

azaz számszerűen:

$$f(T) = 15\,915 - 3,402 \cdot 10^{-8}(7,37 \cdot 10^9 - T^4) - 5(T - 293) = 0.$$

Azt keressük, mikor lesz $f(T) = 0$. Az előzőek alapján érdemes kiindulni a hőkontaktus nélkül kapott 830 K-es értéktől lefelé:

T [K]	830	820	810	800	790
$f(T)$ [W/m ²]	-2664	-1850	-1063	-303	430

Látható, hogy a folytonos $f(T)$ függvény valahol 790 és 800 K közt vesz fel 0 értéket. Ezért az egyensúlyi hőmérséklet közelítőleg:

$$T \approx 795 \text{ K} = 522^\circ\text{C}$$

ami mintegy 35°C-kal kisebb, mint a hőkontaktus nélkül kapott korábbi érték.

Nem volt tehát rossz közelítés a hőkontaktus elhanyagolása ilyen nagy hőmérséklet-különbségek esetén. Az elhanyagolással viszont algebrai úton megoldható egyenletet kaptunk.

Az egyensúlyi hőmérséklet, azaz $f(T)$ zérushelye számítógép segítségével pontosabban megkereshető. A számítások eredménye: 795,9 K.

A sugárzási hőáram kis hőmérséklet-különbségek esetén. A gyakorlatban igen sokszor a testet közel homogén környezet veszi körül, melynek T_k hőmérséklete csak kicsit különbözik a test T hőmérsékletétől, azaz $|(T - T_k)/T_k| \ll 1$.

Ne feledjük, hogy a sugárzási számításokkor a hőmérsékleteket kelvinben kell megadni, így mondjuk $T = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$ és $T_k = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ esetén is már elég jól teljesül ez a feltétel.

Amennyiben a test csak sugárzási hőcserét folytat környezetével, az eredő hőáram-sűrűség, ami a testből kifelé áramlik (7.86) szerint:

$$J_s = (1 - R)\sigma(T^4 - T_k^4).$$

A hőmérsékletek 4. hatványának különbsége az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosság kétszeri alkalmazásával a következő módon írható át:

$$T^4 - T_k^4 = (T^2 - T_k^2)(T^2 + T_k^2) = (T - T_k)(T + T_k)(T^2 + T_k^2).$$

Kis hőmérséklet-különbség esetén $T + T_k \approx 2T_k$ és $T^2 + T_k^2 \approx 2T_k^2$. Ezeket felhasználva kis hőmérséklet-különbség esetén az előző formula tovább alakítható:

$$T^4 - T_k^4 \approx (T - T_k)2T_k2T_k^2 = 4T_k^3(T - T_k).$$

Ezzel viszont az eredő hőáram-sűrűség az alábbi alakban adható meg:

$$J_s \approx (1 - R)\sigma 4T_k^3(T - T_k).$$

Amennyiben tehát a test és a (sugárzási értelemben vett) környezet hőmérséklet-különbsége kicsi, az eredő hőáram a hőmérséklet-különbséggel egyenesen arányos, ugyanúgy, mint a hőkontaktus esetén. A kapcsolat ekkor olyan hőkontaktusnak felel meg, melynek hőátadási tényezője

$$\alpha_s = (1 - R)\sigma 4T_k^3. \quad (7.87)$$

Ezt sugárzási hőátadási tényezőnek nevezzük.

Ha tehát a sugárzási hűlés hatását kis hőmérséklet-különbségek esetén szeretnénk megbecsülni, akkor közelítőleg ezzel az α_s sugárzási hőátadási tényezővel meg kell növelnünk a test és a környezet közötti hőátadási tényezőt.

Természetesen ez csak akkor igaz, ha a környezet annyira homogén hőmérsékletű, hogy a testtel érintkező levegő és a testtel sugárzási kapcsolatban levő környező szilárd testek azonos hőmérsékletűnek vehetők.

7.26. példa: Milyen sugárzási hőátadási tényező van egy 0,5 visszaverési tényezőjű fal és a 0°C-os hőmérsékletű környezete között? Lényeges lehet ez a hatás a szokásos körülmények között?

Megoldás: A sugárzási hőátadási tényező (7.87) alapján egyszerű behelyettesítéssel meghatározható:

$$\alpha_s = (1 - R)\sigma 4T_k^3 = (1 - 0,5) \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 273^3 = 2,31 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}.$$

Ez számottevő, ha figyelembe vesszük, hogy nyugodt levegő és szilárd testek közt a hőátadási tényező 5–10 W/(m²K) közt szokott lenni. A sugárzási kapcsolat a környezettel tehát számottevően emeli a hőátadási tényezőt.

Inhomogén környezet hatása. Mit mondhatunk akkor, ha a környezet nem homogén hőmérséklet-eloszlású? Ekkor nyilván az számít, hogy a test helyéről nézve a környezet egy adott része a teljes látótér hányadrészét tölti be, és az előzőekhez képest ilyen arányban csökken a hőáram. Annak méréseire, hogy egy test egy pontból a látótér hányadrészét tölti be, be kell vezetnünk a térszög fogalmát.

Térszög:

Egy tárgy egy P pontból látszó térszögét a következő módon kaphatjuk meg.

Rajzoljunk egy r sugarú gömböt P köré, majd rajzoljuk meg az összes félegyenest, mely P -ből indul és a test valamely pontján keresztül megy. Az így kapott félegyenések és a gömb felszínének közös pontjai a gömb felszínén egy felületet alkotnak. Ha ennek nagysága A , akkor a tárgy P -ből látszó térszögének nevezzük az

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

mennyiséget.

A térszög igen hasonló fogalom, mint a „hagyományos” látószög. Ott egy körvonalon levő ívhossz és a kör sugarának arányával mérjük a szöget, itt, a térbeli esetben a gömbön levő rész felületének és a sugár négyzetének arányát vizsgáljuk. A síkbeli szögeket ívmértékben mérve radián egységről beszélünk, ennek mintájára a térszögek mértékegységét **szteradiánnak** nevezzük, szokásos jele az „sr”.

Nyilvánvaló, hogy a térszög értéke független a meghatározásában szereplő gömb sugarától, hisz kétszer akkora gömbre ugyanazt a tárgyat vetítve négyszer akkora felületet kapunk, de r^2 értéke is négyszeresre nő, így $\Omega = A/r^2$ értéke nem változik.

Könnyű kiszámolni, hogy a P pontot teljesen körbevevő test térszöge $A/r^2 = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$, azaz a teljes térszög 4π sr.

Hasonlóképp a fél látótér térszöge 2π sr. Ez pl. sík területen állva az égbolt térszöge.

Ha pedig egy olyan tárgy látószögét kell kiszámítani, melynek méretei sokkal kisebbek, mint a tőle mért távolságunk, akkor annak vetülete a viszonyítási gömbön csak egy kis darabot fog befedni, amit közelítőleg síknak tekinthetünk. Ha a viszonyítási gömb r sugarát épp úgy választjuk meg, hogy az a test középpontján menjen át, akkor a vetület területe jó közelítéssel meg fog egyezni a kis méretű test P irányából látszó keresztmetszetének

nagyságával, tehát kis látószögek esetén A vehető a test P irányból látszó keresztmetszetének, r pedig P és a test középpontja távolságának.

Könnyű belátni, hogy egy olyan környezet sugárzása, mely különböző hőmérsékletű tartományokból áll az előzőekhez hasonlóan számolható, csak a hőáramok a tartományok térszögeivel arányosan csökkennek.

Ezen számítások véghezvitele konkrét, összetett esetben meghaladja könyvünk kereteit, így nem tesszük meg.

Érdekességek, hétköznapi alkalmazások, ...

Alkalmazzuk az eddigieket a Föld hőháztartására! A 7.20. példában már egy érdekes dolgot kiszámoltunk. Most nézzük meg, kijön-e a Föld felszíni középhőmérséklete a korábban említett $J_N = 1368 \text{ W/m}^2$ -es hőáram-sűrűségből.

Az r sugarú Földgolyót jó közelítéssel párhuzamosan érik a Nap sugarai, ezért a napsugarak közül egy r sugarú kör alakú rész lesz az, ahonnet az elektromágneses hullámok a Föld valamely pontjára ütköznek, azaz a Föld a Naptól

$$\Phi_N = J_N r^2 \pi$$

hőáramot kap, melynek $(1 - R)$ -szeresét nyeli el, ahol R a Föld (átlagos) visszaverési tényezője.

A Föld viszont a teljes $4r^2\pi$ nagyságú felületén sugároz, de a közel 0 K hőmérsékletű világűrtől elhanyagolható mennyiségű sugárzást kap vissza. Azzal a durva közelítéssel élve, hogy a Föld felszíne mindenütt egy átlagos R visszaverési tényezővel és egy T átlaghőmérséklettel jellemezhető, a sugárzással leadott hőáram:

$$\Phi_s = (1 - R)\sigma T^4 \cdot 4r^2\pi.$$

A Föld elnyelt és kisugárzott hőáramának egyensúlyi feltétele tehát:

$$(1 - R)J_N r^2 \pi = (1 - R)\sigma T^4 \cdot 4r^2 \pi,$$

ahonnet a Föld középhőmérséklete:

$$T = \sqrt[4]{\frac{J_N}{4\sigma}} = 278,7 \text{ K} = 5,7^\circ\text{C}.$$

Ez nagyságrendileg helyes érték, de a valódi középhőmérséklet ennél kissé nagyobb, az általánosan elfogadott érték 287 K, azaz 14°C. Ha „külső szemlélőként” nézzük, ez nem nagy különbség, hisz a termodinamikai

szempontból mérvadó kelvin-skálán kevesebb, mint 3%-os eltérést jelent. A Föld lakhatósága szempontjából viszont hatalmas ez a különbség: ha az 5,7°C-os középhőmérséklet lenne igaz, az egy súlyos jégkorszakot jelentene, amikor is csak az egyenlítői zónák lennének alkalmasak virágzó élet fenntartására.

Mi az oka az eltérésnek a valóság és a fenti számítás között? Természetesen a modell felállításakor elkövetett elhanyagolások jogtalansága. Ezek közül a három legfontosabb:

- A Föld hőmérséklet-eloszlása nem homogén.
A sugárzási törvény nemlineáris volta miatt egy inhomogén hőmérséklet-eloszlású gömb felszíne nem azonos hőáramot bocsát ki, mint az ugyanilyen átlaghőmérsékletű gömb. Könnyen kiszámolhatjuk pl., hogy egy egyenletesen 300 K felszíni hőmérsékletű gömb és egy olyan, melynek fele 280 K, másik fele 320 K hőmérsékletű között mintegy 2,5% különbség van a kisugárzott hőáram tekintetében. (Az inhomogén eloszlás esetén lesz nagyobb a kisugárzás.)
Egy pontos Föld-modell tehát nem számolhat átlaghőmérsékletekkel, hanem követnie kell a hőmérséklet térbeli- és időbeli változásait.
- A Földre nem igaz a szürke-test közelítés.
Ez a legfontosabb és manapság erősen tanulmányozott hatás. A lényeg: a Föld légköre a látható fény tartományában, ahová a Nap sugárzásának legnagyobb része esik eléggé átlátszó, kivéve ott, ahol felhők vannak. A felhőzottság, a növénytakaró jellege és egyéb paraméterek függvényében tehát a beeső sugárzás különböző százalékát nyeli el ténylegesen a felszín.
Ezzel szemben a felszín sugárzása az infravörös tartományba esik, melyben a légkör átlátszósága már kisebb mértékű, és azt leginkább a vízgőz, kisebb mértékben a széndioxid és más gázok koncentrációja határozza meg. A légkör infravörös tartománybeli átlátszatlanságát növelő, úgynevezett **üvegház-gázok** kis koncentrációváltozása is jelentős hatással van arra, hogy a Föld felszínének sugárzása milyen részben távozzon el a Földről.
Valójában tehát nem lett volna szabad azonos R értékkel számolni a bejövő és a kisugárzott hőáram esetében. Egy kissé finomabb lett volna, ha a számítások során egy R_f reflexiós tényezővel számolunk a fény esetére (bejövő sugárzás) és egy másik R_i értékkel az infravörös sugárzás (kimenő sugárzás) esetén. Ekkor modellünkben az egyensúly feltételül ezt kapnánk:

$$(1 - R_f)J_N r^2 \pi = (1 - R_i)\sigma T^4 \cdot 4r^2 \pi,$$

ahonnan az egyensúlyi átlaghőmérséklet:

$$T = \sqrt[4]{\frac{J_N}{4\sigma} \frac{1 - R_f}{1 - R_i}}.$$

Látható, hogy R_f és R_i változása kihat a Föld középhőmérsékletére. A kelvin-skálán 1%-os változás majdnem 3°C-os változást jelent, ami drasztikus éghajlat-változásnak felel meg.

- Elhanyagoltuk a Föld belsejéből származó hőt is.

Mindezekből a gondolatokból látszik, hogy a Föld energia-háztartását nehéz pontosan modellezni. Ahhoz, hogy 1°C pontos modelleket alkossunk, abszolút hőmérsékleti skálán mintegy 3 ezrelékes pontosságra van szükség, és ilyen pontosság csak az összes tényező részletes hely- és időfüggésének követésével lehetséges. Ez egyáltalán nem egyszerű feladat, mert az egyes komponensek közt többszörös csatolások vannak. Pl. az üvegház-gázok koncentrációjának növelése növeli R_i -t, az emeli a középhőmérsékletet, de ez pl. növeli a felhőképződést, ami R_f növelését jelenti, ez pedig a középhőmérséklet csökkenését vonja maga után. Vagy pl. a széndioxid koncentrációjának növelése növeli a középhőmérsékletet, ezen keresztül az erdőtüzek valószínűségét, ami tovább erősíti a széndioxid koncentrációjának emelkedését, így egy erősödő folyamat indulhat be.

Sok szuperszámítógépes modell próbálkozik meg a Föld energiamérlegének részletes modellezésével, de hiába lenne meg a szükséges számítási kapacitás, ha az előbb említett visszacsatolások közül néhányat figyelmen kívül hagyunk vagy rossz számszerű értéket veszünk fel jellemzésükre, a modellek eredményei 1–2%-ot eltérhetnek egymástól, ami hőmérséklet esetén 3–6°C-os eltérést, azaz teljesen más éghajlatot eredményez. Egyelőre tehát távol vagyunk attól, hogy a Föld középhőmérsékletének időbeli változására teljesen megbízható előrejelzéseket tudjunk tenni.

7.11.3. Testek lehűlése sugárzás útján

Egy nagy hőkapacitású környezetbe helyezett test a termodinamika II. főtétele miatt előbb-utóbb felveszi a környezet hőmérsékletét. A korábbiakban (7.10.2. fejezet) ezt végigszámoltuk arra az esetre, amikor a környezettel való kapcsolat a hővezetésen keresztül valósul meg. Láttuk viszont (pl.

a 7.23. példában), hogy nagy hőmérséklet-különbségek esetén a sugárzásos hővesztés sokkal jelentősebb lehet, mint a hővezetési. Ezért pl. izzó fém-tárgyak levegőn való lehűlését elsősorban a sugárzási hővesztés határozza meg.

A következőkben tehát a Newton-féle lehűlési törvényhez hasonló, csak épp a hősugárzásra vonatkozó összefüggést vezetünk le az alapegyenletekből.

Vegyünk egy testet, melynek felülete A , tömege m , anyagának fajhője c , felszínének reflexiós tényezője R és egy T_k hőmérsékletű környezetben helyezkedik el.

Ekkor a test által kisugárzott hőáram:

$$\Phi_{\text{ki}} = (1 - R)\sigma T^4 A,$$

a környezettől felvett pedig:

$$\Phi_{\text{be}} = (1 - R)\sigma T_k^4 A.$$

A kettő különbsége adja meg a test belső energiájának időbeli változási gyorsaságát:

$$\frac{dE}{dt} = \Phi_{\text{be}} - \Phi_{\text{ki}} = (1 - R)\sigma A(T_k^4 - T^4).$$

A test fajhőjét állandónak feltételezve a belső energia a hőmérséklet lineáris függvénye lesz: $E = cm(T - T_r)$, ahol T_r a belső energia nullpontjának hőmérséklete, amit az előző egyenletbe beírva:

$$cm \frac{dT}{dt} = (1 - R)\sigma A(T_k^4 - T^4).$$

Átrendezve:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(1 - R)\sigma A}{cm} (T_k^4 - T^4) = \frac{1}{\tau} \frac{T_k^4 - T^4}{4T_k^3}.$$

Az itt bevezetett

$$\tau = \frac{cm}{(1 - R)\sigma 4T_k^3 A} \quad (7.88)$$

menyiség jellemzi, milyen gyorsan történik a lehűlés. Szerepe hasonló, mint a Newton-féle lehűlési törvényben szereplő τ időállandónak, bár itt a folyamatok lefolyását bonyolultabb függvények fogják jellemezni.

A $4T_k^3$ -ös konstans szorzó τ -ba való olvasztása azért célszerű, mert így τ nevezőjében a (7.87)-beli sugárzási hőátadási tényező jelenik meg, azaz $\tau = cm/(\alpha_s A)$, ami formailag teljesen azonos a Newton-féle lehűlési törvény időállandójával. (Lásd (7.77), és vegyük figyelembe, hogy hőkontaktus esetén $R = 1/(\alpha A)$).

Az előző egyenletet átrendezve:

$$\frac{4T_k^3}{T_k^4 - T^4} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau}.$$

Integráljuk ennek mindkét oldalát az idő szerint:

$$\int \frac{4T_k^3}{T_k^4 - T^4} \frac{dT}{dt} dt = \frac{t}{\tau} + C,$$

ahol C egy egyelőre ismeretlen fizikai jelentésű integrációs állandó.

Alkalmazzunk helyettesítéssel integrálást a bal oldalon:

$$\int \frac{4T_k^3}{T_k^4 - T^4} dT = \frac{t}{\tau} + C.$$

A bal oldali integrálás racionális törtfüggvény integrálását jelenti, amit a matematikában tanultak alapján el tudunk végezni. Terjedelmi okokból nem részletezzük a részletszámításokat, csak a végeredményt közöljük:

$$\int \frac{4T_k^3}{T_k^4 - T^4} dT = 2\operatorname{arctg} \frac{T}{T_k} - \ln \frac{T - T_k}{T + T_k}.$$

Azaz:

$$2\operatorname{arctg} \frac{T}{T_k} - \ln \frac{T - T_k}{T + T_k} = \frac{t}{\tau} + C. \quad (7.89)$$

Ebből az alakból látszik az eddig ismeretlen C állandó fizikai jelentése. Helyettesítsünk be ugyanis ide $t = 0$ -t:

$$2\operatorname{arctg} \frac{T_0}{T_k} - \ln \frac{T_0 - T_k}{T_0 + T_k} = C, \quad (7.90)$$

ahol T_0 a test kezdeti hőmérséklete.

Sajnos (7.89) olyan, hogy abból nem lehet egyenletrendezéssel kifejezni T -t, azaz sugárzási hűlés esetén nem kapható meg zárt alakban a hőmérséklet-idő függvény. (Emlékezzünk: a hővezetési lehűlés esetén ez a lépés megtehető volt és egy egyszerű exponenciális hőmérséklet-idő függvényhez vezetett.)

A másik jellegű kérdésekre azonban tudunk válaszolni: adott hőmérséklethez pl. megmondható, mikor éri el azt hűlés közben a test. Ehhez a (7.90) egyenletből meg kell határoznunk a C állandót, a test adataiból (7.88) alapján a τ időállandót, így (7.89) alapján t könnyen meghatározható.

7.27. példa: Egy szikrában kipattanó, 0,1 mm sugarú vasgömböcske kezdeti hőmérséklete 1200°C. Ez egy 20°C hőmérsékletű környezetben főként sugárzás útján hűl le. Mennyi idő alatt csökken a hőmérséklete 500°C-ra?

A gömböcske felszínét vegyük 0,4-es reflexiós tényezőjűnek, a vas szükséges adatait vegyük a 10. táblázatból.

Megoldás: Számoljuk ki először (7.88) alapján a hűlés karakterisztikus idejét! Ehhez szükségünk lesz a gömböcske tömegére:

$$m = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} r^3,$$

ahol $r = 10^{-4}$ m, a gömb sugara, ρ a nyersvas sűrűsége. A felszíne:

$$A = 4\pi r^2,$$

így (7.88) alapján:

$$\tau = \frac{cm}{(1-R)\sigma 4T_k^3 A} = \frac{c\rho 4\pi/3 r^3}{(1-R)\sigma 4T_k^3 4\pi r^2} = \frac{c\rho r}{(1-R)\sigma 12T_k^3}.$$

(Érdemes megfigyelní, hogy a hűlés karakterisztikus ideje egyenesen arányos a gömböcske sugarával, azaz nagyobb gömb lassabban hűl le.)

Ide $c = 460$ J/(kg K)-t, $\rho = 7210$ kg/m³-t, $r = 10^{-4}$ -t, $R = 0,4$ -et és $T_k = 293$ K-t behelyettesítve

$$\tau = 32,30 \text{ s}$$

adódik. (7.90) alapján az ismeretlen C integrációs állandó:

$$C = 2\operatorname{arctg} \frac{T_0}{T_k} - \ln \frac{T_0 - T_k}{T_0 + T_k} = 3,15209.$$

(A feladat adatai alapján $T_0 = 1473$ K-nel számolva.)

Alkalmazva (7.89)-t:

$$2\operatorname{arctg} \frac{T}{T_k} - \ln \frac{T - T_k}{T + T_k} = \frac{t}{\tau} + C,$$

ahonnan:

$$t = \tau \left(2\operatorname{arctg} \frac{T}{T_k} - \ln \frac{T - T_k}{T + T_k} - C \right).$$

Ide $T = 773$ K-t ide behelyettesítve

$$t = \tau \cdot 0,0628 = 2,03 \text{ s}.$$

A tizedmilliméter sugarú nyersvas gömböcske tehát mintegy 2 s alatt hűl le 1200°C -ról 500°C -osra. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy ennyi ideig fog jól láthatóan fényleni a szikra.

7.12. Kérdések és feladatok

7.12.1. Elméleti kérdések

1. Mondjon példát olyan rendszerre, melyben a hő terjedése döntő módon hővezetéssel történik!
2. Mondjon példát olyan rendszerre, melyben a hő terjedése döntő módon hőáramlással történik!
3. Mondjon példát olyan rendszerre, melyben a hő terjedése döntő módon hősugárzással történik!
4. Mi a mértékegysége a hőáram-sűrűségnek?
5. Mi történne, ha egy anyag hővezetési tényezője negatív lenne?
6. Nagyságrendileg mennyi egy tipikus fém hővezetési tényezője?
7. Egy állandó keresztmetszetű rúd két fele eltérő anyagból van: a bal oldalon nagyobb a hővezetési tényező, mint a jobb oldalon. A bal végét 0°C -on a jobb végét 100°C -on tartjuk. A stacionárius állapotban 50°C -nál nagyobb vagy kisebb lesz a felezőpontban a hőmérséklet? Miért?
8. Mit értünk hőellenállás alatt?
9. Két egyforma méretű anyagdarab közül az elsőben a hővezetési tényező kétszer akkora, mint a másodikban. Mit mondhatunk a hőellenállásuk viszonyáról?
10. Egymás utáni anyagrétegek eredő hőellenállása hogyan számolható ki az egyes hőellenállásokból?
11. Hogyan számolható ki egymás melletti hőellenállások eredője? (Pl. egy épület falának eredő hőellenállása, ha ismerjük az ablakkal és a fallal borított részek hőellenállását külön-külön.)
12. Rajzolja fel stacionárius állapotban egy fal-levegő határ közelében a hőmérséklet lefutásának menetét!
13. Miért függ a hőátadási tényező a közegek áramlási sebességétől?

14. Mi a Newton-féle lehűlési törvényben az időállandó szemléletes jelentése?
15. Két egyforma zárt edényben kezdetben 90°C -os víz van, de az elsőben több víz, mint a másodikban. 20°C -os szobában melyik edényben levő víz fog előbb lehűlni 50°C hőmérséklet alá? Miért?
16. Szabad téren lefedett fazékban vizet akarunk forralni egy villanyrezsón. Mikor forr fel lassabban a víz, ha fúj, vagy ha nem fúj a szél? Miért?
17. Mi az oka annak, hogy egy bizonyos teljesítmény alatt bármennyi ideig várunk, nem tudunk felforralni egy adott mennyiségű vizet?
18. Hogy szól a Wien-féle eltolódási törvény?
19. Hogyan nevezzük a látható fénynél kissé kisebb frekvenciájú elektromágneses hullámokat? Mondjon példát a mindennapokból, amikor ennek hatását érzékeljük!
20. Melyik színképtartományba esik a szobahőmérsékletű fekete testek sugárzásának maximuma?
21. Nagyságrendileg milyen hőmérsékletű fekete testek sugárzásának maximuma esik a látható tartomány közepére?
22. Hányszor több hőt sugároz ki ugyanaz a test, ha abszolút hőmérséklete kétszeresére emelkedik?
23. Miért fekete a legtöbb kuktafazék fogója? Miért csillogós maga a kuktafazék teste?
24. Azonos alakú és anyagú bögrékben azonos hőmérsékletű forró tea van. Sötét vagy világos színűt válasszunk, ha azt akarjuk, hogy minél tovább meleg maradjon? Miért?
25. Miért csillogós színűek a boltokban kapható fagyasztott áruk hazaszállítására szolgáló tasakok?
26. Nyáron, amikor a levegő meleg, milyen színű ruhát érdemes viselni árnyékban, ha testünket hűteni akarjuk? Miért?
27. Egy szobában vagyunk, melyben 22°C -os levegő van, és a falak kezdetben ugyanilyen hőmérsékletűek. Észrevehetjük-e hőérzetünkkel, ha a falak lehűlnek 10°C -ra anélkül, hogy a falakhoz érnénk? Miért?
28. Miért nagyobb a fagy veszélye késő ősszel derült éjszakán, mint felhősön?

29. Nagyságrendileg milyen hőátadási tényezőknek felel meg kis hőmérséklet-különbségek esetén a hőszugárzás hatása?

7.12.2. Kidolgozott feladatok

7.3. feladat: Egy kitört ablakot valaki ideiglenesen 30 mm vastag fenyőfa lappal fed le. Hány watt hőáram távozik ezen keresztül, ha az ablak felülete $0,3 \text{ m}^2$, a belső levegő 25°C -os, a külső 0°C -os, a hőátadási tényező a benti nyugvó levegő és a falap közt $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, a kinti enyhén áramló levegő és a lap között $30 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$?

Megoldás: A lap hőellenállása a két felületi és az egy vastagsági hőellenállás összege lesz:

$$R = \frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{1}{\alpha_2 A} + \frac{d}{\lambda A},$$

ahol (SI-egységekben) $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 30$, $d = 0,03$, $\lambda = 0,11$ (a 10. táblázatból), $A = 0,3$. Számszerűen: $R = 1,35$.

A hőellenállás definíciója szerint:

$$R = \frac{\Delta T}{\Phi},$$

ahonnan

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = \frac{25}{1,35} = 18,5 \text{ W}.$$

Egy ilyen kis bedeszkázott ablakon tehát majdnem 20 W teljesítményű hőáram keletkezik az adott körülmények között.

Ez még nem vészes veszteség, így ideiglenes megoldásnak elfogadható, bár egy jó szigetelő ablak esetén ez nem lenne több, mint 1 W.

7.4. feladat: Mekkora lesz az előző feladatban a falap belső felületének hőmérséklete?

Megoldás: A kialakuló hőáram-sűrűség:

$$J = \frac{\Phi}{A} = 61,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Hőkontaktus esetén ez egyszerű kapcsolatban van a felületi hőmérséklet-különbséggel, azaz a levegő és a falap belső felületének hőmérséklet-különbségével:

$$J = \alpha_1 \Delta T,$$

ahonnet

$$\Delta T = \frac{J}{\alpha_1} = 6,2^\circ\text{C}.$$

A falap belső felülete tehát $6,2^\circ\text{C}$ -kal hidegebb, mint a benti levegő, azaz hőmérséklete:

$$T_b = 25^\circ\text{C} - 6,2^\circ\text{C} = 18,8^\circ\text{C}.$$

7.5. feladat: Egy 25 cm átmérőjű, 20 cm magas kuktafazékban 1,5 l leves van, mely a főzés befejezésekor 110°C -os. Ha elzárjuk a gázt alatta, mennyi idő alatt hűl le a leves 40°C -osra? A hőszugárzás a kukta fényes felülete miatt elhanyagolható.

A leves fajhőjét vegyük $4200 \text{ J}/(\text{kg K})$ -nek, sűrűségét $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ -nek, a kukta hőkapacitását hanyagoljuk el. A kukta és a levegő közti hőátadási tényezőt vegyük átlagosan $8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ -nek, a környezetet 20°C -osnak.

Megoldás: A feladatban nincs megadva az edény falának vastagsága és a fal-víz hőátadási tényező, de a korábbi részek alapján tudjuk, hogy ezek úgyis elhanyagolható hőellenállást jelentenek a fal-levegő hőellenálláshoz képest. Így nem követünk el nagy hibát, ha úgy vesszük, hogy a hőellenállás csak ott képződik: $R = \frac{1}{\alpha A}$, ahol $\alpha = 8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, és $A = 2r^2\pi + 2r\pi h = 0,255 \text{ m}^2$ (a henger felszínét kellett kiszámítani).

Tehát a hőellenállás:

$$R = \frac{1}{8 \cdot 0,255} = 0,49 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Az időállandó egyszerűen határozható meg, hisz $m = 1,5 \text{ kg}$, $c = 4200 \text{ J}/(\text{kg K})$, tehát

$$\tau = Rcm = 3088 \text{ s}.$$

A Newton-féle lehűlési törvény szerint:

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k)e^{-t/\tau},$$

ahol $T(t) = 40^\circ\text{C}$, $T_k = 20^\circ\text{C}$, $T_0 = 110^\circ\text{C}$. Innen egyszerű átrendezéssel:

$$t = \tau \ln \frac{T_0 - T_k}{T(t) - T_k} = 4640 \text{ s} \approx 1 \text{ óra } 17 \text{ perc}.$$

7.6. feladat: Az előző feladatbeli kuktában a 40°C -ra lehűlt levest legfeljebb 20 perc alatt vissza akarjuk melegíteni 100°C -osra. Legalább mekkora teljesítménnyel kell melegíteniünk a kuktát?

Megoldás: (7.79) szerint:

$$T(t) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-t/\tau}$$

de most $T_0 = 40^\circ\text{C}$, $t = 20 \text{ perc} = 1200 \text{ s}$, $T(t) = 100^\circ\text{C}$. Ezekből T_e meghatározható:

$$T_e = \frac{T(t) - T_0 e^{-t/\tau}}{1 - e^{-t/\tau}} = 226^\circ\text{C}.$$

Tudjuk, hogy $T_e = T_k + \Phi_0 R$, ahonnan a hőáram értéke:

$$\Phi_0 = \frac{T_e - T_k}{R} = 421 \text{ W}.$$

Tehát kb. 420 W fűtőteltjesítménnyel lehet 20 perc alatt visszamelegíteni a kukatabeli levest 100°C -osra.

7.7. feladat: Számolja ki, mennyi a stacionárius állapot beállításának karakterisztikus ideje a 7.3. feladatbeli 30 mm vastag fenyőlap esetén!

Megoldás: (7.81) szerint a beállítás karakterisztikus ideje:

$$\tau_1 = \frac{c \rho d^2}{\pi^2 \lambda}.$$

Ide $c = 2800 \text{ J}/(\text{kg K})$ -t, $\rho = 510 \text{ kg}/\text{m}^3$ -t, $d = 0,03 \text{ m}$ -t, $\lambda = 0,11 \text{ W}/(\text{m K})$ -t beírva

$$\tau_1 = 1180 \text{ s} \approx 20 \text{ perc}$$

adódik.

Egy ilyen fa lap hőmérséklet-eloszlása tehát tudja követni a környezet napi rendszeres hőmérséklet-változásait.

7.8. feladat: Egy tiszta nyári napon a napfény hőáram-sűrűsége $J_N = 1100 \text{ W}/\text{m}^2$. Milyen megre tud felmelegedni egy fémlap, melyet merőlegesen süt a Nap?

Vegyük a környezetet sugárzási szempontból 30°C -osnak, és tegyük fel, hogy a levegő hőmérséklete is ennyi. A reflexiós tényezőt vegyük 0,5-nek.

Megoldás: A lap által elnyelt $(1 - R)J_N A$ hőáramot a test $2A$ felületen sugározza ki és adja le hőkontaktus formájában. A környező levegő és a sugárzási környezet hőmérsékletét egyaránt T_k -nak véve:

$$(1 - R)J_N A = (J_s + J_k)2A = ((1 - R)\sigma(T^4 - T_k^4) + \alpha(T - T_k))2A.$$

Ez negyedfokú egyenlet T -re, tehát algebrailag megoldani nem tudjuk.

Közelítőleg, próbálgatással (numerikusan) viszont megkereshetjük az egyenletet a hőmérsékletet. Rendezzük ugyanis 0-ra a fenti egyenletet és a bal oldalt nevezzük $g(T)$ -nek:

$$g(T) = (1 - R)J_N - ((1 - R)\sigma(T^4 - T_k^4) + \alpha(T - T_k))2 = 0.$$

A számértékeket beírva:

$$g(T) = 550 - 5,67 \cdot 10^{-8} T^4 + 477,91 - 10T + 3030 = -5,67 \cdot 10^{-8} T^4 - 10T + 4057,91.$$

$g(T)$ zérushelyét keresve értékeljük ki $g(T)$ -t 300 K-tól indulva 5 K-es lépésenként:

T [K]	300	305	310	315	320	325	330	335	340
$g(T)$ [W/m ²]	598	517	434	350	263	175	85	-6	-100

Láthatjuk, hogy az egyensúlyi hőmérséklet kb. 335 K=62°C.

7.9. feladat: Mi lenne az előző feladat végeredménye, ha a sugárzási veszteség kis hőmérséklet-különbségek esetén érvényes közelítését alkalmaznánk? (Lásd (7.87).)

Megoldás: Az említett közelítés szerint a hősugárzás hatása közelíthető azzal, mintha a környezetnek való hőátadási tényezőt megemelnénk

$$\alpha_s = (1 - R)4\sigma T_k^3$$

értékkel.

Azaz a be- és kimenő hőáramok egyenlősége ekkor:

$$(1 - R)J_N A = (J_s + J_k)2A \approx (\alpha + (1 - R)4\sigma T_k^3)(T - T_k)2A.$$

Ez már egyszerűen megoldható:

$$T = T_k + \frac{(1 - R)J_N}{2(\alpha + (1 - R)4\sigma T_k^3)} = T_k + 34 \text{ K} = 337, \text{ K} = 64^\circ \text{C}.$$

Jó közelítéssel ugyanazt az eredményt kaptuk tehát, mint az előző, precízebb fizikai képet használó felírásban, de nem szorultunk közelítő, numerikus számításokra.

7.10. feladat: Egy szobában a levegő 22°C-os, de a falak hőmérséklete csak 15°C. Mekkora egy $R = 0,4$ reflexiós tényezőjű asztallap hőmérséklete egyensúlyban? Az asztallap és a levegő hőátadási tényezőjét vegyük $\alpha = 10 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ -nek.

Megoldás: Mivel kis hőmérséklet-különbségekről van szó, ezért alkalmazhatjuk azt a közelítést, hogy a sugárzást

$$\alpha_s = (1 - R)4\sigma T_k^3 = 3,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

hőátadási tényezőjű hőkontaktussal közelítjük a $T_k = 15^\circ \text{C}$ hőmérsékletű környezettel. (Az asztallap sugárzás szempontjából a falakkal áll hőkontaktusban.)

Az asztallap és a T_l hőmérsékletű levegő pedig egyszerű hőkontaktusban van egymással.

Az asztallap egyensúlyi hőmérséklete az alapján számolható, hogy egyensúlyban a levegőtől ugyanakkora hőáramot vesz fel, mint amennyit sugárzással összesen lead:

$$\alpha(T_l - T) = \alpha_s(T - T_k),$$

ahonnan:

$$T = \frac{\alpha T_l + \alpha_s T_k}{\alpha + \alpha_s} = 20,3^\circ\text{C}.$$

7.11. feladat: Egy 0,5 mm átmérőjű acél huzalt felizzítottunk 1000°C hőmérsékletűre, majd légüres térben, 100°C -os sugárzási környezetben hűlni hagyjuk. Mennyi idő múlva lesz hőmérséklete 200°C ?

Számoljunk $R = 0,4$ -es reflexiós tényezővel!

Megoldás: Vegyünk egy l hosszúságú darabot a huzalból. Ennek tömege $m = \varrho l \pi r^2$, ahol $\varrho = 7900 \text{ kg/m}^3$ az acél sűrűsége, $r = 0,25 \text{ mm}$ a huzal sugara. A felszíne ennek a darabnak $A = l 2\pi r$. (A huzalvégek felülete elhanyagolható.)

(7.88) szerint e sugárzási hűlést jellemző időskála:

$$\tau = \frac{cm}{(1-R)\sigma 4T_k^3 A} = \frac{c\varrho l \pi r^2}{(1-R)\sigma 4T_k^3 l 2\pi r} = \frac{c\varrho r}{(1-R)\sigma 8T_k^3}.$$

Ide az előző adatokat beírva, $c = 460 \text{ J/(kg K)}$ -t és $T_k = 373 \text{ K}$ -t a számszerű eredmény: $\tau = 64,3 \text{ s}$.

A (7.90) egyenletben meghatározott integrációs állandó:

$$C = 2\text{arctg} \frac{T_0}{T_k} - \ln \frac{T_0 - T_k}{T_0 + T_k}.$$

Ide $T_0 = 1273 \text{ K}$ -t beírva:

$$C = 3,1752.$$

(7.89) alapján a kért lehűlési időre igaz lesz, hogy:

$$2\text{arctg} \frac{T}{T_k} - \ln \frac{T - T_k}{T + T_k} = \frac{t}{\tau} + C,$$

ahol $T = 473 \text{ K}$, az elérni kívánt hőmérséklet.

Innen a kért lehűlési idő:

$$t = \tau \left(2\text{arctg} \frac{T}{T_k} - \ln \frac{T - T_k}{T + T_k} - C \right) = 49,3 \text{ s}.$$

A 0,5 mm átmérőjű acélhuzal tehát kb. 50 s alatt hűl le 1000°C -ról 200°C -ra, ha a környező tárgyak hőmérséklete 100°C .

7.12.3. Gyakorló feladatok

1. Milyen vastag tömör üvegréteg szigetel ugyanannyira, mint egy olyan dupla üvegezésű ablak, melynek üvegei 5 mm vastagok és köztük 20 mm levegőréteg van? Tegyük fel, hogy a levegő sehol sem áramlik és az üveg-levegő hőátadási tényező $6 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$.
2. Egy 4 mm falvastagságú alumínium edényben 80°C -os víz van. Mekkora a hőáram-sűrűség stacionárius állapotban a vízből a környező 20°C -os levegő felé, ha a víz-alumínium határ hőátadási tényezőjét $200 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ -nek, az alumínium-levegő határét pedig $8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ -nek vesszük? Mekkora az edény külső hőmérséklete ekkor?
3. Egy 1 cm átmérőjű acélgolyót 500°C -ra melegítünk, majd beledobjuk egy nagy víztartályba. A vízben belül a hőszugárzást elhanyagolhatjuk, a hőátadási tényezőt pedig $200 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ -nek vehetjük. Mennyi a hűlést jellemző időállandó? Ha a környező víz hőmérséklete 10°C , akkor mennyi lesz a golyó hőmérséklete 1 percnyi hűlés után?
4. Milyen hőellenállású burkolatot kell egy termosznak adni ha azt akarjuk, hogy a bele rakott 3 dl 90°C -os tea 4 óra múlva is még 50°C hőmérsékletű legyen?
5. Számoljuk ki, mennyi hő szökik ki sugárzással egy olyan ablakon, mely a hőszugárzás 30%-át engedi át, ha az ablak felülete $0,5 \text{ m}^2$, bent 25°C , kint pedig -10°C a hőmérséklet!
6. Az $R = 0,6$ reflexiós tényezőjű aszfaltot $800 \text{ W}/\text{m}^2$ hőáram-sűrűségű napsugárzás éri. Határozza meg az aszfalt egyensúlyi hőmérsékletét, ha a környező levegő 35°C -os, és a levegő-aszfalt hőátadási tényező $10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$!
7. Mennyi idő alatt hűlne le 1000 K-ről 200 K-re egy 2 mm-es átmérőjű alumínium golyócska, ha a környezet hőmérséklete 100 K? Az alumínium reflexiós tényezőjét vegyük 0,8-nak. (Hol fordulhat elő ilyen probléma?)

Ajánlott és felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston: Kísérleti fizika II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- Műszaki hőtan ?????

8. Relativitáselmélet

8.1. A relativitás elve a klasszikus mechanikában

Amint azt korábbi tanulmányainkban láttuk, egy test mozgásának leírása úgy történik, hogy annak mindenkori helyzetét egy önkényesen választott testhez, egy vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva adjuk meg. A helyzet meghatározásához általában a **vonatkoztatási rendszer** egyik pontjához rögzített koordinátarendszert veszünk fel, és a test mozgását jellemző adatokat ebben a koordinátarendszerben adjuk meg.

Ha ugyanazt a testet két különböző, egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg, akkor a mozgását jellemző adatok egy részét (pl. helyzetvektor, sebesség, impulzus, energia) eltérőnek találjuk. Felmerül a kérdés, hogy az adatok közötti összefüggéseket megadó fizikai törvények, pl. Newton II. törvénye vagy a Coulomb-törvény is különböző alakú lesz-e a különböző vonatkoztatási rendszerekben. Leegyszerűsítve, a kérdés az, hogy használhatja-e az állandó sebességgel robogó vonaton utazó megfigyelő ugyanazokat a fizikai törvényeket, amelyeket a Földhöz képest nyugvó laboratóriumban érvényesnek talált.

Foglalkozzunk egyelőre a vonatkoztatási rendszereknek azzal a speciális fajtájával, amelyekben érvényes a „tehetetlenség törvénye” (Newton I. törvénye), vagyis a magukra hagyott, más testekkel kölcsönhatásban nem álló testek mozgásállapota nem változik meg. Az ilyen rendszereket inerciarendszereknek nevezzük. A tapasztalat szerint egy inerciarendszerhez képest állandó sebességgel mozgó bármely másik rendszer is **inerciarendszer**, vagyis az inerciarendszerek egymáshoz képest állandó sebességgel mozoghatnak.

A klasszikus mechanika relativitás elve:

Számos tapasztalat sugallja azt, hogy a különböző inerciarendszerekből nézve a mechanikai jelenségek ugyanúgy zajlanak le, és a különböző rendszerekben a mechanika törvényei azonos matematikai alakban érvényesek. Ez a tapasztalatok alapján elfogadott alaptétel a klasszikus mechanika **relativitási elve**.

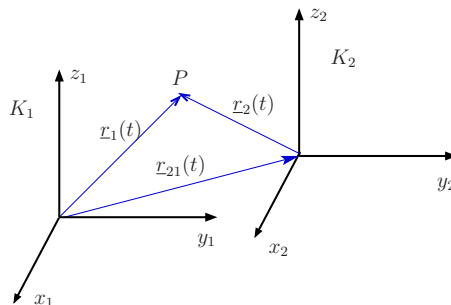
A relativitás elvének fontos következménye, hogy az inerciarendszerek a mechanikai folyamatok leírása szempontjából egyenértékűek, vagyis mechanikai kísérletek segítségével nem lehet köztük különbséget tenni, így valamiféle „abszolút”, kitüntetett inerciarendszert sem lehet találni.

Ha egy test mozgását két egymáshoz képest mozgó K_1 és K_2 inerciarendszerből vizsgáljuk, akkor a test mozgását jellemző adatokra általá-

ban eltérő értékeket kapunk, de a két rendszerben mért adatok között összefüggések állnak fenn. Ezek az összefüggések a rendszerek egymáshoz viszonyított mozgása által meghatározott **koordináta-transzformációk**, amelyeknek ismeretében egy fizikai törvényt átranszformálhatunk egyik rendszerből a másikba. Ez úgy történik, hogy pl. a K_1 rendszerben felírt fizikai törvényben szereplő fizikai mennyiségeket a transzformációs összefüggések segítségével kifejezzük a K_2 rendszer megfelelő mennyiségeivel, és így megkapjuk a kérdéses fizikai mennyiségek közötti összefüggést (a fizikai törvényt) a K_2 rendszerben. Ha ez az összefüggés matematikai alakját tekintve azonos a K_1 rendszerben felírt összefüggéssel, akkor azt mondjuk, hogy a törvény invariáns az adott transzformációval szemben. Ha a transzformációval szemben az összes fizikai törvény invariáns, akkor a transzformáció összhangban van a relativitás elvével. Ha a relativitás elvét, mint tapasztalati tényt elfogadjuk, akkor csak vele összhangban álló transzformációt használhatunk. A relativitáselmélet egyik központi kérdése az ilyen koordinátatranszformáció meghatározása.

8.2. A Galilei-transzformáció

A relativitás elve először a mechanikában vetődött fel, ahol a hétköznapi szemléleten alapuló **Galilei-transzformációt** használták. A 8.1. ábrán látható P tömegpont mindenkori helyzetét a K_1 koordinátarendszerből a mindenkori $\underline{r}_1(t)$, a K_2 rendszerből pedig a mindenkori $\underline{r}_2(t)$ helyvektorral adhatjuk meg, ahol t az idő. Ha a két rendszer relatív helyzetét megadó vektor $\underline{r}_{21}(t)$, akkor a két rendszert összeköti a helyvektorok kapcsolata:



8.1. ábra. A tömegpont helyzetének megadása egymáshoz képest mozgó koordinátarendszerekben

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_2 + \underline{r}_{21} ,$$

illetve

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 - \underline{r}_{21} .$$

Ha a K_2 rendszer a K_1 -hez képest állandó $\underline{v}$ sebességgel mozog (inerciarendszerekről van szó), akkor

$$\underline{r}_{21} = \underline{v}t + \underline{r}_0 ,$$

ahol $\underline{r}_0$ a két rendszer origójának relatív helyzetét megadó vektor a $t = 0$ időpillanatban. Ezzel a helyzetvektorok kapcsolatát megadó összefüggés így alakul

$$\underline{r}_2(t) = \underline{r}_1(t) - \underline{v}t - \underline{r}_0 ,$$

ami a koordinátákkal kifejezve

$$x_2 = x_1 - v_x t - x_0 ,$$

$$y_2 = y_1 - v_y t - y_0 ,$$

$$z_2 = z_1 - v_z t - z_0 ,$$

$$t_2 = t_1 = t .$$

Ez a klasszikus mechanika Galilei-féle transzformációja. A fenti gondolatmenet fontos mozzanata, hogy az időt nem transzformáltuk, azaz természetesnek vettük, hogy a két rendszerben az idő azonosan telik.

A sebességek közötti összefüggés a helyvektorok kapcsolatát megadó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapható

$$\underline{v}_2(t) = \underline{v}_1(t) - \underline{v} ,$$

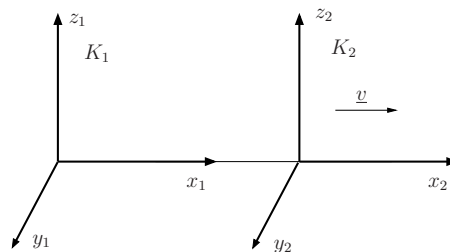
ahol $\underline{v}_1$ a vizsgált tömegpont K_1 rendszerbeli sebessége, $\underline{v}_2$ pedig a K_2 rendszerbeli sebessége. A hétköznapi tapasztalattal egyezésben azt kapjuk, hogy ugyanazon test sebességét egymáshoz képest mozgó megfigyelők különbözőnek találják.

A gyorsulások összefüggését a sebességre vonatkozó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapjuk:

$$\underline{a}_2(t) = \underline{a}_1(t) .$$

A különböző inerciarendszerekben mért gyorsulások tehát azonosnak adódnak. Ez azt jelenti, hogy - a tapasztalattal összhangban - egy inerciarendszerhez képest egyenletesen mozgó rendszer szintén inerciarendszer.

Bebizonyítható, hogy ez a transzformáció a klasszikus mechanikában összhangban van a relativitás elvével, vagyis egy mechanikai törvényt egyik rendszerből a másikba áttranszformálva, az új rendszer adataival ugyanolyan alakú törvényt kapunk. A klasszikus mechanika törvényei tehát invariánsak a Galilei-transzformációval szemben.



8.2. ábra. Egymáshoz képest mozgó speciálisan választott inerciarendszerek

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az egymáshoz képest mozgó inerciarendszereknek egy speciális esetét vizsgáljuk (8.2. ábra). Feltételezzük, hogy a két rendszerhez rögzített koordináta-rendszerek x_1 és x_2 tengelye közös, a K_2 rendszer a K_1 -hez képest v sebességgel mozog a közös x_1 és x_2 tengely mentén annak pozitív irányában, és az időt mindkét rendszerben attól a pillanattól mérjük, amikor a két origó (O_1 és O_2) azonos helyen volt (ekkor $t_1 = t_2 = t = 0$).

Ennél a speciális koordináta-rendszer-választásnál a Galilei-transzformáció az

$$x_2 = x_1 - vt,$$

$$y_2 = y_1,$$

$$z_2 = z_1,$$

$$t_2 = t_1,$$

alakot ölti.

A sebesség-transzformáció összefüggései ekkor:

$$v_{2x} = v_{1x} - v ,$$

$$v_{2y} = v_{1y} ,$$

$$v_{2z} = v_{1z} .$$

Végül a gyorsulásokra azt kapjuk, hogy

$$a_{2x} = a_{1x} ,$$

$$a_{2y} = a_{1y} ,$$

$$a_{2z} = a_{1z} .$$

A Galilei-transzformáció egyszerű alkalmazásaként nézzük meg, hogy hogyan változik meg a hang terjedési sebessége, ha azt a közeghez képest állandó sebességgel mozgó koordinátarendszerben mérjük. Ismét a speciális koordinátarendszer-választást használjuk (8.2. ábra). Feltételezzük, hogy a K_1 rendszer a közeghez képest nyugalomban van, és a hangforrás is nyugszik a közeghez képest, így K_1 -hez képest is. A K_2 rendszer a benne ülő megfigyelővel együtt v sebességgel mozog a K_1 -hez képest az x -tengelyek pozitív irányában.

A forrásból egy hangimpulzus indul el, amelynek terjedési sebessége a K_1 rendszerben v_1 . Jelöljük a hang terjedési sebességét a K_2 rendszerben v_2 -vel, akkor

$$v_{2x} = v_{1x} - v .$$

A Galilei-transzformáció szerint a K_2 rendszerben a hang sebessége:

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \underline{v} .$$

Vagyis - a tapasztalattal egyezően - a forrástól távolodó megfigyelő kisebb-, a forrás felé közeledő megfigyelő nagyobb hangsebességet észlel, mint a forráshoz (és a közeghez) képest nyugvó megfigyelő.

Mivel a hang terjedési sebessége függ a megfigyelő mozgásállapótól, a megfigyelőnek a hangot hordozó közeghez viszonyított sebessége hangsebesség-mérésekkel meghatározható. Ha egy, az x -tengely mentén mozgó járművön megmérjük a hang terjedési sebességét a közeghez (pl. levegőhöz) képest, a jármű haladásának irányában (v') és vele ellentétes irányban (v''), akkor a járműnek a közeghez viszonyított sebességét (v) a

$$|v'' - v'| = 2v ,$$

összefüggésből kapjuk:

$$v = \frac{|v'' - v'|}{2}.$$

8.3. A relativitás elve az elektrodinamikában

Az elektrodinamika alapegyenletei, a **Maxwell-egyenletek**, a klasszikus fizikának ugyanolyan alapvető törvényei, mint a Newton-törvények. E törvények kidolgozása idején a fizikában a mechanikai szemlélet uralkodott, így az elektromos és mágneses jelenségeket is a **mechanikai törvények** mintájára próbálták értelmezni. Úgy gondolták, hogy létezik egy sajátos közeg, az **éter**, amely mindent kitölt, és az elektromágneses jelenségek ennek a közegnek a mechanikai jellegű állapotváltozásaival függnek össze.

Természetesnek tűnt, hogy a Maxwell-egyenletek az éterhez rögzített koordináta-rendszerben érvényesek, és hogy a fény, mint elektromágneses hullám nem más, mint egy olyan zavar, amely ebben a közegben a rugalmas hullámokhoz hasonlóan terjed. Ennek megfelelően a vákuumban terjedő fény ismert $c = 299792 \text{ km/s}$ terjedési sebességét is az éterhez viszonyított sebességnek tekintették (az éter az akkori felfogás szerint a vákuumban is jelen van).

Ezzel a felfogással kapcsolatban két, egymással összefüggő probléma merült fel: az egyik a fény terjedési sebességével, a másik az elektrodinamika egyenleteinek mozgó rendszerben érvényes alakjával függ össze.

8.3.1. A fény terjedési sebessége egymáshoz képest mozgó rendszerekben

A rugalmas hullámok terjedési mechanizmusa viszonylag könnyen értelmezhető: a zavar ebben az esetben a közeg részei közötti rugalmas kapcsolatok miatt terjed. Más a helyzet az elektromágneses hullámok, és így a fény terjedésével kapcsolatban. Mint már említettük, kezdetben a fény terjedését ugyanúgy értelmezték, mint a mechanikai hullámokét. Feltételezték, hogy a fény az éterben a rugalmas hullámokhoz hasonlóan terjed, és a fény sebessége a nyugvó éterhez viszonyított sebességet jelent. A probléma az volt, hogy az éter jelenlétét nem sikerült kimutatni.

Maxwelltől származik az ötlet, hogy az éter létezését úgy lehetne kimutatni, hogy az éterhez képest mozgó Földön különböző irányban megmérjük a fény terjedési sebességét. A Galilei-transzformáció szerint ugyanis az éterben mozgó Földön különböző irányban terjedő fény sebességét meg-

mérve, az iránytól függően $c - v$ és $c + v$ közötti értékeket kapunk, ahol c a fénysebesség az éterben nyugvó rendszerben, v a Föld mozgási sebessége az éterhez képest. Ilyen mérésekkel - a hangterjedésre vonatkozó fenti mérés analógiájára - meg lehetne határozni a Föld mozgási sebességét az éterhez képest.

A mérést - amelyet a tudománytörténetben **Michelson-Morley-kísérlet** néven tartanak számon - először Michelson majd később Michelson és Morley végezték el. A mérés úgy történt, hogy egy kettéválasztott fénynyaláb két részét különböző utakon, különböző irányban vezették, majd interferenciát hoztak létre velük. Ezt az optikában azóta is használt **Michelson-féle interferométerrel** valósították meg. A mérés azon alapul, hogy a létrejött interferenciakép függ a két interferáló fénynyaláb terjedési sebességétől. A nyalábok sebességkülönbségét az eszköz egyetlen helyzetében nem lehet észlelni, ha azonban az eszközt elfordítják, akkor megváltoznak a terjedési sebességek, és az eredeti helyzetben létrejött interferenciakép megváltozik. Az akkori felfogás szerint ezt a változást megfigyelve, a Föld mozgási sebessége az éterben meghatározható.

A mérést több alkalommal, különböző körülmények között és különböző évszakokban (a Föld különböző haladási irányainál) elvégezték, az eszköz elfordításakor azonban az interferenciaképben semmilyen változást nem észleltek, annak ellenére, hogy a módszer elég pontos volt a várható csíkeltolódás észleléséhez.

A kísérlet értelmezése körül hosszú ideig viták folytak. Mai felfogásunk szerint a kísérlet eredménye azt jelenti, hogy a fény terjedésére nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, **a fény terjedési sebessége különböző inerciarendszerekben ugyanaz az érték, nem függ a rendszer mozgásállapotától.**

8.3.2. Az elektromágnességtan és a relativitás elve

A fényterjedésre vonatkozó Michelson-féle eredmény felveti a következő problémát. Ha a fényre - ami elektromágneses jelenség - nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, akkor feltehetőleg az elektrodinamika alaptörvényei, a Maxwell-egyenletek nem invariánsak a Galilei-transzformációval szemben. A helyzet valóban ez, így felmerült az a kérdés, hogy mi az a transzformáció, amellyel szemben a Maxwell-egyenletek invariánsak.

A problémát először Lorentz oldotta meg, aki megkereste ezt az - azóta róla elnevezett - transzformációt. A **Lorentz-transzformáció** összefüggései a korábban alkalmazott speciális koordinátarendszer-választás esetén (közös x-tengelyek, párhuzamos y- és z-tengelyek, a K_2 rendszer x-irányú, állandó

v sebességgel mozog a K_1 -hez képest a pozitív irányban) az alábbiak:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\y_2 &= y_1, \\z_2 &= z_1, \\t_2 &= \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}\tag{8.1}$$

ahol c a vákuumbeli fénysebesség. Ezzel a transzformációval később részletesen foglalkozunk, itt csak három dolgot érdemes megjegyezni. Az egyik az, hogy a Lorentz-transzformáció lényegesen különbözik a Galilei-transzformációtól, és könnyen belátható, hogy a Lorentz-transzformációval szemben a mechanika törvényei nem invariánsak. A transzformáció másik, talán legmeglepőbb sajátága az, hogy az idő sem azonos a két rendszerben, azt is transzformálni kell. Végül fontos felhívni a figyelmet arra, hogy (8.1) a K_2 rendszerből a K_1 -be való transzformációt is megadja, ha v helyére $-v$ -t írunk, hiszen K_2 -ből nézve K_1 sebessége $-v$. Ennek megfelelően a fordított transzformáció:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{x_2 + vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\y_1 &= y_2, \\z_1 &= z_2, \\t_1 &= \frac{t_2 + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}$$

A Lorentz-transzformáció felismerésével a fizikában keletkezett egy komoly elvi probléma. A fizika két nagy területén, a mechanikában és az elektrodinamikában a relativitás elvével nem ugyanaz a transzformáció van összhangban, a mechanika törvényei a Galilei-transzformációval, az elektromágnességtan törvényei pedig a Lorentz-transzformációval szemben invariánsak.

8.4. A relativitáselmélet Einstein-féle posztulátumai

A XX. század első éveire a következő helyzet alakult ki. Kísérletek erősítették meg azt a feltételezést, hogy a relativitás elve nem csak a mechanikában, hanem az elektromágnességtanban is érvényes, vagyis elektromos és mágneses kísérletekkel sem lehet két inerciarendszert egymástól megkülönböztetni. Szükségessé vált egy a fizika említett két területén egyaránt érvényes transzformáció, amely összhangban van a relativitás elvével. Ehelyett a két területre két különböző transzformáció volt, amelyekkel szemben a maguk területén a fizikai törvények invariánsak.

Ha egységes transzformációt akarunk, akkor gyakorlatilag két lehetőségünk van: Elfogadjuk a „józan észnek” megfelelő Galilei-transzformációt, de ekkor hibásnak kell minősítenünk a Maxwell-egyenleteket. Az elektromágnességtan törvényeit tehát úgy kell átalakítanunk, hogy azok a Galilei-transzformációval szemben invariánsak legyenek. A másik lehetőség, hogy elfogadjuk a Lorentz-transzformációt, de ekkor a mechanika törvényeit kell elvetnünk, és úgy átalakítanunk, hogy azok a Lorentz-transzformációval szemben invariánsak legyenek.

Mivel direkt tapasztalat mutatja, hogy a fényterjedésre nem érvényes a Galilei-transzformáció, célszerűnek látszott a második megoldást választani.

8.4.1. Az Einstein-féle posztulátumok és a relativitáselmélet

A XX. század első éveiben többen (Lorentz, Poincaré, Einstein) is eljutottak ahhoz a következtetéshez, hogy a Lorentz-transzformációt kell általános, a mechanikában is érvényes transzformációként elfogadni, és a mechanika törvényeit átdolgozni, de Einstein volt az, aki ezt a megoldást általános fizikai elmélet formájába öntötte. Ő vette észre, hogy a tapasztalati tényekkel egyező elmélet két alapvető fizikai elvből (posztulátumból vagy más szóval axiómából) levezethető:

I. posztulátum: A fizikai folyamatokat leíró törvények minden inerciarendszerben azonos matematikai alakban érvényesek. Más szóval, minden fizikai folyamatra érvényes a relativitás elve.

II. posztulátum: A vákuumban terjedő fény sebessége minden inerciarendszerben azonos, univerzális fizikai állandó.

Ebből a két alapelvből a Lorentz-transzformáció (8.1) összefüggései minden további feltevés nélkül levezethetők, és segítségükkel elvégezhető a mechanika törvényeinek szükséges átalakítása. Az így létrejött, a fenti két elvvel összhangban álló fizikai elmélet a **speciális relativitáselmélet**.

Nevében a „speciális” jelző arra utal, hogy csak speciálisan választott koordináta-rendszerekben, nevezetesen inerciarendszerekben érvényes.

A fenti két alapelv elfogadása egyben azt is jelenti, hogy az „éter” nem tekinthetjük fényhordozó közegnek, hiszen a fénysebesség a mozgásállapottól független, és nem tekinthetjük valamiféle kitüntetett vonatkoztatási rendszernek sem, mivel a relativitás elve érvényes. Ezzel viszont elveszítette értelmét az éter létének feltételezése is.

A Lorentz-transzformáció nagyon fontos tulajdonsága, hogy nincs feloldhatatlan ellentmondásban a hosszú időn át használt és helyesnek talált Galilei-transzformációval. Az összefüggésekből látható ugyanis, hogy „hét-köznapi” sebességeknél ($v \ll c$) visszkapjuk a Galilei-transzformációt. Másként fogalmazva, a Galilei-transzformáció a Lorentz-transzformáció kis sebességekre érvényes közelítése. A mechanika klasszikus törvényeitől tehát csak akkor várható eltérés, ha a két vonatkoztatási rendszer (pl. a megfigyelő és a megfigyelt objektum) relatív sebessége összemérhető a fénysebességgel.

Ugyancsak fontos tény, hogy a Lorentz-transzformáció fizikailag értelmetlenné válik a $v \geq c$ esetben, vagyis a vákuumbeli c fénysebesség határsebesség szerepét játssza. Kimutatható, hogy ennél nagyobb sebességgel semmilyen anyagi rendszer és semmilyen információhordozó jel sem mozoghat.

8.5. A relativisztikus mechanika

Az Einstein által elfogadott két alapelv - ami egyenértékű a Lorentz-transzformáció elfogadásával és a Galilei-transzformáció elvetésével - maga után vonja, hogy a klasszikus mechanika alapfogalmait és törvényeit felül kell vizsgálni.

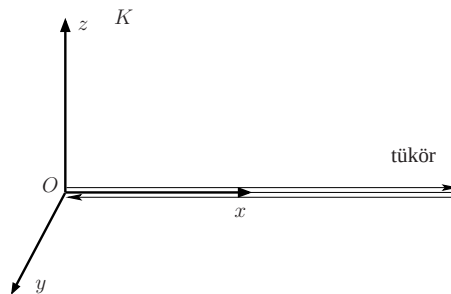
Ami a felülvizsgálatot illeti: a mechanika törvényeit úgy kell átalkítani, hogy azokat egyik inerciarendszerből a másikba történő átmenet során a Lorentz-transzformáció változatlanul hagyja, vagyis invariánsak legyenek a Lorentz-transzformációval szemben. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk ennek a felülvizsgálatnak az alapelveit és fő eredményeit.

8.5.1. A hely- és idő meghatározása

A fizikában a jelenségek leírásához szükség van a jelenség helyének és időpontjának megadására. Ehhez minden vonatkoztatási rendszerben ki

kell alakítani egy sűrű koordináta- és időhálózatot. A **koordinátahálózat** azt jelenti, hogy meg kell határozni a rendszer nagyon sok pontjának helyzetét, az **időhálózat** pedig azt, hogy a rendszerben sűrűn el kell helyezni azonosan működő, egymáshoz igazított, szinkronizált órákat.

Ha nagyon precízen akarunk eljárni, akkor nem alkalmazhatunk olyan módszert, amely azzal járna, hogy méterrudakat és órákat szállítunk a rendszer különböző pontjai között, mert a szállítás közben ezek az eszközök megváltozhatnak, amint azt később tárgyalni fogjuk. A koordináta- és időhálózat kialakításának legcélszerűbb módja az, ha a feladatot fényjelek segítségével oldjuk meg. Ez azért is célszerű, mert a fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanaz, így az eljárás különböző rendszerekben is használható.



8.3. ábra. Helymeghatározás fényjel segítségével

Ahhoz, hogy egy rendszer pontjainak helyzetét megadjuk, távolságokat (koordinátákat) kell meghatározni. Fényjellel ez úgy valósítható meg, hogy az origóból elindítunk egy fényjelet, a vizsgált pontban pedig elhelyezünk egy tükröt, amelyről a fényjel visszaverődik az origóba (8.3. ábra). Ha a fényjel az origóba a kibocsátástól számított t idő múlva érkezik vissza, akkor a vizsgált hely távolsága az origótól $x_1 = c \frac{t}{2}$.

Az **órák szinkronizálása** szintén elvégezhető fényjelekkel. Ez úgy történhet, hogy a $t = 0$ időpillanatban az origóban egy fényfelvillanást hozunk létre, és amikor ezt a fényfelvillanást megfigyeljük a rendszer egy adott pontjában, amelynek az origótól mért l távolságát ismerjük, akkor indítjuk el az ott elhelyezett órát. Mivel a fényjel c sebességgel terjed, a jel megérkezésének időpontjáig $t = l/c$ idő telt el, vagyis az adott helyen (P) lévő órát erre az időpontra kell előre beállítani. Ilyen módon a rendszer különböző helyein elhelyezett órákat szinkronizálni tudjuk.

Mivel egymáshoz képest mozgó inerciarendszerekben a fény terjedési

sebessége azonos, egy adott esemény helyének koordinátái viszont - amint azt láttuk - lehetnek különbözőek, a fenti szinkronizálási módszer segítségével rögtön látható, hogy a két rendszerben az órák nem ugyanazt az időt mutatják.

Ennek belátásához vizsgáljuk ismét a két speciális elhelyezkedésű, egymáshoz képest v sebességgel mozgó koordinátarendszert (8.3. ábra), amelyeknek origói a $t = 0$ időpillanatban azonos helyen voltak, és ekkor a közös origóból elindítottak egy fényfelvillanást. Ha az x -tengelyen lévő P pontban lévő órát mindkét rendszerben ugyanezzel a jellel állítjuk be, akkor a jel megérkezésekor a K_1 rendszerbeli órát $t_1 = x_1/c$, a K_2 -beli órát pedig az ettől eltérő $t_2 = x_2/c$ értékre állítják be.

Az tehát, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben azonos értékű, azzal a következménnyel jár, hogy az időadatok az egyes rendszerekben eltérőek lesznek.

A koordináta- és időhálózat segítségével tudunk egy rendszerben helyet és időpontot, továbbá távolságot és időtartamot meghatározni.

Az események leírása szempontjából van még egy fontos kérdés: hogyan lehet meghatározni egy rendszerhez képest mozgó tárgynak a mozgásirányba eső méretét? Erre az a megoldás kínálkozik, hogy a mozgásirányban sűrűn felsorakozó órák megfigyelők feljegyzik a tárgy egyik- és másik végének elhaladási időpontját. Ezek közül kiválasztjuk azt a kettőt, akiknek egyike a tárgy egyik végének elhaladását ugyanabban a pillanatban észlelte, mint a másikuk a tárgy másik végének elhaladását. A mozgó tárgynak a mozgásirányba eső hossza a két megfigyelő közti távolsággal egyenlő.

Ezekkel a mérési módszerekkel egy esemény egy inerciarendszerben az x, y, z, t számnégyessel jellemezhető, amely megadja az esemény helyét és időpontját. Ezt a számnégyest gyakran az esemény koordinátáinak nevezik.

8.5.2. Időtartamok relativitása, mozgási- és nyugalmi időtartam

Először vizsgáljuk meg, hogy milyen eredményre jutunk, ha két esemény között eltelt időt különböző inerciarendszerekből vizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy a K_2 rendszer a K_1 rendszerhez képest a korábbi speciális elrendezésben v sebességgel mozog, és a K_2 rendszerben azonos helyen, a rendszerhez képest nyugalomban lévő pontban lejátszódik két esemény (pl. egy lámpa kigyullad és kialszik). Az első eseményt jellemző adatok ebben a rendszerben t_2^I, x_2 , a másodikat jellemzők pedig t_2^{II}, x_2 (mivel a két esemény azonos helyen játszódik le, alkalmaztuk az $x_2^I = x_2^{II} = x_2$ jelölést). A két esemény között eltelt idő a K_2 rendszerben

$$\Delta t_2 = t_2^{II} - t_2^I .$$

A K_1 rendszerben az események között

$$\Delta t_1 = t_1^{II} - t_1^I$$

idő telik el.

Mivel a Lorentz-transzformáció szerint (most K_2 -ből transzformálunk K_1 -be)

$$t_1^I = \frac{t_2^I + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

$$t_1^{II} = \frac{t_2^{II} + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

azt kapjuk, hogy

$$\Delta t_1 = \frac{t_2^{II} - t_2^I}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Ez azt jelenti, hogy a két rendszerben nem csak az időpontok különböznek, hanem a két rendszerben ülő megfigyelők az események között eltelt időtartamot is különbözőnek találják.

Mivel $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$, ezért $\Delta t_1 > \Delta t_2$, tehát az események helyéhez képest mozgó (K_1 -beli) megfigyelő az események között eltelt időt hosszabbnak találja, mint az eseményekhez képest nyugvó (K_2 -beli) megfigyelő.

Megkülönböztetésül a Δt_2 időtartamot nyugalmi mérőszámnak vagy **nyugalmi időtartamnak**, a Δt_1 időtartamot mozgási mérőszámnak vagy **mozgási időtartamnak** nevezik.

Természetesen, ha az események közös helye a K_1 rendszerben nyugszik, akkor az időtartamok közötti összefüggés megfordul, vagyis mindig az eseményekhez képest mozgó rendszerben kapott időtartam, a mozgási időtartam a hosszabb.

Ezt a tapasztalatunkat megfogalmazhatjuk a koordinátarendszerek jelölésétől független formában is. Ha az eseményekhez képest nyugvó megfi-

gyelő által mért időtartamot T_0 -lal, a mozgó megfigyelő által mért időtartamot pedig T -vel jelöljük, akkor a fenti összefüggés a

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.2)$$

alakba írható, ahol v a két megfigyelő relatív sebessége.

A mozgó megfigyelő által mért mozgási időtartam tehát a megfigyelő és az események helye közti relatív sebességtől függ. A fent leírt jelenséget **idődilatációnak** nevezik. Az idődilatáció gyakorlatilag jelentőssé akkor válik, ha a mozgási sebesség a fénysebességgel összemérhető, a $v \ll c$ esetben ugyanis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1$, azaz $T \approx T_0$.

A fentiekhez hasonlóan egyszerű megfontolásokkal kimutatható, hogy ha két különböző helyen végbemenő esemény az egyik rendszerből egyidejűnek látszik, akkor egy hozzá képest mozgó rendszerből nézve különböző időpontban zajlanak le, vagyis az **egyidejűség** sem abszolút, hanem a koordinátarendszertől függ.

8.1. példa: A szabad, tehát nem atommagbéli neutronok átlagos élettartama kb. 1000 s. Mekkora sebességgel kell a neutronnyalábnak haladnia ahhoz, hogy a neutronok átlagos élettartama kétszeresére növekedjék?

Megoldás: A feladat értelmében a neutronhoz képest nyugvó megfigyelő $T_0 \approx 1000$ s -nak méri a neutronok átlagos élettartamát. Az a megfigyelő, aki a laboratóriumi koordinátarendszerben nyugalomban van, a neutronokkal együtt mozgó koordináta rendszerből nézve v sebességgel mozog. Következésképpen hosszabb átlagos neutron élettartamot mér.

A neutronok sebességét a (8.2) alapján számolhatjuk ki. Felhasználva, hogy a laborból nézve a v sebességű neutronok átlagos élettartama $T = 2T_0$,

$$2T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.3)$$

T_0 -val lehet egyszerűsíteni. Az egyszerűsítés után fejezzük ki v -t, a neutronok sebességét.

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c = 0,866c.$$

A $c = 3 \cdot 10^8$ m/s behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$v = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Tehát a neutronnyalábnak $v = 2,598 \cdot 10^8$ m/s sebességgel kell mozognia ahhoz, hogy a neutronok átlagos élettartama kétszeresére növekedjék.

8.5.3. A távolságok relativitása, mozgási- és nyugalmi hossz

Számítsuk ki most, hogy milyen eredményre vezet egy rúd hosszának mérése egymáshoz képest mozgó inerciarendszerekben. Ismét a szokásos speciális elrendezést használjuk, a mérendő rúd a K_2 rendszerben nyugszik, és az x tengelyekkel párhuzamos.

A rúd hosszának meghatározása a K_2 rendszerben egyszerű, hiszen ha meghatározzuk a kezdőpont (k) és a végpont (v) x_2^k és x_2^v koordinátáit, akkor a hosszt a

$$\Delta x_2 = x_2^k - x_2^v$$

összefüggés adja meg.

A K_1 rendszerben a hosszt a korábban említett módon, az egyidejű kezdő- és végpont-koordináták (x_1^k és x_1^v) leolvasásával kapjuk:

$$\Delta x_1 = x_1^k - x_1^v$$

és

$$(t_1^k = t_1^v) .$$

A Lorentz-transzformáció szerint

$$x_2^k = \frac{x_1^k - vt_1^k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

$$x_2^v = \frac{x_1^v - vt_1^v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

ezért a $t_1^k = t_1^v$ feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\Delta x_2 = x_2^k - x_2^v = \frac{x_1^k - x_1^v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Ez azt jelenti, hogy a hosszúság is koordinátarendszertől függő mennyiség. Természetesen, ha a rúd a K_1 rendszerben nyugszik és a K_2 -höz képest mozog, akkor a Lorentz-transzformáció inverzét használva a

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggésre jutunk, vagyis a mozgásirányba eső hosszt mindig a rúdhoz képest mozgó megfigyelő méri rövidebbnek.

A fenti tapasztalatot a koordináta-rendszerek jelölésétől független formában is felírhatjuk. Ha a tárgyhoz képest nyugvó megfigyelő által mért hosszt L_0 -al, a mozgó megfigyelő által mért hosszt pedig L -el jelöljük, akkor a fenti összefüggések az

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (8.4)$$

alakba írhatók. Eszerint a tárgynak a hozzá képest mozgó rendszerből mért L **mozgási hossza** mindig kisebbnek adódik, mint a hozzá képest nyugvó rendszerben mért L_0 **nyugalmi hossz**: a mozgó megfigyelő által mért hossz a megfigyelő és a tárgy v relatív sebességétől függ. Ehhez az eredményhez először Lorentz jutott el, ezért azt a tényt, hogy a mozgó megfigyelő kisebb hosszt mér, Lorentz-kontrakciónak nevezik. A **Lorentz-kontrakció** - az idődilatációhoz hasonlóan - csak akkor jelentős, ha a mozgási sebesség a fénysebességhez képest nem elhanyagolható.

8.2. példa: Egy képzeletbeli űrhajó nyugalmi hossza 65 m. Mekkora mérik az űrhajó hosszúságát, amikor $0,7c$ sebességgel elhalad mellettünk?

Megoldás: Ha az űrhajónak az űrhajóhoz képest nyugvó megfigyelő által mért hossza 65 m, akkor a mozgó megfigyelő (a mellettünk elszáguldó űrhajóból nézve mi mozgunk) által mért hosszúságot a (8.4) összefüggés segítségével határozhatjuk meg:

$$L = 65 \sqrt{1 - \frac{(0,7c)^2}{c^2}}.$$

A számolásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$L = 65 \cdot 0,714 \text{ m},$$

azaz

$$L = 46,4 \text{ m}.$$

Tehát az űrhajó hosszúságát $46,4 \text{ m}$ -nek mérjük.

8.5.4. Az idődilatació- és Lorentz-kontrakció kísérleti bizonyítéka

A távolságokra és az időtartamokra vonatkozó fenti összefüggések egyik kísérleti bizonyítékát szolgáltatják a világűrből a Föld felszínére érkező részecskék, a μ - mezonok vagy rövidebb néven müonok.

Ezek a részecskék az atmoszféra felső rétegeiben, kb. 4 – 5 km magasságban keletkeznek atomi ütközések során, és a fénysebességhez közeli $v \approx c$ sebességgel haladnak. A müonok nem stabil részecskék: laboratóriumban végzett mérések szerint a - gyakorlatilag nyugvó - müonok átlagosan $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s idő eltelte után elbomlanak. Számítsuk ki, hogy ezalatt mekkora utat futnak be.

A klasszikus elgondolás szerint a müonok keletkezésük után átlagosan $s = v\tau_0 \approx c\tau_0 = 660$ m utat futnak be, majd elbomlanak, tehát a Földfelszín eléréséhez szükséges távolságnak (4 – 5 km) alig több, mint 10-ed részét teszik meg. A tapasztalat ezzel szemben az, hogy a müonok leérnek a Föld felszínére.

Az ellentmondás magyarázata az, hogy a fenti számításnál használt τ_0 időtartam a müonhoz képest nyugvó rendszerben mért nyugalmi élettartam, a számítást pedig a müonhoz képest nagy sebességgel mozgó rendszerhez, a Földhöz képest végeztük. A Földhöz képest mozgó müont vizsgálva, a számításnál azonban a

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mozgási élettartamot kell használnunk.

Ha a müon sebessége pl. $v = 0,99 \cdot c$, akkor $\tau = \frac{\tau_0}{0,141} = 15,6 \cdot 10^{-6}$ s, és így a befutott út $s_F = v\tau \approx 4,63$ km, a tapasztalattal egyezésben.

Természetesen, ha a problémát a müonnal együtt mozgó rendszerből vizsgáljuk, akkor is arra a végeredményre kell jutnunk, hogy a müon elérheti a Föld felszínét. Ekkor az élettartam a τ_0 nyugalmi érték, az ebből kiszámítható befutott út pedig a klasszikusan is kapott 660 m lesz. Ellentmondás azonban nincs, mert most a befutandó út nem az $s_0 = v\tau \approx 4,63$ km nyugalmi hossz, hanem annak mozgási értéke, azaz

$$s = s_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

hiszen a müonhoz képest mozgó távolságról van szó. Vagyis a müon a hozzá rögzített rendszerben végzett számolás szerint is leérhet a Föld

felszínére: a fizikai folyamat leírása szempontjából a két inerciarendszer a várakozásnak megfelelően egyenértékű.

A müon élettartam kísérlet magyarázata jól mutatja a speciális relativitáselmélet lényegét, nevezetesen azt, hogy a történések leírása a megfigyelőtől független - objektív - kell legyen. Valóban, a két megfigyelő ugyanarra a következtetésre jut, hogy a kérdéses sebességű müont a Föld felszínén meg lehet figyelni.

8.5.5. A sebességtranszformáció

Ha a fénysebesség minden inerciarendszerben azonosnak adódik, akkor a Lorentz- féle sebesség-transzformációnak alapvetően különbözni kell a Galilei-féle transzformáció megfelelő összefüggésétől.

Írjuk fel egy pont v_{2x} sebességét abban a K_2 rendszerben, amely v sebességgel mozog a K_1 rendszerhez képest az x-tengely mentén pozitív irányban. Használjuk a korábban is használt speciális koordináta-rendszere rendezést.

A sebesség x-komponense a K_2 rendszerben

$$v_{2x} = \frac{dx_2}{dt_2}.$$

Felhasználva a Lorentz-transzformáció egyenleteit

$$v_{2x} = \frac{\kappa(dx_1 - vdt_1)}{\kappa(dt_1 - \frac{v}{c^2}dx_1)},$$

ahol bevezettük a $\kappa = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ jelölést.

Ebből a számláló és nevező dt_1 -gyel való osztása után kapjuk

$$v_{2x} = \frac{\frac{dx_1}{dt_1} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx_1}{dt_1}}.$$

Mivel a K_1 rendszerbeli x-irányú sebesség $v_{1x} = dx_1/dt_1$, a sebesség-transzformáció összefüggése az x-komponensre

$$v_{2x} = \frac{v_{1x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_{1x}}.$$

A fenti kifejezés különbözik a Galilei-transzformáció megfelelő összefüggésétől. Mindazonáltal, a $v \ll c$ esetben ezek az összefüggések visszaadják a Galilei-féle sebesség-transzformáció egyenleteit: az eltérés ismét csak a fénysebességgel összemérhető relatív sebességek esetén számottevő.

Mivel a Lorentz-transzformáció megfelel annak a követelménynek, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanaz, ezt a tényt a fenti képletnek is tükröznie kell. Nézzük meg egy egyszerű példán, hogyan is működik ez a **sebesség-transzformáció**.

8.3. példa: Tegyük fel, hogy valahol (K_1 rendszer) kibocsátanak egy fényjelet, amely ebben a rendszerben $v_{1,x} = c$ sebességgel halad az x-tengely mentén a pozitív irányban. Milyen fénysebességet észlel a fenti rendszerhez képest az x-tengely negatív irányában v nagyságú sebességgel haladó megfigyelő (K_2 rendszer)?

Megoldás: A sebességtranszformáció megfelelő összefüggésébe behelyettesítve az aktuális adatokat, azt kapjuk, hogy

$$v_{2x} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2}c} = c$$

vagyis a K_2 rendszerben mért fénysebesség is c lesz, szemben a Galilei-transzformáció alapján várható $c + v$ értékkel. A vákuumbeli fénysebesség tehát sebességösszetevéssel nem növelhető.

Kimutatható azonban, hogy a fenti eredmény csak a vákuumbeli c fénysebességre érvényes. A különböző átlátszó közegekben a fény ennél kisebb $c_K = c/n$ (n a törésmutató) sebességgel terjed, és ilyenkor a fénnel szemben haladó megfigyelő a c_K -nál nagyobb c'_K sebességet mér, de mindig érvényes a $c_K < c'_K < c$ egyenlőtlenség. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az a megállapítás, hogy a fénysebesség határsebesség, szintén a fény vákuumbeli terjedési sebességére igaz: egy közegbeli $c_K < c$ fénysebesség túlléphető.

8.6. A négydimenziós tér-idő

A Galilei-transzformáció az időt nem transzformálja, az időadatok a térkoordinátáktól függetlenek. Ezzel szemben a Lorentz-transzformáció az időt is transzformálja, az idő- és térkoordináták egymással igen szoros, kölcsönös kapcsolatban vannak. Ez az oka annak, hogy a relativitáselméletben egy adott pontban, adott időben lezajló esemény jellemzésére a három térkoordinátahoz negyedikként az időt is hozzávették, és a jellemzésre az (x, y, z, t) mennyiségeket használják.

Ennek alapján bevezethető egy **négydimenziós tér-idő**, aminek - mint később látni fogjuk - a jelenségek tárgyalásánál számos előnye van. Az (x, y, z, t) adatokat tekinthetjük egy esemény koordinátáinak a téridőben, vagyis

egy esemény a négydimenziós tér-időben egy pontnak felel meg. Ha az időadatot megfelelően választjuk meg, akkor az így kapott négy komponensű mennyiség egy négydimenziós vektor lesz, amit négyesvektornak neveznek.

8.6.1. Invariáns intervallumnégyzet, négyesvektorok

A fizikában a háromdimenziós térben a vektor mintájául a helyzetvektor szolgált, és vektornak neveztünk minden olyan három komponenssel megadott mennyiséget, amelynek komponensei a koordinátarendszer elforgatásakor úgy transzformálódnak, mint a helyzetvektor koordinátái. A skaláris mennyiségek értéke nem függ a koordinátarendszer választásától. Ennek a következménye az, hogy két vektor skaláris szorzata és két pont Δs távolságának négyzete invariáns a koordináta-transzformációval szemben:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = \Delta s'^2$$

Ennek mintájára a négyes „állapotvektort” úgy definiálhatjuk, hogy a vektor komponensei a Lorentz-transzformációval transzformálódjanak, és két esemény közötti „négydimenziós távolság” (intervallum) négyzete invariáns legyen a Lorentz-transzformációval szemben.

Bebizonyítható, hogy az (x_1, y_1, z_1, t_1) és (x_2, y_2, z_2, t_2) számnégyesekkel megadott eseményekre felírt

$$\Delta s^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

un. **intervallumnégyzet** vagy négyes-távolságnégyzet invariáns a Lorentz-transzformációval szemben. Ennek alapján negyedik koordinátának az időt tartalmazó, de távolság jellegű ct mennyiséget választhatjuk.

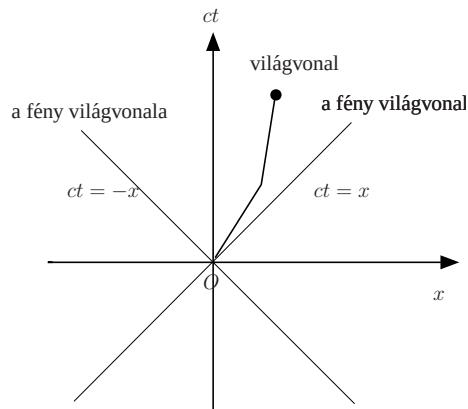
Azt, hogy a négydimenziós tér vagy gyakori elnevezéssel négydimenziós világ nem egészen olyan, mint a közönséges három dimenziós tér, többek között az mutatja, hogy az intervallumnégyzet lehet negatív is.

A K rendszerben érvényes (x, y, z, ct) számnégyes négyesvektort alkot, és az ennek megfelelő K' rendszerbeli négyesvektort a Lorentz-transzformációval kapjuk meg. Ennek mintájára **négyesvektor** minden olyan mennyiség, ami a koordinátarendszer megváltoztatásakor a Lorentz-transzformációval transzformálódik. Ebből a meghatározásból következik, hogy két négyesvektor skalárszorzata is invariáns. ²¹

²¹Ha egy négyesvektor negyedik komponense ct (un. időszerű komponens), akkor két

8.6.2. Állapotváltozás a négyes térben, sajátidő

Ha az eseményeket az eddig használt speciális koordinátarendszerekben vizsgáljuk, akkor lényegében a négyes térnek - vagy ahogy gyakran nevezik, a négyes világnak - egy síkjában vagyunk. Ezen a síkon egy esemény egy pontnak felel meg, az események egymásutánja egy vonalat rajzol ki, amit az adott változás (mozgás) **világvonalának** neveznek. A világvonalat ábrázolhatjuk a $ct - x$ koordinátarendszerben.

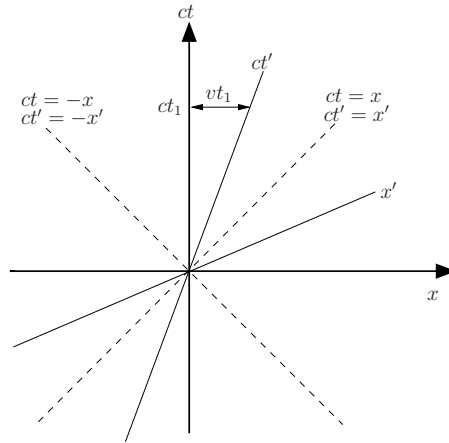


8.4. ábra. Világvonalak ábrázolása a négyestérben

A 8.4. ábrán egy ilyen koordinátarendszer látható, amelyben feltüntetünk egy önkényesen választott változás világvonalát, és a fény világvonalát, amely az $x = \pm ct$ összefüggésnek megfelelően egyenes (négy dimenzióban ez egy kúpfelület, amit fénykúpnek neveznek). A fény világvonala a különböző inerciarendszerekben ülő megfigyelők számára ugyanaz. Ehhez hasonlóan, egy állandó sebességgel mozgó tömegpont világvonala egyenes. Azok az események, amelyeknek világvonala párhuzamos a ct -tengellyel, azonos helyen (de különböző időpontokban) játszódnak le, azok pedig, amelyeknek világvonala párhuzamos az x -tengellyel, azonos időben (de különböző helyeken) zajlanak.

Ebben az ábrázolási módban a fenti K rendszerhez képest a szokásos speciális, v sebességgel mozgó K' rendszer a 8.5. ábrán látható módon helyezkedik el. A t' tengely helyzetét az ábrán feltüntetett eljárással kapjuk, az x' tengely helyzetét pedig úgy kell megválasztani, hogy a fény világvonala ugyanaz maradjon, és érvényes legyen rá az $x' = ct'$ összefüggés.

négyesvektor (a_x, a_y, a_z, a_4) és (b_x, b_y, b_z, b_4) skaláris szorzata $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - a_4 b_4$.



8.5. ábra. Két inerciarendszer ábrázolása a négyestérben

A négyes világnak különböző jellegű tartományai vannak. Ezeket úgy lehet osztályozni, hogy meghatározzuk, hogy milyen az előjele egy vonatkoztatási eseményt (a 8.6. ábrán A) és a vizsgált tartományba eső eseményt összekötő

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

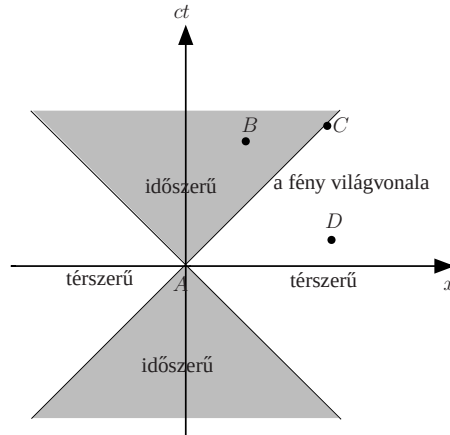
intervallumnégyszetnek.

Az ábrán feltüntetett B , C és D események az A eseményhez és a fény világvonalához képest különböző helyzetben vannak, és az említett intervallumnégyszetek eltérő jellegűek. A B eseményre, és minden olyan eseményre, amely a szürke fénykúp-tartományokban van, fennáll, hogy

$$\Delta s_{AB}^2 > 0.$$

Ezekhez az eseményekhez lehet találni olyan - az eredetihez képest állandó sebességgel mozgó - koordinátarendszert, amelyben az A és a kérdéses (pl. B) esemény azonos helyen van, csak az időpontjuk más. (Ez azt jelenti, hogy a ct' tengely átmegy az A és B ponton). Ekkor az eseményeket az időpontjuk szerint lehet szétválasztani, ezért ezt a tartományt **időszerű intervallumnak**, az események $\Delta\tau$ -val jelölt időbeli szeparációját **sajátidőnek** vagy **lokális időnek** nevezik.

A sajátidő az elmondottak alapján a következőképpen számolható:



8.6. ábra. A négyestér különböző jellegű tartományai

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s_{AB}}{c} = \frac{\sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}}{c}.$$

A C eseményre, és minden olyan eseményre, amely a fény világvonalán (a fénykúpon) van, érvényes, hogy

$$\Delta s_{AB}^2 = 0.$$

Az ilyen eseményeket, amelyek a fény (elektromágneses hullám) terjedésével kapcsolatosak, fényszerűnek nevezik.

Végül a D eseményre, és minden olyan eseményre, amely a szürke fénykúptartományokon kívül van, fennáll, hogy

$$\Delta s_{AB}^2 < 0.$$

Ezekhez az eseményekhez lehet találni olyan - az eredetihez képest állandó sebességgel mozgó - koordinátarendszert, amelyben az A és a kérdéses (pl. D) esemény azonos időben zajlik, csak a helyük más. (Ez azt jelenti, hogy az x' tengely átmegy az A és D ponton). Ekkor az eseményeket a helyük szerint lehet szétválasztani, ezért ezt a tartományt téryszerűnek nevezik.

Ha az esemény egy tömegpont mozgása, akkor a négyes térben ábrázolva a mozgás olyan pontok összessége, amelyek mindegyike azt adja meg, hogy adott időben a pont hol van. Ezek a pontok kirajzolják a tömegpont világvonalát.

Még sohasem figyeltek meg olyan részecskét, amely a fény vákuumbeli sebességénél gyorsabban mozgott volna. Ebből következik, hogy a világvonal mentén levő események időbeli elkülönülése nagyobb, mint a térbeli. Egy részecske világvonala olyan eseményekből fog állni, amelyek egy kezdeti eseményhez és egymáshoz képest is időszerűek. Más szavakkal, a részecskének időszerű világvonalat kell követnie. Az időszerű világvonalat minden P pontjában olyan lokális érintő jellemzi, amelyik abban a pontban induló fénysugarak világvonalai között fekszik.

Mivel a tömegpont sebessége változhat, a tömegponthoz nem rendelhető hozzá egyetlen inerciarendszer, hanem a pillanatnyi sebességének megfelelően mindig más és más inerciarendszerben van nyugalomban. Ilyenkor a tömegponthoz rendelhető sajátidő a mozgás során állandóan változik, ezért a világvonalat elemi szakaszokra kell bontani, és a sajátidőt ezekre kiszámítani. Egy elemi sajátidőt a ds invariáns intervallumnégyzet segítségével a

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c}$$

összefüggéssel kapjuk meg. A kifejezésből látható, hogy az elemi sajátidő is invariáns, hiszen az invariáns intervallumnégyzet gyökéből egy invariáns skalárral (c) való osztással kaptuk.

A kifejezést átrendezve azt kapjuk, hogy

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} = dt \sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2(t)}{c^2}}.$$

Itt $v_{pill}(t)$ a tömegpont pillanatnyi sebessége. Ebből a teljes AB változásra vonatkozó invariáns makroszkopikus sajátidőt az elemi sajátidők összegzésével kapjuk:

$$\tau = \int_A^B dt \sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2(t)}{c^2}}.$$

8.7. A relativisztikus dinamika alapjai

A klasszikus fizikában van néhány alapvető fontosságú mennyiség, amelyre megmaradási tétel érvényes. Ilyen például az energia és az impulzus (lendület). Felmerül a kérdés, hogy a relativisztikus mechanikában vannak-e ezeknek a mennyiségeknek megfelelő megmaradó mennyiségek, és ezek hogyan definiálhatók.

Az energia és impulzus relativisztikus alakját a korábban bevezetett négyesvektorok segítségével formálisan nagyon egyszerűen megkaphatjuk. Vizsgáljunk egy mozgó tömegpontot, amelynek a tömegponthoz rögzített rendszerben mért ún. **nyugalmi tömege** m_0 . A tömegpont mozgásának jellemzésére vezessünk be egy új négyesvektort úgy, hogy a cdt , dx , dy , dz elemi mennyiségeket az $\frac{m_0}{d\tau}$ invariáns skalárral megszorozzuk (itt c a vákuumbeli fénysebesség, $d\tau$ az elemi sajátidő). Ekkor az

$$\frac{m_0 c dt}{d\tau}; \quad \frac{m_0 dx}{d\tau}; \quad \frac{m_0 dy}{d\tau}; \quad \frac{m_0 dz}{d\tau};$$

mennyiségeket kapjuk.

Felhasználva a

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2}{c^2}}$$

összefüggést, és azt, hogy

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

végül az

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2}{c^2}}}; \quad \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2}{c^2}}}; \quad \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2}{c^2}}}; \quad \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2}{c^2}}};$$

négyesvektort kapjuk.

8.7.1. Az impulzus (lendület), a tömeg és a mozgásegyenlet

Ha megvizsgáljuk a fent bevezetett új négyesvektornak az utolsó három komponensét, akkor azonnal látszik, hogy ezek a $v_{pill} \ll c$ nem relativisztikus esetre való áttérésnél a közönséges impulzusvektor

$$p_x = m_0 v_x; \quad p_y = m_0 v_y; \quad p_z = m_0 v_z$$

három komponensét adják. Ennek alapján a relativitáselméletben az impulzust (lendületet) a

$$\underline{p} = \frac{m_0 \underline{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggéssel definiálhatjuk.²² Eszerint a tömegnek az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.5)$$

kifejezés felel meg. (Itt most v a test pillanatnyi sebessége!)

Ez azt jelenti, hogy a tömeg függ attól, hogy a tömegpont milyen sebességgel mozog a megfigyelőhöz képest: a tömegpont tömegét mindig nagyobbnak találjuk, ha hozzánk képest mozog, mint ha hozzánk képest nyugalomban van. Erre a relativisztikus tömegnövekedésre is érvényes azonban, hogy csak a fénysebességet megközelítő sebességeknél számottevő, a $v \ll c$ esetben visszakapjuk a klasszikus mechanika $m = m_0$ összefüggését. A tömegnövekedést több direkt kísérlet igazolja, de közvetve az a tény is, hogy a nagy sebességű részecskéket előállító gyorsítók csak akkor működnek, ha tervezésüknél figyelembe vették ezt az összefüggést.

8.4. példa: A proton nyugalmi tömege $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Mekkora a tömege, ha a sebessége $0,8c$?

Megoldás: Az előzőek alapján a proton tömege függ attól, hogy milyen sebességgel mozog a megfigyelőhöz képest. Azt is beláttuk, hogy a proton tömegét mindig nagyobbnak találjuk, ha hozzánk képest mozog, mint ha nyugalomban van.

A tömegnövekedés mértékét a (8.5) alapján határozhatjuk meg:

$$m = \frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} \text{ kg}.$$

A számolásokat elvégezve:

$$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot \frac{5}{3} \text{ kg},$$

azaz

$$m = 2,78 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

²²Bár a háromdimenziós vektor fogalom érvényét veszítette, a tömörség kedvéért a p_x , p_y , p_z számhármast $\underline{p}$ -vel jelöljük.

Tehát a hozzánk képest $v = 0,8c$ sebességgel mozgó proton tömegét $m = 2,78 \cdot 10^{-27}$ kg-nak mérjük.

A tömeg sebességfüggése alapján várható, hogy a dinamika alapegyenlete sem alkalmazható a szokásos $\underline{F} = m\underline{a}$ alakban. Valóban kimutatható, hogy a mozgásegyenlet a Lorentz-transzformációval szemben akkor invariáns, ha azt az

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \underline{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

formában használjuk.²³ A $v \ll c$ esetben ebből az alakból visszkapjuk a mozgásegyenlet szokásos alakját, hiszen ekkor a tömeg gyakorlatilag állandó: $m \approx m_0$, és így érvényes az $\underline{F} \approx m_0 \underline{a}$ egyenlet.

A relativisztikus mozgásegyenlet következményeit jól illusztrálja az állandó F erő hatására bekövetkező mozgás esete. Ha a kezdősebesség nulla, akkor a klasszikus mechanika szerint

$$v(t) = \frac{F}{m_0} t,$$

tehát a sebesség az idővel arányosan növekedve tetszőlegesen nagy értéket vehet fel.

Az

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

relativisztikus mozgásegyenlet idő szerinti integrálásából viszont az

$$F \cdot t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggést kapjuk, amiből

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{(m_0 c)^2}{(F t)^2}}}$$

²³Newton második törvényének a klasszikus mechanikában is ez a helyes alakja. Változó tömegű testek, pl. rakéták esetében a klasszikus mechanikában is az $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$ alakot kell használni.

adódik. A sebesség az idő előrehaladtával egyre lassúbb ütemben növekszik, és a $t \rightarrow \infty$ esetben a c határértékhez tart (nem pedig határtalanul nő).

Természetesen ha $v \ll c$, akkor

$$F \cdot t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 v$$

tehát visszkapjuk a klasszikus összefüggést. A relativisztikus mozgásegyenlet fenti alakjának helyességét ugyancsak a nagysebességű részecskék előállítására szolgáló részecskegyorsítók működése igazolja, amelyeknek tervezésénél ezt a törvényt használják.

8.7.2. Az energia, a tömeg-energia összefüggés a relativitáselméletben

Annak érdekében, hogy a fent bevezetett négyesvektor első,

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2}{c^2}}}$$

komponensének fizikai értelmét kiderítsük, írjuk fel a klasszikus mechanika munkatétel néven ismert összefüggését, amely szerint egy tömegpontra ható erők eredőjének munkája a tömegpont mozgási energiájának megváltozásával egyenlő:

$$W_{12} = \int_1^2 \underline{F} d\underline{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{m2} - E_{m1} = \Delta E .$$

Ha a tömegpontnak nincs helyzeti energiája, akkor ez a

$$W_{12} = E_2 - E_1 = \Delta E$$

alakba írható, ahol E a teljes energia.

Számítsuk ki most ezt a munkavégzést a relativisztikus mechanikában, abban az egyszerűsített esetben, amikor a tömegpontra egyetlen F erő hat és ez párhuzamos a v sebességgel (egyenes vonalú mozgás). A tömegpontra ható $\underline{F}$ erő az 1 pontból a 2 pontba való átmenet során

$$W_{12} = \int_1^2 \underline{F} d\underline{r} = \int_1^2 \frac{dp}{dt} dr = \int_1^2 v(p) dp$$

munkát végez.

A számítás elvégzéséhez meg kell határoznunk a $v(p)$ függvényt, amit a

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggés átrendezésével tehetjük:

$$v(p) = \frac{cp}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}.$$

Behelyettesítve ezt a munka kifejezésébe, az integrálás után az alábbi eredményt kapjuk

$$W_{12} = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_2^2} - c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_1^2}.$$

Ez azt jelenti, hogy, ha nincs helyzeti energia, akkor a munkatétel alapján az energiának az

$$E(v) = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

kifejezés felel meg.

Alkalmazva az impulzus relativisztikus kifejezését, ebből azt kapjuk, hogy

$$E(v) = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

amiből közös nevezőre hozás után következik, hogy

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nézzük meg most, hogy mit kapunk ebből a $v \ll c$ esetben. Vezessük be az $x = v^2/c^2$ változót, amelyre teljesül az $x \ll 1$ feltétel, így ha az

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$$

kifejezést az x változó szerint sorba fejtjük, akkor megállhatunk a második tagnál, és azt kapjuk; hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

Ennek megfelelően

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Ezzel az energiára a $v \ll c$ közelítésben az

$$E(v) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

összefüggést kapjuk, aminek megváltozása valóban a klasszikus mozgási energia megváltozásával egyenlő.

Eszerint az

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

illetve a tömegre vonatkozó

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggés felhasználásával kapható

$$E = mc^2$$

mennyiséget tekinthetjük a tömegpont energiájának. Ezzel a tömegponton végzett munka a

$$W_{12} = m_2 c^2 - m_1 c^2 = \Delta(mc^2) = c^2 \Delta m$$

alakban írható fel.

Figyelemre méltó, hogy az energia megváltozása a tömeg megváltozásából adódik, hiszen az $E = mc^2$ összefüggés szerint az energia a test tömegével van egyértelmű kapcsolatban. Ebből következik, hogy m tömeg egyben mc^2 energiatartalmat jelent, és fordítva, minden E energiatartalom E/c^2 tömeggel (tehetetlenséggel) jár együtt.

Az összefüggésből az is következik, hogy egy rendszerben az energia és a tömeg változása mindig együtt, egymással arányosan történik a $\Delta E = c^2 \Delta m$ összefüggésnek megfelelően.

8.5. példa: A Nap másodpercenként $4 \cdot 10^9$ kg tömeget veszít, miközben ezzel egyenértékű energiát sugároz a világűrbe. Hány watt a Nap teljesítménye?

Megoldás: Az előzőek alapján a Nap tömegének csökkenése arányos a Nap energiájának csökkenésével, vagyis a kisugárzott energia nagyságával.

A tömegcsökkenés alapján kiszámíthatjuk a Nap által 1 mp alatt kisugárzott összes energiát.

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2,$$

$$\Delta E = 4 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2,$$

$$\Delta E = 3,6 \cdot 10^{26} \text{ J/s}.$$

Tehát a Nap teljesítménye $\Delta E = 3,6 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

8.7.3. A nyugalmi energia és a tömeghiány

A klasszikus közelítésben kapott

$$E(v) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

összefüggésből látszik, hogy a relativitáselméletben a klasszikus mozgási energiának megfelelő kifejezés:

$$E_m = m c^2 - m_0 c^2. \quad (8.6)$$

Ez az energia a $v = 0$ esetben - a klasszikus mozgási energiához hasonlóan - nulla lesz. Ezt a kifejezést és az energiára bevezetett $E = m c^2$ összefüggést felhasználva az energia az

$$E = E_m + m_0 c^2 \quad (8.7)$$

alakba írható. Ebből látható, hogy a relativitáselméletben egy nyugalomban lévő test ($E_m = 0$) is rendelkezik

$$E_0 = m_0 c^2$$

energiával, amit a test **nyugalmi energiájának** neveznek.

A tapasztalat azt mutatja, hogy ez a nyugalmi tömeghez rendelt sajátenergia nem pusztán matematikai konstans, hanem valóban fizikai realitással bír: a nyugalmi energia részben vagy egészben át tud alakulni másfajta energiává (pl. elektromágneses sugárzássá), s ilyenkor a nyugalmi

tömeg is a $\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2$ összefüggésnek megfelelő módon változik meg. Ez kísérletileg pl. a kémiai reakciók éghőjével illetve az atommagok **tömeghiányával** ellenőrizhető.

8.7.4. A négyesimpulzus, az energia és az impulzus összefüggései

A fenti megfontolások szerint az energia és az impulzus három komponense, vagyis az

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

menntisígek négyesvektort alkotnak, amelyet gyakran négyesimpulzusnak neveznek.

Ebból következik, hogy az

$$E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

menntisígek - a négyesvektor önmagával vett skalárszorzata - invariáns a Lorentz-transzformációval szemben.

Egy kölcsönhatások nélkül mozgó tömegpontra a négyesimpulzus állandó, ami az jelenti, hogy

$$E = \text{állandó} \quad \text{és} \quad \underline{p} = \text{állandó},$$

vagyis az energia- és impulzusmegmaradás törvénye egyetlen megmaradási törvénnyé olvad össze.

Emellett az energiamegmaradás törvénye maga után vonja a tömegmegmaradás törvényét is, ami az $E = mc^2$ összefüggésből következik.

Az energia bevezetésénél az energia és az impulzus nagyságának összefüggésére az

$$E = mc^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

kifejezést kaptuk. Vizsgáljuk meg ezt az összefüggést abban a speciális esetben, ha a vizsgált objektumnak nincs nyugalmi tömege (pl. elektromágneses sugárzás). Ekkor az energia és az impulzus között az

$$E = pc$$

összefüggés érvényes. Ezt az összefüggést az elektromágnességtan törvényeiből is le lehet vezetni, ami nem meglepő, hiszen a relativitáselmélet az elektromágnességtan törvényeit nem módosítja.

Az $E = mc^2$ és az $E = pc$ összefüggésekből következik, hogy egy nyugalmi tömeg nélküli objektum (pl. foton, lásd később) impulzusa csak

$$p = mc$$

lehet, vagyis csak fénysebességgel mozoghat.

A fordított állítás is igaz: egy fénysebességgel mozgó objektumnak nem lehet nyugalmi tömege. Ezt az $mc^2 = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}$ és a $p = mc$ összefüggések felhasználásával láthatjuk be. A két összefüggésből kapott

$$mc^2 = c\sqrt{m_0^2c^2 + m^2c^2}$$

egyenlet négyzetre emelése után azt kapjuk, hogy

$$m^2c^4 = m_0^2c^4 + m^2c^4$$

vagyis

$$m_0 = 0.$$

8.8. Kérdések és feladatok

8.8.1. Elméleti kérdések

1. Milyen vonatkoztatási rendszereket nevezünk inerciarendszereknek?
2. Mit nevezünk a klasszikus mechanika relativitás elvének?
3. Mikor tekintünk egy fizikai törvényt egy adott koordináta-transzformációra invariánsnak?
4. Mikor mondjuk azt, hogy egy koordináta-transzformáció összhangban van a relativitás elvével?
5. Mit értünk a klasszikus mechanikában Galilei-transzformáció alatt?
6. Mit értünk azon, hogy a klasszikus mechanika törvényei invariánsak a Galilei-transzformációra?
7. Ismertesse a tanult speciális esetre vonatkozó Galilei-transzformáció összefüggéseit!
8. Hogyan változik meg a hang terjedési sebessége, ha azt a közeghez képest állandó sebességgel mozgó koordináta-rendszerben mérjük?

9. Ismertesse, hogyan határozható meg egy mozgó járművön történő hangsebesség méréssel a járműnek a hangot hordozó közeghez viszonyított haladási sebessége.
10. Hogyan próbálták az éter létezését kimutatni?
11. Ismertesse a Michelson-Morley kísérletet!
12. Mai felfogásunk szerint mivel magyarázható a Michelson-Morley kísérlet negatív eredménye?
13. Miből következtethetünk arra, hogy az elektromágneses jelenségekre, ezen belül például a fény terjedési sebességére nem alkalmazható a Galilei-transzformáció?
14. Mit nevezünk Lorentz-transzformációnak?
15. Invariánsak-e az elektromágneses jelenségekre vonatkozó törvények a Lorentz-transzformációra?
16. Invariánsak-e a klasszikus mechanika korábban megismert törvényei a Lorentz-transzformációra?
17. Mit értünk az alatt, hogy az elektromágneses jelenségekre is érvényes a relativitás elve?
18. Összeegyeztethető-e a relativitás elvével, hogy a mechanika törvényei a Galilei-transzformációra, az elektrodinamika törvényei pedig a Lorentz-transzformációra invariánsak?
19. Fogalmazza meg az Einstein-féle posztulátumokat!
20. Mire utal a speciális relativitáselmélet elnevezésben a „speciális” jelző?
21. Mutassa meg, hogy a Lorentz-transzformáció nincs feloldhatatlan ellentmondásban a Galilei-transzformációval!
22. Miért mondjuk, hogy a speciális relativitáselméletben a vákuumbeli fénysebesség határsebesség szerepét játssza?
23. A jelenségek leírásához szükség van a jelenség helyének megadására. Ehhez minden vonatkoztatási rendszerben egy sűrű koordinátahálózatot alakítunk ki. Mutassa meg, hogyan lehet fényjel segítségével meghatározni a rendszer pontjainak helyzetét!
24. A jelenségek leírásához szükség van a jelenség időpontjának megadására. Ehhez a vonatkoztatási rendszerben definiált koordinátahálózat pontjaiban el kell helyeznünk azonosan működő, egymáshoz igazított órákat. Hogyan végezné el az órák szinkronizálását fényjel segítségével?

vel?

25. Hogyan lehet meghatározni egy rendszerhez képest mozgó tárgynak a mozgásirányba eső méretét?
26. Mit nevezünk idődilatációnak?
27. Melyik hosszabb, a mozgási vagy a nyugalmi időtartam?
28. Mit nevezünk Lorentz-kontrakciónak?
29. Mit nevezünk négydimenziós téridőnek? Minek felel meg egy esemény a négydimenziós téridőben?
30. Mit nevezünk a háromdimenziós térben vektornak?
31. Melyik mennyiség invariáns a koordinátatranszformációval szemben a háromdimenziós térben?
32. Mik azok a négyesvektorok?
33. Melyik az a mennyiség, amelyik invariáns a Lorentz-transzformációval szemben?
34. Mit tekintünk egy változás vagy mozgás világvonalának?
35. Ábrázolja egy $ct - x$ koordinátarendszerben a fény és egy állandó sebességgel mozgó tömegpont világvonalát!
36. Mit lehet mondani azokról az eseményekről, amelyek világvonala párhuzamos a ct -tengellyel?
37. Mit lehet mondani azokról az eseményekről, amelyek világvonala párhuzamos az x -tengellyel?
38. Milyen lehet az előjele a négyes világban az intervallumnégyzetnek?
39. Hogyan nevezzük a négyes térnek azt a tartományát, ahol az intervallum négyzet pozitív?
40. Mi a sajátidő vagy lokális idő?
41. Hogyan számoljuk ki a sajátidőt?
42. Mit nevezünk egy tömegpont világvonalának?
43. Milyen világvonalat (időszerű, fényszerű vagy térszerű) követhet egy nyugalmi tömeggel rendelkező részecske? Miért?
44. Egy tömegpont tömegét mikor találjuk nagyobbnak, ha hozzánk képest mozog, vagy ha nyugalomban van?
45. Milyen feltételek mellett válik invariánssá a dinamika alapegyenlete a

Lorentz-transzformációval szemben?

46. Hogyan kapjuk meg egy részecske relativisztikus energiáját?

47. Mit nevezünk egy test nyugalmi energiájának?

48. Mi a tömeghiány vagy tömegdefektus?

8.8.2. Kidolgozott feladatok

8.1. feladat: Egy űrhajó 200000 km/s sebességgel távolodik a Földtől. Az űrhajó előrefelé rakétát lő ki, amelynek az űrhajóhoz mért sebessége 150000 km/s. Mekkora lesz a rakéta sebessége a Földhöz képest?

Megoldás: Korábban láttuk, hogy a K_1 rendszerben v_{1x} nagyságú x -irányú sebességgel mozgó test sebességét a K_1 rendszerhez képest v sebességgel mozgó K_2 rendszerben v_{2x} -nek mérjük, ahol

$$v_{2x} = \frac{v_{1x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_{1x}}$$

Tekintsük az űrhajóhoz rögzített koordináta-rendszert K_1 -nek. Ebben a koordináta rendszerben a kilőtt rakéta sebessége $v_{1x} = 150000$ km/s. Keressük a rakéta sebességét abban a Földhöz rögzített K_2 koordináta rendszerben, amely a K_1 rendszerhez képest $v = -200000$ km/s sebességgel halad. Helyettesítsük be az értékeket:

$$v_{2x} = \frac{150000 \text{ km/s} - (-200000 \text{ km/s})}{1 - \frac{-200000 \text{ km/s}}{(300000 \text{ km/s})^2} \cdot 150000 \text{ km/s}} = 262500 \text{ km/s}.$$

8.2. feladat: Egy űrhajós 30 éves korában csillagközi űrutazásra indul és a földi időszámítás szerint 50 év múlva érkezik vissza. Körülbelül hány éves lesz a visszaérkezéskor, ha űrhajója $2,5 \cdot 10^8$ m/s sebességgel haladt?

Megoldás: Ha az eseményekhez képest nyugvó megfigyelő által mért időtartamot T_0 -lal, az űrhajóhoz képest mozgó megfigyelő által mért időtartamot pedig T -vel jelöljük, akkor a

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggésbe a számadatokat behelyettesítve

$$50 \text{ év} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{(2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}}}.$$

Ahonnét

$$T_0 = 27,6 \text{ év} .$$

Tehát a Földre visszaérkező űrhajósunk 57,6 éves lesz.

8.3. feladat: Mekkora annak az elektronnak a tömege, amely $v = 0,99 c$ sebességgel halad? Az elektron nyugalmi tömege $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Megoldás: A tömegnövekedés mértékét a (8.5) alapján határozhatjuk meg:

$$m = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1 - \frac{(0,99c)^2}{c^2}}} \text{ kg} .$$

A számolásokat elvégezve kapjuk, hogy:

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 7,09 \text{ kg} ,$$

azaz

$$m = 6,45 \cdot 10^{-30} \text{ kg} .$$

Tehát a hozzánk képest $v = 0,99c$ sebességgel mozgó elektron tömegét $m = 6,45 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ -nak mérjük.

Az elektron tömege a nyugalmi tömegének több, mint hétszeresére növekszik.

8.4. feladat: A 938 MeV nyugalmi energiájú protonnal 92 MeV kinetikus energiát közlünk. Hány százalékkal nő a tömege?

Megoldás: A (8.7) értelmében a proton teljes energiája a nyugalmi energiának és a kinetikus energiának az összege:

$$E = 938 \text{ MeV} + 92 \text{ MeV} = 1030 \text{ MeV}$$

A proton teljes energiája és a tömege között fennáll az

$$E = mc^2$$

összefüggés. Hasonló összefüggés írható fel a proton nyugalmi energiája és nyugalmi tömege között is. Mindkét összefüggésből fejezzük ki c^2 -et:

$$c^2 = \frac{E}{m} = \frac{E_0}{m_0} .$$

Átrendezés után kapjuk:

$$m = \frac{E}{E_0} \cdot m_0 .$$

Behelyettesítés után:

$$m = \frac{1030 \text{ MeV}}{938 \text{ MeV}} \cdot m_0 = 1,098 \cdot m_0 .$$

Tehát a proton tömege 9,8 %-kal nő.

A tömeg kifejezésében a teljes energiának és a nyugalmi energiának az aránya szerepel, ezért a feladat megoldásakor nem követtünk el hibát azzal, hogy az energiákat nem számoltuk át SI-egységbe.

8.5. feladat: Mekkora frekvenciájú fénnel világítottuk meg a fotokatódot, ha a kilépő elektronok sebessége a fény vákuumbeli terjedési sebességének a fele? A kilépési munka $A=3,5 \text{ eV}$.

Megoldás: A fotokatódban kötött elektron elnyeli a ν frekvenciájú energiakvantumot (fotont). Ha a foton $h\nu$ energiája nagyobb, mint az elektron kötési energiája, akkor a különbséget a fotokatódból kilépő elektron mozgási energiájában jelentkezik.

$$h\nu = A + E_m .$$

Az elektron mozgási energiája (8.6) értelmében

$$E_m = (m - m_0)c^2 .$$

Ha felhasználjuk a relativisztikus tömegnövekedésre kapott (8.5) összefüggést, az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$E_m = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] m_0 c^2 .$$

Helyettesítsük be a paraméterek helyébe a megfelelő számértékeket:

$$E_m = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}}} - 1 \right] (9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 .$$

A számolásokat elvégezve kapjuk:

$$E_m = 1,267 \cdot 10^{-14} \text{ J} .$$

Az elektronok kilépési munkája, $A = 3,5 \text{ eV} = 5,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ elhanyagolható az elektron mozgási energiája mellett. Ezért

$$h\nu \approx E_m$$

$$\nu \approx \frac{E_m}{h} = \frac{1,267 \cdot 10^{-14} \text{ J}}{6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}$$

$$\nu \approx 1,91 \cdot 10^{19} \text{ Hz} .$$

Tehát a fotokatódot $1,91 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$ frekvenciájú fénnel világítottuk meg.

A röntgensugárzás frekvenciatartománya $3 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$. A kapott érték tehát a röntgensugárzás tartományába esik.

8.6. feladat: Határozza meg a $^{40}_{20}\text{Ca}$ atommagban az egy nukleonra jutó átlagos kötési energiát! (A kalcium móltömege $40,080 \text{ g}$, az Avogadro-szám $6,022 \cdot 10^{23}$, a proton tömege $1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, a neutron tömege pedig $1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.)

Megoldás: Az atommagok tömegének méréséből az derült ki, hogy egy atommag tömege kisebb, mint a magot alkotó szabad nukleonok (protonok és neutronok) tömegének összege. Ezt a tömegkülönbséget tömeghiánynak vagy idegen szóval tömegdefektusnak nevezik. Ha az atommag nyugalmi tömegét M_{mag} -al, a proton nyugalmi tömegét m_p -nal, a neutronét m_n -nal jelöljük, akkor az atommag tömeghiánya

$$\Delta m = N \cdot m_n + Z \cdot m_p - M_{mag}$$

(Z a protonok-, N a neutronok száma a magban).

Határozzuk meg először a $^{40}_{20}\text{Ca}$ atommag esetén a tömeghiány nagyságát. Ehhez ismernünk kell M_{mag} -ot a $^{40}_{20}\text{Ca}$ atommag tömegének nagyságát. M_{mag} a móltömeg és az Avogadro-szám ismeretében meghatározható:

$$M_{mag} = \frac{40,080 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 6,6545 \cdot 10^{-26} \text{ kg} .$$

Ebből a tömeghiány:

$$\Delta m = 20 \cdot 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 20 \cdot 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} - 6,6545 \cdot 10^{-26} \text{ kg} ,$$

$$\Delta m = 0,405 \cdot 10^{-27} \text{ kg} .$$

A jelenséget a relativisztikus tömegformula segítségével lehet megmagyarázni. Az atommag energiája ugyanis más kötött nukleonok esetén, mint nukleonokra

szétszedett állapotában. Ennek oka a következő. Az atommagot alkotó nukleonok azért maradnak az atommagban, mert vonzzák egymást. Ez azt jelenti, hogy a magnak különálló nukleonokra való szétszedéséhez munkát kell végezni. Tehát a nukleonokra szétszedett rendszer energiája nagyobb, mint az atommagé. A többlet abból a befektetett munkából származik, amit a magerők ellenében kell végezni. A kötött állapotban lévő rendszer (az atommagban kötött nukleonok) energiája, és a szétszedett rendszer (szabad nukleonok) energiája közti különbséget az illető atommag kötési energiájának nevezik. Ennek alapján a nukleonok szabad és kötött állapota közti Δm tömegkülönbség - a tömeghiány - a két állapot közti ΔE energiakülönbségnek felel meg, amit a

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

összefüggéssel tudunk számszerűen is értelmezni.

Ez alapján a tömeghiány nagyságából határozzuk meg a ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ izotóp atommagjának kötési energiáját:

$$\Delta E = 0,405 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 ,$$

$$\Delta E = 3,645 \cdot 10^{-11} \text{ J} .$$

Ebből az egy nukleonra jutó átlagos kötési energia:

$$\Delta \epsilon = \frac{\Delta E}{N + Z} = \frac{3,645 \cdot 10^{-11} \text{ J}}{40} ,$$

$$\Delta \epsilon = 9,112 \cdot 10^{-13} \text{ J} ,$$

$$\Delta \epsilon = \frac{9,112 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 5,69 \text{ MeV} .$$

8.7. feladat: Egy protont nyugalomból a fénysebesség felére gyorsítottak. Mekkora volt a gyorsítófeszültség? Hány %-kal nőtt meg a proton tömege? A proton tömege $1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, töltése $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Megoldás: A proton relativisztikus tömegnövekedése:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} m_0 \approx 1,15 m_0 .$$

Az elektromos erőter által végzett munka a proton mozgási energiáját növeli, így:

$$W = eU_0 = mc^2 - m_0c^2 \approx 0,15 m_0 c^2 .$$

A számértékeket behelyettesítve:

$$W = eU_0 \approx 0,15 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2,$$

$$W = eU_0 \approx 2,255 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 141 \text{ MeV}.$$

Tehát a gyorsítófeszültség $U_0 = 141 \text{ MV}$.

8.8.3. Gyakorló feladatok

1. Egy űrhajó 200000 km/s sebességgel távolodik a Földtől. Az űrhajóból visszafelé rakétát lőnek ki a Földre. A rakéta űrhajóhoz mért sebessége 150000 km/s. Mekkora lesz a rakéta sebessége a Földhöz képest?
2. Mennyivel látjuk megrövidülni azt az interkontinentális repülőgépet a Földről nézve, amelynek a nyugalmi hossza 120 m, sebessége pedig 3000 km/h?
3. Hány kg a Föld tömegének növekedése a Naprendszerhez képest nyugvó megfigyelő szerint? A Föld keringési sebessége 30 km/h, nyugalmi tömege $m_0 = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.
4. Tömegének hányad részével növekszik meg a rakétából 2500 m/s sebességgel kiáramló gáz molekuláinak nyugalmi tömege?
5. Egy űrhajós 0,99 c sebességgel haladó űrhajón hagyja el a Földet. Az űrhajón mért időszámítás szerint éppen 15 év múlva érkezik vissza. Melyik évet mutatják ekkor a földi naptárak?
6. A K^+ mezon átlagos élettartama 10^{-8} s . Mekkora sebességgel kell haladnia ahhoz, hogy átlagos élettartama 50 %-kal megnövekedjék?
7. Egy alumíniumtömb tömege 0°C -nál 1500 kg. Mennyivel növekszik a tömege, ha 500°C -re melegszik fel? Az alumínium fajhője $900 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$.
8. A Paksi Atomerőmű egy-egy blokkja 440 MW teljesítménnyel termel elektromos energiát. Mennyivel csökken a reaktor fűtőanyagának tömege egy év alatt?
9. Hányszorosra növekszik valamely test sűrűsége, ha v sebességgel mozog. A test mozgás irányára merőleges méretei nem rövidülnek meg.
10. Valamely test sebessége akkora, hogy tömegnövekedése 10 %. Hány %-kal rövidül meg a test hossza a mozgás irányában?

11. Számítsuk ki az elektron és a proton impulzusát, ha sebességük a fény vákuumbeli sebességének 75 %-a. A számítást a klasszikus és a relativisztikus elmélet alapján is végezzük el.
12. A protonhoz rendelhető de Broglie-hullám hullámhossza $5 \cdot 10^{-11}$ m. Mekkora a proton impulzusa és energiája? A proton nyugalmi tömege $1,672 \cdot 10^{-27}$ kg.
13. Egy molibdén atom által kibocsátott foton ($\lambda = 0,71 \cdot 10^{-10}$ m) 90° -os szóródást szenved egy nyugvónak tekinthető elektronon. Számítsuk ki a foton eredeti és megváltozott impulzusát, valamint az elektron által felvett impulzus nagyságát és irányát. Az elektron impulzusát és energiáját relativisztikusan számoljuk.
14. Mennyivel csökken 1 s alatt a Nap tömege, ha a Nap felületéről m^2 -enként és másodpercenként 1,423 kJ energiát sugároz ki? A Nap átmérője $1,39 \cdot 10^6$ km.
15. Egy protont 100 MV feszültség gyorsít. Mennyi lenne a sebessége, ha a klasszikus fizika alapján számolnánk? Mennyi lesz a tényleges sebessége?

Ajánlott irodalom:

- Albert Einstein: A speciális és általános relativitás elmélete, Gondolat, Budapest, 1978
- Taylor, Wheeler: Téridő-fizika, Gondolat, Budapest, 1974
- J. Norwood: Századunk fizikája, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981

Felhasznált irodalom:

- Kálmán Péter: Relativitáselmélet, személyes közlés, Budapest, 2006
- Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997
- Holics László: Fizika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1992

9. Bevezetés az atomfizikába

Az eddig tanultak alapján értelmezhető a **makrovilág** legtöbb fizikai jelensége. Maxwell elektrodinamikájának kidolgozása után, a XIX. század végére úgy tűnt, hogy ismertek a fizika világának alaptörvényei, csak néhány jelenség magyarázata várat még magára.

Annál nagyobb volt a fizikusok csalódottsága, amikor a XX. század elején kiderült, hogy ezen jelenségek nem értelmezhetőek a **klasszikus fizika** alapján. Ezek a jelenségek mind kapcsolódtak valamilyen módon az atomok világához, azaz a **mikrovilághoz**.

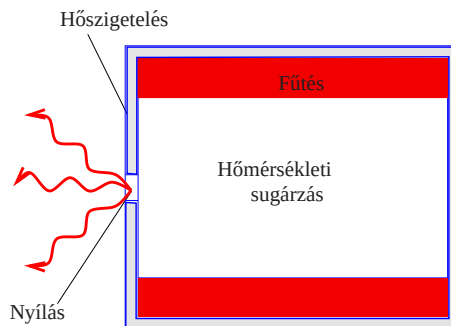
9.1. Az abszolút fekete test sugárzási törvénye

A fent említett jelenségek közül az **abszolút fekete test** hőmérsékleti sugárzása jelentette az első kihívást. Mindannyian ismerjük az anyagnak azt a tulajdonságát, hogy melegítés hatására izzani kezd, miközben elektromágneses sugárzást sugároz környezetébe. Ezt a sugárzást nevezzük **hőmérsékleti sugárzásnak** (lásd 9.1. ábra), mivel az anyag hőmérsékletével egyértelműen jellemezhető. Továbbá azt is tudjuk, hogy minden anyag a ráeső sugárzás egy részét elnyeli, másik részét pedig visszaveri.

Abszolút fekete test:

Azt a sugárzót amelyik elnyeli az összes ráeső elektromágneses sugárzást abszolút fekete testnek nevezzük.

Az abszolút fekete test egyik megvalósítása az **üregsugárzó**.



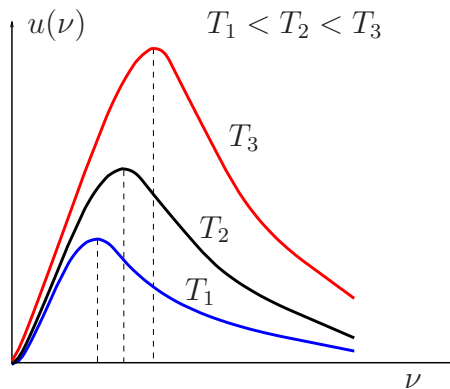
9.1. ábra. Az üregsugárzó

Az előzőek alapján tudjuk, hogy ha az A felület P teljesítményt sugároz ki, akkor a P/A mennyiséget a sugárzás I intenzitásának nevezzük.

Az elektromágneses sugárzás $u(\nu)$ **spektrális intenzitásának** az I intenzitás ν frekvencia szerinti eloszlását értjük. $u(\nu) d\nu$ megadja, hogy az I intenzitású sugárzásban mekkora intenzitást képviselnek a $(\nu, \nu + d\nu)$ frekvenciaintervallumba eső frekvenciájú elektromágneses sugarak.

Emlékezzünk vissza középiskolai tanulmányainkra, amikor színeire bontottuk egy optikai hasáb segítségével a fehér fényt! A kapott hétszínű szivárvány nem más mint a fehér fény spektrális intenzitás eloszlása, vagy **spektruma**.

A XIX. század végén több fizikus is tanulmányozta az abszolút fekete test, vagy ami ugyanaz, az üregsugárzás törvényszerűségeit. A kapott kísérleti eredményeket sehoggy sem sikerült elméletileg megmagyarázni a klasszikus elképzelések alapján. (lásd 9.2. ábra.)



9.2. ábra. A fekete test sugárzásának színeképe

A 9.2. ábrából látható, hogy adott hőmérsékletű fekete test spektrumának maximuma van, és ez a maximum a nagyobb frekvenciák (kisebb hullámhosszak) felé tolódik el, ha növeljük a test hőmérsékletét. Ez a **Wien-féle eltolódási törvény**.

A megfigyelések további eredménye volt a **Stefan-Boltzmann törvény**, amelyik azt mondja ki, hogy a fekete test egységnyi felülete által kisugárzott összteljesítmény a test hőmérsékletének negyedik hatványával arányos.

1900-ban Max Planck a **kvantumhipotézis** bevezetésével megmagyarázta az abszolút fekete test hőmérsékleti sugárzásának tapasztalatilag már ismert spektrális intenzitását. Az általa kapott eredmény:

$$u(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)}.$$

ahol h -a Planck-állandó, ν -a frekvencia, c -a fény vákuumbeli terjedési sebessége, k -a Boltzmann-állandó és T -az abszolút hőmérséklet

Planck forradalmian új hipotézise–a kvantumhipotézis–azt mondja ki, hogy az elektromágneses sugárzás energiája nem folytonosan nyelődik el, vagy keletkezik, hanem $h\nu$ adagokban–**energiakvantumokban**. Ez a hipotézis kibékíthetetlen ellentétben áll a klasszikus fizika elektromágneses sugárzásról alkotott elképzelésével.

Maxwell elmélete alapján az elektromágneses energia folytonosan oszlik el a térben. Maga Planck még sokáig úgy képzelte, hogy az energiakvantum elképzelést valahogy sikerül beilleszteni a klasszikus keretbe, de a további kísérleti eredmények magyarázatai, amelyek szintén az energiakvantum létezésére épültek, ennek lehetőségét egyre inkább kizárták.

9.1. példa: Határozza meg az abszolút fekete test sugárzásának intenzitását T hőmérsékleten! (Stefan-Boltzmann törvény)

Megoldás: Mivel $I(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu$, ezért behelyettesítés után:

$$I(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

Vezessük be az $x = \frac{h\nu}{kT}$ helyettesítést! Ekkor:

$$I(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

A határozott integrálok táblázatából $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$.

Tehát:

$$I(T) = \sigma T^4,$$

ahol

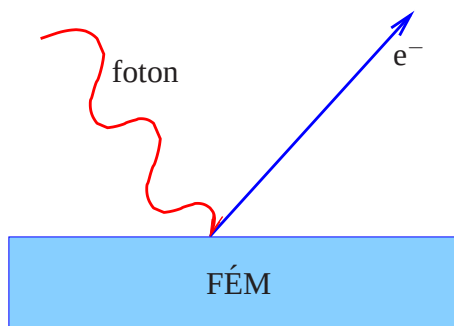
$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

A Planck által a kvantumhipotézis alapján talált összefüggésből tehát következik a Stefan-Boltzmann törvény.

9.2. A fényelektromos jelenség

Heinrich Hertz elektromágneses sugarak anyagban való elnyelődését tanulmányozva arra lett figyelmes, hogy az anyagból a sugárzás hatására elektronok léptek ki. A jelenség tanulmányozása közben azt vette észre, hogy csak bizonyos frekvenciánál nagyobb frekvenciájú sugárzás hatására válnak ki az anyagból az általa fotoelektronoknak elnevezett részecskék.

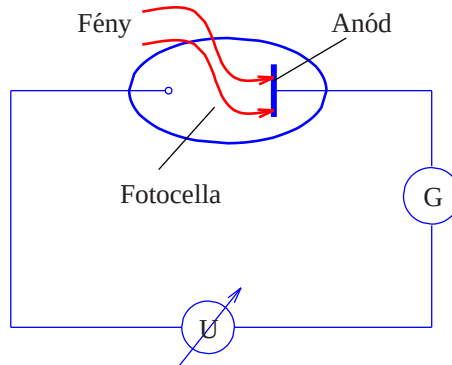
Az elektronokat a katódsugárzás tanulmányozásakor fedezték fel a XIX. század végén. Itt a középiskolai tanulmányok alapján feltételezzük ismeretüket.



9.3. ábra. Fényelektromos jelenség

A további elemzések is meglepő eredményekkel jártak. Azt vették észre, hogy a kilépő elektronok mozgási energiája csak a beeső monokromatikus sugárzás frekvenciájától függ, és független a sugárzás intenzitásától. Ez azért meglepő, mert a klasszikus elképzelés szerint a nagyobb intenzitású sugárzásból több energiát gyűjthetnek össze az elektronok, mert ez az energia a sugárzásban folytonosan van jelen. Az intenzitás növelése a kísérletek során csak a kilépő elektronok számát növelte, és semmilyen hatással nem volt az energiájukra.

A 9.4. ábrán látható az a kísérleti elrendezés, amelyik lehetővé teszi a fotoelektronok mozgási energiájának mérését. A fémből készült anódra beeső fény váltja ki a fotoelektronokat. Ezek a változtatható feszültségű ellentérben lassulnak, míg egy bizonyos feszültség mellett, amit lezárási feszültségnek hívunk (U_0), az áram az áramkörben nullára esik, amit a galvanométer jelez. Ekkor az ellentérrel szemben végzett munka egyenlő



9.4. ábra. Kísérleti elrendezés a fotoelektronok mozgási energiájának mérésére

az elektronok mozgási energiájával.

$$eU_0 = \frac{1}{2}mv^2.$$

A fotoeffektus kísérleti tanulmányozása során vizsgálták azt is, hogy miként függ a lezárási feszültség a beeső fény frekvenciájától. Itt lineáris kapcsolatot mértek, ami ugyancsak meglepő volt, mert a klasszikus megfontolásokból ez nem következik.

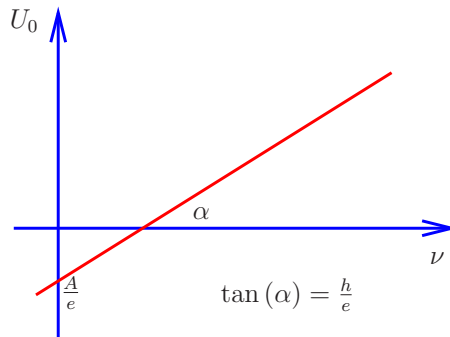
Albert Einstein a kvantumhipotézist használta a fényelektromos jelenség magyarázatára. E szerint az anyagban kötött elektronok elnyelik a ν frekvenciájú energiakvantumot, és ha annak $h\nu$ energiája nagyobb mint az elektron kötési energiája, akkor a különbség a fotoelektron mozgási energiájában jelentkezik:

$$h\nu = A + \frac{1}{2}m_e v^2,$$

A -kilépési munka, m_e -az elektron tömege, v -a fotoelektron sebessége, h -a Planck állandó, értéke $6,625 \cdot 10^{-34}$ Js, és ν -a sugárzás frekvenciája.

Ha a kilépő elektronok energiájának helyébe a mérésekből meghatározott eU_0 mennyiséget írjuk, akkor láthatóan a fény frekvenciája és a lezárási feszültség között lineáris kapcsolatot kapunk, ami összhangban van a mérési eredményekkel.

$$U_0(\nu) = \frac{h}{e}\nu + \frac{A}{e}.$$



9.5. ábra. A lezárási feszültség a beeső fény frekvenciájának függvényében

Einstein elgondolása alapján a fényelektromos jelenséggel kapcsolatos összes kísérleti tapasztalat megmagyarázható. Einsteintől származik az elektromágneses tér energiakvantumainak a neve is. Ő nevezte el azokat **fotonoknak**.

Az $U_0(\nu)$ lineáris függvény meredekségéből meghatározható a Planck-állandó értéke, míg a függvény $\nu = 0$ melletti értékéből a katód anyagának kilépési munkája.

Amennyiben a foton energiája nem elég ahhoz, hogy fedezze az elektron fémből való kilépéséhez szükséges energiát, akkor nincs fotoáram. Tehát csak egy bizonyos frekvencia felett mérünk fotoelektronokat. Ez is összhangban van a kísérletek során tapasztaltakkal.

Egy foton egy elektronnal lép kölcsönhatásba, így érthető, hogy a beeső fény intenzitása (ami a fotonok számával arányos) a kilépő fotoelektronok számát befolyásolja és nincs hatással azok energiájára.

9.2. példa: Ezüst felszínét $\lambda = 1500 \cdot 10^{-10}$ m hullámhosszúságú fotonokkal sugározzuk be. Mekkora a kirepülő fotoelektronok sebessége, ha tudjuk hogy az ezüst felszínéről nem távoznak elektronok a $\lambda_0 = 2600 \cdot 10^{-10}$ m hullámhossznál nagyobb hullámhosszúságú fotonok hatására?

Megoldás: A feladat szövegéből kitűnik, hogy a λ_0 hullámhossz a kilépési munkával van kapcsolatban. Az ilyen hullámhosszúságú fotonok energiája éppen fedezi a kilépési munkát, ezért az ennél nagyobb hullámhosszúságú fotonok hatására már nem lépnek ki az elektronok.

$$A = \frac{hc}{\lambda_0}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$.

Helyettesítsük be ezt az összefüggést a fényelektromos jelenség energiamérlegébe.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{1}{2}m_e v^2.$$

Ebben az egyenletben csak az elektron sebessége az ismeretlen mennyiség.

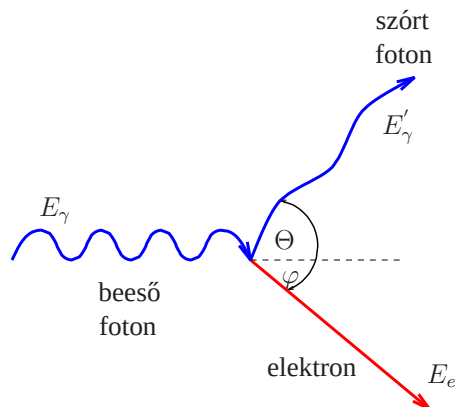
$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)}.$$

A megadott adatokkal

$$v = 1,1 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

9.3. A Compton effektus

A klasszikus elektrodinamika úgy magyarázza az elektromágneses sugarak anyagokon való szóródásának jelenségét, hogy az anyagban található töltött részecskék a külső elektromágneses sugárzás hatására rezgésbe jönnek, miközben maguk is a külső sugárzás frekvenciájával megegyező frekvencián sugároznak. Ezért jelentett meglepetést az a megfigyelés, hogy az anyag gyengén kötött elektronjain a néhány keV energiájú fotonok szóródásakor megváltozik azok frekvenciája, és így energiája is.



9.6. ábra. Compton szórás (E_γ -a beeső foton energiája, E'_γ -a szórt foton energiája, E_e -a meglökött elektron energiája, Θ -a foton szóródási szöge, φ -az elektron szóródási szöge)

1 eV energiára tesz szert egy elektron, ha 1 V feszültség gyorsítja. Tehát $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$.

Compton a jelenség magyarázatakor a kvantumhipotézisből indult ki, de kiegészítette azt azzal a feltevéssel, hogy a fotonnak $\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ impulzusa van, és tökéletesen rugalmasan ütközik az elektronnal. (c a fény sebessége)

A középiskolából jól ismert fogalom a tökéletesen rugalmas ütközés. Ha valaki megpróbálkozik ez alapján a Compton szórás értelmezésével, helytelen eredményekre jut. Ennek az az oka, hogy az energiamegmaradás tételét, valamint a lendületmegmaradás tételét relativisztikusan kell alkalmazni, mivel a meglökött elektron sebessége nagy.

Compton tehát feltételezte az energiamegmaradás tételének és az impulzusmegmaradás tételének érvényességét a folyamatban.

$$\underline{p}_\gamma = \underline{p}'_\gamma + \underline{p}_e$$

$$E_\gamma + m_e c^2 = E'_\gamma + E_e$$

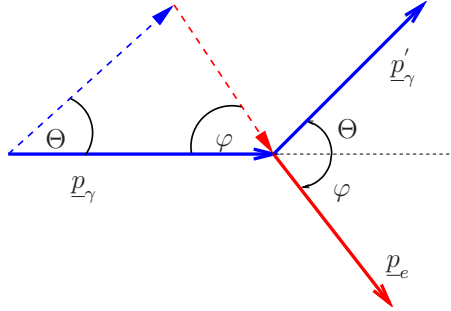
$\underline{p}_\gamma$ -a beeső foton lendülete, $\underline{p}'_\gamma$ -a szórt foton lendülete, $\underline{p}_e$ -a meglökött elektron lendülete, E_γ -a beeső foton energiája, $m_e c^2$ -az elektron nyugalmi energiája, E'_γ -a szórt foton energiája, E_e -a meglökött elektron energiája.

A relativitás elméletéből tudjuk, hogy egy részecske energiája és impulzusa között a következő összefüggés áll fenn:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

ahol E - a részecske energiája, p - a részecske impulzusának nagysága, m_0 - a részecske nyugalmi tömege, c - a vákuumbeli fénysebesség.

Egyenleteinkben nem szerepel az elektron kötési energiája. Ezt azért tehetjük meg, mert ez az energia eV nagyságrendű, ezért elhanyagolható a foton keV nagyságrendű energiájához, és az elektron 511 keV nyugalmi energiájához képest.



9.7. ábra. A Compton szórás impulzusdiagrammja ($\underline{p}_\gamma$ -a beeső foton lendülete, $\underline{p}'_\gamma$ -a szórt foton lendülete, $\underline{p}_e$ -a meglökött elektron lendülete), Θ -a foton szóródási szöge, φ -az elektron szóródási szöge

Az egyenletekben használatos jelölések egyértelműen következnek az 9.6 és 9.7. ábrákból.

Írjuk át az energia megmaradásának tételét az impulzus és energia közötti relativisztikus összefüggés felhasználásával (vegyük figyelembe, hogy a foton nyugalmi tömege zérus):

$$p_\gamma c + m_e c^2 = p'_\gamma c + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2}.$$

Ezen egyenlet rendezése, négyzetre emelése és újabb rendezése után azt kapjuk, hogy:

$$p_e^2 = (p_\gamma - p'_\gamma)^2 - 2m_e c(p_\gamma - p'_\gamma).$$

A 9.7. ábra alapján kifejezhető az elektron lendületének négyzete a koszinusz-tétel felhasználásával:

$$p_e^2 = p_\gamma^2 + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \cos \Theta.$$

Az elektron lendületének négyzetét két módon is kifejeztük. Tegyük ezeket a kifejezéseket egyenlővé, és a kapott egyenletből fejezzük ki a szórt foton lendületét:

$$p'_\gamma = \frac{p_\gamma}{1 + \frac{p_\gamma}{m_e c}(1 - \cos \Theta)}.$$

Használjuk fel a foton lendülete és energiája közötti $p = \frac{E}{c}$ relativisztikus összefüggést. Ennek felhasználása után a szórt foton energiája a következő egyenlet szerint alakul:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \Theta)}.$$

Az előzőek alapján kiszámítható a foton hullámhosszának megváltozása is, hiszen:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{p_{\gamma'}} - \frac{h}{p_\gamma}.$$

Behelyettesítve $p_{\gamma'}$ helyére és rendezve a kifejezést egyszerű összefüggést kapunk a hullámhossz változására:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \Theta).$$

A $\frac{h}{m_e c}$ kifejezést az elektron **Compton-hullámhosszá**nak nevezzük.

A Compton szórás jelentette a fotonnak mint részecskének a létjogosultságának kísérleti bizonyítékát. Vegyük észre az értelmezésben azt az elméleti lépést, amivel Compton túllépett az eredeti kvantumhipotézisen. Az elektromágneses hullámokhoz részecsketulajdonságokat rendelt.

9.4. Hullám-részecske kettősség

Compton elgondolását Louis de Broglie tette szimmetrikussá, amikor a klasszikus értelemben vett részecskékhez hullámtulajdonságokat rendelt mondván, hogy a természetben érvényesülnie kell egyfajta szimmetriának.

A foton esetében azt láttuk, hogy a Compton féle hozzárendelés a következő a részecske energiája és impulzusa esetében:

$$E = h\nu,$$

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Louis de Broglie nem tett mást mint megfordította Compton gondolatmenetét. Szerinte a természet objektumai nem sorolhatók be a hullám vagy részecske egymást kizáró kategóriába, hanem egyszerre mutatnak hullám és részecske tulajdonságokat. Ennek értelmében egy p impulzusú részecskének $\lambda = \frac{h}{p}$ hullámhosszúságú hullám feleltethető meg.

Később de Broglie elgondolását fényesen igazolták azok a kísérletek, amelyekben elektronok elhajlását tanulmányozták kristályokon. Ezekben a kísérletekben az eddig tisztán részecskének gondolt elektron elhajlási képet–hullámtulajdonságot–mutatott.

9.3. példa: Határozza meg egy 75 kg tömegű 1 m/s sebességű ember de Broglie hullámhosszát!

Megoldás: A leírtakból következik, hogy

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

A megadott adatokkal $\lambda = 8,8 \cdot 10^{-36} \text{m}$

Az előző feladat végeredménye magyarázza meg, hogy miért csak a mikrovilág szintjén figyelhetők meg a **de Broglie-féle hullámtulajdonságok**.

9.5. Atommodellek

Az elektron az elemi negatív töltés hordozója. Ez a tény további kérdéseket vet fel. Választ kell találni arra a kérdésre, hogyan oszlik el az anyagban az elektronok negatív töltését kompenzáló pozitív töltésű alkotórész, melynek nyilvánvalóan léteznie kell, mert az anyag általában elektromosan semleges.

Az atomszerkezetre vonatkozó kérdések megválaszolásával Thomson próbálkozott meg először. Már a kinetikus gázelméletből meg lehetett becsülni az atomok méretét. Ez 10^{-10}m nagyságrendűnek adódott.

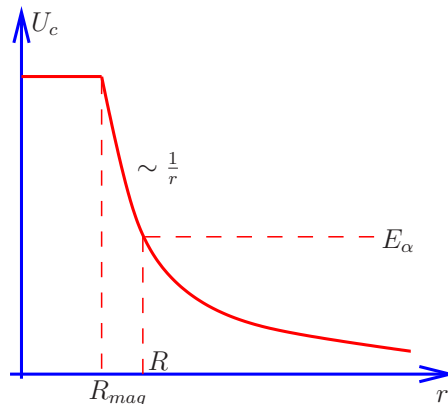
Thomson feltételezte, hogy a pozitív anyagrész kitölti az atomok teljes térfogatát, és az elektronok ebben vannak kötve az elektromos erők által. Mivel ez a modell erősen emlékeztet a mazsolás pudingra (a puding a pozitív rész, míg a benne elszórt mazsolák az elektronok), pudingmodellnek is nevezik ezt a **Thomson-féle atommodellt**.

A XX. század elején fedezték fel a természetes radioaktivitást. A következő fejezetben majd bővebben foglalkozunk ezzel a kérdéskörrel. Itt csak azért említjük meg, mert Rutherford kísérletében jelentős szerepet játszanak az α –sugarak. Az α –sugárzás kétszeres elemi pozitív töltést hordozó részecskék árama.

Thomson modellje mindaddig megállta a helyét, míg a kísérleti fizikusok kezébe nem került egy új kutatási eszköz, az α –**sugárzás**. Ezekkel

sokkal effektívebben tanulmányozható az atomszerkezet, mint a könnyű és csak egyszeresen töltött katódsugarakkal. Az α –sugárzásban terjedő részecskék tömege mintegy 7340-szerese az elektron tömegének, töltésük pedig kétszeres pozitív elemi töltés. Rutherford az új sugárzással bombázott vékony fémfóliákat, és arra volt kíváncsi, mennyiben tér el a fólia mögötti szórási kép attól, amit katódsugarak esetében tapasztaltak.

A fólia mögött sok újat nem tapasztaltak, de annál érdekesebb események történtek a fólia előtt. A várakozásokkal ellentétben átlagosan minden 40 000-dik α –rész visszapattant a fóliáról. Rutherford a jelenséget azzal a feltételezéssel magyarázta, hogy az atom pozitív része nem tölti ki az atom teljes térfogatát, hanem az atom közepén helyezkedik el. Amikor a bombázó α –részecskék közelednek a pozitív részhez, akkor taszítóerő lép fel, tehát az α –rész fékeződik. Akkor a legintenzívebb a fékeződés, ha az α –rész centrálisan közeledik a pozitív részhez. A Rutherford-féle kísérlet azt mutatja, hogy az alkalmazott E_α energiájú α –részeket a pozitív rész képes teljesen lefékezni és visszalökni. Ez alapján felső korlát adható a pozitív rész, azaz az **atommag** sugarára.



9.8. ábra. α –rész fékeződése Coulomb potenciál által (E_α – α –rész mozgási energiája, U_c –a mag Coulomb potenciálja, R_{maa} –magsugár)

Az α –rész akkor áll meg, amikor kezdeti mozgási energiája felhasználódik az atommag tasztításának leküzdésére, azaz amikor:

$$E_\alpha = \frac{Z_\alpha Z e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

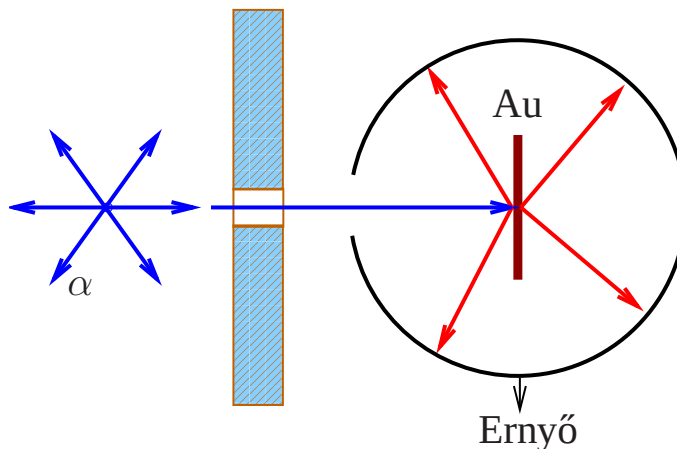
Itt R azt a távolságot jelöli az atommag középpontjától mérve, amelynél

az α -rész teljesen lefékeződik. Nyilván az atommag sugara ennél csak kisebb lehet.

Határozzuk meg R értékét, ha az egyik kísérletben $E_\alpha = 8 \text{ MeV}$ energiájú α -sugárzás visszalökődését figyelték meg aranyfóliáról ($Z = 79$).

$$R = \frac{Z_\alpha Z e^2}{4\pi\epsilon_0 E_\alpha} = 2,8 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

Tehát az atommag mérete $10^{-14} - 10^{-15} \text{ m}$ nagyságrendű, ugyanakkor itt kell legyen koncentrálni az atom majdnem teljes tömege, hiszen ha ezzel a résszel találkoznak a bombázó részecskék, úgy pattannak róla vissza mint egy falról.



9.9. ábra. Rutherford kísérlete

Rutherford a kísérleti eredmények alapján egy új atommodellt javasolt. Eszerint az atom középpontjában foglal helyet az atommag, amelybe tömörül lényegében az atom teljes tömege, míg az atommag körül körpályákon keringenek a könnyű elektronok **elektronburkot** alkotva. A modell nagyon hasonlít a naprendszerünkhöz, ezért nevezik *bolygómodell*nek is.

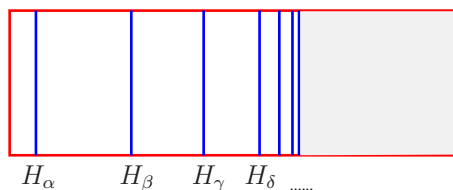
Sajnos ez a modell nem egyeztethető össze egyszerre a kísérleti tapasztalatokkal és a klasszikus elektrodinamikával. A körpályán keringő töltött elektronnak a klasszikus elmélet szerint sugározni kell, mivel gyorsulással mozog. A kisugárzott energia csökkenti a keringő elektron mozgási energiáját, ezért annak bele kéne zuhannia a magba, miközben folytonos spektrumú elektromágneses sugárzást kéne kibocsátania. A kísérletek azon-

ban azt mutatják, hogy az atomok különösképpen stabil képződmények, továbbá az általuk kibocsátott sugárzás spektruma vonalas.

A folytonos spektrummal már találkoztunk a szivárvány esetében, vagy az abszolút fekete test esetében. Ez azzal jellemezhető, hogy egy frekvenciatartományon belül minden frekvencia előfordul valamilyen intenzitással. A vonalas spektrumokban csak bizonyos meghatározott frekvenciákon találunk nullától különböző intenzitást. Ilyen spektrumuk van például a nátriumlámpáknak.

9.5.1. A hidrogén színe és Bohr posztulátumai

A múlt század végén hatalmas tapasztalati anyag állt a fizikusok rendelkezésére az atomok által kibocsátott elektromágneses sugárzásokat illetően. Az optikából jól ismert módon, spektroszkópiai módszerekkel vizsgálták az atomok által kibocsátott látható fényt, vagy az infravörös és ultraibolya sugárzásokat. A mért spektrumok kivétel nélkül vonalas jellegűek voltak. A fizika további fejlődésének szempontjából különösen fontos a legegyszerűbb elem, a hidrogén spektruma.



9.10. ábra. A Balmer sorozat a hidrogén színe képében

A spektrumvonalak jellemzőinek megmérése után megpróbálták a rengeteg vonalat rendszerezni különböző matematikai formulák segítségével. Így járt el Balmer is, aki az általa a hidrogén színe képében felfedezett vonalak hullámhosszaira a következő formulát találta:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

ahol $R_{\infty} = 1,097373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ - a Rydberg állandó
 $n = 2, m > 2$ - természetes szám

Ezzel a kifejezéssel kielégítő pontossággal lehet kiszámítani a Balmer sorozat vonalaihoz tartozó hullámhosszakat, de nem segít akkor ha a sugárzás keletkezéséről akarunk valamit megtudni. Hidrogén színeképének első sikeres magyarázatát Niels Bohr dán fizikus adta meg. Elfogadta Rutherford atommodelljét, de hiányosságainak kiküszöbölésére bevezetett három posztulátumot.

1. posztulátum:

Az elektron az atomburokban csak olyan körpályán (stacionárius pályán) mozoghat, amelyre teljesül a következő kvantumfeltétel:

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi}.$$

m_e -az elektron tömege, v - az elektron sebessége, r - a körpálya sugara, n - természetes szám, vagy **kvantumszám**.

2. posztulátum:

Ha az elektron az említett stacionárius pálya valamelyikén kering, nem sugároz ki elektromágneses sugárzást.

3. posztulátum:

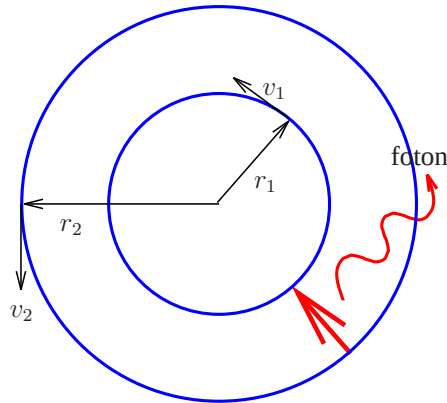
Az elektron csak akkor sugároz, ha nagyobb sugarú pályáról kisebb sugarúra áll. Ekkor a pályáknak megfelelő energiák különbségét egy foton formájában adja le.

$$h\nu = E_m - E_n$$

ν - a foton frekvenciája, E_m - az elektron energiája a nagyobb sugarú pályán, E_n - az elektron energiája a kisebb sugarú pályán.

9.5.2. A hidrogénatom Bohr-féle modellje

A Bohr által megalkotott elmélet, mint ahogy majd látni fogjuk, még nagy mértékben támaszkodik a klasszikus fizikára, de néhány alapvető kérdésben radikálisan szakít azzal. Ma már Bohr elméleténél kielégítőbb elmélettel magyarázzuk a hidrogénatom szerkezetét, de egyszerűsége miatt ezen az elméleten keresztül vezetünk be olyan fogalmakat, mint a **diszkrét energianívók**, vagy általában a **fizikai mennyiségek kvantálása**.



9.11. ábra. A Bohr-féle atommodell

Írjuk fel az elektron mozgásegyenletét az n -dik pályán:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Bohr 1. posztulátuma alapján:

$$2\pi m_e v r = n h.$$

A két egyenletből a pályasugár és a kerületi sebesség kifejezhető:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2,$$

$$v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 n h}.$$

Mivel az elektron a mag elektromos terében mozog, összenergiája a mozgási és a helyzeti energiájának összege:

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Behelyettesítve a sugár és sebesség helyére:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}.$$

Vegyük észre, hogy az elektron összenergiája az atom kötelékében negatív érték. Ez arról tanúskodik, hogy a mag és elektron rendszer kötött. Külső energiára van szüksége az elektronnak ahhoz, hogy kiszabadulhasson a mag vonzó hatása alól.

Bohr 3. posztulátuma alapján kiszámolható az m -dik pályáról az n -dik pályára való átmenetkor kisugárzott foton hullámhossza, ugyanis:

$$h\nu = E_m - E_n = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Mivel $c = \lambda \cdot \nu$, így:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Eredményünket összevethetjük a tapasztalatilag talált Balmer formulával. Látjuk, hogy Bohr elmélete a Rydberg állandóra a következő összefüggést adja:

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}.$$

Behelyettesítve az állandók számértékeit, a kísérleti és elméleti érték meglepő egyezést mutat. Ebből viszont az következik, hogy a Bohr elmélet értelmezni képes a hidrogén színképében fellelt különböző sorozatokat. (Lásd 9.12. ábrát.)

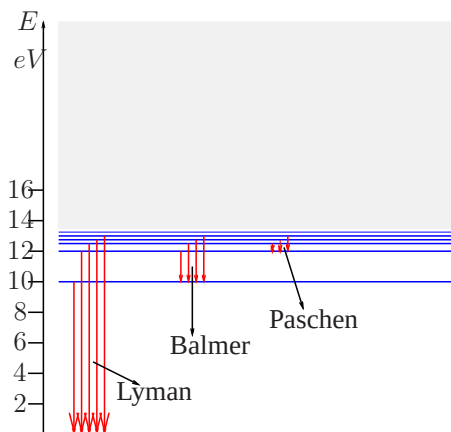
Minden sorozat jellemezhető annak a pályának a kvantumszámával, amelyre az elektron átugrik a nagyobb sugarú pályáról.

Írjuk át Bohr 1. posztulátumát a következő alakba:

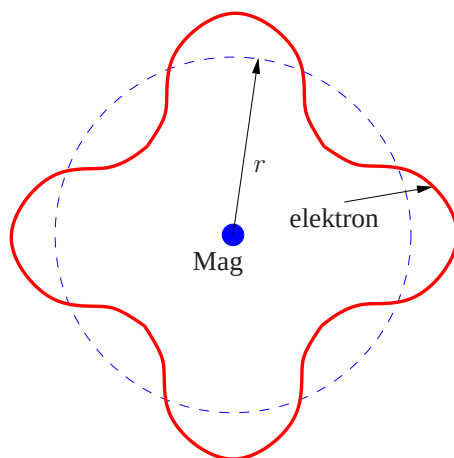
$$2\pi r = n \frac{h}{m_e v}.$$

Mivel a $\frac{h}{m_e v}$ mennyiség az elektron de-Broglie hullámhossza, így a fenti felírásnak van egy másik jelentése is. Ez a feltétel azt mondja ki, hogy az atomokba zárt elektronok olyan állóhullámok, melyeknek hullámhossza a stacionárius pálya kerületére n -szer fér rá. ($n = 1, 2, 3, \dots$) Tehát Bohr stacionárius pályára vonatkozó posztulátumát úgy is értelmezhetjük, mint az elektron hullámtulajdonságának megnyilvánulását. (Lásd a 9.13. ábrát.)

Ez a Bohr-féle posztulátum arra szolgál, hogy a klasszikus elmélet alapján számított (megengedett) eredményekből kiválassza a mikrovilág



9.12. ábra. Sorozatok a hidrogén színekében

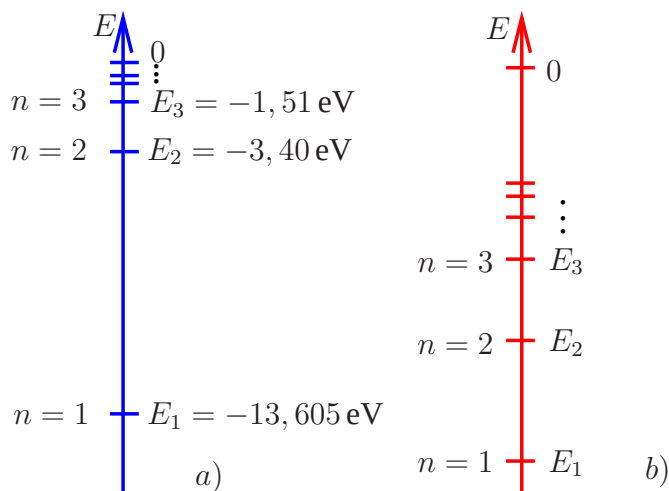


9.13. ábra. A H-atombeli elektront leíró egyik lehetséges állóhullám hullámhossza

számaára megfelelőeket. Ezzel Bohr bevezette a fizikába a **kvantált fizikai mennyiségeket**.

Ez a kvantumfeltétel megvédi az atomot a bolygómodellből jósolt összeomlástól, mert az elektron az $n = 1$ kvantumszámú pálya sugaránál nem kerülhet közelebb a maghoz. Ezt az állapotot nevezzük alapállapotnak.

Az elméletből az is következik, hogy az elektron összenergiája az atomon belül nem lehet tetszőleges, hanem csak a kvantumfeltételnek eleget tevő diszkrét érték. A hidrogénatom elektronjának energianívóit, vagy diszkrét energiaszintjeit mutatja a 9.14.a) ábra.



9.14. ábra. a) A hidrogénatom elektronjának diszkrét energianívói, b) Az anyagba zárt mikrorészecskék mindig diszkrét energianívói

A diszkrét energianívók megjelenése nem csak a hidrogénatom elektronjának sajátossága. Az anyagba zárt mikrorészecskék általános tulajdonsága, hogy energiáik csak diszkrét értékeket vehetnek fel. (Lásd a 9.14.b) ábra.)

9.4. példa: Határozza meg az elektron pályájának paramétereit a hidrogénatom alapállapotában, valamint a hidrogénatom ionizációs potenciálját! (Az ionizációs potenciál azzal a minimális energiával egyenlő, amit közölni kell az elektronnal ahhoz, hogy kikerüljön az atom kötelékéből.)

Megoldás: A pálya paramétereit, úgy határozzuk meg, hogy a fentebb levezetett általános összefüggésekbe az alapállapotot jellemző $n = 1$ értéket helyettesítjük.

$$r_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 0,54 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$v_0 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = 2,18 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

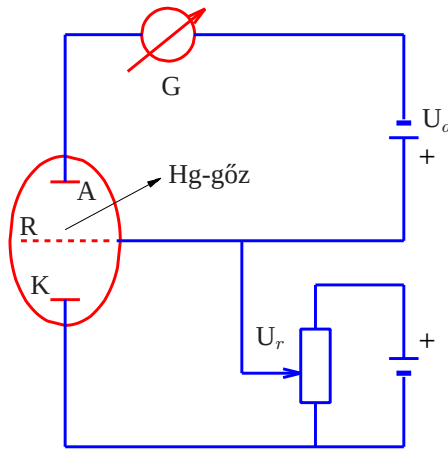
$$E_0 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -13,605 \text{ eV}$$

Az ionizációs potenciál definíciójából következik, hogy

$$I = -E_0 = 13,4 \text{ eV}$$

9.5.3. Franck-Hertz kísérlet

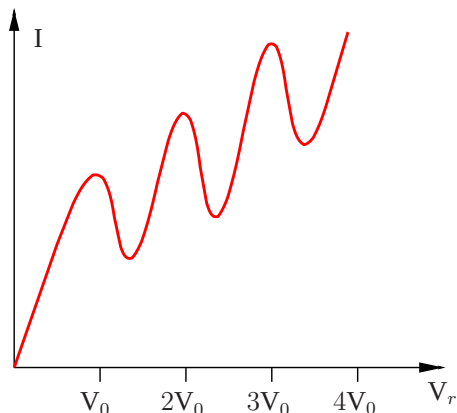
A diszkrét energiaszintek létezésének kísérleti bizonyítását G. Hertz és J. Franck végezték el először. Kísérleti berendezésük sémája a 9.15 ábrán látható.



9.15. ábra. Franck-Hertz kísérlete

A hevített K katódból elektronok lépnek ki. A K katód és R rács közé kapcsolt feszültség hatására ezek az elektronok felgyorsulva érik el az R rács és A anód közötti térrészt. A rács és anód közé (az elektronok szempontjából) néhány tized volt állandó fékező feszültség van kapcsolva. A

triódában alacsony nyomású higanygőz van. A kísérlet során változtatjuk a katód és rács közé kapcsolt gyorsítófeszültséget, és ennek függvényében mérjük a G galvanométerrel az anódáramot. A kísérletek eredménye a 9.16. ábrán látható.



9.16. ábra. A Franck-Hertz kísérlet eredménye

Értelmezzük a 9.16 ábrát. Kezdetben a gyorsítófeszültség hatására nő az elektronok mozgási energiája. Az elektronok tökéletesen rugalmasan ütköznek a higanyatomokkal. Mivel azok tömege több ezerszer nagyobb az elektronok tömegénél, az elektronok gyakorlatilag energiavesztés nélkül pattannak vissza róluk, és elérik az anódot. Az anódáram a gyorsítófeszültséggel arányosan nő. Amikor a gyorsítófeszültség eléri a $V_0 = 4,9 \text{ V}$ értéket az anódáram hirtelen csökkenni kezd. Mi lehet ennek az oka?

Franck és Hertz arra a következtetésre jutottak, hogy a $4,9 \text{ eV}$ energiájú elektronok ütközése a higanyatomokkal nem rugalmas ütközés. Az ilyen energiájú elektronok a higany atomjaival ütközve átadják energiájukat a higany egyik elektronjának, és az magasabb energiaszintre ugrik. Mivel ez a folyamat $4,9 \text{ V}$ feszültség mellett játszódik le, a higany alapállapota és első **gerjesztett állapota** közötti energiakülönbség $4,9 \text{ eV}$ kell legyen.

A termodinamika második főtételenek egyik fontos következménye az **energiaminimum-elve**.

Energiaminimum-elve:

Az energiaminimum-elve szerint ha egy fizikai rendszer adott körülmények között energiát közölhet környezetével, és ennek révén összenergiája csökkenhet, akkor ez a fizikai rendszer olyan állandósult állapotba kerül, amelyben az adott körülmények között a lehető legkisebb az összenergiája.

A gerjesztett állapotban lévő elektron az energiaminimum elve miatt nagyon rövid idő eltelte után (kb. 10^{-8} s) visszaugrik az alapállapotba, miközben 4,9 eV energiájú fotont sugároz ki. A Franck-Hertz kísérletben ezeket a fotonokat megfigyelték. A 9.16 ábrán látható további csúcsok a többszöri rugalmatlan ütközésekkel magyarázhatóak. A kísérlet meggyőzően bizonyítja a diszkrét energiaszintek létezését.

9.6. A kvantummechanika alapgondolatai, szemlélete

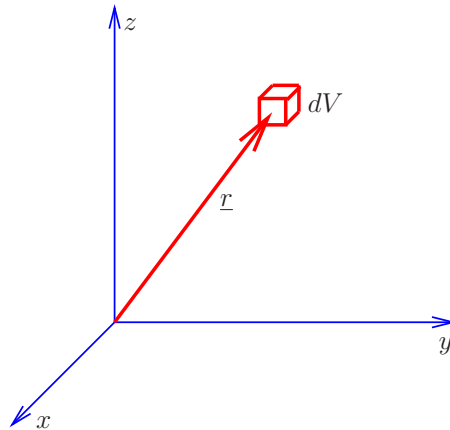
9.6.1. A hullámfüggvény

A foton és az elektron tulajdonságainak kísérleti vizsgálata azt eredményezte, hogy a mikroszkopikus objektum viselkedését egyszerre határozzák meg azok „részecske-tulajdonságai” és „hullámtulajdonságai”. Ennek a kettősségnek a figyelembevételével dolgozták ki a XX. század elején a mikrovilág objektumait leíró mechanikát a **kvantummechanikát**.

Ennek az elméletnek a matematikája megköveteli a lineáris operátorok elméletének ismeretét, ami egyetemünkön nem része a mérnökképzésnek. Ebből adódóan nem áll módunkban a továbbiakban tárgyalt jelenségek egzakt magyarázatát teljes precizitással megadni. Arra törekszünk a továbbiakban, hogy a kvantummechanika szemléletét annak precíz matematikája nélkül közvetítsük mérnökhallgatóink felé.

A kvantummechanika központi fogalma a $\Psi(\underline{r}, t)$ **hullámfüggvény**. Míg a klasszikus fizikában egy fizikai rendszer állapotát akkor tekintjük ismertnek, ha minden időpillanatban meg tudjuk mondani, hogy hol van a rendszer és mekkora a sebessége, addig a mikrovilág objektumainak állapotát a hullámfüggvény (csak a hely és idő függvénye) teljesen meghatározza.

Ez a függvény komplex függvény, tehát van nagysága és fázisa. Közvetlen fizikai jelentése nem a hullámfüggvénynek van, hanem nagysága négyzetének. $|\Psi|^2 dV$ megadja annak a valószínűségét, hogy a vizsgált objektum a t időpillanatban az $\underline{r}$ helyvektorral jellemzett dV térfogatban található. (Lásd a 9.17. ábrát.)



9.17. ábra. A hullámfüggvény fizikai jelentésének magyarázatához

Mivel a $\Psi(\underline{r}, t)$ hullámfüggvénnyel jellemzett rendszer valahol a térben biztosan megtalálható, ezért az ennek valószínűségét megadó $\int_{(V)} |\Psi(\underline{r}, t)|^2 dV$ integrál eggyel kell legyen egyenlő. Ezt a feltételt nevezzük a hullámfüggvény **normálási feltételének**.

A hullámfüggvény normálási feltétele:

$$\int_{(V)} |\Psi(\underline{r}, t)|^2 dV = 1$$

A hullámfüggvény már megjelent de-Broglie-nál, ugyanis az általa bevezetett hullámok pontosan úgy viselkednek mint a hullámfüggvény. A hullámfüggvény fizikai értelmezéséből következik, hogy nem háromdimenziós hullámmozgást ír le a térben. Lényegében a hullámfüggvény elnevezés megtévesztő, ezért talán következetesebb az **állapotfüggvény** elnevezés.

A klasszikus fizikában a rendszerek időbeli viselkedését az erőtvény, vagy dinamikai egyenlet határozza meg. A kvantummechanikában az állapotfüggvény időbeli fejlődését a **Schrödinger-egyenlet** írja le. Általános felírásához a lineáris operátorok ismerete szükséges, ezért ettől itt eltekintünk.

Az állapotfüggvény stacionárius esetben mindig felírható a következő alakban:

$$\Psi(\underline{r}, t) = \varphi(\underline{r}) e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

ahol $\varphi(\underline{r})$ -csak a helytől függő függvény, E -a stacionárius rendszer energiája, $i = \sqrt{-1}$ -a képzetes egység, t -az idő.

9.6.2. Dobozba zárt elektron mozgása.

Vizsgáljuk meg milyen módon mozog a kvantummechanikai leírás szerint egy elektron egy dimenzióban, ha mozgását egy a hosszúságú szakaszra korlátozzuk. A probléma felvetése tisztán elméletinek tűnhet, de van gyakorlati haszna. A hosszú láncmolekulákban gyakran előfordul, hogy egy-egy elektron (ezeket az elektronokat nevezzük delokalizált elektronoknak) majdnem teljesen szabadon mozoghat a molekula teljes hosszában. Ezt az esetet modellezi ez a példa.

Az elektron időben állandósult állapotát leíró állapotfüggvény tértől függő $\varphi(x)$ része eleget kell tegyen az állóhullám-egyenletnek.

Tehát érvényes kell legyen a következő egyenlet:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \varphi(x) = 0$$

Felhasználva a $\lambda = \frac{h}{p}$ de-Broglie féle összefüggést $k = \frac{p}{\hbar}$. Az elektron energiája:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Mindezeket figyelembe véve kapjuk a probléma egydimenziós stacionárius Schrödinger egyenletét:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0. \quad (9.1)$$

A (9.1). egyenletet két peremfeltétel mellett kell megoldani, amelyek a $\varphi(0) = 0$ és $\varphi(a) = 0$. Mivel a (9.1). egyenlet megegyezik a harmonikus rezgéseket meghatározó egyenlettel, csak benne az időváltozó helyett helyváltozó szerepel, valamint a körfrekvencia helyére a hullámszám írandó, megoldása is harmonikus rezgést leíró függvény. Tehát:

$$\varphi(x) = A \sin(kx + \phi)$$

Figyelembe véve a peremfeltételeket azt kapjuk, hogy $\phi = 0$ és $k = \frac{n\pi}{a}$, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$

A hullámszám kifejezhető az elektron energiájával, így az egyenlet megoldása alapján meghatározható a dobozba zárt elektron energiája.

$$k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{2mE}{\hbar^2},$$

ennek alapján

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2.$$

Határozzuk meg a $\varphi(x)$ függvény amplitúdóját! Ehhez az állapotfüggvény fizikai jelentését kell segítségül hívunk. A $|\varphi(x)|^2 dx$ mennyiség megadja annak valószínűségét adott t időpillanatban, hogy az elektron az x és $x + dx$ közötti intervallumban tartózkodik. Mivel az elektron az a hosszúságú intervallumba van zárva, így itt biztosan megtalálható valahol. Ha ezen szakasz minden pontjában kiszámoljuk az elektron előfordulási valószínűségét, majd ezeket összeadjuk, akkor egyet kell kapjunk, hiszen annak valószínűsége, hogy az elektron valahol a szakaszon van az a biztos esemény valószínűsége, vagyis éppen egy. Így

$$\int_0^a |\varphi(x)|^2 dx = 1.$$

Ennek alapján $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

A dobozba zárt elektron:

Az a hosszúságú szakaszra zárt elektron térbeli eloszlását meghatározó függvény:

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

Az a hosszúságú szakaszra zárt elektron energiája:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Kapott megoldásunk magában hordozza a kvantummechanika egyik általános érvényű jellemzőjét. Ha egy mikroobjektum mozgását térben korlátozzuk, akkor energiája csak **diszkrét energiaértékeket** vehet fel. Ez az eredmény eltér a klasszikus fizikában megszokott helyzettől, mely szerint a makroszkopikus objektumok energiája folytonosan változhat.

9.6.3. Az alagút-effektus

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor egy elektron közeledik egy olyan térrészhez (potenciállépcső), amelyben potenciális energiája pozitív lenne. Az elektron valamilyen meghatározott E_k mozgási energiával közelítsen ehhez a térrészhez. Most csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor az elektron mozgási energiája klasszikus értelemben nem elég a potenciál leküzdéséhez, azaz $E < V$.

Tehát a potenciális energia legyen a következő:

$$E_p(x) \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ V = \text{konstans}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Ilyenkor a klasszikus fizika szerint egy makroszkopikus test nem hatolhat be abba a térrészbe, ahol nagyobb lenne potenciális energiája, mint az a mozgási energia, amivel közeledik ehhez a térrészhez. A kvantummechanikai eredmény azonban mást mutat.

Oldjuk meg a stacionárius Schrödinger-egyenletet a fenti potenciál esetében. Először is írjuk fel a részecske összenergiáját:

$$E = E_k + E_p = \frac{p^2}{2m} + E_p,$$

ahol E_k -a részecske mozgási energiája, E_p -a részecske potenciális energiája, p -a részecske impulzusa, m -a részecske tömege.

Vegyük figyelembe a de-Broglie féle $p = \hbar k$ összefüggést, és fejezzük ki a k hullámszám negyzetét:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_p).$$

Helyettesítsük k^2 kifejezését a stacionárius Schrödinger-egyenletbe:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - E_p)}{\hbar^2} \varphi(x) = 0. \quad (9.2)$$

A (9.2). egyenletet a potenciál origóbeli ugrása miatt az x -tengely negatív és pozitív oldalán külön-külön kell megoldani.

Nézzük először az $x < 0$ tartományt. Itt $E_p = 0$. Tehát itt a megoldandó egyenlet:

$$\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_n(x) = 0.$$

Vezessük be a $k_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ jelölést. Ekkor

$$\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} + k_0^2\varphi_n(x) = 0.$$

Keressük ennek az egyenletnek a megoldását a következő alakban:

$$\varphi_n(x) = e^{ik_0x} + Ae^{-ik_0x}.$$

Itt $i = \sqrt{-1}$ a képzetes egység.

Ezen megoldás fizikai jelentése a következő: egységnyi amplitúdójú síkhullám közelít a potenciállépcsőhöz, majd onnan visszaverődve egy A amplitúdójú visszavert síkhullám is hozzájárul a megoldáshoz.

Következzen az $x \geq 0$ tartomány. Itt $E_p = V$. Tehát az itt megoldandó egyenlet:

$$\frac{d^2\varphi_p(x)}{dx^2} + \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\varphi_p(x) = 0.$$

Ez esetben az $\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$ kifejezés negatív, mivel $E < V$. Ezért vezessük be a $-K^2 = \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$ jelölést. Ezzel az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{d^2\varphi_p(x)}{dx^2} - K^2\varphi_p(x) = 0,$$

vagy ami ugyanaz:

$$\frac{d^2\varphi_p(x)}{dx^2} = K^2\varphi_p(x).$$

Tehát olyan $\varphi_p(x)$ függvényt keresünk, amelynek második deriváltja K^2 -szerese magának a keresett függvénynek. A differenciálszámítás elemeit ismerve ez a függvény csak a következő alakú lehet:

$$\varphi_p(x) = Ce^{-Kx} + De^{Kx}.$$

A megoldás egy exponenciálisan csökkenő és egy exponenciálisan növekvő függvény kombinációja. Tudjuk, hogy ezen függvény négyzetének

normálásakor egyet kell eredményül kapnunk. Ez az exponenciálisan növekvő tag jelenléte esetén nem lehetséges, hiszen négyzetének integrálja a teljes $x \geq 0$ tartományra végtelen. Tehát a hullámfüggvény fizikai jelentése miatt az exponenciálisan növekvő tag együtthatója nulla kell legyen, azaz

$$D = 0.$$

Így

$$\varphi_p(x) = Ce^{-Kx}.$$

Határozzuk meg a megoldásainkban szereplő A és C állandókat. Ehhez a $\varphi_n(x)$ és $\varphi_p(x)$ megoldások $x = 0$ -nál való viselkedését kell vizsgálni. Mivel a potenciállépcső magassága az $x = 0$ pontban véges, a kapott megoldásoknak és azok első deriváltjainak az $x = 0$ pontban azonosaknak kell lenniük. Ebből az következik, hogy:

$$1 + A = C$$

$$ik_0(1 - A) = -KC$$

Megoldva ezt az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy:

$$A = \frac{ik_0 + K}{ik_0 - K},$$

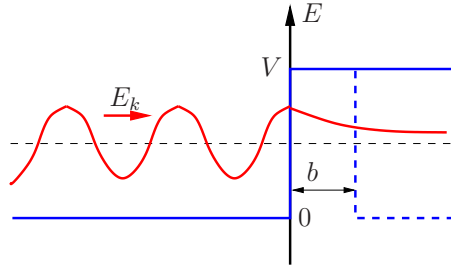
és

$$C = \frac{2ik_0}{ik_0 - K}.$$

A megoldásban az a meglepő, hogy az elektront leíró $\varphi_p(x)$ nem lesz nulla a potenciállépcsőben, hanem egy exponenciálisan lecsengő hullámfüggvényt kapunk eredményül. Mivel a hullámmagasság négyzete az elektron előfordulási valószínűségét adja meg, így azt mondhatjuk, hogy az elektron behatol a számára klasszikus értelemben elérhetetlen térrészbe is. Ezt a helyzetet szemlélteti a 9.18. ábra.

Ha a potenciállépcső véges szélességű, akkor az elektron átjut ezen a klasszikus értelemben számára leküzdhetetlen akadályon. A Schrödinger-egyenlet alapján meghatározható a potenciállépcsőn való áthatolás valószínűsége is (T). Ez a valószínűség a következő mennyiséggel arányos:

$$T \sim \frac{\varphi_p^2(b)}{\varphi_p^2(0)} \sim e^{-\frac{2b}{\hbar} \sqrt{2m(V-E)}} \quad (9.3)$$



9.18. ábra. Elektron egydimenziós potenciállépcsőnél

Látható, hogy az áthatolás valószínűsége csökken ha b nő, vagy ha $V - E$ növekszik, azaz ha nő a potenciállépcső szélessége, vagy a különbség a potenciállépcső magassága és az elektron energiája között.

A véges potenciállépcsőn való áthatolás jelenségét nevezzük **alagút-effektusnak**. Jelentősége óriási, hiszen ez teszi lehetővé a radioaktív bomlást, vagy az elektronok átlépését fémek érintkezési felületein.

9.7. Az elektron állapotai az atomban

9.7.1. A hidrogénatombeli elektron

Vizsgáljuk meg a hidrogénatombeli elektron mozgását a kvantummechanika alapján. Itt is a stacionárius Schrödinger egyenletet (állóhullámegyenlet) kell megoldani, de most három dimenzióban, mivel az elektron potenciális energiája az atommag elektromos terében a következő alakú:

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Figyelembe véve a $k^2 = \frac{2m_e}{\hbar^2}(E - E_p)$ összefüggést, a háromdimenziós stacionárius Schrödinger-egyenlet a következő alakot ölti:

$$\Delta\varphi(\underline{r}) + \frac{2m_e}{\hbar^2}(E - E_p)\varphi(\underline{r}) = 0. \quad (9.4)$$

A (9.4). egyenlet általános megoldását mellőzzük a matematikai bonyolultság okán, de egy speciális megoldást levezetünk. Mivel az atommag elektromos tere gömbszimmetrikus (csak az atommagtól mért távolságtól

függ) ezért keressük a (9.4). egyenlet $F(r)$ gömbszimmetrikus megoldását:

$$\varphi(\underline{r}) = F(r).$$

Ebben az esetben a Schrödinger-egyenlet a következőképpen módosul:

$$\Delta F(r) + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) F(r) = 0. \quad (9.5)$$

Figyelembe véve, hogy F csak r -től függ (a levezetést mellőzzük):

$$\Delta F(r) = \frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF(r)}{dr}.$$

Az $F(r)$ megoldás a H-atom elektronjának hullámfüggvénye, így normált kell legyen. Azaz:

$$\int_{(V)} F^2(r) dV = 1.$$

Az elemi dV térfogat egy r sugarú dr vastagságú gömbhéj térfogata, így:

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Figyelembe véve az elemi térfogat kifejezését az $F(r)$ megoldás normálási feltétele a következő alakúra módosul:

$$\int_0^\infty r^2 F^2(r) dr = \frac{1}{4\pi}.$$

Keressük az $F(r)$ megoldást a következő alakban:

$$F(r) = N e^{-\lambda r},$$

ahol N, λ pozitív valós állandók.

A normálási feltételből az N állandó értékére a következő adódik:

$$N = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}.$$

Helyettesítsük az $F(r)$ függvényt vissza a (9.5). egyenletbe. Az így kapott összefüggés a következő:

$$E + \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m_e} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\hbar^2 \lambda}{m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right\}.$$

Ennek az összefüggésnek minden r értékre teljesülnie kell. Ez csak akkor lehetséges, ha:

$$E + \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m_e} = 0,$$

és

$$\frac{\hbar^2 \lambda}{m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 0.$$

Határozzuk meg ezen egyenletrendszer alapján λ és E értékét:

$$\lambda = \frac{e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2},$$

$$E = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -13,605 \text{ eV}.$$

Látható, hogy a Bohr-modellből számított $n = 1$ kvantumszámmal jellemzett állapot energiáját kaptuk. A fenti megoldáshoz viszont nem volt szükség önkényesen meghatározott posztulátumokra, és az energia értékén túl megkaptuk az elektron hullámfüggvényét is gömbszimmetrikus esetre.

Vizsgáljuk meg a fenti gömbszimmetrikus állapotban lévő elektron előfordulási valószínűségét (dP) a $dV = 4\pi r^2 dr$ elemi térfogatban.

$$dP = |F(r)|^2 dV = \frac{\lambda^3}{\pi} e^{-2\lambda r} 4\pi r^2 dr$$

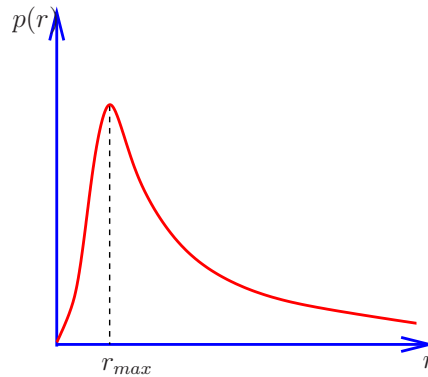
Ebből kifejezhető, az elektron előfordulásának sugár szerinti eloszlása ($p(r)$):

$$p(r) = \frac{dP}{dr} = 4\lambda^3 r^2 e^{-2\lambda r}.$$

A $p(r)$ függvény jellegét mutatja a 9.19. ábra. Látható, hogy a $p(r)$ valószínűségnek maximuma van az r_{max} helyen. r_{max} meghatározható a $p(r)$ függvény elemzésével. Azt kapjuk, hogy:

$$r_{max} = \frac{1}{\lambda} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 0,54 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Ez éppen az első Bohr-sugár, vagyis újfent a Bohr-moddellel megegyező eredményre jutottunk.



9.19. ábra. Az elektron előfordulási valószínűsége a sugár függvényében

Csak megjegyezzük, hogy az elektronállapotot jellemző sugárérték nem azt jelenti, hogy az elektron ilyen sugarú pályán kering az atommag körül, hanem azt, hogy ilyen sugárnál van maximuma a H-atombeli elektron előfordulási valószínűségének.

A H-atombeli elektronnak kvantummechanikai leírása természetesen ugyanazokra az eredményekre vezet, mint a Bohr-féle atommodell, azonban a kvantummechanikai leírásnak az előnye, hogy sikerrel alkalmazható többelektronos atomok esetében is, míg a Bohr-modell nem.

9.7.2. Heisenberg-féle határozatlansági relációk

De-Broglie elképzelése szerint az elektron egy olyan fizikai objektum, amely meghatározott dinamikai jellemzőkkel bír (tömeg, impulzus, energia stb.), ugyanakkor hullámtulajdonságokat is mutat. Ráadásul azt láttuk, hogy impulzusa és hullámhossza összefüggenek. Az ilyen objektumot megpróbálhatjuk leírni úgy mint egy *hullámcsomagot*.

Minden hullámcsomag esetében (Lásd a Hullámmozgás című fejezet hullámcsomagról szóló részét!) érvényes a határozatlansági összefüggés, ami azt mondja ki, hogy a csomag mérete (Δx) és a csomagot alkotó harmonikus hullámösszetevők hullámszámait tartalmazó hullámszám-intervallum (Δk) a következő összefüggést kell kövesse:

$$\Delta x \Delta k \sim \text{konstans.}$$

Nem megyünk bele a hullámcsomag méretének definíciója körüli matematikai problémák tárgyalásába. Ennek megfelelő megválasztása mellett akkor kapjuk a kvantummechanika ellentmondásmentes matematikai elméletét, ha a határozatlansági összefüggésbeli konstans értéke $\frac{1}{2}$. Tehát a mikrovilág objektumait leíró hullámcsomagok esetében a határozatlansági összefüggés a következő alakú:

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}. \quad (9.6)$$

A (9.6) összefüggésben az egyenlőség csak időben állandósult állapotban áll fenn.

Vegyük figyelembe a de-Broglie féle összefüggést egy mikroobjektum impulzusa és hullámszáma között.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k.$$

Itt bevezettük a $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ jelölést, amely gyakran szerepel majd a továbbiakban.

Ugyanilyen összefüggés érvényes a hullámcsomagot alkotó harmonikus hullámok hullámszám-intervalluma és a hullámcsomag impulzusbizonytalanságát jellemző Δp mennyiség között is.

$$\Delta p = \hbar \Delta k$$

Ezt bevezetve a határozatlansági összefüggésbe a következő egyenlőtlenségre jutunk:

Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.7)$$

W. Heisenberg német fizikus írta fel először ezt az összefüggést. Az összefüggés azt jelenti, hogy a mikrovilágban bizonyos fizikai mennyiségek nem mérhetőek egyszerre tetszőleges pontossággal. Az egyik mennyiség egyre pontosabb meghatározása a rendszer más jellemzőinek egyre nagyobb bizonytalanságához vezet.

Az impulzus és a hely közötti határozatlansági összefüggéshez hasonló határozatlansági összefüggés érvényes a mikroobjektumok energiaszintjeinek átlagos élettartama (τ) és az energianívók energiájának bizonytalansága (ΔE) között is.

$$\Delta E \cdot \tau \sim \hbar \quad (9.8)$$

A (9.8). összefüggés jelentése, hogy egy mikrorendszer energiatartalmának meghatározása annál bizonytalanabb (ΔE), minél rövidebb ideig (τ) tartózkodik a rendszer ebben az energiaállapotban.

Ezzel magyarázható a *spektrumvonalak természetes kiszélesedése* is. Amikor valamely elem atomjainak elektronjai ugyanabba a gerjesztett állapotba kerülnek, akkor ebben az állapotban csak bizonyos τ átlagos ideig (átlagos élettartam) maradnak, hiszen az energiaminimum elve következtében felesleges energiájukat (például foton kisugárzásával) környezetüknek átadva, alacsonyabb energetikai állapotba kerülhetnek.

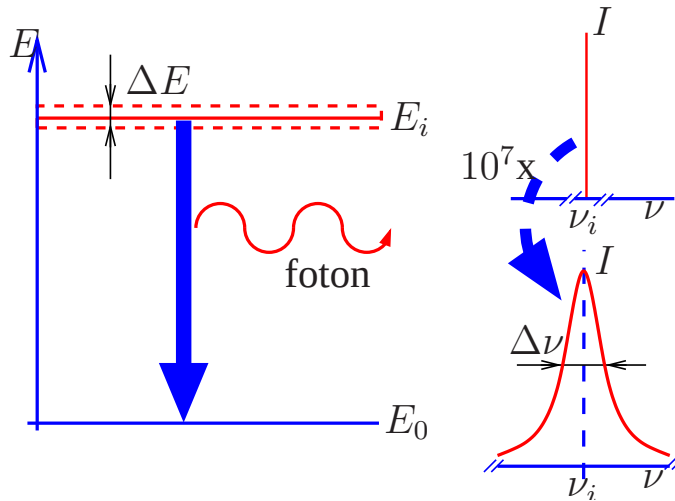
Tehát a gerjesztett nívók átlagos élettartama τ , így az ebben az állapotban tartózkodó elektron energiájának a határozatlansági összefüggés alapján $\Delta E = \frac{\hbar}{\tau}$ bizonytalansága van. Így az egyik atomban egy kicsit nagyobb lesz az elektron energiája a másokban meg kicsit kisebb. Ennek az a következménye, hogy a kisugárzott fotonok frekvenciáiban is lesznek eltérések. A frekvenciák intervallumának lesz valamilyen szélessége. Ezt a szélességet nevezzük a spektrumvonalak természetes szélességének.

Igen fontos szerepük van a kvantummechanikában azoknak a mennyiségeknek, melyek egyszerre tetszőleges pontossággal meghatározhatóak. Az ilyen mennyiségeket **kompatibilis mennyiségeknek** nevezzük.

9.7.3. A többelektronos atomok és a periódusos rendszer

A többelektronos atomok elektronjainak állapotát a kvantummechanika alapján sikerült kiszámolni. Ez egyben azt is jelentette, hogy sikerült megérteni a Mengyelejev által megsejtett periódusos törvényt, és ez által megérteni az elemek periódusos táblázatát.

Schrödinger egyenlete már a hidrogén esetében is meglehetősen bonyolult, de a komoly matematikai nehézségek a többelektronos rendszereknél lépnek fel. Megfelelő közelítő eljárásokkal azonban az elektronállapotok kellő pontossággal meghatározhatóak. Ahhoz, hogy megérthessük ezen számítások végeredményét, meg kell még ismerkednünk a kvantummechanika néhány további következményével.



9.20. ábra. A spektrumvonalak természetes szélességének kialakulása (E_0 -alapállapot energiája, E_i -gerjesztett állapot energiája, ΔE -gerjesztett nivó energiabizonytalansága, $\Delta\nu$ -spektrumvonal természetes szélessége, I -intenzitás)

Először is azt kell tisztáznunk, hogy mely fizikai mennyiségek meghatározása a legfontosabb. Nyilván azokra leszünk kíváncsiak, amelyek mérésénél a Heisenberg-féle relációk nem jelentenek korlátozást.

Az atomok esetében az *energia*, a *perdület nagysága*, a *perdület egyik vetülete* és egy tipikusan kvantumos mennyiség a *spin* értékei mérhetőek egyszerre tetszőleges pontossággal. Az energiával már foglalkoztunk.

A kvantummechanika további következménye, hogy a mikrorészecskék perdülete sem vehet fel tetszőleges értékeket, hanem csak a $\hbar$ egység meghatározott többszörösét.

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2$$

ahol L -a perdület nagysága, l -a **mellékkvantumszám** (mindig természetes szám, vagy nulla).

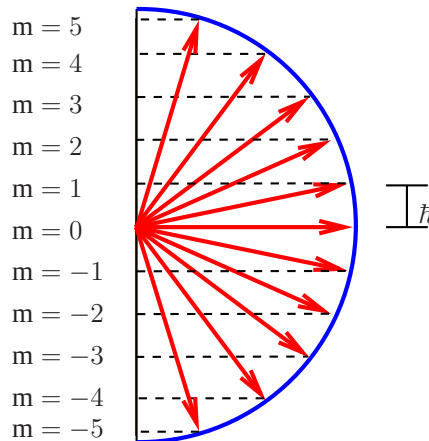
További következmény, hogy a klasszikus vektormennyiségek kvantummechanikai megfelelői nem mutathatnak a tér tetszőleges irányába. Ha meghatározunk egy tetszőleges irányt a térben (pl. külső mágneses tér iránya), akkor a vektormennyiségeknek az erre az irányra vett vetületei

csak a $\hbar$ egység egész számú többszörösei lehetnek. Ilyen vektormennyiség a perdület is. Ennek adott irányra–legyen ez a z -irány–való vetülete

$$L_z = m\hbar$$

ahol L_z -a perdület vetülete, m -pedig egész szám.

A fentebb leírt kvantálási folyamatot nevezzük **iránykvantálásnak**. (Lásd a 9.21. ábrát.)



9.21. ábra. Iránykvantálás

Eddig olyan mennyiségekkel találkoztunk, amelyek már ismertek voltak a klasszikus fizikában tanultakból. Most egy olyan mennyiséget vezetünk be, amelynek nincs a klasszikus fizikában megfelelője.

A mikrorészecskék sajátperdületéről, vagy **spinjéről** lesz szó. Láttuk, hogy az elektronnak van perdülete, amely mozgásából származik. Már azt is tudjuk, hogy ennek értéke kvantált az l mellékkvantumszámon keresztül.

Meglepetést okozott annak idején a fizikusok számára az a megfigyelés, hogy az elektron rendelkezik az előbb említett pályaperdületen kívül még más jellegű perdülettel is, amely nem kapcsolható össze semmiféle mozgással. Ezt az új perdületet nevezték el spinnek, és kiderült, hogy a legtöbb mikrorészecskének van spinje.

Bebizonyosodott az is, hogy a spin is kvantált mennyiség, úgy mint bármely más perdület. Egy kiválasztott irányra az elektron esetében két vetülete lehet.

$$S_z = s_z\hbar,$$

ahol S_z -az elektronspin vetülete, s_z -pedig az un. spinkvantumszám, értéke $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (s_z nem egész szám!).

Megpróbálták az elektronspint úgy értelmezni, mint az elektron saját szimmetriatengelye körüli forgásából származó perdületet. Ez az elképzelés két oknál fogva is helytelen. Mai tudásunk szerint az elektron pontszerű részecske, így nincs értelme a szimmetriatengely körüli forgásnak. Ha az elektron mégsem bizonyul pontszerűnek, hanem valamilyen kiterjedéssel bíró valaminek, akkor sem lehet a sugara nagyobb a klasszikus elektrodinamika alapján számított értéknél. Az ilyen nagyságú részecskének viszont fénysebességnél nagyobb kerületi sebességgel kellene pörögnie, hogy perdülete a spin mért értékével megegyezzen. Az ilyen mozgás pedig ellentétben áll a relativitáselmélettel.

Tehát eredményül azt kapjuk, hogy az atomokban egy elektronállapot jellemzéséhez négy kvantumszámra van szükség. Ezek:

- n - főkvantumszám - az energiát határozza meg ($n = 1, 2, 3, \dots$) **főkvantumszám**
- l - mellékkvantumszám - a perdületet határozza meg ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$) **mellékkvantumszám**
- m - mágneses kvantumszám - a perdület egy kitüntetett irányra (pl. külső mágneses tér) való vetületét határozza meg ($m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$) **mágneses kvantumszám**
- s_z - spin kvantumszám - a sajátperdület egy kitüntetett irányra való vetületét határozza meg ($s_z = -1/2, +1/2$) **spin kvantumszám**

A kvantummechanika a feles spinnel rendelkező részecskék esetében egy további következménnyel jár. Két, vagy több feles spinű részecske, vagy **fermion** sohasem lehet ugyanabban a kvantumállapotban. Az atomon belüli elektronokra ez megfogalmazható a következő módon is:

Pauli-elv:

Egy atomon belül nem létezhet két, vagy több elektron, amelyek ugyanazon kvantumszámokkal jellemezhetők.

Az energiaminimum elve, valamint a Pauli-elv képezik az alapját a periódusos rendszer kvantumfizikai értelmezésének.

9.8. Fény és anyag kölcsönhatása

Ebben az alfejezetben a kvantummechanika egyik jelentős alkalmazásával ismerkedünk meg.

9.8.1. Az indukált átmenetek

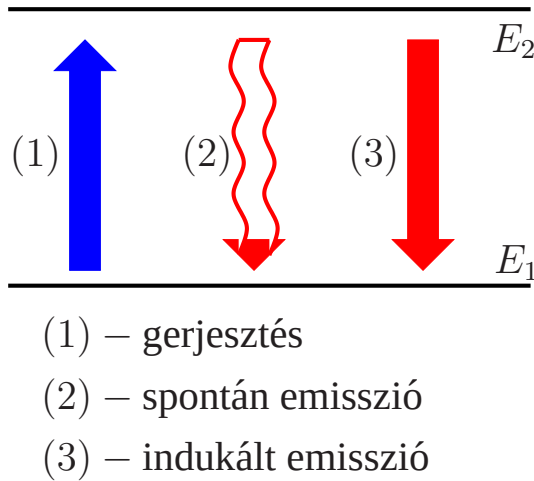
Tudjuk, hogy a sugárzó test atomjaiban az elektronok külső elektromágneses mező hatására nagyobb energiájú pályára állhatnak, ha a külső tér fotonjai között akad olyan, amelynek a frekvenciája eleget tesz a frekvenciafeltételnek.

- **Gerjesztés** - az atomok elektronjai külső energiaközlésre alacsonyabb energetikai állapotukból nagyobb energiájú állapotba kerülhetnek. Ez a gerjesztési folyamat *mindig külső energia hatására következik be*, tehát az alacsonyabb energetikai állapotból magasabb energetikai állapotba való átmenet valószínűsége arányos a külső elektromágneses tér intenzitásával. Ezért ez a folyamat *indukált*, vagy *stimulált* folyamat.

A nagyobb energiaszintre gerjesztett elektronok az energiaminimum elve miatt nagyon rövid idő után visszakerülnek az alapállapotba, és ez a folyamat nem függ a külső behatásoktól.

- **Spontán emisszió** - az energiaminimum elvének következtében a gerjesztett elektron, minden külső behatás nélkül, alacsonyabb energetikai állapotba kerülhet miközben többletenergiáját egy foton formájában sugározza ki. Tehát ennek az átmenetnek a valószínűsége független a külső tér intenzitásától.
- **Stimulált vagy indukált emisszió** - ha jelen van már egy, vagy több $h\nu = E_2 - E_1$ energiájú foton, és a rendszer gerjesztett állapotban van, akkor a gerjesztett elektron a már jelenlévő foton hatására az alacsonyabb energetikai állapotba kerül egy újabb ugyanolyan $h\nu$ energiájú foton kisugárzásának kíséretében. Tehát a stimulált emisszió bekövetkezésének valószínűsége függ a külső elektromágneses mező intenzitásától.

Mivel a spontán emisszió teljesen véletlenszerű folyamat, ezért az emittált foton tulajdonságai is véletlenszerűek. Tehát két különböző atomból származó, egyforma energiájú átmenet során emittált fotonok energiájuktól eltekintve tulajdonságaikban nem hasonlítanak egymásra, ezt úgy mondjuk, hogy *nem koherensek*.



9.22. ábra. A spontán és stimulált emisszió

A stimulált emissziót különböző atomokban ugyanaz a külső elektromágneses mező kényszeríti ki, ezért az így emittált fotonok között nagy számban találunk minden tulajdonságukban megegyezőket, un. **koherens fotonokat**.

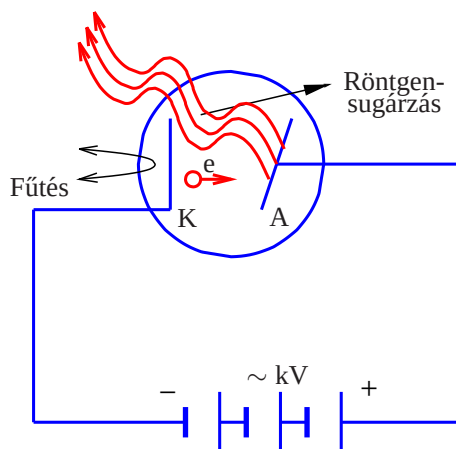
9.9. Röntgensugárzás

Az eddig leírtak alapján értelmezhető a K. Röntgen által a XX. század elején felfedezett X-sugarak, vagy **röntgensugarak** eredete. Röntgen katódsugarakat vizsgált magas feszültség mellett.

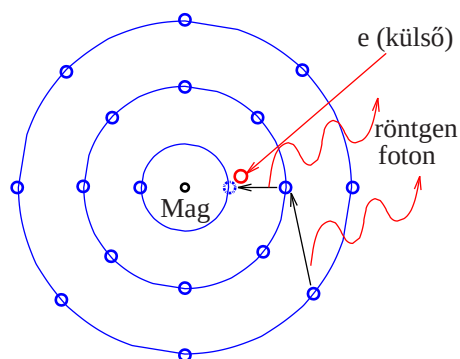
Kísérleti berendezésének sémája a 9.23. ábrán látható. A hevített K katódból elektronok lépnek ki, amelyek a magas gyorsítófeszültség hatására keV nagyságrendű mozgási energiával csapódnak be az általában nehézfém-ből készült A anódba. Az anódból láthatatlan röntgensugárzás távozik, amelyet Röntgen csak azért tudott észrevenni, mert a röntgenszó mellett cinkszulfid ernyő volt, amelyik elektromágneses sugarak hatására foszforeszkált.

A sugarak tanulmányozása közben Röntgen megállapította azok minden lényeges tulajdonságát. Ezek szerint rövid hullámhosszúságú, tehát nagy energiájú (néhány keV), és nagy áthatolóképességű elektromágneses sugárzás a röntgensugárzás.

A röntgensugárzás keletkezésének mechanizmusát a 9.24. ábra alapján



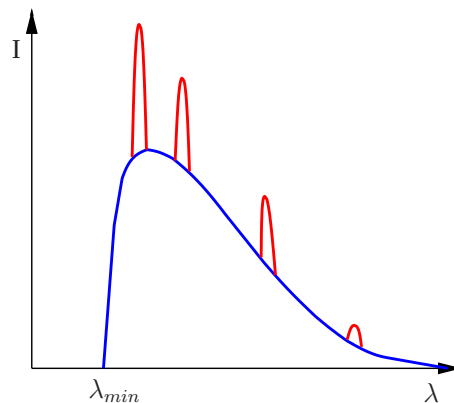
9.23. ábra. A röntgencső



9.24. ábra. A röntgensugárzás keletkezése

értelmezzük. Ezen az anód egyik nehézfémet atomjának vázlatos modelljét látjuk.

A katód felől érkező gyors elektron ütközhet a belső pályák egyikén tartózkodó kötött elektronnal, amelynek kötési energiája általában néhány-szor tíz keV, és kiszakíthatja azt az atom kötelékéből. Az így visszamaradt ionban az energiaminimum elve miatt átrendeződés megy végbe. Valamilyik elektron átugrik a kilökött elektron helyére, fölösleges energiáját foton formájában sugározza ki. Ennek az elektronnak a helyébe is beugorhat egy magasabb energiaszintről egy elektron, amelyik szintén foton formájában szabadul meg felesleges energiájától, stb. Az így kibocsátott fotonok alkotják a **karakterisztikus röntgensugárzást**.



9.25. ábra. Egy tipikus röntgenspektrum

Egy tipikus röntgenspektrumot látunk a 9.25 ábrán. A nyilakkal jelölt csúcsok a karakterisztikus röntgensugárzásból adódnak. A leírtakból következik, hogy ez jellemző a kibocsátó atomra. A karakterisztikus spektrum láthatóan egy folytonos háttérre rakódik rá. Magyarázzuk meg ezt a háttérrel. Az anódra csapódó elektron fékeződik a nehézfémet atomok között, mert ionizálja azokat, így vesz mozgási energiájából. Mivel töltött részecske, és a fékeződés miatt negatív gyorsulása van, a klasszikus elektrodinamika alapján energiát sugároz ki elektromágneses sugárzás formájában. Ezt a sugárzást **fékezési sugárzásnak** nevezzük, és spektrumában minden energia megtalálható nullától a belépő elektron maximális energiájáig. Ennek a maximális energiának felel meg a rövid hullámhosszú λ_{min} él az ábrán.

9.9.1. Az elektronmikroszkóp

Korábbi tanulmányainkból ismeretes, hogy a mikroszkópok által felbontható részletek nagysága elsősorban a használt fény hullámhosszától függ. Azaz a használt hullámhossznál kisebb méretű részletek nem különböztethetők meg. Emiatt normál fénymikroszkópokkal a legkisebb felismerhető részlet mérete néhányszor 10^{-7} m.

Az elektron hullámtulajdonságának felfedezése után felvetődött az a gondolat, hogy esetleg ezekkel a hullámokkal kisebb részletek is tanulmányozhatóak lesznek. Az ilyen, tehát az elektronokkal történő leképezés elvén működő mikroszkópokat nevezzük **elektronmikroszkópnak**.

9.5. példa: Mekkora feszültséggel kell egy elektront gyorsítani ahhoz, hogy de Broglie-hullámhossza 10^{-10} m legyen?

Megoldás: Tegyük fel, hogy az elektronnak a 10^{-10} m-es hullámhosszhoz nem kell a fény sebességével összemérhető sebességgel repülnie. (A feladat végén ezt ellenőrizni fogjuk.)

Ilyenkor U feszültség qU mozgási energiát ad át az elektronnak, ami az elektron mozgási energiájává válik: $qU = (1/2)mv^2$. Innen az elektron sebessége: $v = \sqrt{2q/m \cdot U}$. A de Broglie-hullámhossz ekkor nyilván

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2Uqm}}$$

lesz.

Innét a keresett feszültség könnyen kifejezhető. Helyettesítsük be a feladat értékeit is:

$$U = \frac{h^2}{2qm\lambda^2} = 151 \text{ V}.$$

Tehát 151 V gyorsítófeszültség esetén az elektron hullámhossza 10^{-10} m lesz.

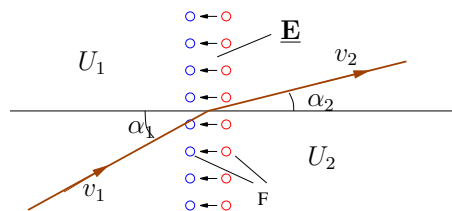
Ellenőrizzük végül, jogos-e annak feltételezése, hogy a kialakuló sebesség sokkal kisebb, mint a fénysebesség. Az előbb levezetett $v = \sqrt{2q/m \cdot U}$ összefüggés szerint ez könnyen kiszámolható:

$$v = 7,33 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

Ez valóban sokkal kisebb a fény sebességénél, tehát jogos volt a klasszikus fizika szerint számolni.

Ahhoz, hogy megértsük az elektronmikroszkópok működését, ismerkedjünk meg az elektronoptika alapegyenletével.

Az elektronoptika alapegyenlete. Hozzunk létre egy olyan rendszert, hogy a tér egyik részében valamilyen U_1 , a másikban valamilyen U_2 feszültség uralkodjon, és a két részt egy vékony réteg válassza el egymástól. Ilyet pl. úgy biztosíthatunk, ha két közeli fémrács egyikét U_1 , a másikat U_2 feszültségre kapcsoljuk. (Ld. 9.26. ábra. Itt „F” jelöli a fémrácsokat.) Csak ezen a rétegen belül lesz feszültségkülönbség, így csak itt fog az $\underline{E}$ elektromos térerősség 0-tól különbözni. A térerősségvektor a rácsok síkjára merőleges lesz.



9.26. ábra. Az elektronoptika alapegyenletéhez

Érkezzen ezen réteghez egy párhuzamos elektronsugár v_1 sebességgel, az áthaladás után pedig menjen v_2 sebességgel. Amennyiben a feszültséget úgy mérjük, hogy $U = 0$ ott legyen, ahonnan az elektronok indultak, igaz lesz, hogy $v_1 = \sqrt{2\eta U_1}$ és $v_2 = \sqrt{2\eta U_2}$.

Továbbá az elektronok sebességének a rácsokkal párhuzamos (az $\underline{E}$ -re merőleges v_p komponense nem változik, hisz az elektromos térerősségnek nincs ilyen irányú komponense. Ekkor viszont felírhatjuk, hogy az ábrán bejelölt „beesési” és „törési” szögek szinusza:

$$\sin \alpha_1 = \frac{v_p}{v_1} \quad \sin \alpha_2 = \frac{v_p}{v_2}$$

Ekkor viszont

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_1}}.$$

Ez nagyon hasonlít a Snellius-Descartes törvényre. Azaz az elektronok elektromos térben úgy mozognak, mint egy fénysugár mozogna olyan közegben, aminek törésmutatója helyről-helyre változik, és a törésmutató értéke a helyi feszültség négyzetgyöke.

Fontos hangsúlyozni, hogy a feszültség nullpontját úgy kell megválasztanunk, hogy épp ott legyen az elektron sebessége is 0. Ez azt is jelenti, hogy különböző sebességű elektronnyalábokra különböző törésmutatóértékek vonatkoznak. Tehát az elektronmikroszkópokban monoenergiikus nyalábokat kell használni, azaz olyanokat, amiket alkotó elektronok azonos sebességgel (így azonos energiával) rendelkeznek.

Alkalmas alakú fémrácsok, gyűrűk feszültségét változtatva tehát elérhetjük akár azt is, hogy egy lencse alakú térrészben legyen más a potenciál, mint a tér egyéb helyein. Egy ilyen szerkezet az optikai lencsékhez hasonló törvényszerűségek szerint fogja az elektronnyalábokat gyűjteni (vagy szórni). A fő különbség az lesz, hogy az elektromos lencséknek nincs határozott felülete, hanem a feszültség (és így a törésmutató) folytonosan változik bennük. Továbbá ezen lencsék vastagsága nem lesz elhanyagolható a méretükhöz képest, így nem a vékony lencsékre vonatkozó egyszerű összefüggéseket kell használnunk.

Az egyszerű elektronmikroszkóp A legegyszerűbb elektronmikroszkóp felépítése lényegében megegyezik az optikai mikroszkópokéval. Azaz egy (monoenergiikus) elektronforrás részecskéit egy ún. „kondenzorlencse” párhuzamos nyalábbá alakítja. Ezt a nyalábot vetítjük a vizsgálandó tárgyra. A tárgyon átmenő elektronokat azután egy elektromos vagy mágneses lencserendszer alakítja felnagyított képpé. Mivel az elektronok közvetlenül nem láthatók, ezért a képet egy fluoreszkáló anyaggal bevont felületen kapjuk. (Fluoreszkáló anyagon itt olyan anyagot értünk, amely, ha elektronok csapódnak rá, világítani kezd.)

Az egyszerű elektronmikroszkóppal kb. 100 000-szeres nagyítás érhető el. Ezen elektronmikroszkóp használatának erős korlátot szab, hogy csak vékony rétegek tanulmányozhatóak vele, és a tárgy hosszadalmas előkészítését igényli a mérés.

A reflexiós pásztázó elektronmikroszkóp A reflexiós pásztázó elektronmikroszkóp alapötlete a következő: Egy elektronforrásból kijövő elektronnyalábot elektromos vagy mágneses lencsék segítségével a tárgy egy pontjára fókuszáljuk. Egy eltérítő rendszerrel ezt a fókuszpontot a tárgy tetszőleges helyére tudjuk vinni. A tárgyból kilépő másodlagos elektronokat egy oldalt elhelyezett elektrondetektor fogja fel. (Másodlagos elektronok

a tárgy atomjaiból az elektron-nyaláb hatására kilökött elektronok. Ezek zömmel nem a nyaláb irányában mozognak.)

Ez a mikroszkóp úgy alkot képet, hogy a tárgy egyes pontjaihoz annak megfelelő intenzitást rendelünk, amennyi elektront a detektor mutatott, amikor a nyaláb épp arra a pontra volt fókuszálva.

A végeredményként adódó kép térbeli hatást kelt. Ezzel a módszerrel kb. $5 \cdot 10^{-9}$ m-es részletek választhatók még külön.

A vizsgálandó tárgy előkészítése igen egyszerű. (Ellentétben az egyszerű és a transzmissziós pásztázó elektronmikroszkóppal.)

A transzmissziós pásztázó elektronmikroszkóp A transzmissziós elektronmikroszkóp alapgondolata nagyon hasonlít az egyszerű elektronmikroszkópéhoz. A fő különbség, hogy itt nem az egész tárgyat világítjuk meg, hanem egy fókuszált nyaláb végigpásztázza a tárgyat és az átmenő elektronokat képezzük le egy elektromos vagy mágneses lencserendszer segítségével.

A transzmissziós elektronmikroszkóp azért jobb az egyszerűnél, mert mindig csak egy képpont hatását mérjük, így a szomszédos helyekről kiinduló szórt elektronok nem befolyásolják az adott képpontbeli intenzitást. Ez nagyobb felbontást tesz lehetővé.

A téremissziós elektronmikroszkóp A téremissziós elektronmikroszkóp alapelve a következő: Egy nagyon hegyes wolfram tűvel szemben egy gyűrű alakú fémdarabot helyezünk el, majd a tűt negatív, a gyűrűt pozitív feszültségre kapcsoljuk. (A szokásos feszültség kb. 5 kV.)

Ekkor a tű hegye körül nagyon nagy térerősség fog kialakulni, ami elektronokat szakít ki a tű felületéből, amiket a pozitív töltésű gyűrű felgyorsít. Ezek az elektronok egy fluoreszkáló felfogóernyőbe csapódnak.

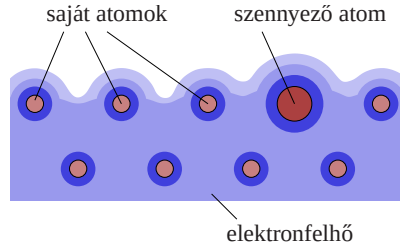
A téremissziós elektronmikroszkóp nagyítása a felfogóernyő és a tű hegye sugarának hányadosa. Elérhető az 1 000 000-szoros nagyítás is.

Ezzel a mikroszkóppal a wolfram tű (vagy az arra rágőzölögtetett anyag) kristályszerkezete megfigyelhető.

9.9.2. A pásztázó alagútmikroszkóp

A **pásztázó alagútmikroszkóp** működési elve a következő. Egy fémdarabban a kötést létrehozó elektronok szabadon mozognak a rácsban, így az elektronfelhők beburkolják a kristály rácspontjaiban található atomtörzseket és kitöltik a köztük levő helyet is. Az eloszlásuk mégsem egyenletes,

mert a rácspontokban lévő, pozitív töltésű atomtörzsek vonzzák a negatív töltésű elektront, így ott az elektronfelhő sűrűbb, ahogy azt a 9.27. ábra mutatja.



9.27. ábra. Elektronfelhő sűrűségének változása fém felszíne közelében.

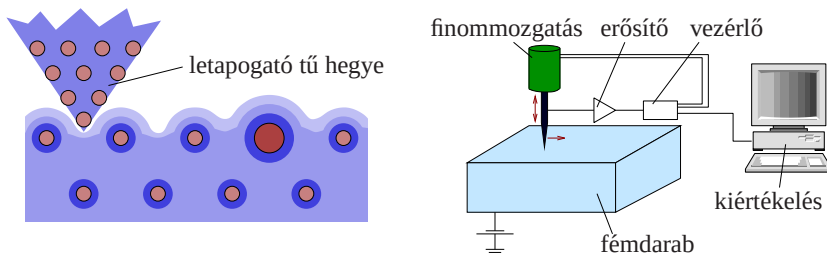
A pásztázó alagútmikroszkóp ezt az elektronfelhőt „tapogatja le”, pontosabban megállapít egy olyan felületet, mely mentén az elektronfelhő sűrűsége egy adott értéket vesz fel. Ez a felület egy fém felszínén nem sima, hanem az atomok közelében kidudorodik és a dudor mértéke függ az atom fajtájától. A pásztázó alagútmikroszkópot az 1980-as években sikerült olyan pontosságra elkészíteni, hogy az egyes atomok helyét ily módon képes letapogatni. Ehhez a döbbenetes pontossághoz igen precíz mozgatásra és nagyon finom letapogató eszközre van szükség.

Finom letapogató eszközként olyan kristálydarabkát választanak, melyet rácssíkjai mentén törtek el, úgy, hogy a csúcsán csak egyetlen atom marad. Ez a leghegyesebb tű, amit az anyag szerkezete megenged.

A precíz mozgatást nem lehet hagyományos mechanikai eszközökkel elérni, hanem úgy történik, hogy a letapogató tűt piezoelektromos kristályokra rögzítik. A piezoelektromos kristály külső feszültség hatására megváltoztatja méretét, így mozgatja a letapogató tűt. Ez az elmozdulás kis feszültségek esetén a nanométernél is kisebb méreteken pontosan szabályozható.

Egy fémdarab felületének letapogatása úgy történik, hogy a tű és a fémdarab közé feszültséget kötnek, majd a tűt lassan közelítik a felülethez. Amikor a tű hegye olyan helyre kerül, ahol a fém elektronjainak sűrűsége számottevő, az alagúteffektus segítségével elektronok ugranak át a tűre, ami a tű és a fémdarab közti feszültséget biztosító áramkörben áramot eredményez. Ez az áramerősség egy adott feszültség mellett csak attól függ, milyen elektronsűrűségű helyen található a tű hegye, hisz az elektronfelhő sűrűsége épp az elektron adott helyen való tartózkodási valószínűségét

adja meg. Így egy adott áramerősség az elektronfelhő sűrűségének egy adott értékét jelenti. Amikor az alagúteffektus miatti áramerősség a kívánt mértéket eléri, a tűvel elkezdik letapogatni a felületet a következő módon.



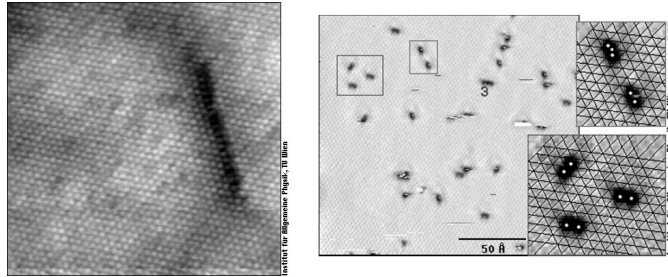
9.28. ábra. A pásztázó alagútmikroszkóp működési vázlata

A tű a felülettel párhuzamos síkban egy előre meghatározott rend szerint sorról sorra halad, felületre merőleges koordinátáját pedig egy egyszerű vezérlő automatika úgy szabályozza, hogy az alagúteffektus miatti áramerősség egy konstans értéken maradjon, azaz ha a pásztázás közben az áramerősség csökkenne, a tűt a felszínhez közelítik, ha növekedne, távolítják, így a tű hegye végig egy adott elektronsűrűségű felületen mozog és ez a felület a letapogatás során a tű helyzetéből megállapítható. Az adatfeldolgozáshoz és megjelenítéshez a vezérlő automatikából nyert információkat (a felület egyes pontjain milyen volt a tű felületre merőleges koordinátája) egy számítógép gyűjti össze. A működés vázlatát láthatjuk a 9.28. ábrán.

Ezzel az eszközzel atomonként letapogatható egy kristály felszíne, pontosabban az elektronok tartózkodási valószínűségének egy adott értékhez tartozó szintfelülete, ami tükrözi az atomok elhelyezkedését. Ez igen hatásos eszköz az anyagszerkezet tanulmányozására.

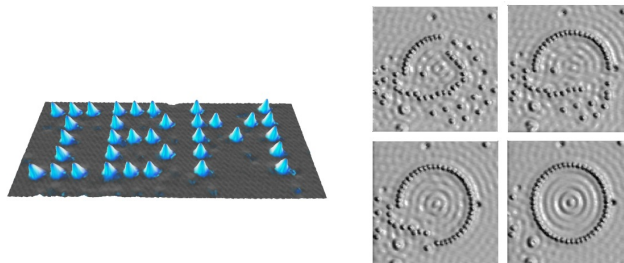
A 9.29. ábrán a Bécsi Műszaki Egyetem kutatásából mutatunk be két érdekes ábrát. A bal oldali egy szabályos kristálytani rendben lévő felszínt mutat, melyen a kis „dudorok” felelnek meg egy-egy atomnak. A felület csaknem teljesen szabályos, de a jobb oldalán egy néhány rácstávolságnyi széles tartományon sötétebb színt és (jól megfigyelve az atomokat) rácshibát fedezhetünk fel. A jobb oldali ábra alumínium felületére tapadó oxigén atomokat és molekulákat mutat. Az alumínium adja a szürke, enyhén hullámzó hátteret, az oxigénatomok sötét foltként jelentkeznek, mert nem adják át elektronjukat a pásztázó tűhegynek. Ezen jelenségek közvetlen tanulmányozása igen fontos számtalan elméleti és kísérleti kutatásban.

A pásztázó alagútmikroszkóp tűjének segítségével azonban az atomo-



9.29. ábra. Pásztázó alagútmikroszkóppal készített „felvételek”. Balra: egy szabályos felületen megjelenő rácshiba (sötét sáv). Jobbra: oxigén atomok és molekulák alumínium kristály felületére tapadva.

kat „terelgetni” is lehet a felszínen, elvileg tetszőleges struktúrákat kialakítva, azaz akár 1 atom szélességű „vezeték” vagy néhány atomból álló tranzisztort létrehozva, elérve ezzel a miniatürizáció elvi maximumát. Ezekkel a kutatásokkal kiemelten természetesen a mikroelektronikai ipar vezető cégei foglalkoznak. Már az 1980-as években sikerült egy nikkel lapkán pár tucat xenonatómból kirakni a kutatásokat vezető cég rövidítését (9.30. ábra, bal oldalt). Később még több atom segítségével érdekesebb struktúrákat, pl. egy kört is sikerült kialakítani, melybe beletett plusz elektron állóhullámai közvetlen megfigyelhetővé váltak (9.30. ábra, jobb oldalt).



9.30. ábra. Egyedi atomokból, pásztázó alagútmikroszkóp segítségével kialakított minták.

9.10. Kérdések és feladatok

9.10.1. Elméleti kérdések

1. Írja fel egy λ hullámhosszúságú foton impulzusát!
2. Hogyan keletkezik röntgensugárzás elektronnyaláb fémbe való becsapódásakor?
3. Mit határoz meg fémek esetében a kilépési munka?
4. Mit jelent az a megállapítás, hogy a H-atom spektruma diszkrét vagy vonalas?
5. Mekkora a perdület kvantuma (egységnyi adagja)?
6. Mely két alapelv alapján magyarázható a periódusos rendszer szerkezete?
7. Milyen összefüggés van a foton energiája és frekvenciája között?
8. Fémre eső fotonok onnét elektronokat löknek ki. A fény melyik jellemzőjét kell változtatni, és milyen irányban, ha azt szeretnénk, hogy a kilépő elektronok sebessége csökkenjen? Miért?
9. Miért nem tapasztalható a Compton-effektus a látható fény fotonjainál?
10. Fotonok ütköznek szabad elektronokkal. A szóródó fotonok frekvenciáját számottevően kisebbnek tapasztaljuk, mint a bemenőket. Mit tudunk ez alapján mondani a fotonokról?
11. Két foton közül az elsőnek nagyobb az energiája, mint a másodiknak. Melyiknek nagyobb a tömege? Melyiknek nagyobb a hullámhossza? Miért?
12. Ismertesse röviden, miért nem lép ki egy elektron sem a fémekből fény hatására, ha a fény hullámhossza egy kritikus értéket meghalad!
13. A 90 foknál jobban eltérülő alfa-részecskékből miért lehetett az atommag létére következtetni a Rutherford-kísérletben?
14. Miért helytelen az atomot úgy elképzelni, mintha a klasszikus fizika törvényei szerint pontszerű elektronok keringenének az atommag körül?
15. A modern fizika szerint minden test rendelkezik hullámtulajdonsággal is. Mondjon egy okot, miért nem érzékelhető ez egy porszemnél!
16. Mit mutat meg a hullámfüggvény abszolút értékének négyzete?

17. Sorolja fel az atomon belüli elektronokat jellemző kvantumszámokat!
18. Az $n = 3$ fő- és $l = 2$ -es mellékkvantumszámú állapotban legfeljebb hány elektron tartózkodhat egy atomon belül?
19. Milyen kapcsolatban van az atom rendszáma és elektronjainak száma?
20. Milyen az elektronszerkezete a nemesgázoknak?
21. Két, különböző rendszámú atom vegyértékhéján levő elektronjainak száma megegyezik. Milyen tulajdonságukban fognak hasonlítani egymásra?
22. Miért sokkal jobb az elektronmikroszkópok elvi felbontóképessége, mint a hagyományos fénnel működő mikroszkópoké?
23. Ismertesse a pásztázó alagútmikroszkóp működésének alapgondolatát!
24. Milyen hegyes tűt kell az alagútmikroszkópban használni a letapogatáshoz? Miért?

9.10.2. Kidolgozott feladatok

9.1. feladat: Számolja ki, milyen hullámhosszúságú az a foton, amelyik még éppen képes kiszakítani a hidrogén második gerjesztett állapotából az elektront! (A hidrogénbeli elektron energiája alapállapotban $E_1 = -13,4 \text{ eV}$)

Megoldás: A második gerjesztett állapotban az elektronállapot fő kvantumszáma $n = 3$. Tehát ebben az állapotban az elektron energiája:

$$E_3 = \frac{E_1}{n^2} = -1,5 \text{ eV}.$$

A fotonnak legalább ekkora abszolút értékű energiával kell rendelkeznie ahhoz, hogy az elektront kiszakítsa az atom kötelékéből.

$$E_\nu = 1,5 \text{ eV} = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Tehát a hullámhossz:

$$\lambda = h \frac{c}{E_\nu} = 800 \text{ nm}$$

9.2. feladat: Írja fel a 9-es rendszámú atom alapállapotában az elektronok kvantumszámait! Hány vegyértékelektronnal rendelkezik ez az atom?

Megoldás: 2 elektron: $n = 1, l = 0, m = 0, s = \pm 1/2$;

2 elektron: $n = 2, l = 0, m = 0, s = \pm 1/2$;

2 elektron $n = 2, l = 1, m = 0, s = \pm 1/2$;

3 elektron az $n = 2, l = 1, m = \pm 1, s = \pm 1/2$ állapotok valamelyikében.

Vegyértékelektronok száma: 7. (Ennyi van az $n = 2$ -es, betöltetlen szinten.)

9.3. feladat: Egy lézer $6,5 \cdot 10^{-7}$ m hullámhosszúságú fotonokat bocsát ki 0,005 W teljesítménnyel. A kilépő nyaláb átmérője 5 mm. Legalább mekkora lesz a nyaláb átmérője 100 m út után? (A határozatlansági relációk szerint.) Mekkora lesz itt a fény intenzitása? (W/m^2 -ben mérve.)

Megoldás: Alkalmazzuk a $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h/(2\pi)$ határozatlansági relációt a lézersugár irányára merőlegesen! Ekkor $\Delta x = d = 5$ mm, ezért a nyalábra merőleges lendületbizonytalanság:

$$\Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi d}$$

A fotonok lendülete pedig:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Ez azt jelenti, hogy a nyaláb irányában p a fotonok lendülete, a merőleges komponens pedig $\pm \Delta p_x$ közt bármi lehet. Így irányuk bizonytalansága:

$$\tan \Delta\alpha = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{\lambda}{2\pi d}.$$

100 m utat megtéve ezért a nyaláb felfelé és lefelé egyaránt $100 \text{ m} \cdot \tan \Delta\alpha$ -nyit fog kiszélesedni, az az új átmérő:

$$D = d + 2 \cdot 100 \text{ m} \tan \Delta\alpha = d + 200 \text{ m} \frac{\lambda}{2\pi d} = 0,0091 \text{ m} = 9,1 \text{ mm}.$$

Itt tehát $A = (D/2)^2 \pi = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ területen oszlik meg a $P = 0,005 \text{ W}$ teljesítmény. Ezért az intenzitás:

$$I = \frac{P}{A} = 76,9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

9.10.3. Gyakorló feladatok

1. Milyen hullámhosszúságú foton keletkezik akkor amikor a hidrogénatom elektronja az $n = 3$ kvantumszámmal jellemzett állapotból az $m = 2$ kvantumszámmal jellemzett állapotba kerül?

2. Mekkora az ezüst felületéről $\lambda = 1500 \cdot 10^{-10}$ m hullámhosszúságú fotonok hatására kilépő fotoelektronok sebessége, ha a fotoelektronok az ezüst felszínéről $\lambda_{kr} = 2600 \cdot 10^{-10}$ m hullámhosszúságú fotonok hatására kezdenek el kilépni?
3. Határozza meg a hidrogénatomok által kibocsátott azon fotonok hullámhosszát, amelyek az elektron 3-as főkvantumszámú pályájáról alapállapotba történő kvantumugráskor keletkeznek!
4. 55 keV feszültséggel gyorsított elektronok nagy rendszámú fém felületébe csapódnak. Mekkora a legnagyobb energiájú röntgenfotonok hullámhossza?
5. Mekkora a perdülete a H-atomban a második gerjesztett állapotban lévő elektronnak?
6. Egy virágporszem tömege $2 \cdot 10^{-9}$ kg. Helyzetét egy mikroszkóp alatt $3 \cdot 10^{-6}$ m pontossággal határozzuk meg. Mekkora sebességbizonytalanság következik a határozatlansági relációkból? Ekkora sebességgel mennyi idő alatt tenné meg a távolságmérés pontosságának megfelelő távolságot, ha egy irányba haladna végig?
7. Egy fényforrás 100 W teljesítménnyel $4 \cdot 10^{-7}$ m hullámhosszúságú fotonokat sugároz.
 - Hány foton hagyja el másodpercenként?
 - Ha 3 m-re állunk tőle, hány foton lép 1 s alatt be egy szemünk pupilláján, ha a pupilla átmérőjét 3 mm-nek vesszük?
 - 1 nap folyamatos működés alatt mekkora a kibocsátott fotonok össztömege?
8. Számolja ki, mekkora tömege van egy köbméter napfénynek, ha tudjuk, hogy merőleges beesés esetén a napfény 1368 W/m^2 intenzitású.
9. Egy felületet 1000 W/m^2 intenzitással $5 \cdot 10^{-7}$ m hullámhosszúságú fotonokból álló fény ér merőleges beeséssel.
 - Hány foton éri a felület 1 m^2 -ét egy másodperc alatt?
 - Mekkora az egyes fotonok lendülete?
 - Ha a felület teljesen visszaveri a sugárzást, akkor mekkora nyomás származik a fotonoktól?
10. Számolja ki, milyen hullámhosszúságú az a foton, amelyik még képes kiszakítani a hidrogénatom 3-as főkvantumszámú állapotban levő

elektronját! Melyik színeképtartományba esik ez a foton?

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston, Mátrai Tibor: Kísérleti fizika III., Tankönyvkiadó
- Feynmann, Leighton, Sands: Mai fizika VIII., IX., Műszaki Könyvkiadó
- Tóth, Holics, Marx: Atomközelben, Gondolat kiadó

Felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston, Mátrai Tibor: Kísérleti fizika III., Tankönyvkiadó
- Paul T. Matthews: Basics of Quantum Physics, McGraw-Hill
- Keszthelyi Lajos: Atomok és atomi észecskék, Műszaki könyvkiadó 1962

10. Bevezetés a magfizikába

A magfizika kezdetét Rutherford kísérletétől számíthatjuk. Azután, hogy bevezette az atommag fogalmát azonnal tanulmányozni kezdte annak tulajdonságait. Sikerrel határozta meg a magsugár nagyságrendjét, ami 10^{-15} m.

10.1. Az atommag alkotórészei

A XX. század elején felfedezett radioaktív sugárzások, amelyekről még lesz szó ebben a fejezetben, arra engedtek következtetni, hogy az atommagoknak van belső struktúrájuk. Már a Bohr elmélet egyik következtetése volt, hogy az atommagokban **protonok** vannak. Protonnak nevezték el a hidrogén magját, mivel tudták, hogy egy elemi pozitív töltés hordozója. 1932 óta, a **neutron** felfedezése óta tudjuk, hogy a magokat protonok és neutronok alkotják. A neutron semleges, a proton tömegével kb. megegyező tömegű részecske.

A figyelmes olvasó, aki még emlékszik a középiskolai fizikára ezen a ponton fel kell hogy tegyen egy lényegbevágó kérdést:– miért nem esnek szét az atommagok, hisz a protonok közötti Coulomb taszítóerőt a neutronok elektrosztatikusan nem ellensúlyozhatják, mivel nincs töltésük. A kérdés megfogalmazása után már csak egy lépés a magerők felfedezése. Az atommagok nagyon parányi képződmények, annak ellenére, hogy jelentős elektrosztatikus taszítás működik bennük. A magokat egybetartó erők a természet új kölcsönhatási formái. Ezt a kölcsönhatást nevezzük **erős kölcsönhatásnak**, és ennek megnyilvánulásai a **magerők**. A számtalan elvégzett kísérletből az derült ki, hogy a magerők szempontjából a proton és a neutron azonos részecskék. Két proton, két neutron, vagy egy neutron és egy proton között ható magerők ugyanakkorák. Ezért szokás a neutronról és protonról úgy beszélni, mint egyetlen részecske – a **nukleon** – két különböző töltésállapotáról. A fizikusok ezt a tényt úgy is emlegetik, mint a magerők **töltésfüggetlenségét**.

A szemfüles olvasó, akire már fentebb hivatkoztunk, egy újabb kérdéssel állhatna elő. Ha az erős kölcsönhatás a legerősebb az összes eddig megismert kölcsönhatás közül, akkor miért nem gyűjti össze az összes atommagot egy helyen? A kérdés magyarázata az, hogy az erős kölcsönhatás lényegében a mag tartományára korlátozódik. Ha nem így lenne, akkor már sokkal korábban tudomást szereztünk volna róla, nem kellett volna az atommagok felfedezéséig várnunk. A magerők ezen tulajdonságát emlegetjük úgy, mint *rövid hatótávolság*.

A következőkben bevezetünk néhány fogalmat. A magbeli protonok számát a **protonszámot** vagy **rendszámot** Z betűvel jelöljük. A protonok és neutronok együttes számát **nukleonszámnak** hívjuk. Jele: A . Azokat a magokat melyek rendszáma azonos, de nukleonszáma más, **izotópoknak** nevezzük. Az A és Z számokkal jellemzett magot **nuklidnak** nevezzük.

10.2. Az atommagot összetartó erők

Századunk elején több ismert kísérleti fizikus próbálkozott olyan berendezés megszerkesztésével, amely a nagyon kis tömegű részecskék közötti tömegkülönbség mérésére alkalmas. A cél az volt, hogy a periódusos rendszer egymás melletti elemeinek tömegkülönbségét mérni tudják. Elektromos és mágneses terek megfelelő kombinálásával sikerült a várakozásokat felülmúlni. Megszületett a **tömegspektroszkópia**, mint önálló kísérleti módszer. A tömegspektroszkópia lehetőséget adott arra, hogy megmérjék minden nuklid tömegét. A klasszikus fizikai szemlélet szerint az volt várható, hogy a nuklidok tömege megegyezik az alkotóelemeik tömegeinek összegével. Ezzel szemben azt tapasztalták, hogy a nuklid tömege kisebb, mint az alkotóelemek tömegeinek összege. Az eltérést **tömeghiánynak** (Δm) nevezték el, ami

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{mag}. \quad (10.1)$$

A tömeghiány magyarázata a magerők alapján értelmezhető. A magerőknek köszönhetően az atommagok kötött rendszerek. Ha egy kötött rendszert darabjaira szeretnénk bontani úgy, hogy a darabok már egymás erőterén kívülre kerüljenek, ahhoz a rendszerrel energiát kell közölnünk. Ezt az energiát nevezzük a rendszer **kötési energiájának**. Ez az energia annál nagyobb, minél intenzívebb vonzóerők működnek a rendszerben. Einstein óta azt is tudjuk, hogy az energia és tömeg egymással ekvivalens mennyiségek az

$$E = mc^2$$

összefüggés szerint. A magerők voltak az első olyan kötőerők, amelyeknél a tömeghiány a tömegspektroszkópiának köszönhetően mérhetővé vált.

Az utóbbi időben nagymértékben tökéletesedett a méréstechnika, ezért lehetővé vált az elektromosan kötött rendszerek tömeghiányának mérése. A kísérleti eredmények az einsteini fizika érvényességét támasztották alá.

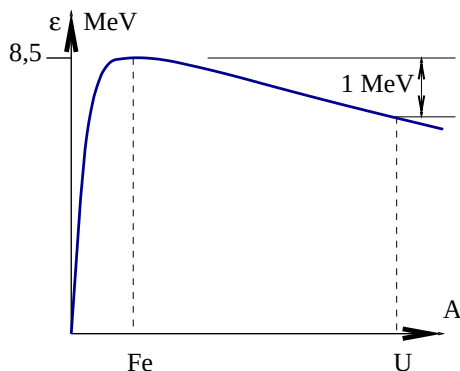
Tehát a mag tömeghiányával ekvivalens energia a **mag kötési energiája**.

$$\Delta W = \Delta mc^2$$

Ezt az energiát kell közölni a maggal ahhoz, hogy alkotóelemeire bonthassuk.

A továbbiak szempontjából nagyon hasznos mennyiséget vezetünk most be:– **az egy nukleonra jutó kötési energiát**. Az A nukleonszámú és Z rendszámú nuklidban az egy nukleonra jutó kötési energiát (jele: ε) a következő módon definiáljuk:

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{A} \quad (10.2)$$



10.1. ábra. Az $\varepsilon = \varepsilon(A)$ függvény

Ezek után összehasonlíthatjuk az elektromágneses kölcsönhatást a nukleáris kölcsönhatással. Az elektronokat a mag körül elektromos erők tartják, és a kötési energiájuk legfeljebb néhányszor tíz keV. Egy nukleon kötési energiája a legtöbb nuklidban 8 MeV. (lásd a 10.1. ábrát) Ha ezeket a számokat összehasonlítjuk, látjuk hogy a magerők sokkal intenzívebbek, mint az elektromágneses erők. A magerők további tulajdonságaival ebben a jegyzetben nem foglalkozunk.

10.3. Magmodellek

A magfizikában is fontos, hogy az atommagok tulajdonságait modellezni tudjuk. Néhány egyszerű fizikai modell a kiválasztott tulajdonságokat írja

le, míg más tulajdonságokat figyelmen kívül hagy, esetleg ellentmondásban van azokkal.

Cseppmodell Történetileg először az atommagot egy folyadékcsepphez hasonlították. Erre az analógiára épül a **cseppmodell**. A magsugár egyre pontosabb meghatározásaiból megállapították, hogyan függ a mag sugara a mag nukleonszámától. A következő összefüggést kapták:

$$R_{mag} = r_0 A^{1/3}.$$

Ebből meghatározható a mag térfogata (itt a legegyszerűbb feltevéssel élünk, és feltesszük, hogy gömb):

$$V_{mag} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A,$$

ahol $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

Abból, hogy a mag térfogata és a nukleonszáma egymással arányos mennyiségek az következik, hogy a maganyag *összenyomhatatlan*. Ez a tulajdonság emlékeztet a folyadékokra. A folyadékokról azt is tudjuk, hogy a párolgási hőjük egyenesen arányos a térfogatukkal. A párolgási hő az a hőmennyiség, amelyre ahhoz van szükség, hogy az összes folyadékot elpárologtassuk, azaz alkotóelemeire bontsuk. Tehát a párolgási hőnek az atommagoknál a kötési energia felel meg. Valóban a magok kötési energiája a legtöbb nuklid esetében egyenesen arányos a nukleonszámmal, ami viszont a térfogattal arányos. (lásd a 10.1. ábrát)

A cseppmodell keretében jól leírható az $\varepsilon = \varepsilon(A)$ függvény, ha korrekcióként figyelembe vesszük a mag felületi energiáját, valamint az elektromos (Coulomb) taszításból származó energiát is.

10.1. példa: Határozza meg a maganyag sűrűségét a cseppmodell alapján!

Megoldás: A cseppmodell alapján a maganyag sűrűsége állandónak adódik. Számoljuk ki ezt az értéket a szén 12 nukleonszámú nuklidja esetében. Ennek a nuklidnak a tömege $12u$, ahol u az atomi tömegegység.

Az egy atomi tömegegység a szén 12 nukleont tartalmazó izotópja tömegének $1/12$ része, $1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Így a maganyag sűrűsége:

$$\rho_{mag} = \frac{m_{mag}}{V_{mag}} = \frac{Au}{\frac{4}{3} \pi r_0^3 A} = \frac{3u}{4\pi r_0^3} = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

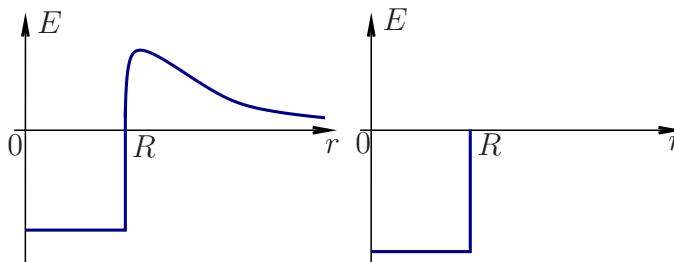
Talán szemléletesebb képet nyerünk, ha ezt a számot átszámoljuk emberibb léptékű egységekre. A fenti magsűrűség azt jelenti, hogy egy köbmilliméternyi

maganyag tömege 230 000 tonna lenne. Ebből is látszik mennyire más lenne a világunk, ha a magerők hatósugara nem korlátozódna a mag tartományára.

Héjmodell Az eddigi leírásban nem vettünk figyelembe egy nagyon fontos ténytet. Az $\varepsilon(A)$ függvényt folytonosnak ábrázoltuk, ami a mag egészének viselkedése szempontjából jó közelítésnek számít. A tömegspektroszkópiai mérésekből azonban kitűnt, hogy ezen folytonos görbétől vannak kisebb-nagyobb eltérések. Kitűnt, hogy bizonyos protonszám és neutronszám esetében a mag kötési energiája nagyobb, mint a cseppmodell alapján számítható érték. Az ilyen protonszámú vagy neutronszámú magokat nevezzük **mágikus magoknak**. Ezek a mágikus számok a 2,8,20,28,50,82 és a neutronok esetében még a 126.

A jelenséget a magok **héjmodelljének** keretében sikerült értelmezni, és a modell alapján a mágikus számokat a kísérlettel megegyezésben kiszámítani. A modell lényege nagyon hasonlít az elektronburok fizikájára. Ott az elektronok a mag elektromos erőterében mozogva hozták létre a héjakat. Amikor egy héj betelt, akkor különösen stabil atomok jöttek létre. Ezek a nemesgázok atomjai.

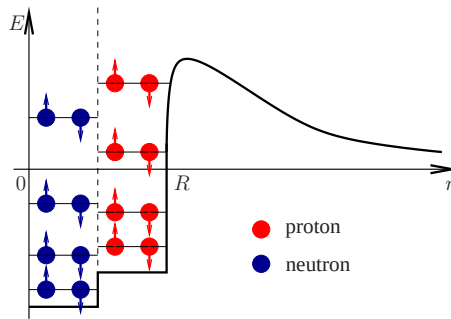
Egy kiszemelt nukleon esetében azt az erőteret, amelyben mozog, a többi nukleon hozza létre, kialakítva a **magpotenciált**. Az atommagban a protonok és neutronok által érzékelt potenciált a 10.2. ábrán szemléltettük. Protonok esetében az $r > R$ értékeknél tapasztalt taszítás oka a Coulomb taszítás.



10.2. ábra. A magpotenciál protonokra (balra) és neutronokra (jobbra)

Ebben a potenciáltérben alakulnak ki egymástól függetlenül a protonhéjak és neutronhéjak. Mivel a proton és neutron is feles spinű részecske, itt is érvényre jut a Pauli-féle kizárási elv. (lásd a 10.3. ábrát)

A 10.3 ábrán látható, hogy a magpotenciál a protonok számára sekélyebb, mint neutronok esetében. Ez a protonok között fellépő Coulomb taszítással magyarázható. Ez a taszítóerő csökkenti a protonok kötési energiáját a magban.



10.3. ábra. A héjmodell

Feltételezzük, hogy az atommagbéli protonokra és neutronokra is érvényes a kvantummechanika. Ezért ezeknek a részecskéknél az energiája diszkrét lesz, hiszen kötött kvantummechanikai rendszerek energiája mindig csak diszkrét értékeket vehet fel. (Lásd a Bohr-modellnél és a Dobozba zárt elektronnál tanultakat.)

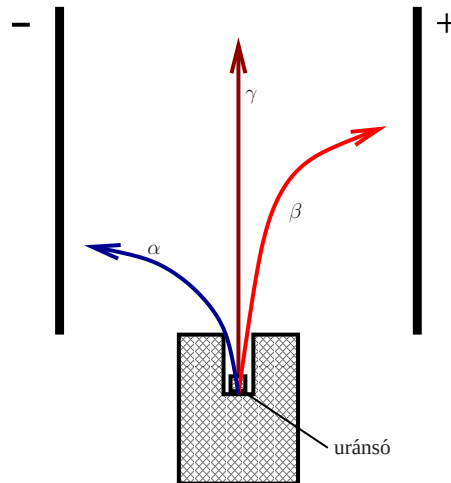
A cseppmodell szerint az atommagban a nukleonok sűrűn, mintegy egymásra préselve vannak jelen. A héjmodell szerint ugyanazok a nukleonok ütközések nélkül mozognak a többi nukleon által létrehozott magpotenciál hatása alatt. A két kép nehezen képzelhető el egyszerre, ugyanakkor az egyik a mag bizonyos tulajdonságait magyarázza kielégítően, míg a másik más tulajdonságokat.

10.4. A természetes radioaktivitás

A XIX.-XX. század fordulójára az új sugárzások felfedezésének hőskora volt. Ekkor fedezte fel Röntgen a róla elnevezett sugarakat, ekkor állították elő a katód sugarakat és ekkor fedezte fel Becquerel a természetes radioaktivitást, amelyről mint majd látni fogjuk mindjárt három sugárzási formát talál.

Becquerel különböző ásványi sók fluoreszcencia tulajdonságait vizsgálva jutott el korszakalkotó felfedezéséhez. Azt figyelte meg, hogy az előzőleg meg nem világított uránsók exponálják a fotolemezeket. Tehát a fluoreszcenciát ki lehetett zárni a fotolemezek megfeketedésének okai közül.

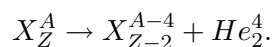
A fluoreszcencia némely anyag azon tulajdonsága, hogy megvilágítás után még viszonylag hosszú ideig sugározza vissza az elnyelt energiát. Bizonyára mindenki találkozott már a világító számlapú órákkal. Ezeknél is a fluoreszcencia jelenségét használják ki.



10.4. ábra. Természetes radioaktivitás

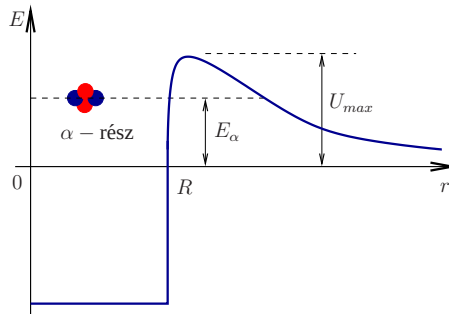
Becquerel arra a következtetésre jutott, hogy új sugárzási formát fedezett fel. Hozzálátott, hogy meghatározza az új sugarak tulajdonságait. Homogén elektromos térben vizsgálva a sugárzást, azt tapasztalta, hogy annak három összetevője van. (lásd a 10.4. ábrát) Azt az összetevőt, amelyik a negatív elektróda felé tért el α -sugárzásnak, a pozitív felé eltérülőt β -sugárzásnak, míg az el nem térülő összetevőt γ -sugárzásnak nevezte el.

α -sugárzás A kutatások előrehaladtával megállapították, hogy az α -sugarak gyors hélium atommagok. Kimutatták, hogy egyes atommagok az α -részecskék kibocsátásával szemben instabilak. Ez azt jelenti, hogy véges időn belül egy α -rész kisugárzásával a mag energetikailag előnyösebb állapotba jut:



Itt a következő általánosan bevett jelölést alkalmaztuk: X_Z^A jelöli a Z rendszámú, A nukleonszámú magot, ahol X helyére a megfelelő elem kémiai jelét írjuk.

A He magok **alagúteffektussal** kerülnek ki a radioaktív magból. Az alagúteffektus, mint ahogyan azt már láttuk a Bevezetés az atomfizikába című fejezetben, tipikusan kvantummechanikai jelenség.



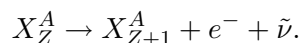
10.5. ábra. Az alagúteffektus

Lényege az, hogy a magban található részecskék, amelyek mozgási energiája kisebb, mint a magpotenciál maximális értéke (lásd a 10.5. ábrát) nullától különböző valószínűséggel kijutnak a magból, miközben energiát nem veszítenek. Az ilyen jelenség a klasszikus fizika alapján elképzelhetetlen.

Mivel a megfigyelt α -részecskék energiaspektruma vonalas, így közvetve bizonyítja az atommagok diszkrét energiaszintjeinek létezését.

Mivel az α -részecskék He atomok atommagjai, így töltésük kétszeres pozitív elemi töltés. Amikor valamilyen közegbe jutnak azonnal ionizálni kezdik környezetük atomjait, így gyorsan elvesztik mozgási energiájukat, aminek az a következménye, hogy rövid úton lefékeződnek. Ezért az α -sugárzás anyagba való behatolásának mértéke igen csekély. Már egy papírlap is áthatolhatatlan számukra.

β -sugárzás A természetes radioaktivitás másik összetevője sok meglepetéssel szolgált. Kimutatták, hogy gyors elektronok áramáról van szó, amelyek energiaspektruma folytonos. A folyamat a következő:



Először vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogyan sugározhat az atommag elektronokat, ha benne csak nukleonok lehetnek. A kérdésre az egyetlen lehetséges válasz az, hogy az elektronok a β -bomlás folyamatában keletkeznek. Ezt a választ támasztja alá a szabad neutron β -bomlása is. A szabad neutron véges időn belül egy protonra és egy elektronra bomlik el.

Ha elfogadjuk azt a feltételezést, hogy a magban is a kvantummechanika írja le a nukleonok mozgását, akkor egy kötött rendszer lehetséges energiaszintjei diszkrét spektrumot kell, hogy alkossanak. Ha diszkrét energiájú állapotból bomlik el a mag, és érvényes az energiamegmaradás törvénye, akkor az elektronok spektruma is diszkrét kéne, hogy legyen. Úgy látszik itt ellentmondás van. Ezt a nagyon komoly problémát Pauli oldotta meg, mondván, hogy a β -folyamatokban egy harmadik részecske is keletkezik. Három részecske esetében az elektronok folytonos spektruma már összeegyeztethető a kvantummechanikával és az energia megmaradásával. Pauli a feltételezett harmadik részecskét **antineutrínónak** nevezte el. Egy töltetlen, a fotonhoz nagyon hasonló fermion az antineutrínó, amelyik egy újabb kölcsönhatási típus közvetítője, a **gyenge kölcsönhatás**.

A gyenge kölcsönhatás egyik alap folyamata tehát a szabad neutron bomlása, amely a következő:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}.$$

Ennek a folyamatnak a jellemző ideje a neutron élettartama (lásd később), amely kb. 1000 s.

Később felfedezték a β -bomlás másik típusát is, a β^+ -bomlást:

$$X_Z^A \rightarrow X_{Z-1}^A + e^+ + \nu.$$

Itt e^+ az elektronhoz hasonló, de pozitívan töltött részecske a **pozitron**, ν pedig a neutrínó. Ennek a folyamatnak a

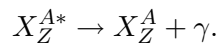
$$p \rightarrow n + e^+ + \nu$$

a gyenge kölcsönhatás másik alapvető folyamata felel meg, amelyik szabad proton esetében nem mehet végbe mert a proton nyugalmi energiája kisebb mint a neutroné.

Említsük még meg ezen a helyen az **antirészecskék** fogalmát. A kvantumelmélet szerint minden mikrorészecskének kell, hogy legyen antirészecskéje, amelyik a töltésen és néhány kvantumfizikai mennyiségen kívül mindenben megegyezik a részecskével. A fentiekben a neutrínó-antineutrínó párral, valamint az elektron-pozitron párral találkoztunk.

Az α -sugárzáshoz hasonlóan a β -sugárzás is ionizálja az anyagot, de mivel a β -sugárzás töltése csak fele az α -sugárzást alkotó részecskék töltésének, így az ionizáció is lassabb zajlik le. Ezért a β -sugárzás anyagba való behatolási mélysége nagyobb mint az α -részecskéké. Ez az érték például levegőben jellemzően 10 cm körüli.

γ -bomlás A fentebb említett bomlások után a mag általában gerjesztett állapotban marad. Felesleges energiájától γ -foton formájában szabadul meg. A folyamat a következő:



Itt X_Z^{A*} a gerjesztett atommagot jelenti. Ez a folyamat végbe mehet a mag két gerjesztett állapota között is.

Tehát a γ -sugárzás nem más, mint nagy energiájú elektromágneses sugárzás. Annak bizonyítéka, hogy ezek a sugárzások a magból és nem az elektronburokból származnak az, hogy energiájuk általában MeV nagyságrendű. Az elektronburokban ilyen energiájú kvantumátmenetek nem lehetségesek.

A γ -sugárzás fotonjai is képesek közvetve ionizálni az anyagot (lásd később), de viszonylag nagy energiájuk miatt az anyagba való behatolási mélységük nagy lehet. Több cm vastag fémlemezen is áthatolnak.

10.5. Bomlástörvény

Vizsgáljuk meg, hogy a radioaktív bomlásoknak milyen az időbeli lefolyásuk. Foglalkozzunk a legegyszerűbb esettel, amikor adott mennyiségű radioaktív mag van egy tömegben. A tapasztalat azt mutatta, hogy az egységnyi idő alatt elbomló magok száma egyenesen arányos a még el nem bomlott magok számával. Azaz:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

A változókat szétválasztva, majd az egyenlet mindkét oldalát integrálva:

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int t dt,$$

a megoldást a következő alakba írhatjuk:

$$\ln N(t) = -\lambda t + \ln C.$$

Az $N(t)$ függvényt innen kifejezve, azt kapjuk hogy:

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Tehát a radioaktív magok **bomlási törvénye** exponenciálisan lecsengő függvény.

Az C és λ állandók értékeit a vizsgált esetre vonatkoztatva kell meghatározni. Mivel tudjuk, hogy a $t = 0$ időpillanatban N_0 magunk volt, ezért ebben az időpillanatban $N(t) = N_0$. Ebből pedig az következik, hogy $C = N_0$.

A λ állandó az elbomló anyagokra jellemző anyagi állandó. Megadja annak a valószínűségét, hogy egy vizsgált radioaktív atommag a következő egy másodperc során elbomlik. Ezért aztán λ egyenlő annak az átlagos időnek a reciprokéval, amely alatt várhatóan egy vizsgált típusú mag elbomlik, $\lambda = 1/\tau$, ahol τ az un. átlagos élettartam.

Ne feledkezzünk el arról, hogy a magon belül a kvantummechanika érvényes, és a szerint csak az határozható meg, hogy egy mag mekkora valószínűséggel bomlik el, de hogy ez pontosan mikor következik be az nem.

Tehát a fentiek szerint a bomlási törvény alakja:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (10.3)$$

ahol λ -bomlási állandó, τ -átlagos élettartam.

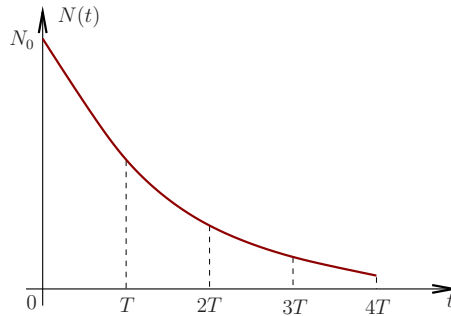
10.2. példa: Határozza meg mennyi idő alatt bomlik el egy λ bomlási állandójú anyag fele!

Megoldás: Írjuk fel a bomlási törvényt erre az esetre.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Az egyenlet mindkét oldalát logaritmálva, $T_{1/2}$ meghatározható.

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2.$$



10.6. ábra. A bomlási törvény

A fenti feladatban kiszámolt $T_{1/2}$ idő neve **felezési idő**.

A radioaktív anyagok viselkedésének fontos jellemzője A **aktivitásuk**. Ez a mennyiség azt jellemzi, hogy a radioaktív anyagdarabban időegység alatt hány radioaktív bomlás következik be.

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N(t)$$

Aktivitás:

Radioaktív mintában egységnyi idő alatt bekövetkező radioaktív bomlások számát a minta aktivitásának nevezzük.

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \quad (10.4)$$

A fenti definíció értelmében az aktivitás mértékegysége s^{-1} , amit a radioaktivitás felfedezőjének tiszteletére Bq-nek nevezünk. A gyakorlatban a radioaktív mintákban $10^3 - 10^9$ bomlás következik be másodpercenként, így az aktivitás jellemző mértéke 1 kBq – 1 GBq.

10.6. Anyag és sugárzás kölcsönhatása

Nagyon korán felismerték, hogy a radioaktív sugárzások hatással vannak az anyagok tulajdonságaira, valamint az élő szervezetekre. Maga a sugárzás szintén változásokon megy át az anyagokkal való kölcsönhatásban. A legtöbb sugárzás esetében az anyaggal való kölcsönhatás meglehetősen bonyolult. A számunkra legismertebb sugárzási forma, az elektromágneses

sugarak esetében a fotonnyaláb intenzitásának csökkenését több tényező is befolyásolja. A foton elnyelődhet az anyagban, szóródás következtében eltérülhet eredeti irányától, fotoelektront vagy elektron-pozitron párt kelthet. Ezek a folyamatok együttesen határozzák meg a lineáris sugárgyengítési együttható (μ) értékét. A fotonnyaláb intenzitásának csökkenése egyszerű törvénynek engedelmeskedik.

Ha az anyagra a fotonok párhuzamos nyaláb formájában érkeznek I_0 intenzitással, akkor a nyaláb irányában az anyag x mélységében a sugárzás intenzitása:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x},$$

ahol I_0 –a fotonnyaláb intenzitása a vizsgált anyaggal való kölcsönhatás előtt, μ –a vizsgált anyag lineáris sugárgyengítési együtthatója.

Hasonló sugárgyengülési törvénynek tesz eleget az α és a β sugárzás is, de itt más mikroszkopikus folyamatok okozzák a sugárzás gyengülését.

Az anyag tulajdonságai a sugárzás hatására általában romlanak, ezért fontos ismerni a sugárzások anyagroncsoló tulajdonságait. Radioaktív sugárzásnak hosszan kitett anyagok tulajdonságai az idő múlásával megváltoznak, többek között jelentős mértékben módosulhatnak a mechanikai tulajdonságok.

Például egy atomerőműben igen fontos tudni, hogy a reaktortartály nyomásállósága hogyan változik meg a belső reaktortér felől érkező nagyon intenzív sugárzások hatására. Csak ilyen ismeretek birtokában üzemeltethető egy reaktor biztonságosan.

10.3. példa: Határozza meg milyen vastagságú ismert lineáris sugárgyengítési együtthatójú anyag, csökkenti a monoenergetikus fotonnyaláb intenzitását a felére a sugárnyaláb irányában!

Megoldás: A feladat hasonlít a felezési idő meghatározásához. Írjuk fel itt a sugárgyengülés törvényét az adott esetre:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu d_{1/2}}.$$

Az egyenlet logaritmizálása után $d_{1/2}$ meghatározható:

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}.$$

$d_{1/2}$ neve felezési rétegvastagság.

10.6.1. Az ionizáló sugárzások élettani hatásai

A sugárzások csoportosítása A különböző fajta sugárzások és az élő anyag kölcsönhatása során az élő anyag a sugárzásból energiát nyel el. Tapasztalati tény, hogy a sugárzások élettani hatásai arányosak az élő anyag egységnyi tömegében elnyelt energia nagyságával.

A sugárzások egy része az energiaátadással az anyagban közvetlenül, vagy közvetve, elektronokat és pozitív ionokat, tehát töltéspárokat hoz létre. Ezeket a sugárzásokat hívjuk **ionizáló sugárzásoknak**. A közvetlenül ionizáló sugárzások közé tartozik az alfa és a béta-sugárzás. Rájuk az jellemző, hogy töltött részecskék lévén a Coulomb kölcsönhatáson keresztül kölcsönhatásba tudnak kerülni a héjelektronokkal, így az ionizációt „közvetlenül” elvégzik. Az ionizáló sugárzások másik része - ide tartozik a neutron-, a röntgen- és a gamma-sugárzás - először viszonylag kisszámú, nagyenergiájú, elektromosan töltött részecskéket hoz létre és ezen másodlagos részecskék ionizációja a meghatározó.

Az ionizáló részecske átlagosan 32 eV energiát veszít az élő szövetekben egy töltéspár létrehozásakor.²⁴

A sugárzások másik része (pl. a mikrohullámú, vagy az ultraibolya sugárzás) nem ill. csak elhanyagolható mértékben képes ionokat létrehozni az élő szövetekben. Ezek az un. nemionizáló sugárzások azonban megváltoztathatják a molekulák vibrációs és rotációs energiáit, amelynek következtében a molekulakötések átrendeződhetnek. A nemionizáló sugárzások hatásának eredményeként sejtkárosodás és szöveti elváltozás következhet szintén be.

Az ionizáló sugárzás kölcsönhatása az élő anyaggal Amint azt korábban már említettük, az ionizáló sugárzás hatására az élő anyagban energia nyelődik el. Annak megfelelően, hogy az energia elnyelődése és a kiváltott hatás ugyanazon a molekulán vagy más molekulákon következik be, direkt vagy **indirekt sugárhatásról** beszélhetünk. A sugárbiológusok az indirekt sugárhatásnak tulajdonítanak nagyobb szerepet. Az élő anyagban bőségesen megtalálható vízben ugyanis az ionizáló sugárzás hatására szabad gyökök keletkeznek, amelyek közvetett módon előidézhetik a biológiai szempontból fontos, aktív molekulák megváltozását.

²⁴1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J

Az ionizáló sugárzás és az élő anyag kölcsönhatása egyszerű fizikai folyamatokkal kezdődik, a sugárzás gerjeszti illetve ionizálja az élő anyagot felépítő atomokat. Az ezt követő kémiai fázisban ún. szabadgyökök keletkeznek, amelyek kémiai szempontból rendkívül agresszívek, így további molekuláris színű változásokat generálnak. A biokémiai fázisban bonyolult enzimyfolyamatokon keresztül, biokémiai és anyagcsere változások indulnak el. A kölcsönhatásnak ez a kezdeti szakasza néhány ezredmásodpercen belül lejátsszódik.

Az utolsó, biológiai szakaszban befejeződnek a molekuláris szintű elváltozások, a sejtosztódás során különböző kóros folyamatok játszódnak le, később pedig szöveti, szervi elváltozások jelennek meg. Az ionizáló sugárzás hatására kialakuló biológiai elváltozások általában hosszabb idő, bizonyos esetekben évek, sőt évtizedek múlva jelentkeznek.

Az ionizáló sugárzások biológiai hatását különféle tényezők befolyásolják. A sugárhatást módosító tényezők közül a legfontosabb a sugárzás minősége, amelyet a **lineáris energiaátadási tényező (LET)** értéke jellemez. A LET gyakorlatban használatos mértékegysége a $\text{keV}/\mu\text{m}$. A nagy LET értékű sugárzások a testszövet viszonylag kis térfogatában adnak le nagy energiát, ami kihat a szerv vagy az egész szervezet működésére. Ezért a várható biológiai hatás azonos elnyelt dózis esetén nagyobb lesz, mint a kis LET értékű sugárzások esetében.

Az alacsony LET-értékű kemény röntgen és gamma sugárzásnak nagy az áthatolóképessége, ezért az orvosi területen diagnosztikai célokra használhatók fel elsősorban. A magas LET-értékű részecskesugárzások viszont energiájukat rövid úton leadják, elnyelődnek, ezért gyógyítás céljára alkalmasak a sugárterápiában.

A másik említést érdemlő fizikai módosító tényező a hőmérséklet. Elsősorban sugárterápiás kutatások vezettek arra a felismerésre, hogy a normál testhőmérséklet fölött néhány fokkal, ún. **hipertermiás állapotban** megnő a gyorsan szaporodó sejtek sugárérzékenysége.

A sugárhatást fokozó kémiai tényezők közül az egyik legfontosabb az **oxigén-effektus**. Azok a sejtek, szövetek, amelyek oxigéntartalma nagyobb, sugárérzékenyebbek. Az ionizáló sugárzás hatására ugyanis H_2O_2 keletkezik, és HO_2^- szabad gyök is felszabadul. Ezek a szabad gyökök reakcióba léphetnek a környezetükben lévő szerves molekulákkal, aminek következtében újabb szabad gyökök keletkezhetnek. A folyamatok biokémiai illetve anyagcsere zavarokhoz vezethetnek.

A sugárhatást módosító kémiai tényezők közül fontos gyakorlati szerepe lehet a sugárzás hatását gyengítő anyagoknak, vegyületeknek. Ezek az anyagok úgy fejtik ki a hatásukat, hogy redukálnak, azaz csökkentik az agresszív szabadgyökök számát, és ezzel a károsító hatásuk mértékét.

A szerveinket alkotó élő szövetek sugárérzékenysége igen különböző. Ez arra vezethető vissza, hogy a sejtek osztódási állapota és a sugárérzékenysége között szoros összefüggés van. A sejtek akkor a legérzékenyebbek, amikor aktív, osztódó állapotban vannak. A különböző szövetekben azonban eltérő ezen sejtek aránya.

A sejtek alkotóelemeinek sugárérzékenysége is eltérő. A legkevésbé érzékeny a sejtplazma, leginkább pedig a sejtmembrán. A sugárzás hatására megváltozik a sejtmembrán felületi feszültsége és ezáltal az áteresztőképessége. Ennek következtében a sejt anyagcseréje zavart szenved.

Döntő fontosságú a DNS-molekula sugárkárosodása. A sugárzás hatására a DNS-ben tárolt kód megváltozhat, inaktiválódhat vagy hamis információ átvitelére válik alkalmassá. A DNS-molekula osztódás közben, szétcsavarodott állapotban a legsérülékenyebb. Ekkor a sugárzás hatására szál törések és báziskárosodások fordulhatnak elő.

A fejlett biológiai rendszerek, így az emberi szervezet is törekszik arra, hogy a bekövetkezett hibákat megszüntesse. A sejtekben található olyan enzimek, amelyek alkalmasak arra, hogy a DNS sérülések egyrészt kijavítsák. Attól függően, hogy milyen hatékonyan működik ez a kijavító mechanizmus, különböző a sugárkárosodás végeredménye.

Az emberi szövetek, szervek sugárérzékenysége tehát eltérő. Legérzékenyebb a vérképző rendszer (csontvelő), a nyirokrendszer, az ivarsejtek, legkevésbé pedig az ideg-, csont-, izom- és kötőszövetek, továbbá az érfal.

Az embert érő sugárártalmak osztályozása Az embert érő sugárártalmakat többféleképpen osztályozhatjuk. Beszélünk például **szomatikus** és **genetikus** hatásokról attól függően, hogy az ártalom azon a személyen alakul ki, aki a sugárterhelést elszenvedte vagy az utódain. A sugárhatás lehet helyi (lokális) vagy az egész szervezetre kiterjedő. Az egyént ért sugárterhelés hatása bekövetkezhet közvetlenül a besugárzás után, ez esetben **akut sugárártalomról** beszélünk. Ha az elváltozás hosszabb idő (sokszor évek, évtizedek) elteltével jelentkezik, **krónikus sugárártalomnak** nevezzük.

A sugárhatás jellege szerint determinisztikus és sztochasztikus hatásokat különböztetünk meg. A **determinisztikus sugárhatásokra** az jellemző,

hogyan egy meghatározott küszöb dózis (pontos definícióját lásd később) alatt nem jelentkeznek. A küszöbdózis felett azonban súlyosságuk arányosan növekszik a dózissal. A determinisztikus sugárhatások közé tartozik akut esetben a sugárbetegség, a haj kihullása és a bőr különböző reakciói (bőrpír, hámlás, fekélyesedés, bőrelhalás, stb.), krónikus esetben pedig a szemlencsehályog (sugárcataracta).

A **sztochasztikus sugárhatások** közé soroljuk azokat a károsodásokat, amelyek véletlenszerűen, tehát nem minden egyednél következnek be, azonban a sugárterhelés növekedésével a károsodott egyedek száma növekszik. A sztochasztikus sugárhatások közé tartoznak a különböző daganatos megbetegedések és az örökletes elváltozások. A sztochasztikus hatásokra a hosszú kifejlődési idő (4 - 35 év) és a küszöb nélküli dózis-hatás összefüggés a jellemző.

Gyakorlati szempontból fontos hangsúlyozni, hogy az ionizáló sugárzások érzékszerveinkkel nem érzékelhetők. Ezért szükségünk van olyan eszközökre, berendezésekre, amelyek segítségével a sugárzásokat detektálni, illetve a sugárzás mennyiségét mérni tudjuk. Ismerkedjünk meg ezeknek a detektoroknak a működési elvével.

Az ionizáló sugárzások detektálása és mérése Annak ellenére, hogy sok sugármérő típust ismerünk, mérési elvük néhány fizikai és kémiai sugárhatásra vezethető vissza. A sugárzás és a detektor kölcsönhatásának eredményeképpen a detektor anyagában energia nyelődik el. Az elnyelt energia döntő része az atomok, molekulák gerjesztésére, ionizálására fordítódik, ami vagy közvetlenül mérhető, vagy az energiafelvételt követő kölcsönhatások vezetnek mérhető kémiai vagy fizikai változásokhoz.

Az ionizáció következménye lehet az anyag elektromos tulajdonságainak megváltozása, például az elektromos vezetés megnövekedése. A legelterjedtebb detektorok az ún. **gázionizációs detektorok** (ionizációs kamra, proporcionális számláló és a GM-cső). A **félvezető detektorok** esetében az ionizáció szilárd, félvezető anyagban jön létre. Előnye, hogy szilárd anyagban sokkal több töltéshordozó keletkezik, ennek köszönhetően a félvezető detektorok kisméretűek és nagy az érzékenységük.

Számos szigetelő anyag képes az ionizáló sugárzás energiájának egy részét eltárolni. Felmelegítés hatására a tárolt energia látható fény formájában kiszabadul. A tapasztalatok alapján a kibocsátott fény mennyisége és a szigetelő anyagot ért sugármennyiség között széles tartományban egyenes arányosság van, így a jelenség a sugárzás mérésére alkalmas. Ezeket az anyagokat **termolumineszcens** anyagoknak, röviden TL-anyagoknak

nevezzük.

A sugárzás energiáját fénné alakító érzékelőt szcintillátornak hívjuk. A **szcintillációs** számlálókbán a sugárzás hatására azonnali fényfelvillanások keletkeznek. A szcintillátor anyaga lehet szervetlen vagy szerves, halma-zállapota szilárd, folyékony vagy gáz. A fényfelvillanások bizonyos fényér-zékeny anyagokból elektronokat váltanak ki, amelyek elektronsokszorozó közbeiktatásával, megfelelő mérőberendezés segítségével észlelhetők.

A **fényképészeti filmek** azon tulajdonsága, hogy az ionizáló sugárzásra is érzékenyek, lehetővé teszi dozimetriai célokra való felhasználásukat. A film zselatinba ágyazott ezüst-bromidot tartalmaz, amely ionizáló sugárzás hatására ezüstre és brómra bomlik. Az előhívás és a fixálás után a szabad ezüst feketedést okoz, melynek mértékét megfelelő berendezéssel (denzi-tométerrel) megmérhetjük. Kalibrációs görbe segítségével a kapott dózis meghatározható.

Az ionizáló sugárzások dozimetriája Az ionizáló sugárzások dozimet-riája a sugárzások azon jellemzőivel foglalkozik, melyek alkalmasak az élő szervezetben a biológiai és egészségügyi szempontból fontos hatást a lehető legjobban jellemezni, előre jelezni.

Amint azt korábban már jeleztük az ionizáló sugárzások bármely hatása arányos az élő szervezetben elnyelt energiával, pontosabban a tömegegységben elnyelt energiával. Az **elnyelt dózis** bármely ionizáló sugárzásra vonatkozóan a besugárzott anyag térfogatelemében elnyelt energiának és a térfogatelem tömegének a hányadosa. Az elnyelt dózis SI egysége a gray (ejtsd:gréj); jele Gy, és $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$. Az elnyelt dózis időegységre jutó hányadát elnyelt dózisteljesítménynek nevezzük, melynek egysége a Gy/s.

A tapasztalatok szerint az ionizáló sugárzás károsító hatását egy adott szervben, szövetben az elnyelt dózis mellett a sugárzás típusa és energiája is befolyásolja. Ezt a tulajdonságot az egyenérték dózis fogalmának bevezet-ésével vesszük figyelembe. A definíció szerint az R minőségű sugárzásból a T szerv, ill. szövet sugárterhelésének **egyenérték dózisa**:

$$H_{T,R} = w_R D_{T,R},$$

ahol w_R - a sugárzás fajtájára és energiájára jellemző **súlytényező**, $D_{T,R}$ - a T szövetben, az R sugárzásból származó elnyelt dózis.

A w_R értékét foton-sugárzásra definíciószerűen 1-nek vesszük és a töb-bi sugárzást ehhez viszonyítjuk. Sugárbiológia tapasztalatok alapján értéke alfa-részecskékre a legnagyobb: $w_\alpha=20$. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az alfa sugárzás azonos elnyelt dózis esetén húszszor károsítóbb, mint

a röntgen vagy a gamma sugárzás. Az elektron sugárzás súlytényezője megegyezik a röntgen- és gamma-sugárzás súlytényezőjével. Neutronok esetében a súlytényező 5-20 közötti érték, ami függ a neutronok energiájától²⁵.

Mivel a w_R súlyozó tényező egy mértékegység nélküli viszonyszám, az egyenérték dózis egysége is a J/kg, az elnyelt dózishoz hasonlóan. Az egyenértékdózis egysége a sievert (ejtsd: szívert) speciális nevet kapta. Jele: Sv.

Többféle sugárzás egyidejű jelenléte esetén a hatások számtani összegződését tételezzük fel.

Ha egy embert ionizáló sugárzás ér, akkor az rendszerint nem csak egy meghatározott szervét vagy szövetét éri. Joggal vetődhet fel a kérdés, hogy ilyen esetekben hogyan tudnánk egyetlen számértékkel jellemezni az egész szervezet sugárterhelését. A legkézenfekvőbb megoldás az, hogy összeadjuk az érintett szervek, szövetek sugárterhelését jellemző egyenértékdózis értékeket. Az így számolt „egésztestdózis” azonban nem tartalmazza azt a tapasztalati ténytet, hogy az olyan késői sugárhatások tekintetében, mint a rák, vagy a fehérvérűség, a különböző szerveink, szöveteink eltérő sugárérzékenységet mutatnak.

A különböző szervek szöveti elváltozásai tehát nem egyforma mértékben járulnak hozzá az emberi szervezet egészének károsodásához. Így a szervezetre gyakorolt hatás meghatározásakor az egyes szervek különböző súllyal szerepelnek. Ezért az egész szervezet károsodására jellemző effektív dózis a szövetek egyenérték dózisainak súlyozott összege. A súlyozást az adott szövet vagy szerv sugárérzékenysége jellemző w_T szöveti súlyozó tényezővel végezzük. A w_T értéke néhány szervre, szövetre: az ivarszervekre 0,20, a vörös csontvelőre, a tüdőre és a gyomorra 0,12, a pajzsmirigyre pedig 0,05.²⁶

$$E = \sum_T w_T H_T$$

Az **effetív dózis** egysége szintén a sievert (Sv)

A sugárvédelemben az említetteken kívül más dózisfogalmak is használatosak. Ilyen például a lekötött dózis. A szervezetbe került radioaktív anyag - a kémiai összetétele és az anyagcsere folyamatban való részvétele

²⁵ A sugárzás fajtájára és energiájára jellemző w_R súlytényező szoros kapcsolatban van a korábban tárgyalt lineáris energiaátadási tényezővel (LET értékkel).

²⁶ A szöveti súlytényezők összes szervre, szövetre történő összegzése értelemszerűen 1-et ad.

függvényében - rövidebb, hosszabb ideig, egy része akár évekig is a szervezetben marad és belülről sugároz, belső sugárterhelést okoz. A lekötött dózis, amint arra az elnevezése is utal, azt a sugárterhelést jellemzi, ami a szervezetbe került radioaktív anyagtól származik annak fizikai elbomlásáig illetve a szervezetből történő kiürüléséig.

Attól függően, hogy a radioaktív izotópok milyen kémiai hordozóhoz kötődve kerülnek be a szervezetbe, más és más szervekben, szövetekben dúsulnak fel. Így az egyes szervek, szövetek sugárterhelése, de az effektív dózis is nagymértékben függ a hordozótól. A szervezetbe kerülő azonos fajtájú és aktivitású radioaktív anyagok által okozott sugárterhelések tehát jelentősen eltérőek lehetnek a kémiai hordozótól függően.

Az ionizáló sugárzás által okozott akut ártalmak Most, hogy már ismerjük a sugárvédelemben használatos legfontosabb dóziszfogalmakat, vegyük sorra, hogy a különböző ártalmakkal milyen dózisértékek mellett kell számolnunk.

A bőr sugárregése akut, szomatikus és determinisztikus hatás. A bőrön kialakuló elváltozás megegyezik a bőr megégésekor tapasztalható elváltozásokkal. A tünetek súlyossága függ a kapott dózistól és az egyén érzékenységétől. A bőr helyi sugárterhelés esetén sokkal többet visel el, mint egésztest besugárzás esetén. 6 Gy körüli lokális bőrdózis elsőfokú égést okoz. Ekkor a bőrre haragosvörös bőrpír (erythema) jellemző és a szőrzet átmeneti megritkulása, kihullása következik be. 9-10 Gy hatására alakul ki a másodfokú égés, amikor a bőr felhólyagosodik és elkezd váladékozni. A szőrzet kihullása tartós, esetleg végleges lehet. Harmadfokú égés extrém magas helyi dózis esetén alakul ki. Fekélyképződéssel jár, amely csak igen lassan gyógyul.

Akut sugárbetegségről akkor beszélünk, ha az egyén egész testét nagydózisú, 1 Gy-t meghaladó sugárzás éri. 1-2 Gy nagyságú sugárterhelés között a sugárbetegség enyhe, kezdeti tünetei jelentkeznek. Gyengeségérzés, hányinger, rossz közérzet, étvágytalanság. 2 Gy feletti dózis esetén a tünetek súlyosbodnak. A sugárbetegség 2,5-5 Gy között válik súlyossá. Ez az ún. félhalálos dózis, ami azt jelenti, hogy ha embereket bármilyen esemény kapcsán 2,5 és 5 Gy közötti sugárterhelés ér, az emberek kb. fele gyógyítható csak meg. A sugárbetegségnek négy szakaszát különböztethetjük meg: a kezdeti, a nyugalmi (tünetmentes), a kritikus vagy fő betegségi szakasz és a lábadozási időszak. A kezdeti szakasz az elszenvedett dózistól

függően igen rövid lehet, vagy 10-20 napig is eltarthat. A nyugalmi szakaszban megkezdődhet a gyógyulás vagy követheti a kritikus szakasz. A betegség lefolyása három tünetcsoportban nyilvánulhat meg: csontvelőkárosodás, az emésztőrendszer megbetegedése és az idegrendszer sérülése.

A sugárterhelés késői következményei Ha a bőr hosszú ideig tartó, vagy hosszú időn át ismétlődő sugárterhelésnek van kitéve, ún. krónikus sugárdermatitis alakulhat ki. A bőr elvékonyodik, száraz lesz, a szőrzet kihull és gyakran a bőr alatti izmok, szövetek elsorvadnak. Gyógyíthatatlan elváltozás, de nem halálos. A lencsehályog a szemlencse krónikus, degeneratív elváltozása. A lencsehályog akkor alakul ki, ha a szemlencse több éven át tartó, ismétlődő sugárterhelésből integrálisan 7-12 Gy dózist szenved el.

Magyarországon napjainkban évente mintegy harmincezer új rákos megbetegedést diagnosztizálnak. A daganatok egy része a sugárzásból eredő késői sztochasztikus károsodásból származhat. A sztochasztikus hatásnak nincs küszöbdózisa, így bármilyen kis dózissal lehet szerepe a leukémia és egyéb daganatok kialakulásában, természetesen az egyéb rákkeltő hatás mellett. A leukémia lappangási ideje átlagosan 3 év, a daganatoké 15-20 év, vagy még annál is hosszabb. Ezért is nehéz egy adott esetben a daganat kialakulásának okát meghatározni.

A genetikai ártalmak szintén a sztochasztikus hatások következtében alakulnak ki. Az egyént ért sugárterhelés következtében az utódokon jelentkezik fejlődési rendellenesség.

A belső és külső sugárterhelések Az emberi test ionizáló sugárzás hatására belső és külső sugárzásból eredő sugárterhelés formájában károsodhat. A külső és a belső sugárterhelés összege a teljes sugárterhelés.

Ha a szervezetünkbe belégzéssel, lenyeléssel, ép vagy sérült bőrfelületen keresztül történő felszívódással radioaktív izotóp kerül, **belső sugárterhelés** alakul ki. A szervezetbe kerülő radioaktív anyag egy része lerakódik a behatolás helyén, majd később a vérkeringéssel és a nyirokrendszerrel továbbhalad a szervezetben. Az egyes izotópok bizonyos szövetfélésekhez, szervekhez szívesen kötődnek. Az ilyen izotópokat szervkereső izotópoknak, a szerveket, amelyben felhalmozódik, kritikus szerveknek nevezzük. Meghatározott idő után megkezdődik a radioaktív izotópok kiürülése a szervezetből, elsősorban a vesén keresztül történő kiválasztással.

Külső sugárterhelésről akkor beszélünk, ha a radioaktív anyag nem kerül be a szervezetünkbe, hanem azt csak a belőle származó radioaktív

sugárzás éri el. Külső sugárterhelésről beszélünk akkor is, ha röntgenbe-
rendezéssel előállított röntgensugárzás éri a szervezetünket.

Az ionizáló sugárzások természetes forrásai Az ionizáló sugárzások jelentős része természetes forrásokból származik. Ennek egy része a világtűrőből, elsősorban a Napból érkezik hozzánk. A protonokból, alfa-részecskékből, stb. álló nagyenergiájú, kozmikus eredetű részecske sugárzásnak nagy része reakcióba lép a Föld légkörét alkotó atomokkal, kis része azonban eléri a Föld felszínét. A levegő atomjaival történő reakciók során másodlagos részecskék keletkeznek. Ezek a másodlagos részecskék adják a kozmikus sugárzás földfelszíni dózisének a zömét. A **kozmos sugárzásból** származó földfelszíni dózisteljesítmény 30-50 nGy/h, így a kozmikus sugárzásból éves viszonylatban 300-350 $\mu\text{Sv}/\text{év}$ sugárterhelésünk származik. Ez az érték a földrajzi szélességgel és a földfelszíntől mért magassággal is változik. 10 km magasságban például a dózisteljesítmény már 3-5 $\mu\text{Sv}/\text{h}$, így egy 8 órás repülőút során 25-30 μSv dózist is kaphatunk.

A kozmikus sugárzás során az elsődleges és a másodlagos részecskék reakcióiból a levegőben több radioizotóp is keletkezik, ezek közül a legfontosabbak: ^3H , ^7Be , ^{14}C és a ^{22}Na . Ezek a radioaktív izotópok egyrészt a földfelszínre kiüledve külső sugárterhelést, másrészt a szervezetbe kerülve (lenyelve, belélegezve) belső sugárterhelést okozhatnak.

A természetes sugárforrások között szerepelnek a Föld kialakulása óta jelenlévő radioaktív izotópok, illetve azok bomlástermékei. Ezek elsősorban a ^{40}K , a ^{87}Rb , a ^{232}Th izotóppal kezdődő tórium-, a ^{238}U izotóppal kezdődő urán-, valamint a ^{235}U -nal kezdődő aktinium sorozat radioaktív izotópjai, leányelemei. A radioaktív bomlások során mind alfa-, mind béta-, mind gamma-sugárzás keletkezik.

Az emberi szervezet számára a kálium fontos elem, így a táplálékláncon keresztül a ^{40}K is beépül a szervezetünkbe, amely évente mintegy 170-190 μSv belső sugárterhelést jelent.

Az urán és tórium soroknál több besugárzási útvonallal is számolnunk kell.

A talajfelszíntől 1 m-re az urán és tórium-soroktól, továbbá a ^{40}K -tól származó külső gamma dózisteljesítmény 50-60 nGy/h körüli érték, ami évente 70-80 μSv sugárterhelést jelent.

A világ néhány helyén a levegőben mért dózisteljesítmény jóval magasabb az átlagosnál. Svédországban például a gránitos kőzetek miatt vannak kiugró, 100 ezer nGy/h nagyságú értékek.

Az építőanyagok szintén tartalmazzák (eltérő mennyiségben) a ^{40}K izotópot és az urán és tórium bomlási sor radioaktív izotópjait. Így egy lakásban is mérhető gamma-dózisteljesítmény, hazánkban ez átlagosan 70-80 nSv/h, ami évente 340-360 μSv sugárterhelést jelent.

Az emberek további sugárterhelését jelenti, hogy az urán és tórium sor természetes radioaktív izotópjai a táplálékláncon keresztül is bejuthatnak a szervezetbe. Ezt a fajta sugárterhelést étkezési szokásaink befolyásolhatják, és átlagosan 150-170 μSv sugárterhelést jelent évente.

Speciális probléma az urán és tórium sornál, hogy leányelemeik a ^{222}Rn és a ^{220}Rn nemesgázok, így diffúzió révén a talajból illetve az építőanyagokból könnyen a levegőbe tudnak kerülni. A szervezetbe belégzéssel bekerült radon tovább bomlik, így leányelemeivel belső sugárterhelést okozhatnak. Lakásokban átlagosan 20-25 Bq/m³ aktivitáskoncentrációval számolva ez 1100-1300 μSv -t jelent évente.

Összesítve elmondhatjuk, hogy az emberi szervezetet átlagos körülmények mellett a természetes háttérsugárzásból évente 2,4 mSv külső és belső sugárterhelés éri. Léteznek azonban olyan területek is a Földön, ahol a természetes háttérsugárzásból származó sugárterhelés ennél a világátlagnál jóval nagyobb.

Az ionizáló sugárzások mesterséges forrásai Az atomenergia felhasználása köztudottan növeli a környezeti sugárzási szintet. Az azonban, hogy ez a növekedés mekkora, már kevésbé köztudott. A paksi atomerőmű a légköri és a vízi kibocsátások mérései alapján a környező lakosságnak 0,2-0,3 $\mu\text{Sv}/\text{év}$ sugárterhelés növekedést okoz, amely három nagyságrenddel kisebb, mint a hatóságilag engedélyezett 0,45 mSv/év, illetve mint a természetes háttérsugárzásból származó 2,4 mSv/év.

A környezeti sugárzási szinteket növeli minden olyan emberi tevékenység, amelynek eredménye a környezetünkben előforduló radioaktív anyagok bedúsulása. Ilyen tevékenység a teljesség igénye nélkül a széntüzelésű vagy olaj, gáz fűtőanyagot felhasználó erőművek működtetése, a háztartásokban használt tüzelőanyagok elégetése, a műtrágya gyártás és felhasználás, építőanyag előállítás, ércfeldolgozók és fémöntödék melléktermékeinek felhasználása, stb.

Említést érdemel, hogy a kórházak gyógyító célú izotópfelhasználásából a szennyvízcsatornán keresztül nap mint nap kerülnek radioaktív anyagok a vízi környezetünkbe. Ezek a szerencsére rövid felezési idejű izotópok, többnyire alig kimutatható mértékben szennyezik a környezetet.

Az ember környezetében található néhány további eszköz, berendezés szintén bocsát ki ionizáló sugárzást, amelyek által okozott sugárterhelés ugyan kis mértékű, de becsülhető nagyságú. Ilyenek lehetnek a különböző világítószámlapos eszközök (órák, műszerek), amelyekben energiaforrásként kis mennyiségben ^{147}Pm vagy ^3H izotópot használnak; az uránt vagy toriumot tartalmazó kerámiák, ötvözetek és üvegárúk; füstérzékelők, amelyek főleg ^{85}Kr vagy ^{241}Am izotópokkal működnek. Mindezek sugárterhelése azonban gyakorlatilag elhanyagolható.

A televíziókészülékek képcsöveiben a felgyorsított elektronok képernyőre történő becsapódásakor fékezési röntgensugárzás is keletkezik, amelynek dózisteljesítménye a képcső felületéhez közel 1 nSv/h körüli érték. A számítások szerint az 1 m-ről történő évi 1000 órás TV-nézés esetén a sugárterhelés nem haladja meg a 10 nSv-et , amely gyakorlatilag elhanyagolható.

Sugárterhelést okozhat még olyan ásványvizek vagy forrásvizek gyakori fogyasztása, amelyek nagyobb koncentrációban tartalmaznak természetes radioaktív anyagokat, vagy olyan barlangok és fürdők, amelyekben a csökkent szellőzés miatt nagyobb a radonkoncentráció (több, mint $100\text{-}1000\text{ Bq/m}^3$).

Összegezve elmondhatjuk, hogy általában a mesterséges forrásokból származó, fent tárgyalt sugárterhelések a természetes sugárterheléshez képest elhanyagolhatók.

Az ionizáló sugárzások orvosi alkalmazásai A betegségek gyógyításában illetve megelőzésében napjainkban nélkülözhetetlen szerepet töltenek be a különböző, ionizáló sugárzást felhasználó képalkotó eljárások. Az ionizáló sugárzást kibocsátó berendezések illetve a radioaktív izotópok felhasználásából következően a lakosságot további sugárterhelés éri.

Egy mellkasi röntgenfelvétel átlagos sugárterhelése $50\text{-}60\text{ }\mu\text{Sv}$. Ha a mellkas felvételt egy speciális eszközzel, a főleg tüdőszűrésre használt ernyőfényképező berendezéssel végzik a sugárterhelés egy kicsivel nagyobb; $300\text{-}400\text{ }\mu\text{Sv}$. Egy fogászati röntgen vizsgálat során $10\text{-}20\text{ }\mu\text{Sv}$ sugárterhelés ér bennünket.

A fenti dózisértékek filmre történő fényképezésre vonatkoznak. A mai, korszerű röntgen berendezések már digitális képalkotó eszközzel vannak felszerelve. Ezek sokkal érzékenyebbek, ezért használatukkal jelentős sugárterhelés csökkenést lehet elérni.

A CT vizsgálatok lényegesen nagyobb sugárterheléssel járnak. A sugárterhelés mértéke nagymértékben függ attól, hogy melyik testtájékot vizsgálják. Egy hasi CT vizsgálat sugárterhelése pl. 7-8 mSv.

Jelenleg a legnagyobb, átlagosan mintegy 20 mSv sugárterheléssel az ún. intervenciós radiológiai eljárások (értágítások, érelzárások, stb.) járnak.

Az izotópdiagnosztikai vizsgálatoknál a sugárterhelés mértéke függ a vizsgált beteg testméreteitől, az egészségi állapotától, sőt a vizsgált szervtől. Egy felnőtt pajzsmirigy vizsgálata során a beteg sugárterhelése 0,7-0,8 mSv, vese ill. agyszcintigráfiánál 2-2,5 ill. 5 mSv.

A népesség teljes sugárterhelésének becslésénél az orvosi kezelésekből származó sugárterheléseket is figyelembe kell venni. A lakosság egészére vonatkoztatva az orvosi kezelésekből származó sugárterhelés éves világtátlaga 0,4 mSv, amely a fejlett országokban meghaladja az 1 mSv értéket. Ezen sugárterhelés több, mint 90 %-a a röntgen vizsgálatokból származik.

Atomfegyver kísérletek A Hirosímában és Nagaszakiban ledobott atombombát követően a Föld lakossága ki volt téve a légköri atomfegyver kísérletektől származó radioaktív szennyezések hatásának. A légköri kísérleti robbantások száma és hatóereje 1954-58, majd 1961-62 között érte el a csúcspontját. Az 1963-ban megkötött atomcsendegyezmény következtében a Szovjetunió és az USA megszüntették a légköri robbantásokat, míg Franciaország és Kína még 1980-ban is folytatta. Napjainkig több, mint 500 légköri kísérleti atomrobbantás volt.

Az atomfegyver robbantások során nagy mennyiségű és sokfajta radioaktív izotóp keletkezik. A robbantási magasságtól függően és a rendkívül magas hőmérséklet hatására a keletkezett radioaktív szennyezés eljut a 10 km feletti sztratoszférába is. Míg a kisebb magasságú troposzférába került radioaktív anyagok a széljárás következtében 1-2 héten belül kihullanak, addig a sztratoszférába jutott hányad ott elkeveredve csak nagyon lassan hullik le a földre.

A környezetben szétszóródott radioaktív izotópok a lakosság sugárterhelésének növekedését eredményezték. Ez egyrészt a talajra kiülepedett radioaktív izotópoktól mint külső, másrészt pedig a belégzés során, illetve

a táplálékláncon keresztül a szervezetbe jutott radionuklidoktól, mint belső sugárterhelés származott. A keletkező több száz fajta izotóp közül csak néhány okozott jelentős sugárterhelést, ezek közé tartozik a cézium-137 és a stroncium-90. Az összes izotóptól származó egyéni effektív dózislekötés világátlagja $3700 \mu\text{Sv}$.

Természetesen a robbantási kísérletek helyéhez közel élők az átlagértékeknél jóval magasabb sugárterhelést kaptak. Az USA a Bikini szigeteken 1954-ben végrehajtott robbantásánál a környékbeli szigetek lakói a váratlan nagy kihullás miatt jelentős sugárterhelést kaptak, bár többszáz kilométerre tartózkodtak a robbantás helyszínétől. Szemipalatyinszk (Szovjetunió) környékén végrehajtott robbantások következtében tízezer ember kapott jelentősebb sugárterhelést.

Az ionizáló sugárzások felhasználásával kapcsolatos balesetek Az atomenergia katonai és békés célú felhasználása során előfordultak kisebb-nagyobb környezetszennyezéssel járó balesetek is.

A békés célú atomerőművekben ezidáig két esetben fordult elő környezetet is szennyező nukleáris baleset. 1979-ben, a Three Mile Island-i (USA) balesetben az aktív zóna egy része átmenetileg hűtés nélkül maradt és a fűtőelem kötegek egy része megolvadt. A szabaddá vált radioaktív hasadványok környezetbe való jutását azonban megakadályozta a reaktort körülvevő hermetikusan elzárt tér.

A Csernobili Atomerőműben 1986-ban bekövetkező baleset az atomenergia történetének súlyosabb szerencsétlensége. A 4. reaktorblokk tervezett karbantartási leállása előtt ún. kifutási kísérletet akartak végrehajtani az egyik turbogenerátorral. A biztonsági előírások sorozatos megsértése következtében először gőzrobbanás, majd vegyi robbanás következett be. Több helyen tűz ütött ki, amit teljesen csak 10 nap múlva tudtak eloltani. A nyitottá vált reaktorból radioaktív anyagok jutottak a környezetbe. Ezek közül a legjelentősebbek a jód-131, a cézium -134 és a cézium 137 voltak. Az operátorok és a tűzoltók közül három hónapon belül harmincan haltak meg. Kezdetben 500 személy kórházi megfigyelését rendelték el. A kezdeti tünetek elmúltával végül 134 személy került részletesebb orvosi megfigyelés illetve kezelés alá. A balesetelhárításban résztvevő kb. 200 ezer embernek, az ún. likvidátoroknak a sugárterhelése átlagosan 100 mSv -re becsülhető, ezek nagyrésze követés alatt áll, megfigyelésük folyamatos. A rákos megbetegedések tekintetében a kontroll csoporthoz képest eddig nem tudtak lényeges emelkedést kimutatni. A reaktort körülvevő 30 km-es körzetből közel 115 ezer embert evakuáltak. Ezeknél az embereknél

a becsült külső sugárterhelés általában 250 mSv alatt volt. Gyerekeknél, elsősorban a jód-131-el szennyezett tej fogyasztása következtében, a pajzsmirigy dózis meglehetősen magas volt, némely esetben a 2,5 Gy értéket is elérte. Miközben a pajzsmirigy rosszindulatú daganatok gyakorisága a felnőttkorban nem, a gyerekkorban a vártnál sokkal erősebben nőtt. A baleset hatása hazánkat sem kerülte el. Budapesten a levegőből kiszűrt aeroszol összes-béta aktivitása a balesetet követően rövid idő alatt ötezerszeresére növekedett. Szerencsére ezt a növekedést elsősorban a gyorsan bomló radionuklidok okozták. A külső sugárterhelés növekedését döntően a talajra kihullott radionuklidok határozták meg. A szabadban, 1 m magasságban mért levegőben elnyelt dózisteljesítmény Budapesten május elsején a 400 nGy/h értéket is elérte. A levegő, víz, talajfelszín és élelmiszerek radioaktív szennyezettsége a lakosság sugárterhelésének megnövekedését eredményezte. Több szempontból ellenőrzött becslések szerint a csernobili atomerőműbaleset következményeként a hazai lakosság sugárterhelése átlagosan mintegy 0,3 mSv effektív dózist (külső+belső) jelent.

Katonai célú nukleáris létesítményekben eddig két jelentős környezet-szennyezéssel járó baleset történt. Az Ural hegységben, Kystym-ben egy plutónium termelő üzem nagy aktivitású folyékony hulladékát tárolták betonba ágyazott, vízhűtéses acéltartályban. Korrozio következtében a hűtőrendszer elromlott és a radioaktív hulladék 330-350 °C-ra felmelegedett, majd 1957. szeptember 29-én felrobbant. A robbanás következtében körülbelül 10^{17} Bq aktivitás szóródott szét. A radioaktív felhő 1 km magasba jutott és 300 km távolságban, ÉK-i irányban elszennyezte a területet. A környezetszennyezés 270 ezer embert érintett. A dolog érdekessége, hogy a baleset közzététele csak az 1980-as évek végén történt, addig igen hatékony hírzárlat működött. A másik baleset Windscale-ben (Anglia) történt, ahol operációs hiba következtében túlhevülés történt, majd tűz ütött ki egy katonai célú, plutónium termelő reaktorban.

Nukleáris fegyverek szállítása közben összesen 14 baleset megtörténte ismert. A két legismertebb a Spanyolországban és Grönlandon történt eset. Spanyolországban 1966-ban két USA katonai gép összeütközött levegőben történt üzemanyag felvétel közben. Ennek során 2,26 km² nagyságú terület elszennyeződött, továbbá két bomba eltűnt. Grönlandon, Thule közelében szintén repülőgépek ütköztek össze. A baleset során 4 bomba nagy robbanóképességű komponensei robbantak fel.

Tengeri balesetekből kifolyólag legalább 48 nukleáris fegyver és több, mint 10 atommeghajtásra használt reaktor fekszik a tengerek fenekén. 1965-ben Japán mellett egy 1 megatonnás hidrogénbomba kioldódott és a tenger-

be esett. A tengerek komoly elszennyeződése származhat az atomfegyverkezés radioaktív hulladékainak elhelyezéséből is. A korábbi Szovjetunió az Északi Jeges-tengerben rakta le radioaktív hulladékait, az USA a nyugati partvidéken, de Nyugat-Európa is rendelkezik tengeri lerakóhellyel.

A Szovjetunióban fellőtt SNAP-9A műhold energiaforrásként ^{238}Pu izotópot tartalmazott. A műhold 1964-ben belépett az atmoszférába, elégett és 600 TBq aktivitással szennyezte el a sztratoszférát. A Cosmos 954 műhold, amely 20 kg uránt tartalmazott, 1978. januárjában hasonlóan járt.

Mexikóban 1983-ban egy terápiás sugárforrás-tartót eladtak. Azt hitték, hogy a 16,7 TBq ^{60}Co sugárforrást már eltávolították belőle. A tartót beolvastották, aminek következtében több tonna fémtermék elszennyeződött. Körülbelül 1000 ember kapott lényeges sugárterhelést, 17 ezer épületet kellett átvizsgálni a beépített betonvasak miatt, s végül 21 ezer m^3 radioaktív hulladék keletkezett.

1984-ben Marokkóban egy radiográfiára használt ^{192}Ir sugárforrást elveszítettek, egy járőkelő megtalálta és hazavitte. Nyolc fő, azaz az egész család meghalt a sugárzás hatásától, egyéni sugárterhelésük 8-25 Sv volt.

A sugárvédelem célja és alapelvei A sugárvédelem alapvető célja az ember védelme. Természetesen ez tágabb értelemben magába foglalja az emberi környezet védelmét is. A sugárvédelem pontosabban megfogalmazható feladata, hogy az emberek sugárterhelését olyan alacsony szintre kell korlátozni, hogy az megfelelő biztonsággal alatta maradjon mindenfajta determinisztikus sugárhatás küszöbdózisának. Mint ismeretes, a késői sztochasztikus sugárhatásoknak nincs küszöbdózisa. Ezeknek a hatásoknak a kockázatát pedig a társadalom számára elfogadható kockázati szint alá kell csökkenteni. Ennek megfelelően biztosítani kell, hogy az ionizáló sugárzással foglalkozásszerűen kapcsolatba kerülő személyek kockázatát az átlagos foglalkozási kockázatnak megfelelően, az érintett lakosság kockázatát pedig az átlagos civilizációs kockázat szintjére kell korlátozni.

Hogy a sugárvédelem céljának és feladatainak meg tudjunk felelni, minden ionizáló sugárzást alkalmazó tevékenységet alá kell vetni a sugárvédelem hármas alapelvének. Az indoklás elve azt jelenti, hogy az ionizáló sugárzás alkalmazását indokolni kell. Az indoklási eljárásba azt is beleértjük, hogy az ionizáló sugárzásokat csak abban az esetben szabad alkalmazni, ha az adott cél eléréséhez más, hasonló eredményes módszer nem áll rendelkezésre. Csak olyan sugárterheléssel járó tevékenység engedélyezhető, amely valamely személy vagy a társadalom számára pozitív nettó haszonnal jár. Ezt az alapelvet az orvosi tevékenységben is érvényesí-

teni kell.

Az **optimálás elve** alapján az érintett személyek sugárterhelését az ésszerűen elérhető legalacsonyabb szintre kell korlátozni. Például az orvosi röntgen vizsgálatoknál megfelelő műszaki paramétereket kell alkalmazni. Ellenkező esetben a vizsgált személy sugárterhelése az indokoltnál nagyobb lesz vagy a kép kiértékelhetetlensége miatt megismételt felvétel jelent felesleges sugárterhelést mind a betegre, mind a felvételt készítőre. Az optimálási eljárás során az adott ország társadalmi és gazdasági állapotát mindig figyelembe kell venni. Az optimálás elvét gyakran említjük úgy, mint az **ALARA-elvet** (As Low As Reasonably Available).

A sugárvédelem harmadik alapelve, a dóziskorlátozásnak a lényege, hogy a fentieken túl korlátozzuk az egyén sugárterhelésének a mértékét. A korlátozás segítségével teszünk eleget a sugárvédelem korábban ismertetett alapvető feladatának, kiküszöböljük a determinisztikus ártalmak előfordulását a sztochasztikus hatásokat pedig a társadalom számára elfogadható szintre korlátozzuk.

A sugárvédelmi alapelvek kidolgozását 1928 óta a Nemzetközi Sugárvédelmi Bizottság (ICRP - International Commission on Radiological Protection) végzi. A bizottság a tudományos eredmények figyelembevételével időnként felülvizsgálja és szükség szerint korszerűsíti az ajánlásait.

A természetes háttérsugárzás a kezdetek óta éri az élővilágot. Az emberi élet is a természetes háttérsugárzás hatása alatt alakult ki illetve fejlődött. Ennek a ténynek is köszönhető, hogy az utóbbi években élénk szakmai tudományos vita bontakozott ki az ún. kis dózisok biológiai hatásairól, továbbá arról, hogy milyen mértékig kell növelni a sugárvédelmet. Indokolt-e nagy anyagi ráfordításokkal olyan szintű kockázatokat csökkenteni, amelyek a természetes háttérsugárzás okozta kockázattal összemérhetők vagy annál is lényegesen kisebbek.

10.7. Kérdések és feladatok

10.7.1. Elméleti kérdések

1. Milyen fizikai mennyiséggel arányosak a sugárzások élettani hatásai?
2. Milyen sugárzásokat nevezünk ionizáló sugárzásoknak?
3. Fejtse ki a különbséget a közvetlenül és a közvetve ionizáló sugárzások között!
4. Mondjon példát ionizáló és nemionizáló sugárzásokra!

5. Mondjon példát közvetlenül illetve közvetve ionizáló sugárzásokra!
6. Mi a különbség a direkt és az indirekt sugárhatás között?
7. Mi az ionizáló sugárzás és az élő anyag kölcsönhatásának négy szakasza?
8. Mit nevezünk lineáris energiaátadási tényezőnek és mi a mértékegysége?
9. Melyik sugárzásnak nagyobb a LET értéke, a gamma-sugárzásnak vagy az alfa- sugárzásnak?
10. Mit nevezünk oxigén-effektusnak?
11. Mikor vannak a sejteink a sugárhatás szempontjából a legérzékenyebb állapotban?
12. Melyek a legérzékenyebb emberi szervek, szövetek?
13. Tegyen különbséget a szomatikus és a genetikus sugárhatások között!
14. Mi az akut és mi a krónikus sugárártalom?
15. Mik a determinisztikus és mik a sztochasztikus sugárhatás jellemzői?
16. Hogyan érzékelik az ionizáló sugárzásokat a gázionizációs detektorok?
17. Hogyan működik a szcintillációs számláló?
18. Mik azok a termolumineszcens detektorok?
19. Miért használhatók fel a fényképészeti filmek az ionizáló sugárzások detektálására?
20. Mi az elnyelt dózis és mi a mértékegysége?
21. Mi az egyenértékdózis és mi a mértékegysége?
22. Mekkora a sugárzási súlyozó tényező értéke alfa- és gamma-sugárzásra?
23. Miért volt szükség az effektív dózis bevezetésére?
24. Hogyan számoljuk ki az effektív dózist?
25. Mikor beszélhetünk külső és mikor belső sugárterhelésről?
26. Milyen sugárterhelést (belső vagy külső) kapunk egy röntgenvizsgálat alkalmával?
27. Mik tartoznak az ionizáló sugárzások természetes forrásai közé?
28. Mondjon példákat az ionizáló sugárzások orvosi alkalmazásaira!

29. Mi a sugárvédelem célja?

30. Ismertesse a sugárvédelem hármas alapelvét!

31. Mi az ALARA-elv?

Ajánlott irodalom:

- Marx György: Atommag-közelben Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1996
- Kanyár Béla, Somlai János, Szabó S. András: Radioökológia és környezeti sugárvédelem, Veszprémi Egyetem Kiadó, Veszprém, 2000

Felhasznált irodalom:

- Sugáregészségtan, Szerkesztette: Köteles György, Medicina Könyvkiadó Rt., Budapest, 2002
- Kanyár Béla, Somlai János, Szabó D. László: Környezeti sugárzások, Radioökológia, Veszprémi Egyetem Kiadó, Veszprém, 1996
- Kanyár Béla, Somlai János, Szabó D. László: Sugárzások elleni védelem dozimetriai és hatástani alapjai, Veszprémi Egyetem Kiadó, Veszprém, 1996

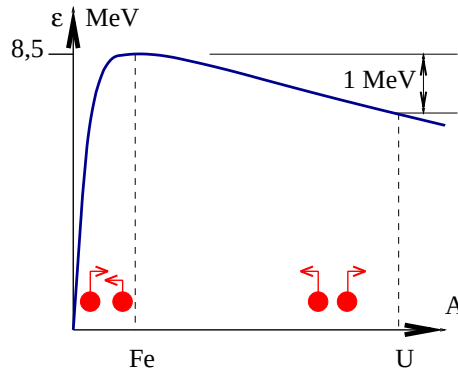
10.8. Energiatermelés atommagfolyamatok segítségével

Az atommagkutatás legjelentősebb hasznosítható eredményeiről lesz szó ebben a fejezetben. Arra a kérdésre válaszolunk, hogy az atommagfolyamatokból nyerhető energiát milyen módon lehet átalakítani az emberek számára felhasználható energiaformává.

10.8.1. Hasadásos energiatermelés

Vizsgáljuk meg még egyszer a magok egy nukleonra jutó kötési energiáját a nukleonszám függvényében. (lásd a 10.7. ábrát)

Látható, hogy a vas környékén (pontosan a nikkel 60-as izotópjánál) a függvénynek maximuma van. Ez azt jelenti, hogy a vas nuklidjainak környezetében találjuk a legstabilabb atommagokat. Itt vannak leginkább



10.7. ábra. Hasadás és fúzió

kötte a magban a nukleonok. Ebből a tényből az is következik, hogy a könnyebb és nehezebb atommagok egy nukleonra vonatkoztatott kötési energiája kisebb, mint a fentebb említett magokban. Tehát, ha egy nehezebb ($A > 230$) mag két könnyebbre esik szét, vagy két igen könnyű ($A < 50$) mag egyesül, a végeredmény mindkét esetben stabilabb magok létrejötte, és ezen két folyamat során *energia szabadul fel*.

Maghasadás:

Azt az energiaszabadulással járó folyamatot, amikor egy nehezebb mag két könnyebbre esik szét, **maghasadásnak** nevezzük.

Magfúzió:

Azt az energiaszabadulással járó folyamatot, amikor két könnyű mag egyesül, **magfúzió**nak nevezzük.

Vizsgáljuk meg a következő három atommag tömegdefektusát: $X_{Z_1}^{A_1}$, $X_{Z_2}^{A_2}$, X_Z^A , ahol $Z = Z_1 + Z_2$ és $A = A_1 + A_2$.

$$\Delta m(A) = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{mag}}(A)$$

$$\Delta m(A_1) = Z_1m_p + (A_1 - Z_1)m_n - M_{\text{mag}}(A_1)$$

$$\Delta m(A_2) = Z_2m_p + (A_2 - Z_2)m_n - M_{\text{mag}}(A_2)$$

Az első egyenletből vonjuk ki a második és harmadik egyenletek összegét:

$$\Delta m(A) - \Delta m(A_1) - \Delta m(A_2) = M_{\text{mag}}(A_1) + M_{\text{mag}}(A_2) - M_{\text{mag}}(A).$$

A kötési energia definíciója alapján, mely szerint $\Delta W = \Delta mc^2$, a következőt kapjuk:

$$\Delta W(A) - \Delta W(A_1) - \Delta W(A_2) = M_{mag}(A_1)c^2 + M_{mag}(A_2)c^2 - M_{mag}(A)c^2.$$

Hasadáskor a hasadási termékek kötési energiáinak összege nagyobb mint a hasadás előtti atommag kötési energiája. Így a hasadáskor felszabaduló energia:

$$\begin{aligned} Q_{hasad} &= \Delta W(A_1) + \Delta W(A_2) - \Delta W(A) = \\ &= M_{mag}(A)c^2 - M_{mag}(A_1)c^2 - M_{mag}(A_2)c^2. \end{aligned}$$

Fúzió esetében az egyesült atommag kötési energiája nagyobb mint a fúzió előtti atommagok kötési energiáinak összege. Így a fúziós folyamatban felszabaduló energia:

$$\begin{aligned} Q_{fuzio} &= \Delta W(A) - \Delta W(A_1) - \Delta W(A_2) = \\ &= M_{mag}(A_1)c^2 + M_{mag}(A_2)c^2 - M_{mag}(A)c^2. \end{aligned}$$

10.4. példa: Határozza meg nagyságrendileg azt az energiát, amelyik az U^{235} nuklid hasadásakor szabadul fel! (Tegyük fel, hogy a hasadási termékek a Fe^{56} és egy $A_2 = 179$ nukleonszámú atommag.)

Megoldás: Az U^{235} -ben egy nukleonra kb. 7,5 MeV kötési energia jut. Azaz az U^{235} kötési energiája:

$$\Delta W(235) = 235 \cdot 7,5 = 1763 \text{ MeV}.$$

A Fe^{56} -ban egy nukleonra kb. 8,5 MeV kötési energia jut. Azaz a Fe^{56} kötési energiája:

$$\Delta W(56) = 56 \cdot 8,5 = 476 \text{ MeV}.$$

Az $A_2 = 179$ nukleonszámú hasadási termék kötési energiáját a 10.7. ábra alapján becsülhetjük. Látható, hogy az $\varepsilon(A)$ függvény vas és urán közötti szakasza jól közelíthető egy egyenessel. Ezen egyenes egyenlete:

$$\varepsilon(A) = 8,5 - \frac{A - 56}{179}$$

Tehát az $A_2 = 179$ nukleonszámú hasadási termék kötési energiája:

$$\Delta W(179) = 179 \cdot \varepsilon(179) = 179 \cdot 7,8 = 1399 \text{ MeV}.$$

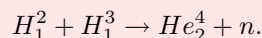
Így ebben a hasadási folyamatban felszabaduló energia:

$$Q_{hasad} = \Delta W(56) + \Delta W(179) - \Delta W(235) = 112 \text{ MeV}.$$

A részleteket is figyelembe vevő pontosabb számítások eredménye 200 MeV körüli érték.

Hasonlítsuk össze a fentebb kiszámított értéket a szén égetésekor felszabaduló energia értékével. Mivel a szén égetésekor egy szénatom lép kötésbe két oxigénatommal, és a kötést az elektronburokban történő átrendeződések jelentik, ezért a felszabaduló energia nagyságrendje az elektronburok külső elektronjaira jellemző érték kell, hogy legyen. Már Bohr modelljéből kiszámoltuk, hogy ez az érték néhány eV. Tehát egy uránizotóp hasadáskor mintegy kétszázmilliószor nagyobb energia szabadul fel, mint egy szénatom oxidációjakor.

10.5. példa: Határozza meg a következő fúziós folyamatban felszabaduló energia nagyságát!



Megoldás: A folyamatban szereplő nuklidok kötési energiái rendre $\Delta W(2) = 2,2 \text{ MeV}$, $\Delta W(3) = 8,5 \text{ MeV}$ és $\Delta W(4) = 28,3 \text{ MeV}$. Tehát a folyamatban felszabaduló energia $Q_{fuzio} = \Delta W(4) - \Delta W(2) - \Delta W(3) = 17,6 \text{ MeV}$.

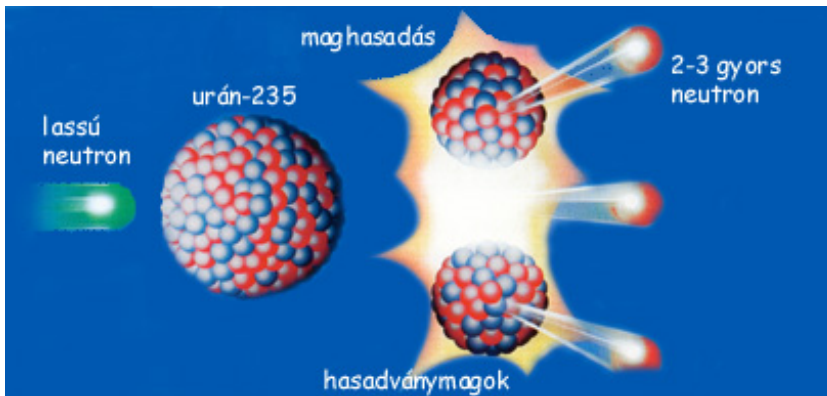
Az eddigiekből is látható, hogy a magenergia felszabadítása óriási lehetőségeket rejt magában, de nagyon sok technikai jellegű nehézséget kell megoldani ahhoz, hogy a lehetőségekből az ember által szabályozott és ellenőrzött energetika lehessen. A továbbiakban ezekkel a megoldásokkal, vagy megoldásnak tűnő javaslatokkal foglalkozunk.

10.8.2. Atomreaktor és atomerőmű

Az eddigiekből az tűnt ki, hogy nehéz magok hasadáskor energia szabadulhat fel. A természetben azonban nincs olyan atommag, amely magától, tehát spontán elhasadna. Ebből viszont az következik, hogy külső behatásra van szükség, hogy a maghasadást működtessük. Ennek legegyszerűbb, erőművi céloknak is megfelelő módja a neutronokkal történő hasítás. (Lásd a 10.8. ábrát.)

Csak néhány olyan atommag van, amelyek ilyen szempontból szóba jöhetnek: U^{235} , U^{238} , Pu^{239} . A neutronokkal történő hasításnak a leghatásosabb módja a **lassú neutronok** által kiváltott hasadás. Lassú neutronnak nevezünk egy neutront akkor, ha mozgási energiája a kT termikus energia szobahőmérsékleti értékének környezetébe esik.

$kT = 0,025 \text{ eV}$ szobahőmérsékleten.



10.8. ábra. A maghasadás folyamata

10.6. példa: Mekkora a sebessége egy lassú neutronnak?

Megoldás: Mivel

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

ezért

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

ahol $m = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $E_k = 0,025 \text{ eV}$ továbbá $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Ezekkel az adatokkal:

$$v = 2200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tehát a lassú neutron korántsem mozog lassan, legalábbis köznap fogalmaink szerint nem. Viszont $v \ll c$, ezért számolhattunk a mozgási energia klasszikus kifejezésével.

Tehát az urán hasítását úgy lehet elképzelni, hogy egy lassú neutron az atommag elnyel, majd rövid idő eltelte után két részre szakad.

Rövid időről akkor beszélünk a magfizikában, ha összehasonlítható a magidővel. A magidő az az időtartam ami alatt a fény átszeli az atommagot. (kb. 10^{-23} s)

A továbbiak szempontjából nagyon lényeges, hogy az urán hasadásakor 2-3 neutron is kirepül. Ezek energiája néhány MeV, tehát csak nagyon kis

valószínűséggel hasítanak további uránmagot. Ezeket a neutronokat hívjuk gyors neutronoknak.

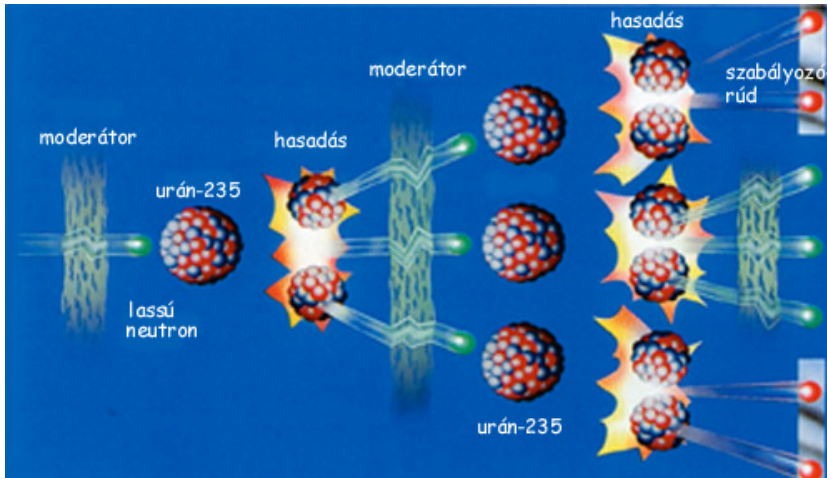
Ahhoz, hogy ezeket a neutronokat a hasítás szempontjából újra hasznossá tegyük le kell őket lassítani. Erre szolgálnak a **lassítóközegek**, vagy **moderátorok**. Ezek olyan anyagok, amelyek csak kevésbé nyelik el a neutronokat, azok a magjaikkal tökéletesen rugalmasan ütköznek. Ahhoz, hogy a lassítás folyamata a leghatékonyabb legyen, arra van szükség, hogy a moderátor atommagjainak tömege és a neutron tömege ne térjenek el nagyon egymástól. Ha ez nem így lenne, a neutron egy ütközés során alig vesztené energiát, így csak kicsit lassulna.

Elvileg moderátorként szóba jöhetnek azok az anyagok, amelyekben sok hidrogén található, mert a hidrogén magjának, a protonnak a tömege tér el legkevésbé a neutronétól. Jó moderátor még a nehézvíz és a grafit.

A nehézvíz molekulájában egyszerű hidrogén helyett deuteron található. A deuteron magja egy protonból és egy neutronból áll.

A lassítás során a neutron elnyelődhet, vagy még mielőtt lelassulna, vagy újabb hasítást idézne elő, kirepülhet a hasadóanyag térfogatából. Hogy ez ne következzen be egy kritikus mennyiségnél több hasadóanyagra van szükség. Képzeliük el, hogy a rendelkezésünkre álló hasadóanyag mennyisége kevesebb a kritikusnál. Ez azt jelenti, hogy több neutron nyelődik el és hagyja el a rendszert egységnyi idő alatt, mint amennyi ugyanennyi idő alatt a hasadóanyag teljes térfogatában keletkezik. Tehát az egységnyi idő alatt a hasítás számára elvesző és a teljes térfogatban keletkező neutronok számának aránya egynél nagyobb. Ha növeljük a rendszer sugarát (az egyszerűség kedvéért gömb alakot tételezünk fel), akkor a fentebb említett arány csökken, mivel a gömb felszíne a sugár négyzetével, míg térfogata a sugár köbével arányos. Létezik egy olyan sugárérték, amelynél a fenti arány éppen egy, vagyis átlagosan annyi neutron keletkezik a rendszerben egységnyi idő alatt, mint amennyi elnyelődik és kirepül. Az ehhez a sugárhoz tartozó hasadóanyag mennyisége éppen **kritikus tömegű**

Tehát ha kritikus tömegű, tiszta U^{235} van együtt egy tömegben a hasadás után keletkező 2-3 neutron nem hagyja el a hasadóanyag térfogatát, mivel kritikus mennyiség van együtt, hanem a moderátor által lelassítva újabb hasadásokat idéznek elő. Ekkor elegendő egy véletlen, mondjuk a kozmikus sugárzásból származó, lassú neutron amely a folyamatot elindíthatja. Látható, hogy az elhasadó magok száma a kettő természetes szám



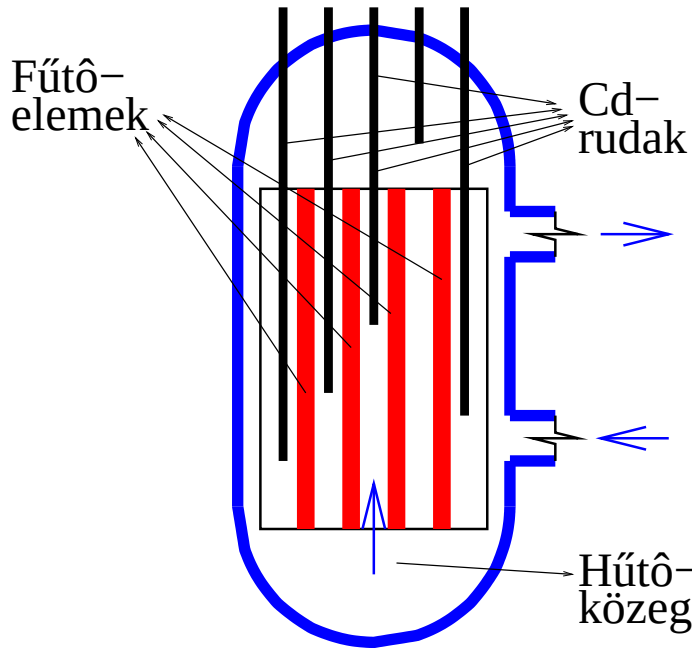
10.9. ábra. A nukleáris láncreakció

kitevőjű hatványai szerint rohamosan növekedni fog. Ezt a folyamatot hívjuk **láncreakciónak**. A fentebb leírt folyamat játszódik le az atombombában, ahol a kritikus mennyiséget egy hagyományos töltetű robbanás segítségével, több darabból „lőjük” igen rövid idő alatt össze.

A következőkben megvizsgáljuk, hogy mit kell tenni ahhoz, hogy a láncreakciót szabályozni tudjuk. Nyilván akkor áll be az egyensúly, ha az elnyelődő és keletkező neutronok száma egyenlő. Az atomreaktorban ezt az egyensúlyt úgy biztosítjuk, hogy amikor már a rendszerben a kívánt teljesítmény eléréséhez elegendő neutron van, akkor a rendszer szabályozására szolgáló kadmiumrudakat beljebb toljuk a reaktorba. (lásd a 10.10. ábrát)

A kadmium azon tulajdonságát használjuk itt ki, hogy nagy számban nyeli el a lassú neutronokat. Hasonló tulajdonságai vannak a bórnak is. Ezt általában a hűtőközegben feloldják, és a bórkoncentráción keresztül szabályozzák a reaktort.

A hagyományos hőerőművekben az energiatermelést biztosító fizikai folyamatból közvetlenül felhasználható energiaforma, hőenergia származik. Az atomerőműben a hasadáskor felszabaduló energia legjelentősebb része a hasadási termékek, főleg a két hasadvány-mag az ún. leánymag mozgási energiájaként jelentkezik. Ezek ütközve a hűtőközeg atomjaival



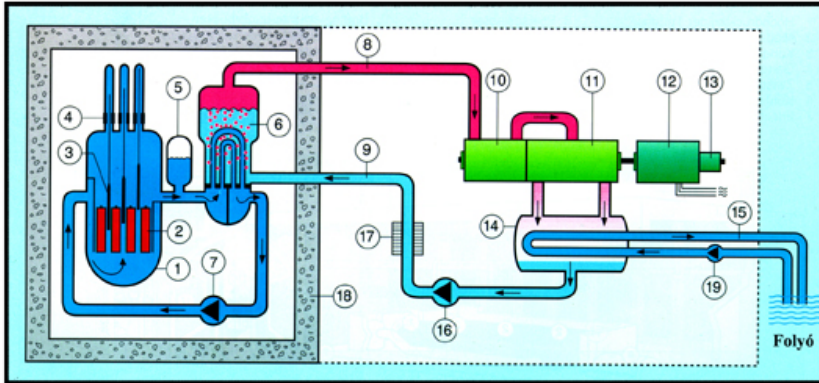
10.10. ábra. A reaktor sémája

felmelegítik azt. Tehát itt is hőenergiát kapunk, amit aztán a hagyományos erőműveknél kifejlesztett módon alakítunk villamos energiává.

Ma a világon a legelterjedtebb reaktortípus a nyomottvízes reaktor. (lásd a 10.11. ábrát.) Ebben a típusban fűtőelemekként U^{235} -ben dúsított rudakat használnak. A dúsítás mértéke 3,5-4,5%.

Moderátorként és hűtőközegként az ásványi sóktól megtisztított ipari víz szolgál. A hűtőközeg nagy nyomáson és magas hőmérsékleten (kb. 300°C) áramlik be a reaktorba. Itt még jobban felmelegszik, majd a gőzfejlesztőbe jut. A nagy nyomásra azért van szükség, hogy a víz a nagyon magas hőmérsékletek dacára is víz maradjon, ne váljon gőzzé. A hűtővíz áramlását a főkeringető szivattyú biztosítja. A primer körhöz tartozik még a térfogat-kompenzátor. Feladata, hogy kezelje a hőmérsékleti és nyomásingadozások miatt fellépő térfogatváltozásokat. Az erőmű primer körön kívüli része, a szekunder kör, lényegében megegyezik a hagyományos hőerőművek kazán után következő részével. (lásd még a 10.12. és a 10.13. ábrákat.)

Megemlíjtük még azokat a nagyon ígéretes törekvéseket, amelyekben a



10.11. ábra. A nyomottvizes reaktorról működő atomerőmű elvi sémája - (1) reaktortartály, (2) fűtőelemkazetta, (3) szabályozórúd, (4) szabályozórúd hajtásai, (5) térfogatkompenzátor, (6) gőzgenerátor, (7) főkeringető szivattyú, (8) gőzelvezetés, (9) tápvíz bevezetése, (10) magas nyomású turbinafokozat, (11) alacsony nyomású turbinafokozat, (12), (13) háromfázisú turbogenerátor, (14) kondenzátor a fűtő gőz lecsapátására, (15) hűtővízrendszer, (16) tápszivattyú, (17) előmelegítő, (18) biológiai védelem, (19) hűtővíz szivattyú

gyors neutronok végzik (kevésbé effektíven mint a lassúak, ezért a hasadóanyag jóval dúsítottabb) a hasítást. A folyamat érdekessége abban rejlik, hogy ezekben a reaktorokban a neutronbesugárzás hatására olyan magok is keletkeznek, amelyek hasadóanyagként felhasználhatóak más reaktorokban. Az ilyen típusú reaktorokat nevezzük **szaporítóreaktoroknak**.



10.12. ábra. Fűtőelem-kazetta makettje

10.8.3. Fúziós energiatermelés

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek teljesülése szükséges ahhoz, hogy a könnyű magok ellenőrzött körülmények között egyesüljenek nehezebbekké. A magerőről leírtak alapján tudjuk, hogy a fúzió csak akkor következik be, ha a magok a magerők hatósugaránál vagyis kb. $R = 1,2 \cdot 10^{-15}$ m-nél kisebb távolságra közelítik meg egymást. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy érintkezniük kell. Az érintkezés bekövetkeztéig viszont a Coulomb kölcsönhatás miatt jelentős taszítóerők működnek a fuzionáló magok között. Ahhoz, hogy a fúziót energiatermelésre fogjuk, az szükséges, hogy a magok szintézise tömeges legyen. Tehát el kell érniük, hogy a fuzionáló magok nagy hányada kerüljön párosával érintkezésbe. Erre egyetlen lehetőségnek a termikus mozgás közben bekövetkező véletlen ütközések látszanak.

10.7. példa: Számolja ki mekkora két deuteron (H^2) taszítási kölcsönhatási energiája érintkezésükkor! A deuteronok termikus mozgása milyen hőmérsékleten tudja biztosítani ezt az energiát?

Megoldás: A kölcsönhatási energia az érintkezés pillanatában tisztán elektromos



10.13. ábra. Pakson működő reaktorok méretarányos makettje

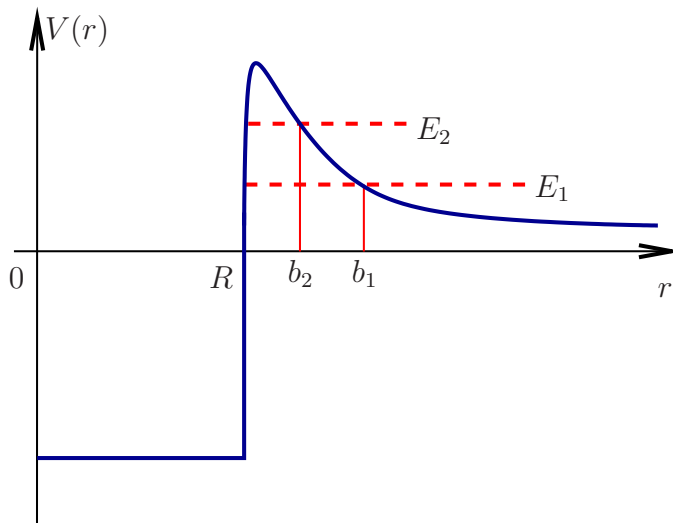
természetű, mivel a magerők még nem hatnak. Tehát:

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2R} = 720 \text{ keV}.$$

Mivel a termikus mozgásból származó átlagos mozgási energia T hőmérsékleten kT , ezért

$$T = \frac{E}{k} = 8 \cdot 10^9 \text{ K}.$$

A fenti feladat azt mutatja, hogy a magok véletlenszerű ütközései csak nagyon magas hőmérsékleteken következnek be. Ilyen magas hőmérséklet-ről nem tudunk a természetben. Ennek ellenére a fúzió ismert jelenség a természetben. Például a Napban is a fúzió biztosítja a sugárzási energiát, pedig csak néhány millió Kelvin fok a hőmérséklet a belsejében. A magyarázat az alagút-effektusban és a magok mozgására érvényes Maxwell-eloszlásban rejlik.



10.14. ábra. Az alagút-effektus hatása a magfúzióra

A Coulomb potenciálgát magasságánál ($V_{max}(r)$) kisebb energiával (E_1) a maghoz közeledő másik mag az alagút-effektus következtében véges valószínűséggel áthatolhat a potenciálgáton, azaz bekövetkezhet a fúzió. A *Bevezetés az atomfizikába* című fejezetben már tárgyaltuk az alagút-effektust.

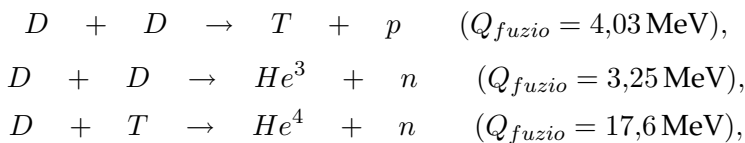
Azt találtuk, hogy a potenciálgáton való átjutás valószínűsége nő, ha csökken a potenciálgát szélessége (b_1), vagy ha csökken a $V_{max}(r) - E$ különbség. A 10.14. ábrán jól látható, hogy az ütközés energiájának növelésével (E_2) egyszerre csökken a potenciálgát szélessége (b_2) és a $V_{max}(r) - E$ különbség is.

Természetesen a termikus mozgás statisztikus jellege miatt az ütközési energia atommagonként más és más, de világos, hogy a hőmérséklet növekedésével a Maxwell-eloszlásból számolható átlagos ütközési energia növekszik, azaz rohamosan nő a potenciálgáton való átjutás valószínűsége. Ha elég sok fuzionálni képes atommag van a vizsgált térfogatban, akkor a potenciálgáton való átjutás valószínűségének növelésével növeljük a fuzionáló atommagok számát is. Tehát az előző példában meghatározott 10^9 K nagyságrendű hőmérsékletnél már sokkal alacsonyabb hőmérsékletek mellett is bekövetkezhet a fúzió az alagút-effektusnak köszönhetően.

A fentebb leírt elvet használják fel a hidrogénbombában is, ahol a kívánt magas hőmérsékletet egy atombomba felrobbantásával érik el.

Mint a hasadásnál az atomreaktor esetében, ebben az esetben is lényegesen nehezebb a fúziót ellenőrzött körülmények között működtetni. Az emberiségnek sajnos ez még ezidáig nem sikerült, pedig már az alapelv felfedezése óta próbálkozunk a békés felhasználással. A következőkben áttekintjük hol is tart ma ez a folyamat. Ez azért is fontos, mert az ellenőrzött fúzió jelentheti az emberiség energiagondjaira a megoldást.

Három fúziós reakció esetében van esély a sikerre. Ezek a következők:

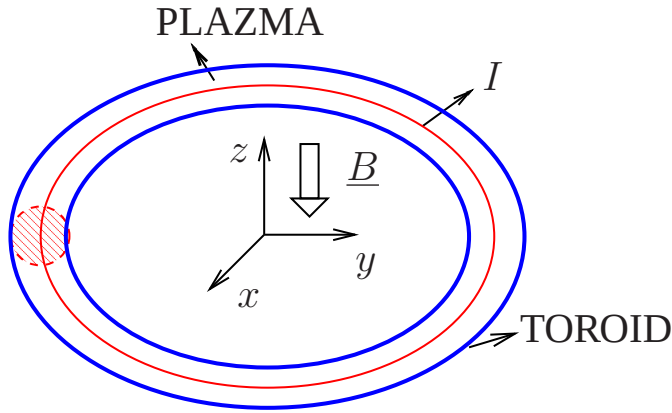


ahol $D = H^2$ -a deuteron, $T = H^3$ -pedig a trícium.

Legígéretesebb fúziós reakció a $D - T$ reakció.

A fúziós kísérletek élvonalába két alapvető elképzelés tartozik. Időben korábban fogalmazódott meg a TOKAMAK mozaikszóval jellemzett elképzelés. Lényege, hogy egy toroidban (gyűrű alakú tekercs) helyezik el azokat az atomokat, melyeknek magjai fúzióra alkalmasak. Ebben a(gáz halmazállapotú) anyagban elektromos ívkisülést hoznak létre. Az egész toroid erős mágneses térben van elhelyezve, mégpedig úgy, hogy az indukcióvektor merőleges a toroid $x - y$ síkjára. (lásd a 10.15. ábrát.)

Az ívkisülés következtében az atomok ionizálódnak, és a keletkezett ionok és elektronok a mágneses tér jelenléte miatt körpályára kényszerülnek. Az atomok ionizációja mindaddig folyik, míg minden elektron le



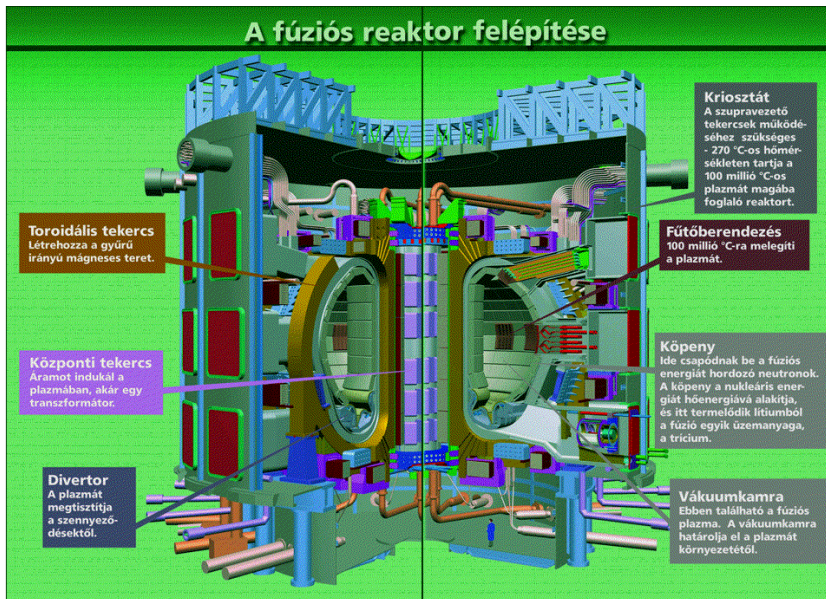
10.15. ábra. TOKAMAK

nem szakad az elektronburokból. Ezt az állapotot nevezzük **plazmaállapotnak**. A plazmában az egymással szemben áramló ionok és elektronok ütközéseinek következtében növekszik a hőmérséklet. Így előbb-utóbb lesznek olyan magok, amelyek egymással ütközve érintkezésbe kerülnek és a magerők hatására fuzionálnak. A felszabaduló energia a reakció végtermékeinek mozgási energiájában nyilvánul meg, tehát szükséges ezek lefékezése, mozgási energiájuk hővé alakítása. Ennek az elrendezésnek van egy nagyon jelentős technikai nehézsége. A forró plazma nem érintkezhet a toroid falával, mert kiégetné azt, miközben lehülne és az energiatermelés leállna. A megoldást a plazma tulajdonságaiban találták meg. Az anyag plazmaállapotban kifele elektromosan semleges, de a fent leírtakból látható, hogy szabad töltéshordozókból áll. Az ilyen rendszer mágneses térrel lokalizálható. Azt szokás mondani, hogy a forró plazma lebeg a mágneses térben. (A 10.16. ábrán egy kísérleti termonukleáris reaktor sémája látható.)

További elvi jelentőségű problémát jelent az, hogy fellépnek bizonyos veszteségek. A TOKAMAK esetében ezek elsősorban a fékezési sugárzás okozta veszteségek. Az ionok és elektronok körpályán mozognak, így a centripetális gyorsulás miatt elektromágneses sugárzást sugároznak ki, miközben mozgási energiájuk csökken. A fúziós kísérletek esetében az ún. **Lawson-kritérium** határozza meg, hogy mi a feltétele az önfenntartó fúciónak:

$$n \cdot \tau_E \geq C(T),$$

ahol n -a fuzionálni képes ionok koncentrációja, τ_E -energiatárolási idő, $C(T)$ -csak a hőmérséklettől függő szám.



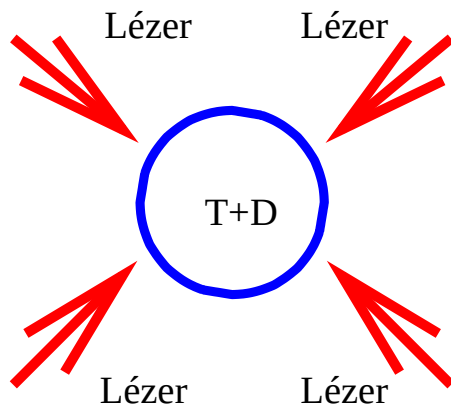
10.16. ábra. Az ITER termonukleáris reaktor sémája

Az energiatárolási idő azt adja meg, hogy a magára hagyott plazma energiatartalma mennyi idő alatt csökken a veszteségek következtében $1/e$ -ed részére. A $C(T)$ értéke például deutérium+trícium reakció esetében 80 MK hőmérsékleten $10^{21}\text{s} \cdot \text{m}^{-3}$. Sajnos a Lawson-kritériumnak még egyetlen békés célú kísérletben sem sikerült eleget tenni.

A másik típusú, sikereket ígérő fúziós kísérlet a **lézeres fúziós kísérlet**.

Itt a fúzióra alkalmas magok keveréke megfagyasztott $D - T$ keverék csepp. Ez a szilárd keverék esik be nagy teljesítményű szimmetrikusan elhelyezett impulzuszérezek fókuszába. (lásd 10.17 ábrát) A nagy teljesítményű fényimpulzusok hatására a keverék hirtelen olyan hőmérsékletre melegszik, hogy a fúzió beindul. Ennek az elrendezésnek az az előnye, hogy az ionok koncentrációja lényegesen nagyobb, mint a TOKAMAK-ban, így kisebb lehet az energiatárolási idő. Hátránya, hogy sokkal nehezebben oldható csak meg a felszabaduló energia hővé alakítása és elvezetése. Sajnos még ebben az elrendezésben sem sikerült eleget tenni a Lawson-kritériumnak.

A kutatók az első fúziós reaktorok üzembeállítását a XXI. század közepére ígérik. Hogy a két megközelítés közül végül melyik jelenti majd a megoldást, ma még nem lehet tudni.



10.17. ábra. Lézeres fúzió

10.9. Radioaktív hulladék

A Nagaszakira és Hirosimára 1945-ben ledobott atombombák következményei mélyen élnek az emberek emlékezetében, és sokan ezekkel az emlékekkel társítják az atomenergetikát. Ezért aztán az indokoltnál nagyobb óvatossággal kezelik ezt a problémát, sőt az utóbbi időben sokan megkérdőjelezzik az atomenergetika szükségességét. Vizsgáljuk meg, mi az, amiben az atomenergetika ellenzőinek igaza van, és mi az, amiben tévednek.

Először is le kell szögezni, hogy a radioaktivitás felfedezésével olyasmí jutott az emberiség birtokába, amihez történelmünk során semmilyen más felfedezés sem hasonlítható. Arról van szó, hogy elő tudunk állítani olyan mesterséges anyagokat, amelyek radioaktívak, de előállításuk után nem tudjuk semmilyen módon sem befolyásolni ezt a radioaktivitást. A létrehívott radioaktivitás elkísérhet bennünket több tízezer éven keresztül anélkül, hogy befolyásolni tudnánk a magok elbomlásának ütemét. Ebből az következik, hogy az ilyen anyagokkal különleges módon kell bánni, és sosem szabad lebecsülni a bennük rejlő veszélyt. Valószínűleg meg kell tanulnunk együtt élni ezzel a felelősséggel.

Amiben viszont tévednek az atomenergetika ellenzői, az az, hogy egy atomreaktorban nukleáris robbanás történhet. Az atomrobbanás feltétele, hogy egy tömegben kritikus mennyiségű, nagy tisztaságú hasadóanyag legyen együtt. Ez a feltétel egy atomreaktorban sem teljesül. A hasadóanyagok koncentrációja nem éri el a fűtőelemekben azt az értéket, ami már lehetővé tenné az atomrobbanást.

Komoly viták folynak arról is, hogy megoldhatók-e energiagondjaink atomenergetika nélkül. Ezt a vitát csak az idő döntheti el. Egyelőre tény marad az, hogy Európában és Amerikában számos reaktor működik biztonságosan, de van velük egy nagy gond. Mi legyen a belőlük kikerülő radioaktív hulladékkal? Mi legyen ezen reaktorok sorsa, ha már kiszolgálták idejüket? Sok jelentős kutató véleménye az, hogy a megoldást csak úgy lehet megtalálni, ha felvállaljuk a fenti problémákban rejlő rizikót, és megpróbáljuk hasznunkra fordítani a radioaktív hulladék nyújtotta lehetőségeket. Számos olyan területről tudunk, ahol hasznos a radioaktivitás. (gyógyászat, élelmiszeripar, vegyipar stb.) Ma már az is egyre világosabb, hogy a kiszolgált reaktorokat fel lehet újítani, még ha ez ma igen költségesnek tűnik is. A hagyományos energiahordozók kimerülése viszont egyre inkább versenyképessé teszi az atomenergetikát.

A fúziós reaktorok sikeres rendszerbeállítása a radioaktív hulladék kérdését is más megvilágításba helyezheti. A fúziós reaktorban várhatóan nem keletkeznek hosszú felezési idejű radioizotópok, gyakorlatilag csak a felaktiválódott szerkezeti elemek időleges tárolását kell megoldani. Így a fúziós reaktorok a hosszú felezési idejű (legveszélyesebb) radioaktív hulladékok problémájának megoldásában is szerepet játszhatnak.

10.10. Kérdések és feladatok

10.10.1. Elméleti kérdések

1. Mire szolgál az atomerőművekben a moderátor?
2. Mi a szükséges feltétele annak, hogy a nukleáris láncreakció szabályozható legyen?
3. Milyen kettős szerepe van egy nyomottvizes reaktorban a víznek?
4. A paksi reaktorokban a hűtővíz hőmérséklete kb. $300\text{ }^{\circ}\text{C}$. Hogy lehetséges, hogy még mindig folyékony halmazállapotú?
5. Írja le, hogy a természetes radioaktivitás 3 fő fajtája esetében hogyan változik a bomló mag rendszáma és tömegszáma?
6. Mi történne a magreakciókkal egy atomerőműben, ha a moderátortanyag hirtelen eltűnne? Miért?
7. A He, Fe és U atomok közül melyiknek a legnagyobb az egy nukleonra jutó kötési energiája? Nagyságrendileg mekkora ez az érték?
8. Nagyságrendileg mekkora a magerők hatótávolsága?

9. Mit lehet meghatározni a tömegdefektus mértékéből?
10. Írja fel, hogyan változik egy atommag rendszáma és tömegszáma β -bomláskor!
11. Miért kíséri gyakran γ -sugárzás az α -sugárzást?
12. Nagyságrendileg mekkora egy α -részecske energiája?
13. Hányadrészére csökken egy radioaktív anyag aktivitása 3 felezési idő alatt?
14. Két radioaktív anyagdarabban pillanatnyilag azonos mennyiségű radioaktív atom van, de az első felezési ideje kétszerese a másodikénak. Hogyan viszonyulnak egymáshoz az aktivitások? Miért?
15. Mit értünk a láncreakciószerű maghasadás esetén „kritikus tömeg” alatt?
16. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkezzen egy anyag, hogy jó moderátor legyen belőle maghasadáson alapuló láncreakciókhoz?
17. Az atomerőművek biztonsági rúdjai hogyan viselkednek a neutronokkal szemben?
18. Mi a magas hőmérséklet szerepe a fúziós kísérletekben?
19. Az asztalon, tőlünk 5 m-re egy α -sugárzó anyagdarab van. Félnünk kell-e, hogy közvetlen sugárfertőzést kapunk? Miért?
20. Miért okoz erős kémiai roncsolást egy kis radioaktív anyagdarab is?

10.10.2. Kidolgozott feladatok

10.1. feladat: Régészek egy őskori lelet ^{14}C -izotópos vizsgálatakor megállapították, hogy a leletben a ^{14}C izotóp mennyisége az eredeti érték tized része. Határozza meg a lelet korát! (A ^{14}C izotóp β -bomlással bomlik, és felezési ideje 5730 év.)

Megoldás: A feladat szövegéből adódik, hogy a ^{14}C -izotóp radioaktív bomlással bomlik, tehát érvényes a bomlási törvény:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}}.$$

Mivel:

$$\frac{N(t)}{N_0} = 0,1,$$

ezért:

$$t = -T_{1/2} \cdot \frac{\ln 0,1}{\ln 2} = 19\,035 \text{ év}$$

A lelet tehát kb. 20 000 éves.

10.2. feladat: Becsülje meg mekkora a térfogata egy U^{235} atommagnak!

Megoldás: Mivel az atommagok jó közelítéssel gömbnek tekinthetők, így csak egy R sugarú gömb térfogatát kell kiszámítani. Tudjuk, hogy az atommagok sugara és nukleonszáma között fennáll a következő összefüggés:

$$R = r_0 A^{1/3},$$

ahol $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15}$ m Tehát:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1,7 \cdot 10^{-42} \text{ m}^3.$$

10.3. feladat: Egy radioaktív anyagdarab egyféle izotópból áll. Minden bomláskor 10 MeV energia szabadul fel. A felezési idő 56 nap, a pillanatnyi aktivitás $9,2 \cdot 10^9$ Bq. Mekkora teljesítménnyel adja le most az energiát az anyagdarab? Hány atommag van benne most? Összesen mennyi energiát fog szétsugározni mostantól kezdve?

Megoldás: Számoljuk ki előbb a bomlási állandót:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,6931}{56 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 1,43 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{s}}$$

Az aktivitás $A = 9,2 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ és a bomlások mindegyike $E = 10 \text{ MeV}$ energiát szabadít fel, így a teljesítmény nyilván:

$$P = AE = 0,0147 \text{ W}.$$

A másodpercenkénti bomlások száma épp az aktivitás:

$$A = N\lambda$$

ahonnan a radioaktív magok száma:

$$N = \frac{A}{\lambda} = 6,43 \cdot 10^{16}.$$

Az összenergia az N atom elbomlásából származik, azaz:

$$E_{\text{össz}} = E \cdot N = 1,03 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

10.4. feladat: Egy uránmag hasadásakor kb. 200 MeV energia szabadul fel. Az urán móltömege kb. 230 g/mol. Becsülje meg, mennyi anyag alakul át a robbanás energiájává egy 20 kg-os urántöltetet tartalmazó bomba robbanásakor!

Megoldás: 20 kg uránban levő magok száma:

$$N = \frac{20 \text{ kg}}{0,23 \text{ kg}} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 5,22 \cdot 10^{25}.$$

A felszabaduló energia tehát:

$$E = N \cdot 200 \text{ MeV} = 1,67 \cdot 10^{15} \text{ J}.$$

Az ennek megfelelő tömeg:

$$m = \frac{E}{c^2} = 0,019 \text{ kg}.$$

10.5. feladat: Egy ${}^4\text{He}$ -atommag kb. 1,5%-kal könnyebb, mint két darab ${}^2\text{H}$ (nehézhidrogén). Mennyi energia szabadul fel 1 kg nehézhidrogénből, ha fúzióval ${}^4\text{He}$ -t gyártunk belőle? Hány napig tudna ebből egy feltételezett erőmű egy kisvárost energiával ellátni, ha a felszabaduló energiát 20% hatásfokkal tudnánk használatosá alakítani és a kisváros átlagosan 12 MW teljesítményt igényel?

Megoldás: 1 kg nehézhidrogénből 1,5%, azaz $\Delta m = 0,015 \text{ kg}$ alakul át energiává. A felszabaduló energia tehát:

$$E = \Delta mc^2 = 1,35 \cdot 10^{15} \text{ J}.$$

A hasznosított energia ennek 20%-a, azaz $E_h = 0,2E$ és ezt $P = 12 \text{ MW}$ teljesítménnyel kellene felhasználni. $P = E_h/t$ miatt a kért idő:

$$t = \frac{E_h}{P} = 2,25 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 260 \text{ nap}.$$

10.6. feladat: Egy radioaktív anyagdarab aktivitása pillanatnyilag $5,3 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$, és azt is tudjuk, hogy 0,08 W teljesítménnyel adja le energiáját. Hány elektronvolt az egy mag elbomlásakor felszabaduló energia? Tudjuk, hogy $6,8 \cdot 10^{16}$ db radioaktív mag van jelenleg az anyagban. Mekkora a felezési idő?

Megoldás: A feladat szövege alapján a másodpercenkénti bomlások száma $5,3 \cdot 10^{10}$, és ez 0,08 J energiának felel meg. Ezért az egy bomláskor felszabaduló energia:

$$E_1 = \frac{P}{A} = \frac{0,08 \text{ J/s}}{5,3 \cdot 10^{10} \text{ 1/s}} = 1,51 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 9,4 \text{ MeV}$$

Az aktivitás, a magok száma és a bomlási állandó közt egyszerű kapcsolat van, amiből utóbbi könnyen kiszámolható:

$$A = N \cdot \lambda$$

ahonnan

$$\lambda = \frac{A}{N}.$$

Ebből viszont a felezési idő kapható meg könnyen:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{N \ln 2}{A} = \frac{6,8 \cdot 10^{16} \cdot 0,6931}{5,3 \cdot 10^{10}} = 8,89 \cdot 10^5 \text{ s}, \quad (= 10,3 \text{ nap}).$$

10.7. feladat: Egy radioaktív anyagdarab aktivitása most $6,8 \cdot 10^9$ Bq, relatív atomtömege 129 g/mol, a radioaktív anyag össztömege 5,2 g. Hány el nem bomlott mag van benne most? Mekkora a felezési ideje? Mekkora lehetett aktivitása három felezési időnyivel a mérés pillanata előtt?

Megoldás: Mivel 1 mól anyag 129 g tömegű, ezért 5,2 g nyilván $5,2/129 = 0,0403$ mólnyi, azaz az el nem bomlott magok száma:

$$N = 0,0403 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 2,42 \cdot 10^{22}.$$

A bomlási állandó most már megkapható, hisz tudjuk, hogy $A = N\lambda$:

$$\lambda = \frac{A}{N} = \frac{6,8 \cdot 10^9}{2,42 \cdot 10^{22}} = 2,81 \cdot 10^{-13} \frac{1}{\text{s}}.$$

Innen a kért felezési idő:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 2,47 \cdot 10^{12} \text{ s}, \quad (\approx 78\,000 \text{ év}).$$

Mivel egy felezési idő alatt az aktivitás feleződik, ezért három felezési idő alatt a nyolcadára csökken. Így három felezési idővel a mérés megkezdése előtt az aktivitás a pillanatnyinak a 8-szorosa kellett legyen, azaz:

$$A' = A \cdot 8 = 5,44 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

Ugyanez természetesen a bomlási törvényből is meghatározható, csak jóval bonyolultabban. Természetesen az a megoldás is jó!

10.10.3. Gyakorló feladatok

1. A rádium felezési ideje 1590 év, és egy mag bomlásakor 17 MeV energia szabadul fel. Másodpercenként hány joule energia szabadul fel egy 1 g-os Ra-darabban?
2. Egy radioaktív anyag aktivitását mérjük. A mérés kezdetekor ez $6,2 \cdot 10^9$ Bq, pontosan 3 nap múlva már csak $4,8 \cdot 10^9$ Bq. Mekkora a felezési ideje? Hány radioaktív atommag maradt meg a második mérés idejére?
3. Egy ásatáskor előkerült csontvázban 0,35-ször annyi 14-es C-izotóp van, mint egy frissben. Milyen régi a lelet, ha a 14-es C-izotóp felezési ideje 5600 év?
4. Becsülje meg, mennyivel csökken 1 kg ${}^{235}_{92}\text{U}$ tömege, ha az összes mag elhasad benne! (Tegyük fel, hogy kb. 200 MeV szabadul fel minden hasadáskor.)

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston, Mátrai Tibor: Kísérleti fizika III., Tankönyvkiadó
- Mackintosh, Al-Khalili, Jonson és Pena: Az atommag, Akadémia kiadó

Felhasznált irodalom:

- Mackintosh, Al-Khalili, Jonson és Pena: Az atommag, Akadémia kiadó
- Keszthelyi Lajos: Atomok és atomi észecskék, Műszaki könyvkiadó 1962
- Györgyi Géza: Elméleti magfizika, Műszaki könyvkiadó 1965

11. Anyagszerkezet

Az előző fejezetekben megismertük az anyag legkisebb építőkövének, az atomnak és annak magjának felépítését. Megállapítottuk, hogy az atommag folyamatai a radioaktivitás jelenségét, a hasadási és fúziós energiatermelést és a hozzájuk kapcsolódó folyamatokat magyarázzák meg. Megemlítettük, hogy az atom elektronburkának szerkezete az atomok színképére, a bennük lévő elektronok energia szerinti eloszlására ad magyarázatot, mely az atom kémiai viselkedését befolyásolja.

Ebben a fejezetben megnézzük, mi is történik, ha több atom együtt alkot nagyobb szerveződési egységet: a néhány atomból álló molekuláktól kezdve a sokmilliárdnyi atomból összetevődő szilárdtestekig. Látni fogjuk, hogy az anyagszerkezet ezen szintjein múlnak az olyan tulajdonságok, mint pl. az anyag kémiai viselkedése, olvadás- és forráspontja, elektromos vezetőképessége.

11.1. A molekulák kialakulása

Korábban megtanultuk, hogy az atomokban található elektronok stabil állapotait az elektronok hullámfüggvényeinek stacionárius megoldásai jelentik, és ezek közül az elektronok a lehető legalacsonyabb energiájúakat igyekeznek feltölteni (energiaminimum-elv), de ezt korlátozza az, hogy nem lehet két elektron teljesen azonos állapotban (Pauli-elv). Ugyanezek az elvek vezetnek a molekulák létének és energiaszerkezetének megmagyarázásához is.

Gondoljuk meg, mi történhet, ha két atom egymáshoz közeledik. Az atomok mindegyike összességében semleges töltésű, így az elektromos taszítás nem akadályozza meg a közeledést. Az, hogy az egymáshoz közel kerülő atomok esetében történik-e egyáltalán valami érdemleges, azon múlik, hogy a két atom elektronjai találnak-e olyan új állapotokat, mely kisebb összenergiát jelent és a Pauli-elv is megengedi. Amennyiben van ilyen megengedett, alacsonyabb energiájú állapot, bizonyos valószínűséggel ez létre fog jönni, mivel az energiaminimum-elv itt is „dolgozik”, és egy új állapot jön létre, mely többnyire (bár nem feltétlenül) a két atom valamiféle összekapcsolódását jelenti. Ha nincs ilyen állapot, akkor a két atom lényegében változatlanul elhalad egymás mellett, esetleg egy kis lendületet cserélnek egymással vagy gerjeszthetik egymás elektronjait.

Amennyiben kötés nem alakul ki, az elektronok közti energiacsere általában csak akkor lehetséges, ha legalább az egyik atom nem alapállapotban volt. Alapállapotú atomok ugyanis nem tudnak mélyebb energiaszintre

süllyedni, így egyik sem tud energiát közölni a másikkal. Gerjesztett atomok találkozásánál viszont előfordul, hogy nem kapcsolódnak össze, de nemcsak lendületet cserélnek, hanem pl. az egyik visszatér alapállapotba és a felszabaduló energia a másik elektronszerkezetét vagy az atomok mozgási energiáját módosítja.

Az említett folyamatok pontos leírása összetett kvantummechanikai számításokkal lehetséges, melyek meghaladják jegyzetünk kereteit, de a fő tendenciákat részletes számítások nélkül is megismerhetjük.

11.1.1. Az ionos kötés

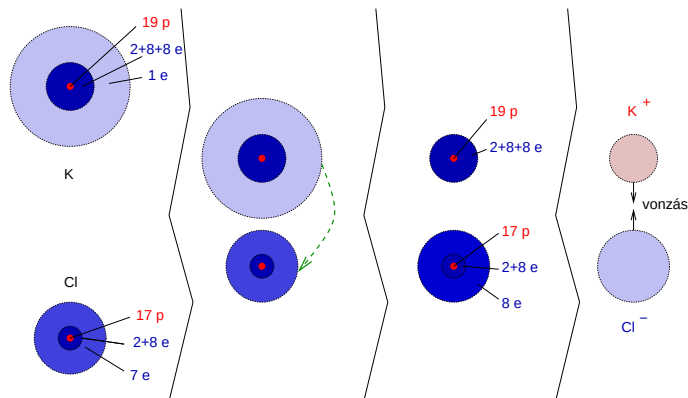
Amennyiben két jelentősen különböző szerkezetű atom találkozik, előfordulhat, hogy az egyiket kevesebb energiával lehet ionizálni, mint amennyi felszabadul, ha a másik még egy elektront kap. Tipikusan ez akkor fordul elő, ha 1 vegyértékelektronnal rendelkező atom találkozik olyannal, melynek külső elektronhéjának telítéséhez csak 1 elektron hiányzik.

Ha ugyanis egy atomnak legkülső héján csak 1 elektronja van, akkor a többi elektron (melyek alacsonyabb főkvantumszámhoz tartoznak) elektronfelhője jobban a mag közelébe koncentrálódik, jelentős mértékben árnyékolva az atommag vonzó pozitív töltését, így csökkentve a „kívülre szorult” vegyértékelektron kötési energiáját. Másik oldalról: a semleges atomnak akkor „éri” meg energetikai szempontból egy újabb elektron befogása, ha az új elektron zárttá teszi a legkülső elektronhéjat. Erről korábban, az atomok elektronszerkezeténél azt tanultuk, hogy kvantummechanikai okok miatt ez nagy kötési energiájú állapotot jelent.

Amennyiben ez az elektronátadás lezajlik, két, ellentétes töltésű ionunk lesz az atomok helyett, amit az elektrosztatikus vonzás együtt tart, így az atomokból egy ionos kötésű molekula képződik.

Tipikus példája az ionos kötésnek a kálium-klorid (KCl) molekula kialakulása: a kálium leadja egy vegyértékelektronját a klórnak és az így kialakuló ionokat ellentétes töltésük együtt tartja egyetlen molekulában.

A 11.1. ábra ezen folyamat vázlatát igyekszik bemutatni. Az ábra értékelésekor vegyük figyelembe, hogy egyszerűsítésekre kényszerültünk, hisz az elkent elektronfelhőket kellett valahogy ábrázolnunk. A tapasztalat azt mutatja, hogy valóban elmosódott szélű felhőkkel az ábra áttekinthetetlen, hisz vegyérték- és atomtörzs elektronokat is ábrázolni kell és így szemmel szétválaszthatatlan, életlen szélű foltokat kapnánk. Ezért minden elektronfelhőt egy-egy kör reprezentál, melynek sugara a fő- és mellékvantumszámoktól függ, színének sötétsége pedig attól, mennyi elektron van az adott állapotban. A telített héjak pl. sötétkékek, az egyetlen elektront



11.1. ábra. KCl molekula ionos kötésének kialakulása

tartalmazó héjak világoskékek. Az ábrán pirossal a pozitív töltéseket, így az atomok magját és végül a K^+ -iont jelöltük.

Előfordul az is, hogy többszörös ionos kötés alakul ki kettőnél több atom között, mint pl. az alumínium-klorid ($AlCl_3$) molekula esetében. Az alumíniumnak ugyanis 3 viszonylag lazán kötött elektronja van, melyeket egy-egy klóratom képes felvenni, így a 3-szoros pozitív töltésű Al-ion 3 db, egyszeres negatív töltésű Cl-ionnal alkot egyetlen molekulát.

Bizonyos körülmények között pedig az is előállhat, hogy az ellentétesre töltött ionok elektrosztatikus vonzása nem 2 vagy 4, hanem makroszkopikus mennyiségű atomot tart egyben, de ez már nem molekula, hanem ionos kötésű kristályrács-szerkezet, melyről rövidesen szólnunk.

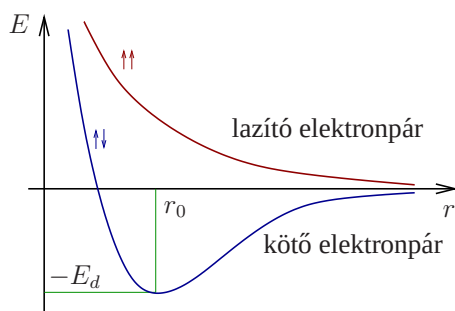
11.1.2. A kovalens kötés

Az előbb tárgyalt ionos kötéssel szemben előfordulhat az is, hogy az elektron olyan, alacsony energiájú állapotot talál, melyben hullámfüggvénye által kirajzolt elektronfelhője mindkét atom magját tartalmazza, azaz –kissé pongyolán fogalmazva– a két atom magja körül együttes pályára áll. Ilyenkor kovalens kötésről beszélünk.

Ezek a két atommag körül elhelyezkedő állapotok sok szempontból hasonlóak, mint az egyetlen atomon belüliek (pl. diszkrét energiaszintek jellemzik őket, az energiaminimum-elv és a Pauli-elv is vonatkozik rájuk), de szerkezetük jóval bonyolultabb.

Nézzük meg kicsit részletesebben a legegyszerűbb molekula, a két hidrogénatomot tartalmazó H_2 molekula szerkezetének kialakulását.

Helyezzünk le képzeletben két protont egymástól r távolságra, és két elektront engedjük el ezek környékén a legalacsonyabb energiájú állapot megkeresésére. Itt nem részletezhető kvantummechanikai számítások azt mutatják, hogy az így létrejövő, 2 protonból és 2 elektrontól álló rendszer összenergiája függ attól, hogy az elektronok spinjei megegyeznek-e vagy sem. Ez érthető az alapján, amit az atomoknál tanultunk: a Pauli-elv miatt azonos spinű elektronok nem képesek mindketten a lehető legalacsonyabb energiaszintre beülni, így a rendszer magasabb energiájú állapotba kényszerül. A H_2 molekula esetén ez olyan eredményre vezet, amit a 11.2. ábra mutat.

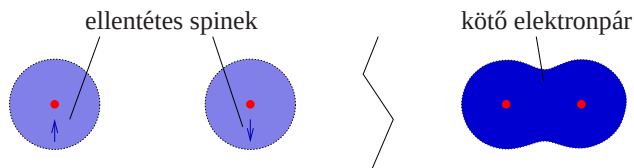


11.2. ábra. Hidrogénmolekula energiája kötő- és lazító elektronok esetében

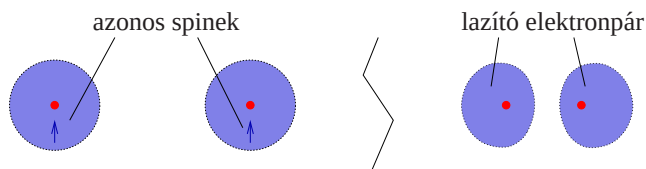
Láthatjuk, hogy lazító elektronpár (azonos spinűek) esetén ennek az energiának nincs minimuma, így az energiaminimumra törekvés eltávolítja egymástól az atommagokat. Ezzel szemben a kötő elektronpár (ellentétes spinűek) esetében egy meghatározott r_0 távolságnál az összenergia egy negatív, minimális értéket vesz fel, ami azt jelenti, hogy két, ellentétes spinű elektront tartalmazó H-atom erre az állapotra fog törekedni az energiaminimum elv értelmében.

Az elektronfelhőket szemléltetjük a kötő és lazító esetben a 11.3. illetve a 11.4. ábrákon. Az ábrák értékelésekor figyelembe kell venni, hogy a folytonos eloszlású hullámfüggvényt (valójában abszolút értékének négyzetét) csak közelítőleg tudjuk szemléltetni ilyen ábrákon. Gondolhatunk a kékel jelölt területekre úgy, mint azon térrészre, ahol a hullámfüggvény abszolút értékének négyzete egy előírt értéknél magasabbat vesz fel, de természetesen ezeken kívül nem válik azonnal 0-vá az értéke és befelé nagyobb értékeket vesz fel.

A H_2 molekula esetén pl. $r_0 = 0,074$ nm, $E_d = 4,52$ eV. Ez azt jelenti,



11.3. ábra. Két H-atom közti kötés kialakulása



11.4. ábra. Két H-atom között nem alakul ki kötés, ha a spinek azonosak

hogy egy alapállapotban lévő H_2 molekula magjai $7,4 \cdot 10^{-11}$ m távolságban, az úgynevezett **kötéshossz** távolságban vannak és a molekula szétszakításához (disszociációjához) 4,52 eV energiára, az úgynevezett **disszociációs energiára** van szükség. Más molekulákra ezek az értékek természetesen mások, de a nagyságrend hasonló: a kötéshossz a 0,1 nm, azaz 10^{-10} m, a disszociációs energia a néhány eV nagyságrendjébe szokott esni. Néhány gyakran előforduló molekula disszociációs energiáját és kötéshosszát tartalmazza a 12. táblázat.

Azt, hogy két közeli atom ellentétes spinű elektronpárjai képesek olyan állapotba kerülni, melynek elektronfelhője mindkét atomra kiterjed, és ez energetikailag „kifizetődő” úgy is felfoghatjuk, hogy az ellentétes spinű elektronok közti kapcsolat egy **kicserélődési energiával** jellemezhető, mely csökkenti a rendszer össz energiáját. A Pauli-elv is beleszól azonban a folyamatokba, mivel a kötésben részt vevő elektronok valamilyen értelemben mindkét maghoz tartoznak.

Ez a mindkét maghoz tartozás nem okoz gondot pl. az előbb tárgyalt H_2 molekula esetében: mindegyik mag környékén a legalacsonyabb főkvantumszámon megjelenik 1-1, ellentétes spinű elektron. Az viszont már nem képzelhető el, hogy egy H atom egy 2-es rendszámú He atommal lépjen kovalens kötésre. A He-nak ugyanis az első (és egyetlen) elektronhéja be van töltve, azaz az $n = 1$ -es főkvantumszámú állapotokban mindegyik

név	E_d [eV]	r_0 [nm]
NaCl	4,26	0,236
NaF	4,99	0,193
NaBr	3,8	0,250
KCl	4,43	0,267
KBr	3,97	0,282
H ₂	4,5	0,075
N ₂	9,8	0,11
O ₂	5,2	0,12
F ₂	1,6	0,14
Cl ₂	2,5	0,20
CO	11,2	0,113
HCl	4,4	0,127
HF	5,8	0,092
NO	7,0	0,115

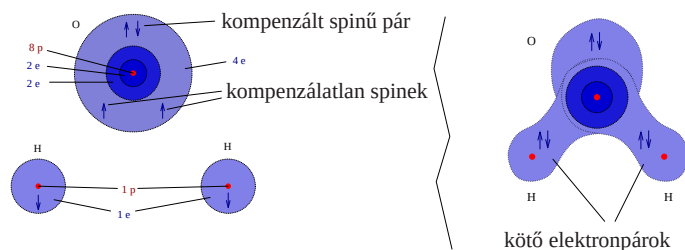
12. táblázat. Néhány kétatomos molekula disszociációs energiája (E_d) és kötэшossza (r_0)

spinállapot előáll. A H-atomból származó elektron tehát nem tudna olyan molekulaállapotba kerülni, melynek főkvantumszáma 1, mert nem engedi a Pauli-elv, így közös pálya csak egy magasabb főkvantumszámnál valósulhatna meg. Ehhez a He atom egyik saját elektronja is fel kellene kerüljön magasabb energiaszintre, ami már jóval több energia lenne, mint ami az esetleges elektronpár kötési energiája, így egy H-He páros mindenképp magasabb energiát jelent, mint a különálló atomok, ezért ha külső energia segítségével egy pillanatra meg is valósul, az energiaminimum-elv miatt szinte azonnal felbomlik.

Látható, hogy sokféle dolog játszik szerepet a kovalens kötés kialakulásában. Általában az mondható, hogy a kovalens kötések kialakításában az atomhoz lazán kötődő elektronok tudnak részt venni, leginkább azok, melyeknek nincs ellentétes spinű, de egyébként azonos kvantumszámokkal rendelkező párja.

Például az oxigén rendszáma 8. A 8 elektronból 2 az $n = 1$ -es állapotban van, 6 pedig az $n = 2$ -es héjon. Ebből a 6-ból 2 ellentétes spinű párként az $l = 0$ -s állapotban van, 4 pedig az $l = 1$ -es állapotok közül az $m = -1, 0, +1$ -es állapotok, azaz 6 állapot valamelyikében. Alapállapotban ez azt jelenti, hogy ez a 4 elektron 1 ellentétes spinű párt és 2 kompen-

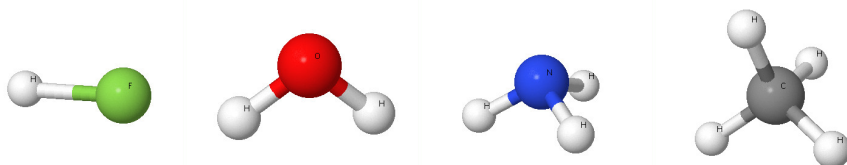
zálatlan spinű elektront alkot. Elsősorban ezek a kompenzálatlan spinű elektronok képesek részt venni a kovalens kötések kialakításában. Így az O-atom két H-atommal is képes kovalens kötést kialakítani, létrehozva a vízmolekulát. A vízmolekula térbeli szerkezetébe azonban beleszól a külső héj kompenzált spinű elektronpárja is, mert ennek helyigénye nem engedi, hogy a vízmolekula kiegyenesedjen, azaz az atomjai H-O-H sorrendbe egyenes vonalba rendeződjenek. Mindezt a 11.5. ábra szemlélteti.



11.5. ábra. A vízmolekula elektronfelhőjének vázlata

A vízmolekulához hasonló dolog mondható el az oxigén szomszédjairól is: a 7-es rendszámú nitrogénnek 3 kompenzálatlan spinű vegyértékelektronja van, így 3 H-atommal képes kötést létrehozni, kialakítva az ammóniamolekulát (NH_3), a fluor (9-es rendszám) viszont 1 kompenzálatlan spinű vegyértékelektronnal rendelkezvén csak 1 H-atommal alakít ki kapcsolatot, kialakítva a hidrogén-fluorid (HF) molekulát. A 4 lazán kötött elektronnal rendelkező szénatom pedig 4 hidrogénatommal képest kötésbe kerülni, ami a metán molekulának felel meg.

Az áttekinthetőség kedvéért az utóbb említett molekulák szerkezetének bemutatásakor azt a szokásos módszert használjuk, hogy az atomtörzseket csak egy-egy gömbbel, a kötő elektronpárokat egy-egy pálcikával ábrázoljuk. Ezt láthatjuk a 11.6. ábrán.



11.6. ábra. A HF, H_2O , NH_3 és CH_4 molekulák térbeli szerkezetének szimbolikus megjelenítése.

Ez az ábrázolásmód természetesen nagyon leegyszerűsítő: a kötő elektronfelhőket egyenes vonalként ábrázolja, az atomokat szilárd felszínű gömbként, a vegyértékhéj kompenzálatlan spinű elektronpárjait pedig elhagyja. A hiányosságok ellenére mégis használható ez az ábrázolásmód, csak ismerni kell korlátait.

11.1. példa: A hidrogénmolekula disszociációs energiája $E_d = 4,52 \text{ eV}$. Hány joule energia szükséges 1 mól H_2 atomokra való felbontásához?

Megoldás: 1 mól $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ darabot jelent, azaz a kért energia:

$$E = E_d \cdot N_A = 4,52 \text{ eV} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 2,72 \cdot 10^{24} \text{ eV} = 436\,000 \text{ J}.$$

11.2. példa: Milyen hullámhosszúságú és melyik színek tartományba esik az a foton, melynek energiája elegendő egy O_2 molekula disszociációjához?

Megoldás: A fotonról tanultak szerint a foton energiája a Planck-állandó és a frekvencia szorzata, azaz:

$$h\nu = E_d,$$

ahol a 12. táblázat szerint $E_d = 5,2 \text{ eV}$.

Az általános hullámtani $c = \lambda\nu$ összefüggés (c a fénysebesség) alapján a hullámhossz meghatározható:

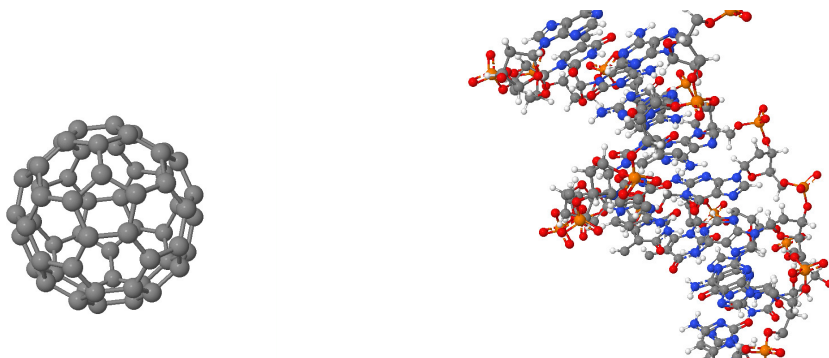
$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_d} = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 240 \text{ nm}.$$

Az 5.1. ábra szerint ez az ultraibolya tartományba esik.

Mindezzel csak rövid betekintést adtunk a molekulák kialakulásának érdekes témájába. Ezek részleteivel és gyakorlati felhasználásával a kémia tudománya foglalkozik. Láthatjuk azonban, hogy a folyamatok a kvantummechanika alapján érthetőek, és amilyen bonyolultságú molekulákra eddig sikerült megoldani a kvantummechanika egyenleteit, eddig mindig a mérésekkel megegyező eredményeket kaptak a kutatók. Ez a kvantummechanika nagy sikerét jelenti, de nagy számú atomot tartalmazó molekulákra vagy molekulák kölcsönhatására vonatkozó számításokat a legnagyobb számítógépeink sem képesek elvégezni, így sok dologban továbbra is a kémia kísérleti alapokon álló megközelítése a járható út.

Az érdekesség kedvéért a 11.7. ábrán két igen összetett molekula szerkezetét mutatjuk be. A bal oldali, futball-labdára hasonlító molekula 60 szénatomból áll, a jobb oldalon egy DNS-molekula kicsiny részletét láthatjuk. (Az emberi öröklésben részt vevő DNS-molekulák nagyságrendileg 10^9 atomból állnak.)

Az alábbiakban még néhány fontos és érdekes jelenséget említünk meg.

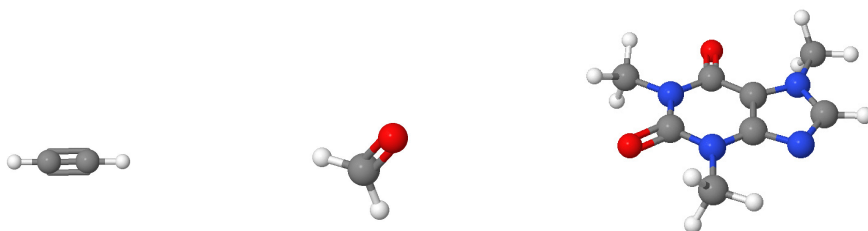


11.7. ábra. A C_{60} („futballin”) molekula és egy DNS-molekula részletének vázlata.

Többszörös kötések. Két atom között akár kettő (ritkán még több) elektronpár is lehet az, ami a kötést kialakítja. Ez az egyszeres kötésnél erősebb kötés jelent, de általában nem kétszer olyan erőset, mert a két elektronpár egymást taszítja.

Tipikusan ilyenek a két, egyforma atomot tartalmazó molekulák egy része, mint pl. a levegő fő alkotórészei, az O_2 és N_2 molekulák: ezekben 2 illetve 3 kötő elektronpár található a vegyértékhéj kompenzálatlan spinű elektronjainak megfelelően.

Ezeknél érdekesebb eseteket mutat be a 11.8. ábra, példát mutatva 3 esetre, amikor többszörös kötés alakul ki.



11.8. ábra. A C_2H_2 , CH_2O és a koffein molekulák térbeli szerkezetének szimbolikus megjelenítése.

Delokalizált kötések. A kovalens kötés jellemzője tehát az olyan elektronfelhő, mely több atommagot is tartalmaz. Egyszerű esetben ez két

atommagot jelent, de gyakran előfordulnak olyan kötések, melyek elektronfelhője több atommag környezetére is kiterjed. Ilyenkor **delokalizált kötésről** beszélünk.

Tipikus példája ennek a benzol molekula, mely 6 szén és 6 hidrogén atomból áll. A szénatomok egy szabályos hatszög alakú gyűrűben kapcsolódnak, és mindegyikre még egy-egy hidrogén atom is kapcsolódik. A hatszög szomszédjai közt 1-1 elektronpár kovalens kötést hoz létre, a fennmaradó 6 elektron viszont szabadon mozog a gyűrű mentén elhelyezkedő C-atomok közelében, delokalizált kötést létrehozva. A delokalizált kötések a 11.9. ábrán szaggatott vonal szimbolizálja. A benzol gyűrű számtalan fontos molekula alkotórésze, mint pl. az aszpirin.



11.9. ábra. A benzol és az aszpirin molekulák térbeli szerkezetének szimbolikus megjelenítése. Az áttekinthetőség kedvéért a hidrogénatomok nagy részét lehagytuk.

A delokalizált kötés kiterjedhet néhány atomra, egy hosszú molekula egészére, de akár makroszkopikus méretekben egy egész kristályrácsra. Ez valósul meg pl. a fémek belsejében, amiről a kristályoknál szólni fogunk.

A kötések polarizációja. A két (vagy több) atomra terjedő elektronállapot nem feltétlen szimmetrikus, ha az atomok nem egyformák. Például a H_2O molekulában a kötő elektronpárok hullámfüggvénye kicsit jobban koncentrálódik az O-atom környékén, mint a H-atomoknál, így –bár a molekula összességében semleges– a töltéeloszlás benne nem egyenletes, hanem a H-atomok enyhe pozitív, az O-atom enyhe negatív töltéssel bír. Az ebből eredő dipólmomentum lényegesen befolyásolja az anyag makroszkopikus viselkedését, mert az egymás közelébe kerülő ilyen, ún. poláros molekulák közt speciális kölcsönhatás jön létre. Például a jég szerkezetének kialakításában a legfontosabb hatás a poláros vízmolekulák vonzó hatá-

sa, ha megfelelő polaritással fordulnak egymás felé. Erről a másodlagos kötésekről szóló részben fogunk szólni.

A molekulák polarizációja az anyag makroszkopikus elektromos jellemzőire (pl. relatív dielektromos állandó) is kihatással van.

A polarizáció jelensége kissé hasonlít ahhoz, ami az ionos kötésnél történik, csak a kovalens kötésnél nem következik be az elektron teljes átugrása a másik atomra. Valójában vannak olyan molekulák, melyben a kötésnek erőteljes ionos jellege is van, olyan mértékű a polarizáció. Ilyen pl. a már említett HF-molekula. A kötő elektronpár hullámfüggvénye a F-atom környékén sokkal nagyobb értéket vesz fel, mint a H-atomnál, így a kötés majdnem teljesen ionos jellegű lesz.

11.2. A molekulák energiaszintjei

A molekulákon belül az elektronok stacionárius, stabil állapotai ugyanolyanok, mint az atomon belül voltak, tehát az atomokhoz hasonlóan 4 kvantumszámmal jellemezhetők. Nagy különbség viszont, hogy egy molekula kettő vagy több atommaggal rendelkezik, azaz szerkezete nem gömbszimmetrikus, így a molekula egésze olyan állapotokba is kerülhet, amilyenek az atom esetén nem értelmezhetők. Ez a két különleges állapot a molekulák forgása és rezgése.

A molekulák forgása során az atommagok a közös tömegközéppont körül végeznek keringő mozgást, a rezgés során viszont a magok távolsága ingadozik periodikusan és mindkét esetben az elektronfelhők folytonosan torzulva követik a megváltozó molekula-szerkezetet.

Eddigi kvantummechanikai ismereteink alapján nem meglepő, hogy a forgási- és rezgési állapotok is csak megfelelő stacionárius állapotoknak felelnek meg, és ezek energiaeloszlása sem folytonos, hanem diszkrét. Ez azt jelenti, hogy forgásban és rezgésben sem tárolhat akármekkora energiát egy molekula, ami ellentétes azzal, amit makroszkopikus skálán megszoktunk. Az elmélet azonban egyértelműen diszkrét energiaszinteket ad, és ezt a mérések a legteljesebb mértékben megerősítették.

11.2.1. A molekulák rezgése

A molekulák rezgése egy v -vel jelölt, **vibrációs kvantumszámmal** jellemezhető, mely tetszőleges nemnegatív értéket vehet fel és a rezgésben tárolt energia

$$E_v(v) = hf \left(v + \frac{1}{2} \right) \quad (11.1)$$

ahol f az adott kötésre jellemző állandó, az úgynevezett **vibrációs frekvencia**. Például a H_2 molekulában ennek értéke $1,32 \cdot 10^{14}$ Hz. Néhány egyéb molekula vibrációs frekvenciájának értékét tartalmazza a 13. táblázat.

név	f [10^{12} Hz]
H_2	132
N_2	70
O_2	47
CO	64
NO	57

13. táblázat. Néhány kétatomos molekula vibrációs frekvenciája (f)

Érdekes, hogy $v = 0$ esetben sem 0 a vibrációs energia, amit a molekula rezgése **zéruspon ti energiájának** nevezünk. Ez a jelenség a részecskék hullámtulajdonságának köszönhető, ami nem teszi lehetővé, hogy a két mag egymáshoz képest nyugalomban maradjon.

Ez az energia nem nyerhető ki a molekulából annak fennmaradásával egy időben, mert ez jelenti a legalacsonyabb energiaállapotot. A zéruspon ti energia pl. a molekula köté si energiáját csökkenti kicsi, de kimutatható mértékben. Pl. a fentebb tárgyalt H_2 -molekula disszociációjakor $E_v(0) = hf/2$ -vel kevesebb energiát kell befektetnünk, mint a 11.2. ábrán látható potenciálgödör mélysége. Például a H_2 molekula esetén ez a zéruspon ti energia mintegy 0,27 eV, ami jóval kisebb ugyan, mint a 4,52 eV-os köté si energia, de megfigyelhető.

Könnyű belátni, hogy a vibrációs szintek közti különbség mindig hf egész számú többszöröse, azaz ha egy molekula csak vibrációs állapotát változtatja meg, akkor a kibocsátott vagy elnyelt fotonok frekvenciája épp a fent bevezetett f frekvencia egész számú többszöröse lehet. Ez az f frekvencia a legtöbb molekula esetében az infravörös tartománynak felel meg, azaz a tisztán rezgési átmenetek többnyire infravörös sugárzás kibocsátását vagy elnyelését jelentik.

Megjegyezzük, hogy kettőnél több atomból álló molekula esetén a rezgések jóval bonyolultabbak lehetnek, mivel több kötés mentén is lezajlódhat a vibráció.

11.3. példa: Milyen hullámhosszúságú fotont bocsát ki egy N_2 molekula, ha a $v = 1$ -es szintről a $v = 0$ -ra megy át?

Megoldás: (11.1) szerint ekkor az energiaváltozás épp $\Delta E = hf$ nagyságú, ezért a kibocsátott foton épp f frekvenciájú.

Épp emiatt a szemléletes jelentés miatt adják meg f -et, nem pedig hf -et a molekulák adatai között.

Az ilyen foton hullámhossza nyilván:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 4,29 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4290 \text{ nm}.$$

Ez egy infravörös tartományba eső foton.

11.4. példa: Mekkora hőmérsékleten lesz az egy szabadsági fokra jutó $(1/2)kT$ energia egyenlő az N_2 molekula $v = 0$ és $v = 1$ rezgési állapotai közti energiakülönbséggel? (k a Boltzmann-állandó.)

Megoldás: Az előző példa szerint a két szint közti energiakülönbség: $\Delta E = hf$, ezért a kért hőmérséklet a következő feltételből számolható ki:

$$\frac{1}{2}kT = hf.$$

Innen

$$T = \frac{2hf}{k} = 6700 \text{ K}.$$

Ebből a magas hőmérsékletből az is következik, hogy szobahőmérsékleten a hőmozgásból származó átlagos energia olyan kicsi, hogy az a nitrogénmolekulák rezgési állapotait nem tudja gerjeszteni. Pontosabban: csak a molekulák igen kis hányada fog a véletlenszerű ingadozások miatt a rezgési állapotok gerjesztéséhez szükséges energiát szerezni a hőmozgásból.

11.2.2. A molekulák forgása

A molekulák forgási állapotát egy J , nemnegatív egész számmal, a **rotációs kvantumszámmal** lehet jellemezni, és a rotációs energia nagysága:

$$E_r(J) = \frac{h^2}{8\pi^2\Theta} J(J+1), \quad (11.2)$$

ahol Θ a molekula tehetetlenségi nyomatéka.

Érdekes módon a kvantummechanikai számítások szerint Θ értéke jó közelítéssel klasszikus fizikai számításokból is meghatározható, ha csak az atommagokkal, mint tömegpontokkal számolunk és ismerjük a helyzetüket a molekula tömegközéppontjához képest.

Áttekinthetőbb az eredmény, ha az elől lévő, konstansokat és Θ -t tartalmazó részt egyetlen, energia-jellegű tagba vonjuk össze:

$$E_r(J) = E_r^* J(J+1). \quad (11.3)$$

Néhány molekula rotációs energiaállandóját (E_r^*) a 14. táblázatban adtuk meg.

A molekula forgási energiája tehát lehet 0, ha $J = 0$, de forgásban nem tárolhat akármilyen kicsi energiát a molekula, hisz $J = 1$ esetén $E_r(1) = 2E_r^*$, $J = 2$ -re $E_r(2) = 6E_r^*$, stb.

A molekulák forgási állapotaiból tehát E_r^* néhányszorosával egyenlő energiaváltozások következnek. Például H_2 molekula esetén $E_r^* = 1,18 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,00739 \text{ eV}$. Könnyű kiszámolni, hogy pl. a $J = 0$ és $J = 1$ -es állapot közti $2E_r^*$ energia $8,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ -es hullámhossznak felel meg, ami a távolabbi infravörös tartományba tartozik.

név	$E_r^* \text{ [eV]}$
H_2	0,00739
N_2	0,00025
O_2	0,00013
CO	0,00024
NO	0,00021

14. táblázat. Néhány kétatomos molekula rotációs energiaállandója (E_r^*)

11.5. példa: Egy oxigénmolekula a $J_1 = 10$ -es forgási állapotából a $J_2 = 9$ -esbe megy át. Milyen hullámhosszúságú fotont sugároz ki eközben?

Megoldás: (11.3) szerint az energiakülönbség:

$$\Delta E = E_r(10) - E_r(9) = E_r^* (10(10+1) - 9(9+1)) = 20E_r^* = 0,0026 \text{ eV}.$$

Az ehhez tartozó foton hullámhossza:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\Delta E/h} = \frac{hc}{\Delta E} = 0,000477 \text{ m} \approx 0,5 \text{ mm}.$$

Ez a távoli infravörös és a mikrohullámú tartomány határán van.

11.6. példa: Mekkora hőmérsékleten lesz az egy szabadsági fokra jutó $(1/2)kT$ energia kisebb, mint a rotációs gerjesztéshez szükséges minimális energia az O_2 molekula esetében?

Megoldás: Az előbb tanultak szerint a legkisebb energia a $J = 0$ és $J = 1$ -es szintek közti átmenethez szükséges, és ennek értéke $2E_r^*$. A keresett feltétel:

$$\frac{1}{2}kT < 2E_r^*,$$

ahonnan

$$T < \frac{4E_r^*}{k}.$$

O_2 esetén a 14. táblázat szerint $E_r^* = 0,00013$ eV, így kiszámolható, hogy

$$T < 6,0 \text{ K}.$$

Tehát 6 K-nél kisebb hőmérsékletek esetén lesz a hőmozgás átlagenergiája olyan kicsi, hogy nem tudja gerjeszteni az oxigénmolekula forgását.

Ez azt is jelenti, hogy szobahőmérsékleten a hőmozgás energiája bőségesen elegendő az oxigénmolekulák forgási állapotainak gerjesztésére.

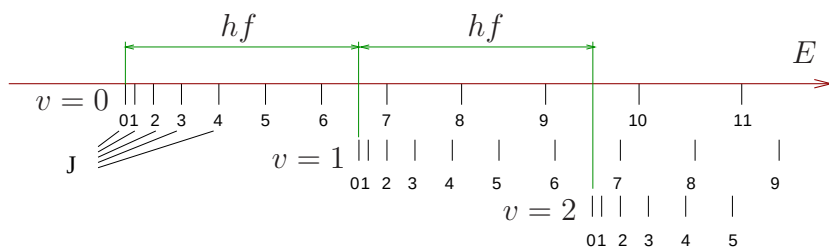
11.2.3. A molekulák energiaszintjei

A molekula össz energiája tehát attól függ, milyen energiaszinteken helyezkednek el elektronjai, és hogy milyen rezgési- ill. forgási állapotban van a molekula. Az elektronok energiaszintjei közt tipikusan néhány eV energiakülönbség van, a rezgési állapotok között néhány tized eV, a forgásiak között pedig néhány ezred eV a tipikus különbség. Ennek megfelelően egy molekula energiaszintjei sajátos elrendeződést mutatnak: egy-egy elektronállapothoz a rezgési- és forgási kvantumszámok függvényében (11.1) és (11.2) szerinti energiákat kell még hozzávennünk. Egy molekula energiája tehát:

$$E_{mol} = E_0 + E_v(v) + E_r(J),$$

ahol E_0 az elektronok állapotának megfelelő energia.

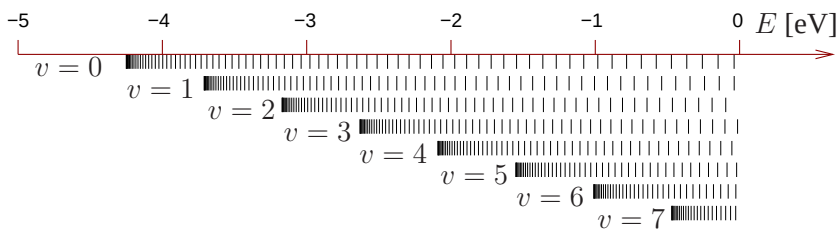
Mivel a fentiek szerint v -t egyesével változtatva E_v egyenletesen növekszik, J -t egyenletesen változtatva E_r egyre nagyobb lépcsőkben növekedik, ezért egy molekula energiaszintjei olyan szerkezetűek, mint ahogy azt a 11.10. ábra mutatja. Az áttekinthetőség kedvéért a rezgési kvantumszámoknak megfelelően külön sorokba rendeztük az energiaszinteket.



11.10. ábra. Egy molekula rezgési és forgási energiájának összege.

Ezen az ábrán jól megfigyelhető, hogy ha csak a forgási kvantumszám (J) változik, az kis energiaváltozást okoz és egyre távoluló közötti sorozatokat eredményez, míg a rezgési kvantumszám (v) változása egyenletes, hf nagyságú lépéseket jelent.

Hogy jobban megérthessük az energiaszintek távolságának skáláját, a 11.11. ábrán felrajzoltuk a H_2 molekula energiáját, ha az elektronok nincsenek gerjesztett állapotban, de a molekula vibrációs és rotációs kvantumszámai különféle értékeket vesznek fel.



11.11. ábra. A H_2 molekula energiaszintjei gerjesztetlen állapotban

Ezen a méretarányos, és energiaskálával ellátott ábrán érzékelhető igazán, mennyire összesűrűsödnek a forgási energiaszintek. Az ábrán értelemszerűen csak azokat a energiaszinteket ábrázoltuk, melyek kötött állapothoz tartoznak, de még ezekből is több, mint 400 van.

Hasonló a helyzet a többi molekula esetében is, csak ekkor a konkrét energiaértékek különböznek.

11.2.4. A molekulák színeképe

A molekulák energiaszintjeiről elmondottak alapján érthető, hogy a molekuláknak igen sok színeképvonala van, hisz energiaszintjeik száma egy adott energiaintervallumban sokkal nagyobb, mint az atomok esetében. Bár bizonyos kvantummechanikai elvek miatt nem lehet tetszőleges változás a rotációs- és vibrációs kvantumszámokban, még így is igen nagy számú megengedett energiaváltozás, és ezeknek megfelelően számtalan színeképvonala van a molekuláknak.

Ezek a színeképvonalak nem helyezkednek el véletlenszerűen, mivel az energiaszinteknek is jól meghatározott struktúrájuk van, hanem pl. a rezgési energiát jellemző hf energiaszint környékén nagyon besűrűsödnek. Ez a besűrűsödés olyan mértékűvé is válhat, hogy a színeképvonalak egy-egy frekvenciatartományban teljesen összemosódnak. Ez az összemosódás nem mérőeszközünk pontatlanságán múlik, hanem a színeképvonalak természetes kiszélesedésén.

Ilyen összemosódások esetén már nem diszkrét színeképvonalakat, hanem úgynevezett sávokat figyelhetünk meg. Ez a legtöbb molekula esetén a közeli infravörös tartományt jelenti, mert a rezgést jellemző f frekvenciaérték és ennek kis egész számú többszörösei ilyen sugárzásnak felelnek meg, de megfelelő körülmények között a látható tartományban is kialakulhatnak ilyen sávok.

A molekulák színeképében tehát találunk az atomokéhoz hasonló diszkrét színeképvonalakat, de sávokat, azaz olyan tartományokat is, melyeken belül a színekép folytonos. Minél bonyolultabb szerkezetű egy molekula, annál több ilyen sáv lesz a színeképében.

11.2.5. Másodlagos kötések

Az eddig tárgyalt kötések a molekulák atomjait tartják egybe. Nagyon fontosak és az anyagok viselkedését alapvetően befolyásolják a molekulák közt ható erők, melyek a molekulák egymáshoz kapcsolódását eredményezhetik. Az ionos- és kovalens kötésektől való megkülönböztetés céljából ezeket **másodlagos kötéseknek** nevezzük.

A másodlagos kötések kötési energiája általában sokkal alacsonyabb, mint az elsődlegeseké: míg utóbbiak esetén ez néhány eV, előbbiek esetében ez a tized-század eV nagyságrendbe esik.

Poláros-poláros kapcsolatok. A molekulákon belül a töltéeloszlás sokszor nem egyenletes. Az ionos kötés esetén ez természetes, de a kovalens kötések is sokszor polarizáltak, ha egyik atom körül az elektronfelhő jobban sűrűsödik, mint a másik körül. Például a sósavmolekulán belül (HCl) a kötő elektronpár felhője jobban kötődik a klóratomhoz, mint a hidrogénhez, így az poláros lesz: a hidrogén enyhe pozitív, a klór enyhe negatív eredő töltéssel.

A molekulák tehát semlegesek, de bennük a polarizáció nem egyenletes töltéeloszlást eredményez, ami a molekula közelében elektromos teret jelent. Ez azt eredményezi, hogy ha két molekula ellentétes polarizáltságú része közel kerül egymáshoz, vonzóerő léphet fel közöttük, és ha ez erősebb, mint a hőmozgás hatása, kötés alakulhat ki. Ha a vonzás nem elegendő a hőmozgás teljes leküzdésére, akkor is lesz egyfajta gyenge kapcsolat a molekulák között, és ez a magyarázata sok folyadék, pl. az említett sósav kialakulásának.

Hidrogénhíd-kötés. Több példán láttuk, hogy a hidrogén viszonylag gyengén köti az elektronokat magához, így ha egy erősebb elektronvonzó képességű atommal áll kapcsolatban, általában pozitív töltésű lesz, mivel az elektronfelhő a másik atom körül koncentrálódik. Ez a helyzet a korábban említett sósav és vízmolekulák esetében is. A jelenség általános, más atommal is előfordul. A hidrogén azonban abból a szempontból különlegesnek bizonyult, hogy ha igen erős elektronvonzó képességű atommal áll kötésben, akkor annyira ritkává válhat körülötte az elektronfelhő, hogy akár egy másik molekula nagy elektronvonzó képességű atomjával is olyan kapcsolatba tud lépni, mely majdnem kovalens kötetst jelent. (Az elektronfelhők kis mértékben átfedik egymást.) A pontos vizsgálatok kiderítették, hogy ez a jelenség azokra az esetekre jellemző, amikor a H-atom N, O vagy F atomokkal áll kapcsolatban.

A hidrogénhíd-kötés érdekessége, hogy térbeli orientációja van: a két nagy elektronvonzó képességű atomnak a hidrogén ellentétes oldalán kell elhelyezkednie, hogy a kötés létrejöhessen.

A hidrogénhíd-kötés a korábban említett poláros molekulák közti kötéssel együtt igen fontos szerepet játszik a víz tulajdonságainak kialakításában.

Ezek az erők tartják együtt a vízmolekulákat a jégben egy határozott rendben. A jégkristályok, különösen a hópilehek esetében például szemmel látható hatása van annak, hogy a vízmolekulák bizonyos kötőszögekben szeretnek egymáshoz kapcsolódni.

A folyékony víz néha meglepő tulajdonságai is a vízmolekulák közti

poláros és hidrogénhid kapcsolatoknak köszönhetők. 0 és 100°C között ezek a kötések túl gyengék az összes vízmolekula egy kristályszerkezetbe való bekapcsolásához, de az egymáshoz közel elhaladók közt fellépő vonzerő nem engedi, hogy a vízmolekulák teljesen függetlenül mozogjanak, így alakul ki a víz folyékony állapota. Ha fokozatosan hűtjük a vizet, ahogy közeledünk a 0°C-hoz, egyre több és egyre nagyobb molekulahalmaz alakul ki a vízben belül a kötések hatására. Ezek a molekulahalmazok időleges képződmények, a hőmozgás előbb-utóbb szétszedi őket, de a hideg vízben egy adott pillanatban nagy számban találhatók. Ennek köszönhető az az érdekes jelenség, hogy 4°C-on a legsűrűbb a víz, ugyanis ennél hidegebb vízben a létrejövő, néhány molekulát tartalmazó csomagok olyan térbeli rendezettséggel rendelkeznek, melyek térkitöltése rosszabb, mint a szabadon mozgó molekuláké.

A hidrogénhid- és a poláros-poláros kötés a bonyolultabb molekulák esetében is jelentős szerepű lehet. Ilyen sok szerves, az élet szempontjából is fontos molekula esete, de ezek részletes tárgyalása meghaladná jegyzetünk kereteit.

Indukált polarizáció hatása. Ha egy atom vagy molekula elektronfelhője eltolódik az atommag(ok)hoz képest, akkor is polarizált molekulát kapunk. Ez pusztán az elektronfelhők kissé véletlenszerű viselkedése miatt spontán módon is bekövetkezik, ami kisebb, de nem elhanyagolható hatás, mint a poláros molekulák esetében. Ilyenkor is kialakul vonzás a molekulák között. Az ilyen típusú kölcsönhatást **van der Waals kölcsönhatásnak** nevezzük.

A van der Waals kölcsönhatás minden atom és molekula közt fellép, pl. a nemesgázok atomjai közt, vagy a szimmetrikus, kétatomos molekulák, mint pl. az O₂ molekulák között. Ennek köszönhető, hogy alacsony hőmérsékleten minden gáz cseppfolyósodik, további hűtéssel pedig majdnem minden gáz megfagyasztható. (Például az oxigén 90 K-en cseppfolyóssá, 54 K-en szilárdvá válik.)

A van der Waals kötések szobahőmérsékleten csak az igen magas relatív atomtömegű anyagok esetén képesek legyőzni a hőmozgást. Ilyen pl. a jód, mely szobahőmérsékleten az indukált polarizáció hatására létrejövő gyenge kötések miatt kristályos szerkezetű, szilárd anyag, de a legkisebb hevítésre azonnal elpárolog, kihagyva a folyadék állapotot. (Szublimál.)

A legtöbb gáz esetében ezek a kötések csak azt eredményezik, hogy a gáz állapotegyenlete kissé különbözni fog az ideális gázok állapotegyenletétől.

11.3. A szilárdtestek szerkezete

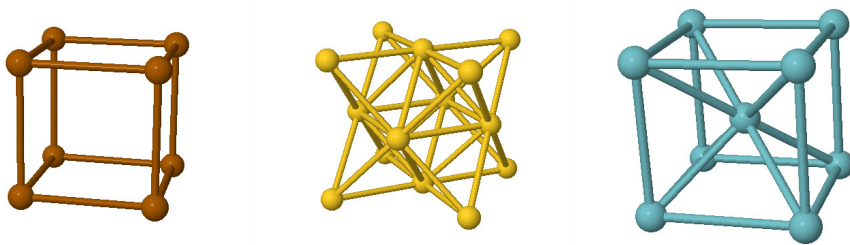
Az előző fejezetben tárgyalt molekulák mikroszkopikus méretűek, azaz érzékszerveinkkel nem érzékelhetők. Magunk körül azonban számtalan szilárd testet látunk, melyek részecskéit jól láthatóan egyben tartja valami.

A magyar nyelvű szakirodalomban elterjedt szokás szerint amikor fizikai szempontból vizsgáljuk a szilárd testeket, a szókapcsolatot egybeírjuk a továbbiakban, azaz a „szilárdtest” formát használjuk.

A vizsgálatok azt mutatták, hogy a szilárdtestek belsejében az atomok valamilyen szabályos térbeli rendbe szerveződnek. Ha ez a rendezettség nagy méretekben meg tud maradni, akkor szabad szemmel is megfigyelhető **kristályokat** kapunk, mint pl. a konyhasó kristályai, vagy az ásványok közt található kvarckristály.

A kristályszerkezet jellemzője, hogy létezik egy kis darabja az egész kristálynak, melynek egymás mellé rakott másolataiból az egész kirakható. Az ilyen darabot **elemi cellának** nevezzük. Legegyszerűbben elképzelhető eset a kockarács esete, amikor is az atomok egy kockarács csúcaiban ülnek. Ennek elemi cellájául például egy kis kocka alakú részt választhatunk, melynek csúcaiban egy-egy atom ül.

A kockarács kisebb változtatásával is kaphatunk kristályszerkezetet: pl. az elemi cella lapjainak középpontjába vagy a cella középpontjába atomot helyezve újabb típusú kristályszerkezethez juthatunk. (11.12. ábra.)



11.12. ábra. Egyszerű kockarács, lapcentrált kockarács és tércentrált kockarács szerkezet elemi cellája.

Más anyagoknál a rendezettség nem olyan nagy mértékű, mint a kristályos anyagoknál. Például a hosszú láncmolekulákból álló szerves anyagok nem mutatnak ilyen merev rendet, mert molekuláik sokféle módon képesek kapcsolódni, így lesznek szabályszerűségek ezek szerkezetében, de merev

térbeli rendezettségéről nem beszélhetünk az esetükben. Ebben az esetben **amorf anyagról** beszélünk.

Érdekes, hogy szabályos kristályszerkezetet is kialakítani képes alapanyagokból is lehet amorf változatot előállítani. Például bizonyos fémötvözetek igen gyors lehűtésével az üveghez hasonló, belső rend nélküli állapot állítható elő. Ezek kutatása aktívan folyik.

Sok hétköznapi anyag pedig többféle anyag keveréke, így még kisebb méretekre terjed ki bennük a szabályos rendezettség, de az őket összetartó erők jellege sok tulajdonságukat meghatározza.

A kristályok szerkezete, térbeli rendezettsége, az azokban kialakuló hibák hatása fontos pl. a fémek és ötvözetek mechanikai tulajdonságainak vizsgálatánál, de jegyzetünk kereteit ez meghaladja, így erre a –különbön nagyon izgalmas és szép– területre nem térünk ki.

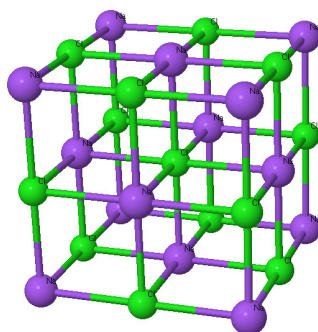
Az amorf anyagok viselkedésének számtalan vonása pedig még az anyagtudomány nyitott kérdései közé tartozik. Ezekkel az anyagokkal kapcsolatban sok mindent csak kísérleti úton tudunk megismerni. Ez is olyan terület, mely már túlmutat jegyzetünk keretein.

11.3.1. A szilárdtestek kötéstípusai

A molekulákat összetartó erők, melyeket az előző fejezetben vizsgáltunk, bizonyos körülmények között képesek makroszkopikus mennyiségű atom együtt tartására. Most ezeket vesszük röviden sorra.

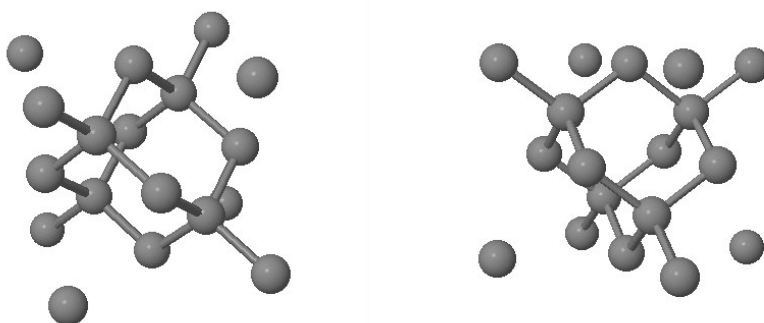
Ionos kötés. A 11.1.1. fejezetben leírtak szerint előfordul, hogy energetikailag kedvező, ha két különböző atom egymásnak elektront ad át és az így létrejövő ionok egymás közelében maradnak az elektrosztatikus vonzás következtében. Nincs elvi akadály, hogy ez a vonzás ne csak néhány iont, hanem makroszkopikus mennyiséget is egymás mellett tartson, ha azok megfelelő rendben helyezkednek el. A rendeződést alapvetően az az elv irányítja, hogy az ellentétes töltésű ionok kerüljenek közel egymáshoz, az azonos töltésűek pedig lehetőleg távol maradjanak, de a pontos elrendeződésbe az ionok méretei is beleszólnak.

Például a nátrium és klóratomok közt kialakuló ionos kötés képes szabályos rendbe rendezni sok-sok iont, kialakítva ezzel a konyhasó kristályszerkezetét. Ez a szerkezet egyszerű térbeli kockarács-szerkezetet jelent, ahol a rácspontokban felváltva találhatók az ellentétes töltésű ionok.



11.13. ábra. A konyhasó (NaCl) ionos rácsszerkezete

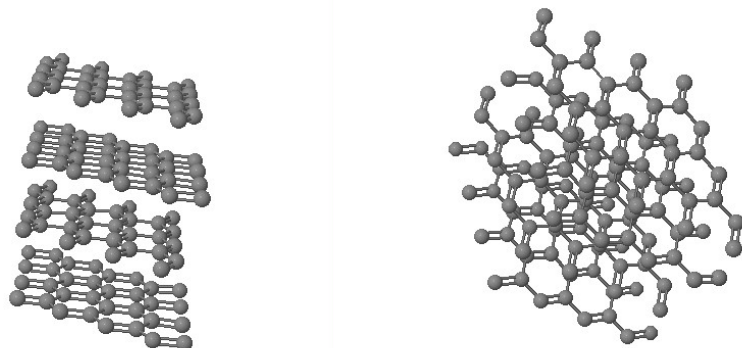
Kovalens kötés. Amennyiben egy atom több másikkal is képes kovalens kötést kialakítani, előfordul, hogy ezek a kötések makroszkopikus méretű láncolatú szerveződnek. Ilyen anyagra példa a gyémánt, aminek szénatomok az alkotóelemei és mindegyikük 4-4 szomszédjával van kovalens kötésben, kialakítva ezzel egy jellegzetes, igen stabil kristályszerkezetet, melyet a 11.14. ábra mutat be.



11.14. ábra. A gyémánt szerkezetének egy részlete két nézőpontból.

Megjegyezzük, hogy tisztán szénatomokból egy teljesen más kristályszerkezet is felépíthető: a grafit szerkezete, amit a 11.15. ábrán láthatunk.

A grafitban rétegenként hatszöges struktúrát találunk és a kötések egy része delokalizált, azaz az elektronok egy része szabadon elmozdul egy-egy



11.15. ábra. A grafit szerkezetének egy részlete két nézőpontból.

rácssík mentén. Így a grafit szerkezete nem tisztán kovalens, hanem kicsit hasonlít a következőkben említett fémes kötésre.

Az, hogy szénatomokból értékes gyémánt vagy közönséges grafit lesz, a megszilárdulás körülményeitől függ. A gyémánt szerkezetének kialakulásához magas hőmérséklet és nyomás szükséges, amit laboratóriumi körülmények közt is elő lehet állítani, és így a bányászottnál sokkal olcsóbban lehet a gyémántot ipari felhasználás céljára előállítani.

Fémes kötés. A fémes kötésről molekulák esetén nem esett szó, mert ez speciálisan a kristályokra jellemző jelenség: bizonyos anyagok olyan kovalens kötésbe lépnek a szomszédokkal, melyek esetén a kötő elektronok az egész rácsra vonatkozóan delokalizáltak lesznek, azaz lényegében szabadon elmozdulhatnak benne.

A névből látszik, hogy ez a kötés a fémekre jellemző: ezek vegyértékelektronjaikat „beadják a közösbe” és ezek az egész fémdarabon belül képesek elmozdulni. Ez a majdnem szabadon mozgó elektronok sokasága teszi különlegessé a fémeket a többi szilárd anyaghoz képest, mert ez okozza, hogy a fémek elektromos vezetőképessége és hővezetési tényezője jóval nagyobb lesz, mint pl. az ionos kötésű anyagoké.

Fémes kötés esetén a korábban említett térbeli szerkezetek bármelyike előfordulhat, például a 11.12. ábrán vázolt elemi cellákból felépítettek. Sokszor ugyanaz a fém különböző hőmérséklet- és nyomásviszonyok mellett

más szerkezetet vesz fel, mert az adott körülmények között az az energetikailag kedvezőbb állapot. Például a vas normál körülmények között tércentrált köbös szerkezetű, de 1185 K-re melegítve hirtelen lapcentrált köbös szerkezetű lesz. A többféle fémből álló ötvözetek pedig még sokkal változatosabb szerkezeti változásokon mehetnek át, ezek tárgyalása azonban nem témája könyvünknek.

Másodlagos kötések. Mint a molekulákról szóló részben írtuk, a molekulák közt úgynevezett másodlagos kötések alakulhatnak ki. Ezek is képesek makroszkopikus méretű molekulahalmazokat együtt tartani, mint pl. a jég esetében. Amennyiben a molekulák szerkezete egyszerű, a vízhez hasonlóan szabályos kristályszerkezetek tudnak kialakulni. Hosszú láncmolekulák esetén, melyek több helyen tartalmaznak poláros vagy hidrogénhid-kötésre alkalmas részeket a kapcsolatok már nem lesznek ennyire szabályosan rendezettek. Ilyenkor szilárd, de kristályszerkezettel nem rendelkező anyagok jönnek létre, mint pl. a fa.

A másodlagos kötések sokkal kisebb energiával szétbonthatók, mint az elsődlegesek, így ezek már alacsonyabb hőmérsékleten felbomlanak.

A kötések tartóssága. A korábban tanultak értelmében a legkönnyebben az indukált polarizáción alapuló kötések bomlanak fel, így ezek csak nagy relatív molekulatömeg esetén eredményeznek szobahőmérsékleten is szilárd állapotot.

A poláros és hidrogénhid kötések már elég erősek ahhoz, hogy szobahőmérsékleten is együtt tartsák folyékony vagy szilárd állapotban a molekulákat. A hőmérséklet kis növekedése is képes azonban ezeket a legalább részben felbontani. Ez az oka annak, hogy a biológiában fontos szerves anyagok kis hőmérséklet-emelés hatására is jelentős átalakuláson mennek át, például a fehérjék szerkezete 45°C felett tartósan károsodik. De a legerősebb másodlagos kötések is felbomlanak néhány száz celsius fok felett.

Az elsődleges kötések azok, amelyek a legnagyobb kötési energiával (több eV) rendelkeznek, így az elsődleges, különösen a fémes vagy kovalens kötésű anyagok maradnak szilárdak a legmagasabb hőmérsékletig. (Például a wolfram olvadáspontja kb. 3400°C.)

11.7. példa: Az öntöttvas szobahőmérsékleten 7210 kg/m^3 sűrűségű, relatív atomtömege 55,8 g/mol, és szerkezete tércentrált köbös. Mekkora egy elemi cellának vehető kocka alakú térrész élhossza?

Megoldás: Vegyük képzeletben egy 1 m élhosszúságú vaskockát! Ennek tömege 7210 kg. 1 mol, azaz $6,02 \cdot 10^{23}$ db vasatom tömege 55,8 g azaz az ebben az 1 m³-nyi térrészben található vasatomok száma:

$$N = \frac{7210}{0,0558} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 7,78 \cdot 10^{28}.$$

A tércentrált köbös elemi cella közepén található egy atom, mely csak ehhez a cellához tartozik. (a 11.12. ábra), A kocka csúcsaiban levő 8 atom mindegyike külön-külön 8-8 cellába lóg bele, így a kiszemelt cellához csak 1/8-ad részük tartozik, tehát a csúcsponti atomok ebbe a cellába lógó része összesen $8 \cdot (1/8) = 1$ atomot jelent. Ezek szerint összesen 2 atom tartozik egy tércentrált köbös elemi cellához.

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$N_c = \frac{N}{2} = 3,89 \cdot 10^{28}$$

cellából áll az 1 m³-es vaskocka.

Legyen az 1 m élhossz mentén n számú elemi cella egymás mellett! Nyilvánvaló, hogy

$$N_c = n^3,$$

ahonnt

$$n = \sqrt[3]{N_c} = 3,39 \cdot 10^9.$$

Mivel ennyi cella élhossz tesz ki 1 m-t, ezért a kért élhosszúság:

$$a = \frac{1 \text{ m}}{n} = 2,95 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,295 \text{ nm}.$$

A számítások során feltételeztük, hogy teljesen szabályos rácsról van szó. A valóságban a rácshibák kissé módosítják a vas sűrűségét, így ez az eredmény sem teljesen pontos, de jó közelítésnek vehető.

11.4. Elektronok viselkedése szilárdtestekben

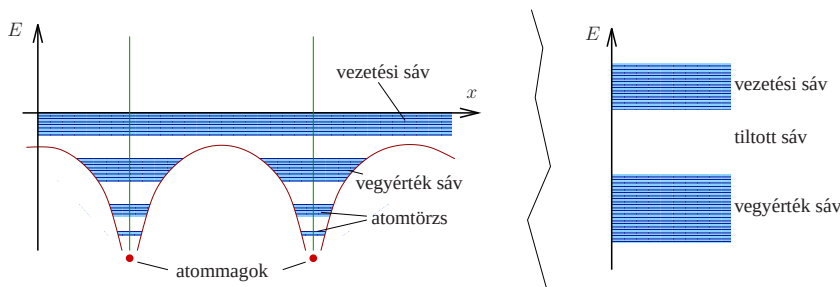
11.4.1. Szilárdtestek sávszerkezete

Láttuk, hogy a molekulák energiaszerkezete sokkal több lehetséges szintből áll, mint az atomoké, mivel a molekulák sok olyan dologra is képesek, amire az atomok nem. (Forgás és rezgés.) A szilárdtestek esetén ez még nagyobb mértékben van így, mivel az őket alkotó atomok száma igen magas. Az egymás közelében levő atomok torzítják egymás elektronszerkezetét,

így az eredeti atomi szintek igen sok részre széthasadnak. Mivel egy makroszkopikus méretű szilárd anyagban 10^{15} -nél is több atom van, olyan sok részre történik ez a széthasadás, hogy a közeli energiaszintek teljesen egybeesnek, így szilárdtesteken belül nem sorolhatók fel az energiaszintek úgy, mint az atomok vagy molekulák esetében, csak az mondható meg, hogy bizonyos energiatartományokban mennyire sűrűn helyezkednek el az energiaszintek. Ezek a számítások a kvantummechanika módszereivel elvégezhetők, de bonyolultságuk miatt kívül esnek jegyzetünk körén.

A szilárdtestekben található elektronok energia szerinti eloszlásának közös vonása, hogy a megengedett állapotok **energiasávokba** csoportosulnak, azaz bizonyos energiatartományok megengedettek, mások tiltottak az elektronok számára. A különböző megengedett energiasávok az elektron különböző jellegű állapotainak felelnek meg.

Általános vonás, hogy az elektronok számára létezik egy energiatartomány, melyen belül az atomokhoz kötődő elektronok vannak. Ezt **vegyértéksávnak** nevezzük. Egy másik fontos energiasáv a **vezetési sáv**, melyben azok az elektronok vannak, amelyek a rácson belül tetszőleges távolságra elmozdulni képesek. A kettő közötti részt szokás **tiltott sávnak** nevezni. Ebben a tartományban nem lehet elektron.



11.16. ábra. Szilárdtest elektronjainak sávszerkezete a térbeli elhelyezkedés jelzésével (balra) és anélkül (jobbra).

Ezeket a fő sávokat szemléltetjük a 11.16. ábrán. Itt a bal oldalon a sávszerkezet térbeli elhelyezkedését is érzékeltetjük: az atommagok közelében vannak az atomtörzshöz tartozó elektronok nagy kötési energiával, még mindig kötve, a magok közelében, de kissé feljebb a vegyértékelektronok számára elfoglalható vegyérték sáv, majd feljebb az egész anyagra kiterjedő vezetési sáv. A továbbiakban sokszor tovább egyszerűsítjük az ábrát és a sávszerkezetről csak olyan sémát rajzolunk, mint a jobb oldalon: nem

jelezzük, hogy a sávok térbeli kiterjedése különböző jellegű, mert úgyis tudjuk, hogy a vegyérték sávban levő elektronok lokalizáltak, a vezetési sávban levők pedig nem.

Meg kell jegyezni, hogy még a 11.16. ábra bal oldali „részletes” változata is egyszerűsítéseket tartalmaz, hisz pl. a sávok nem tökéletesen vízszintesek a valóságban, vagy pl. kovalens kötésű rácsoknál a kötő elektronpárok lokalizáltak, de nem egyetlen atommag körül, hanem az általuk összekötött magok között. Mindezek a részletek nem befolyásolják a folyamatok megértését addig a mélységig, ameddig ezt jegyzetünkben tárgyaljuk.

Az említett sávok helyzete nagyon fontos jellemzője az anyagnak. Homogén anyag egy ilyen sávszerkezettel jellemezhető, de különböző minőségű anyagok találkozása a sávszerkezetek egy átmeneti tartományban történő összehangolását eredményezi. Ezek az átmeneti jelenségek érdekesek és az alkalmazás szempontjából is fontosak.

11.4.2. Az elektronok energia szerinti eloszlása

Az előzőekben tárgyalt sávszerkezeten belül az elektronok eloszlását az energiaminimum-elv és a Pauli-elv határozza meg. Ha nem lenne az elektronoknak energiájuk a hőmozgásból, minden elektron a lehető legalacsonyabb energiaszintre ülné le, azaz az elektronállapotok egy bizonyos energiaszintig teljesen feltöltöttek, e felett pedig teljesen üresek lennének. Azt az energiaszintet, ameddig a szilárd testben levő elektronok feltöltenék az energiaszinteket **Fermi-szintnek** nevezzük.

0 K-en tehát az elektronok energia szerinti eloszlása igen egyszerű: a Fermi szint alatt minden szint be van töltve, felette minden szint üres. Az elektronok hőmozgása már változtat a helyzeten: itt nem részletezett statisztikus fizikai számítások szerint T hőmérsékleten annak a valószínűsége, hogy egy E energiához tartozó energiaszint be van töltve

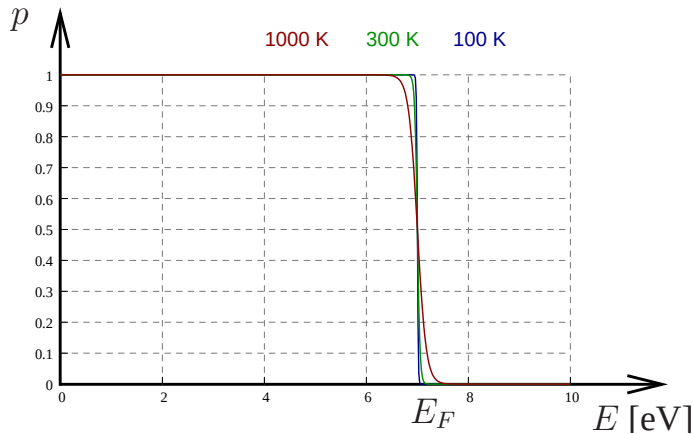
$$p(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}, \quad (11.4)$$

ahol E_F a rendszer Fermi-szintje (fermi-energiája), k pedig a termodinamikából ismert Boltzmann-állandó.

Hogy megértsük ennek a valószínűségnek az energiafüggését, egyszerű számításokkal ellenőrizzük a következőket:

- Ha $E - E_F \ll -kT$, azaz ha kT sokszorosával vagyunk a Fermi-szint alatt, akkor $p(E) \approx 1$, azaz lényegében minden szint betöltött.
- Ha $E = E_F$, azaz a Fermi-szinten $p(E) = 0,5$, azaz a Fermi-szinten 0,5 valószínűséggel vannak betöltve az energiaszintek.
- Ha $E - E_F \gg kT$, azaz ha kT sokszorosával vagyunk a Fermi-szint felett, akkor $p(E) \approx 0$, azaz a szintek igen kis hányada van betöltve.

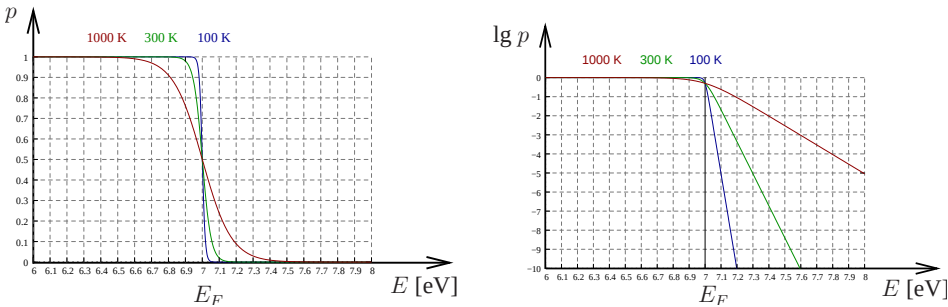
A legtöbb anyag Fermi-szintje 5–10 eV között van, míg szobahőmérsékleten $kT \approx 0,025$ eV. Ezért az előzőek szerint még szobahőmérsékleten is eléggé élesen vált $p(E)$ az 1-es érték közeléből 0 közelébe, ahogy azt $E_F = 7$ eV esetére, 3 különböző hőmérsékleten a 11.17. ábra mutatja.



11.17. ábra. Az elektronállapotok betöltési valószínűsége 7 eV-os Fermi-szint esetén 3 különböző hőmérsékleten.

Mivel a váltás nagyon éles, ezért a 11.18. ábrán ugyanezt a függvényt E_F szűkebb környezetében és ugyanitt $\lg p$ -t is ábrázoltuk. („lg” a 10 alapú logaritmus jele.)

Látható, hogy a váltás valóban éles, hisz pl. 300 K-en a Fermi-szint felett 0,5 eV-tal $p(E) < 10^{-8}$, azaz az energiaszintek kevesebb, mint százmilliomod része van betöltve. A hőmozgás hatása tehát kicsi: első közelítésben még szobahőmérsékleten is mondhatjuk, hogy a Fermi-szint felett pár tized eV-tal az elektronok száma elhanyagolható.



11.18. ábra. Az elektronállapotok betöltési valószínűsége 7 eV-os Fermi-szint esetén 3 különböző hőmérsékleten.

11.4.3. Szigetelők, félvezetők, vezetők közti különbség

Az előzőekből látszik, hogy egy anyag vezetőképessége elsősorban azon múlik, hol helyezkedik el egymáshoz képest a Fermi-szint és a vezetési sáv alja, mivel ez határozza meg, hogy az elektronok milyen eséllyel kerülnek fel a vezetési sávba, azaz olyan állapotba, amikor a testen belül lényegében szabadon elmozdulhatnak.

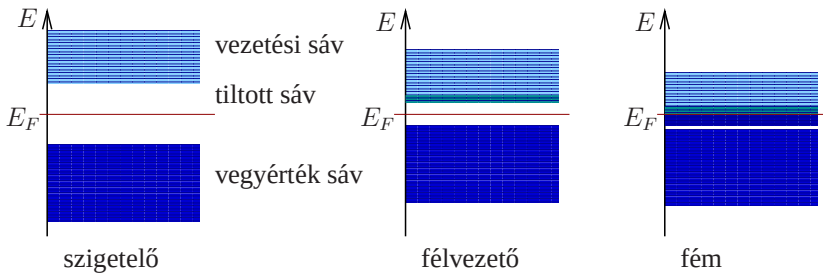
A különféle anyagok szerkezetének tanulmányozása azt mutatta, hogy a **szigetelők** többségében a Fermi-szint épp a vegyérték- és a vezetési sáv közötti tiltott sáv közepén helyezkedik el, a tiltott sáv pedig több eV szélességű. Ez az előző fejezet szerint azt jelenti, hogy szobahőmérsékleten elhanyagolható a vezetési elektronok száma.

A **fémeknél** viszont egyrészt sokkal kisebb a vegyérték- és a vezetési sáv távolsága (azaz a tiltott sáv szélessége), másrészt a Fermi-szint beleesik a vezetési sávba, azaz tetszőlegesen alacsony hőmérsékleten nagy számban vannak vezetési elektronok a fémekben. Ez a fémes kötés delokalizált jellegének köszönhető: a kötést kialakító elektronok alaphelyzetben olyan állapotba kerülnek, aminek hullámfüggvénye az egész rácsra kiterjed.

A **félvezetők**, mint pl. a szilícium, a germánium, a gallium-arszenid ötvözet olyan anyagok, melyek sávszerkezete a szigetelőkéhez hasonlít, csak a tiltott sáv szélességük kisebb: az eV környékén van. (A Si esetén ez 1,1 eV, a Ge esetén 0,7 eV.) Így a tiltott sáv közepén elhelyezkedő Fermi-szint csak néhány tized elektronvóltra van a vezetési sáv aljától, ezért ha nem is túl sok, de azért számottevő mennyiségű elektron képes feljutni a vezetési sávba. A tiszta félvezető anyagok tehát kissé vezetik az elektromos áramot. Igazi különlegességüket, melyen széles körű elektronikai alkalmazhatóságuk múlik azonban a félvezetőkhez adalékolt anyagok hatása adja, amiről

a következő fejezetben szólunk.

A 11.19. ábrán a sávszerkezet egyszerűsített diagramjait mutatjuk be, jelezve a Fermi-szintet és a sávokon belül a terület színezésével azt, mennyire vannak betöltve az adott helyen az energiaszintek. (Sötétkék: teljesen betöltött állapotok, világoskék: betöltetlen állapotok.)



11.19. ábra. Szigetelők, félvezetők és fémek vázlatos sávszerkezete.

11.5. Kérdések és feladatok

11.5.1. Elméleti kérdések

1. Lényeges szerepet játszik-e a molekulák kialakulásakor az energiaminimum-elv?
2. Mi a feltétele annak, hogy két atom közt ionos kötés alakuljon ki?
3. Kialakulhat-e ionos kötés két azonos rendszámú atom között? Miért?
4. Milyen lesz a kötést kialakító elektronok eloszlása kovalens kötés esetében?
5. Kialakulhat-e kovalens kötés két azonos rendszámú atom között? Miért?
6. Milyen szerepet játszik az elektronok spinje a kovalens kötés kialakulásában?
7. Milyen nagyságrendbe esik egy tipikus kovalens kötés kötési energiája és kötéstávolsága?
8. Mit nevezünk egy molekula disszociációs energiájának?
9. Miért nem alakít ki a He-atom kovalens kötést normál esetben?

10. Miért nem egy egyenes mentén helyezkednek el az atomok a H_2O molekulában?
11. Mitől függ, hogy egy atom hány hidrogénatommal tud kovalens kötést létrehozni?
12. Léteznek-e 1000-nél több atomból álló molekulák? Ha igen, mondjon rá példát!
13. Lehetséges-e, hogy két atom közt a kötést kettő vagy három elektron-pár alakítsa ki?
14. Hogy nevezzük azt a kötést, amikor az elektronfelhő kettőnél több atommagot vesz körül?
15. Lehetséges-e, hogy egy semleges molekula maga körül elektromos teret hozzon létre? Ha igen, mondjon rá példát!
16. Lehet-e két azonos atomból álló molekula polarizált? Ha igen, mondjon rá példát!
17. Mi az a két jelenség, melyek az atomok energiaszintjeinél nem jelentkeztek, de a molekulák energiaszintjeit jelentősen befolyásolják?
18. Mit nevezünk a molekulák esetében zérusponti energiának?
19. Írja le a molekulák rezgési energiáját megadó összefüggést és magyarázza meg röviden az egyes tagok jelentését!
20. Milyen nagyságrendű energiaváltozást okoz egy tipikus molekulában a rezgési kvantumszám egységnyi megváltozása? Ez milyen színeképtartományba eső sugárzásnak felel meg?
21. Írja le a molekulák forgási energiáját megadó összefüggést és magyarázza meg röviden az egyes tagok jelentését!
22. Melyikhez tartozik nagyobb energiaváltozás: ha egy molekula forgási- vagy ha a rezgési kvantumszáma változik 1-ről 0-ra?
23. Miért van rendkívül sok színekpvonala a molekulák színeképében?
24. Mit nevezünk a molekulák esetében másodlagos kötésnek?
25. Mondjon példát a víz olyan fizikai paraméterére, melyet a másodlagos kötések határoznak meg!
26. A poláros molekulák semlegesek, mégis képesek egymást vonzani. Hogyan lehetséges ez?
27. Mit nevezünk hidrogénhíd-kötésnek?

28. Melyik kölcsönhatásnak köszönhetően cseppfolyósodik a nitrogéngáz alacsony hőmérsékleten?
29. Mi a különbség egy kristályos és egy amorf anyag belső szerkezete között?
30. Mondjon példát egyszerű elemi cellára!
31. Hogyan alakulnak ki az ionrácsos kristályok?
32. Egy kovalens rácsban nincsenek delokalizált kötések. Jól vagy rosszul vezeti ez az áramot? Válaszát indokolja röviden!
33. Mi az a speciális jelenség, mely a fémek elektronjai esetén fellép, de a kovalens- és ionrácsos anyagok esetében nem?
34. Rajzolja fel vázlatosan egy szilárdtest elektronjainak sáv szerkezeti ábráját! Jelölje a három fő sáv típust!
35. Mit nevezünk egy szilárdtest esetén az elektronok Fermi-szintjének?
36. Rajzolja fel egy szilárdtest elektronjaira vonatkozó betöltési valószínűség-függvény grafikonját két különböző hőmérséklet esetében! Jelölje, melyik görbe tartozik a magasabb hőmérséklethez!
37. Mennyi kT értéke szobahőmérsékleten eV-ban? (k a Boltzmann-állandó, T a hőmérséklet.)
38. Nagyságrendileg mekkora egy tipikus szigetelő anyag tiltott sávjának szélessége?
39. Hol helyezkedik el a szigetelők Fermi-szintje a sáv szerkezeti ábrán?
40. Hol helyezkedik el a fémek Fermi-szintje a sáv szerkezeti ábrán?
41. Miért vezetnek áramot a fémek igen alacsony hőmérsékleten, és miért nem teszik ezt a szigetelők?
42. Szobahőmérsékleten jó vagy rossz vezetők-e a tiszta félvezetők?
43. Nő vagy csökken egy félvezető anyag ellenállása ha átlagos körülmények közt hőmérséklete növekszik?

11.5.2. Gyakorló feladatok

A témakörben csak néhány igen egyszerű számolási példát vettünk, ezért azokon kívül külön kidolgozott feladatokat itt nem közlünk.

1. Milyen hullámhosszúságú és milyen színek tartományba esik az a foton, melynek energiája elegendő egy F_2 molekula disszociációjához? (A szükséges adatokat keresse ki táblázatból.)
2. Mekkora az a hőmérséklet, amelyen a hőmozgásból származó átlagos $(1/2)kT$ energia elegendő a CO-molekula rezgési energiaszintjeinek gerjesztésére?
3. Egy molekula $J = 1$ és $J = 0$ szintjei közti átmenetkor 24 GHz frekvenciájú sugárzást bocsát ki. Mekkora a forgást jellemző E_r^* értéke? Milyen hullámhosszúságú sugárzás tartozik a $J = 2 \rightarrow 1$ átmenethez?
4. A konyhasó (NaCl) sűrűsége 2160 kg/m^3 . Ismerve kristályszerkezetét (11.13. ábra) és azt, hogy a Na relatív atomtömege 23 g/mol , a Cl-é pedig $35,5 \text{ g/mol}$, határozza meg a sókristályban a szomszédos Na és Cl atomok távolságát!

Ajánlott irodalom:

- xx

Felhasznált irodalom:

- xx

12. A félvezetők fizikája

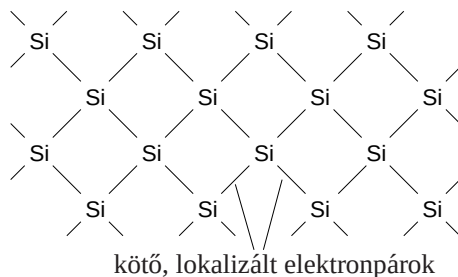
12.1. A félvezetők fizikájának alapjai

Az előző fejezeteket felhasználva most azzal foglalkozunk, milyen alapvető folyamatok zajlanak le a félvezető anyagokban, melyek fontosak az egyszerű félvezető eszközök működésének megértésében.

12.1.1. Tiszta félvezetők

A tiszta félvezetők sávszerkezetéről az elő fejezetben esett szó. Most nézzük meg részletesebben, mi is történik az elektronokkal egy félvezető anyag belsejében. A tömörség kedvéért egy konkrét félvezető anyag, a szilícium (Si) szerkezetével foglalkozunk, de a többi félvezető esetén is lényegében ugyanez lenne elmondható, mivel minden félvezető anyag atomjainak 4 vegyértékelektronja van.

A Si négy vegyértékelektronnal rendelkezik és ezek segítségével kovalens kötésű kristályrácsot alkot, mely térbeli szerkezetében megegyezik a gyémánt rácsával. (11.14. ábra.) A pontos térbeli szerkezet azonban nem befolyásolja az áramvezetéssel kapcsolatos alapvető megfontolásokat, ezért ebben a fejezetben a Si szerkezetét egy egyszerűsített, síkba „kilapított” hálóval szemléltetjük. Bár ez a háló geometriailag és a kapcsolatok rendszerében is eltér a valótól, azt a legfontosabb vonást, hogy egy Si atom négy szomszédjával áll kovalens kötésben, megőrzi, és most csak ez a fontos számunkra. A kötő elektronpárokat a szokásos módon egy vonallal jelölve a 12.1. ábra mutatja a Si ily módon egyszerűsített szerkezetét.



12.1. ábra. Tiszta Si-kristály kötő elektronjainak sémája

A tiszta Si-kristály elektronjai tehát nem mozdulhatnak el, ha nem kapnak annyi energiát, hogy kiszakadjanak a kovalens kötést jelentő állapotból.

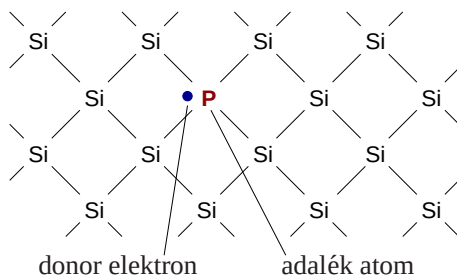
Az ehhez szükséges energia 1,1 eV (ez a tiltott sáv szélessége), amivel szobahőmérsékleten az előzőek szerint csak igen kevés elektron rendelkezik, így a tiszta Si szobahőmérsékleten gyakorlatilag szigetelőként viselkedik.

A hőmérséklet emelésével egyre több elektron tud feljutni a vezetési sávba, így a szilíciumot melegítve egyre jobb vezetőképeséget kapunk. A magasabb hőmérsékleten ugyan csökken az elektronmozgékonyosság, mivel a jobban rezgő Si-atomokkal való találkozás egyre valószínűbb, mégis a vezetési elektronok növekvő száma erősebb hatást jelent, mint az elektronmozgékonyosság csökkenéséből adódó.

12.1.2. Adalék atomok hatása a félvezetőkre

A félvezető anyagok igazán különleges viselkedését akkor tapasztaljuk, ha 3 vagy 5 vegyértékű atomokat is adalékolunk hozzájuk. Ezek megváltoztatják az anyag elektronszerkezetét, ami érdekes és a gyakorlat szempontjából is fontos jelenségekhez vezet.

Képzeljük el, mi történik, ha egy tiszta Si-rácsban egy atomot 5 vegyértékű foszfor (P) atomra cserélünk! Az 5 vegyértékelektron közül 4 ki tud alakítani egy-egy kovalens kötést a szomszédos Si-atomok vegyértékelektronjaival, de egy elektron „feleslegesen” megmarad. Ez az elektron a kristályhoz hozzáadott, úgynevezett **donor elektron** lesz, ahogy azt a 12.2. ábra mutatja. Ebben az esetben az adalék atomot **donor atomnak** nevezzük, mivel egy plusz elektront ad a többieknek.



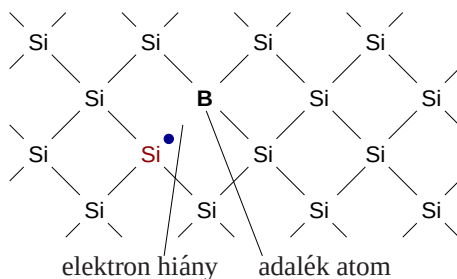
12.2. ábra. 5 vegyértékű adalék atom hatása a Si szerkezetére.

A donor elektron nem vesz részt a kötések kialakításában, ezért majdnem szabadon elmozdulhat. Egy kicsit mégis kötődik a P-atomhoz, mert ha a donor elektron kissé eltávolodik tőle, akkor egy pozitív töltésű ion marad ott, aminek az elektromos vonzása enyhe kötésben tartja. Ezt a kötést azonban elég kicsi, 0,01 eV nagyságrendű energiával fel lehet bontani, így

már szobahőmérsékleten is a donor elektronok túlnyomó többsége feljut a vezetési sávba.

Jó közelítéssel tehát minden egyes 5 vegyértékű adalék atom egy plusz vezetési elektront visz a kristályba. Mivel a tiszta Si-ban a vezetési elektronok száma igen alacsony, ezért ez még akkor is jelentősen megnöveli a vezetőképességet, ha egymilliárd Si-atomra jut egyetlen adalék P-atom.

Más a helyzet akkor, ha az adalék atom 3 vegyértékű, mint pl. a bór (B). Ekkor az adalék atom csak 3 szomszédjával tud kötést kialakítani, a negyedik szomszédjánál pedig egy elektron (másképpen: egy kötő elektronpár fele) marad, ahogy azt a 12.3. ábra mutatja.

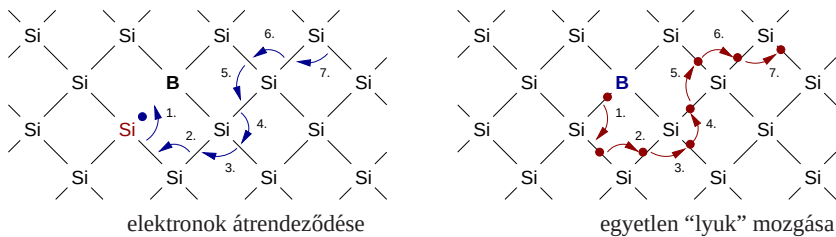


12.3. ábra. 3 vegyértékű adalék atom hatása a Si szerkezetére.

Ebben az esetben nincs plusz elektron, mely könnyen felmenne a vezetési sávba, van viszont egy elektronhiányos állapot, mely a többi kötő elektronpár átrendeződését teszi lehetővé. A hiányos B-Si kötés ugyanis az energiaminimum elv miatt „törekszik” arra, hogy kiegészüljön, amit úgy tud megtenni, hogy a szomszédos kötő elektronpárokból „lop” elektront. Így viszont ott lesz elektronhiány, amit rövid idő alatt egy másik szomszédtól pótol be az ottani kötés. Ez a folyamat a végtelenségig folytatódik: az energiaminimumra való törekvés mindenütt az elektronpárok kiegészítését eredményezi, ami csak valamelyik szomszéd kötés rovására történhet.

Ez a folyamat is egyfajta töltésvándorlás, csak nem egyetlen elektron mozgása, hanem számtalan elektron átrendeződése. Egy ilyen, a kristály összes kötő elektronját potenciálisan érintő átrendeződés követése meglehetősen bonyolult dolog, amit körülményes leírni. Sokkal egyszerűbb azt megadni, hol van az egyetlen elektronhiány, mintsem a sok-sok elektron helyzetét követni. Az elektronhiány helyét szokás **lyuknak** nevezni. Ezzel a fogalommal valójában csak egyszerűsítjük az elektronszerkezet átalakulásainak leírását, és tudjuk, hogy nem olyan „igazi” részecskéről beszélünk,

mint az elektron. Az elektronok átrendeződését és a lyuk mozgásán alapuló szemlélet összevetését azonos esetben mutatja be a 12.4. ábra.



12.4. ábra. A lyukvezetés szemléltetése

Egy egyszerű hasonlat: ha egy teremben 1000 szék van, és ezeken 999 ember ül, akkor a székek foglaltságát sokkal egyszerűbb az üres szék nyilvántartásával végezni, mint annak felsorolásával, mely székek foglaltak. Lyuk helyett ekkor mondhatunk „széküresedést” és az emberek átülésekor nem az emberek mozgását kell leírunk, hanem a széküresedését.

Érdekes, hogy a lyuk számtalan szempontból úgy viselkedik, mint egy pozitív töltésű részecske. Például ha a Si-kristály függőlegesen felfelé mutató elektromos mezőbe kerül, elektronjai ennek hatására lefelé mozdulnak el, ami a lyuk (elektronhiány) felfelé mozgását jelenti. Ez viszont pontosan ugyanaz, mint amit egy pozitív töltésű valódi részecske tenne a felfelé mutató elektromos térben.

A továbbiakban tehát úgy fogunk fogalmazni, hogy a 3 vegyértékű adalék atomok egy lyukat visznek az elektronszerkezetbe, és ennek mozgása áramvezetést jelent. A 3 vegyértékű adalék atomokat **akceptor atomnak** szokás nevezni, mivel képes „befogadni” (angolul accept) egy elektront.

A lyuk azonban (a donor elektronhoz hasonlóan) nem mozog teljesen szabadon, hisz az akceptor atom nélküle negatív töltésűvé válik, ami vonzza a pozitív töltésű lyukat. A lyuk ezért nagyságrendileg 0,01 eV energiával kötődik az akceptor atomhoz, de ezt szobahőmérsékleten a lyukak nagy része megkapja a hőmozgásból, így lényegében minden 3 vegyértékű adalék atom egy vezetési lyukat visz a kristályba.

Megkülönböztetendő a kétféle vezetéstípust, az 5 vegyértékű adalékolást **n-típusú adalékolásnak** nevezzük, mert negatív töltéshordozókat

eredményez, míg a 3 vegyértékű adalékolás esetén **p-típusú adalékolásról** beszélünk a pozitív töltéshordozók kezdőbetűje nyomán. Az adalékolás jellegének megfelelően beszélünk n- és p-típusú félvezető anyagokról.

Természetesen egy félvezető anyagdarabban egyszerre lehetnek jelen p- és n- típusú adalék atomok is. Ilyenkor az anyag viselkedése az alapján dől el, melyik töltéshordozóból van benne több. Például adalék atomok bevitelével egy tiszta félvezető n-típusúvá tehető, majd sok p-típusú adalék bevitelével átfordítható p-típusúvá.

12.1.3. Adalékolt félvezetők sávszerkezete

Az előzőekben elmondottak szerint a donor elektronok szintjei néhány század eV-nyival a vezetési sáv alatt, az akceptorszintek pedig ugyanilyen nagyságrendű energiával a vegyértéksáv felett találhatók. Maguk a **donor-** és **akceptorszintek** térben lokalizáltak, mivel a megfelelő atom ionja elektromos kölcsönhatás révén köti a donor elektront illetve a lyukat.

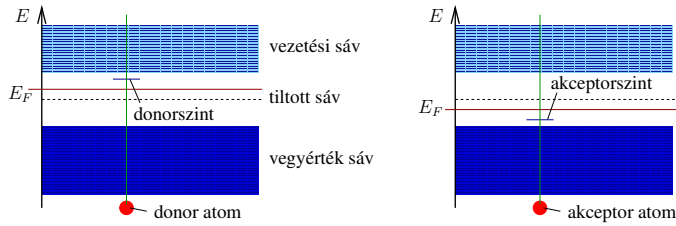
Igen alacsony hőmérsékleten a donor elektronok a donorszinteken, a lyukak az akceptor szinteken találhatók. Ez viszont azt jelenti, hogy a Fermi-szint az adalék atomok közelében nem a tiltott sáv közepén, hanem a donorszintek és a vezetési sáv illetve az akceptorszintek és a vegyértéksáv közt húzódik. Az adalék atomoktól távol pedig a Fermi-szint megmarad eredeti helyén, a tiltott sáv közepén. Az egész kristályt tekintve tehát nem adható meg egyetlen Fermi-szint, csak valamiféle átlagos érték, mely az adalékolás miatt eltolódik: n-típusú adalék esetén a vezetési sáv, p-típus esetén a vegyérték sáv felé. Az eltolódás mértéke az adalékolás koncentrációjától függ.

Meg kell jegyezni, hogy az itt bevezetett „átlagos Fermi-szint” fogalma nem teljesen precíz, mégis segít eligazodni a félvezetőfizika több kérdésében.

Mindezek alapján az adalékolt félvezetők sávszerkezetét úgy rajzolhatjuk fel sematikusán, ahogy azt a 12.5. ábra mutatja.

12.1.4. Speciális jelenségek a félvezetőkben

A félvezetők előzőekben tárgyalt különleges sávszerkezete olyan jelenségeket eredményez, melyek ha léteznek is hagyományos anyagokban, mondjuk fémekben, sokkal kisebb szerepűek, mint az adalékolt félvezetők esetében. Most ezeket vesszük sorra.



12.5. ábra. Adalékolt félvezetők sáv szerkezeti vázlata

Lyukvezetés. Az előző fejezetben már tárgyaltuk ezt a jelenséget. Normál vezetőkben is előfordulhat a jelenség, de ott mindig elhanyagolható a hagyományos vezetés mellett, mert mindig az elektron a többségi töltéshordozó.

A lyukvezetés is hasonló törvényszerűségek szerint történik, mint a hagyományos drift vezetés és vele egy időben is történik, ezért félvezetők esetén a drift áramsűrűséget a

$$j = en\mu_n + ep\mu_p$$

formában lehet kifejezni, ahol e az elemi töltés, n a vezetési elektronok- p a vezetési lyukak koncentrációja, μ_n és μ_p pedig az elektron- és lyukmozgékonyosság.

A lyukak nem valódi részecskék, hanem valójában a vegyértékelektronok átrendeződését jellemző elektronhiányos helyeket szimbolizálják, ezért nem meglepő, hogy a lyukak mozgékonyága nem feltétlen egyezik meg a vezetési elektronok mozgékonyágával.

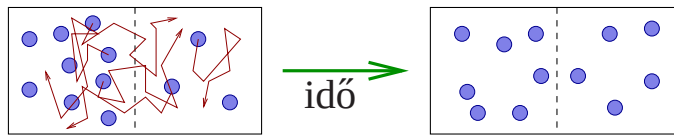
Az n és p koncentrációk viszonya dönti el, milyen típusúnak nevezzük az anyagot. Értelemszerűen $n > p$ esetén n -típusúról, $p > n$ esetén pedig p -típusúról beszélünk.

Láthattuk az előző fejezetben, hogy a lyukak hasonlóan, de ellentétes előjellel viselkednek, mint az elektronok. Számukra pl. az energia sáv szerkezeti diagramon lefelé van a magasabb energiájú állapot, így alacsony hőmérsékleten a lyuk az akceptorszinten található, és onnan magasabb hőmérsékleten „felugrik” a vegyértéksávba, ahol képes terjedni. Ez a „felugrás” az elektronok számára készített szokásos diagramon azonban lefelé mozgulást jelent. Ebből az is látszik, hogy a lyukak számára a vegyérték- és vezetési sáv szerepe is megcserélődik.

Diffúziós áram. A korábban tanult, „hagyományos” áramot, mely elektromos vezetőkben feszültségkülönbség hatására jön létre, drift áramnak nevezzük. Létezik azonban a töltések mozgásának egy másik fajtája, melynek hatása a fémek belsejében nem jelentős, de az adalékolt félvezetőknel lényegessé válik, ez a **diffúziós áram**.

A diffúziós áram okának megértéséhez tételizzük fel, hogy egy anyagdarab bal oldalán több szabad töltéshordozó, mondjuk elektron található, mint a jobb oldalon, azaz a töltéshordozók koncentrációjában különbség van, de nincs jelen elektromos tér, azaz feszültségkülönbség az anyagon belül.

Az elektromos tér hiányában az elektronok a hőmozgás hatására véletlenszerűen mozognak minden irányban. Ezen mozgás közben balról jobbra több elektron lépi át a képzeletbeli felezővonalat, pusztán azért, mert a bal oldalon kezdetben egységnyi térfogatban nagyobb a számuk. (12.6. ábra.) Ez a töltéshordozó-koncentrációk kiegyenlítődéseként irányába ható folyamat, azaz a koncentrációkülönbség csökkenni fog a véletlenszerű hőmozgás miatt.



12.6. ábra. A diffúziós áram kialakulása

Ez a folyamat viszont elektromos áramot jelent, mivel esetünkben balról jobbra több negatív töltés mozgott, mint ellenkezőleg, azaz egy eredő, jobbról balra mutató áram keletkezik a vizsgált anyagban. (Az áramirány megállapodás szerint ellentétes a negatív töltések áramlási irányával.)

A diffúziós áramot tehát a töltéshordozó koncentrációkülönbsége okozza. Egy adott anyagú fém darab belsejében ez a koncentráció lényegében helyfüggetlen, így a diffúziós áramnak nincs szerepe. Különböző típusú anyagok összeérintésekor, de különösen különböző jelleggel vagy különböző mértékben adalékolt félvezető anyagokban viszont már igen fontos szerepe lesz, ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk.

Párkeltés és rekombináció. Külső energia hatására egy-egy vegyértékelektron képes feljutni a vezetési sávba. Ez nemcsak egy vezetési elektront eredményez a félvezetőben, hanem egy lyukat is hagy hátra a vegyérték

sávban. Így akár a hőmozgás, akár külső fotonok hatására egyszerre két töltéshordozó keletkezik. Ezt a folyamatot nevezzük **párkeltésnek**.

A párkeltés fordított folyamata is létezik, mely során egy vezetési elektron és egy lyuk találkozik és „megsemmisítik egymást”. Ekkor a vezetési elektron energiája hő vagy foton formájában szabadul fel a félvezető anyagának függvényében. Ezt a folyamatot **rekombinációnak** hívjuk.

Természetesen a rekombináció nem jár részecske megsemmisüléssel, hisz a lyuk valójában csak elektronhiányos állapot, mégis ha azt mondjuk, hogy energia hatására létrejön egy vezetési elektron-lyuk páros, akkor ennek fordított folyamata egyfajta „megsemmisülés”. A precíz kifejezés azonban az elektron-lyuk pár „rekombinációja”.

Egy félvezető anyagban a párkeltés és rekombináció egyidejűleg zajlik. Egy adott elektron néha összeszed annyi energiát, hogy felugorjon a vezetési sávba, az elektron egy ideig ott marad, elhagyja eredeti helyét, majd előbb-utóbb találkozik egy lyukkal és rekombinálódik. Összességében azonban egyensúlyi állapot van egy félvezető belsejében, azaz a vezetési elektronok n és a lyukak p koncentrációja egyensúlyi állapotban állandó.

Feltételezhető, hogy egy adott félvezető anyagban, adott hőmérsékleten a párkeltések térfogategységenkénti száma egy állandó K érték.

A rekombinációk száma nyilván arányos n -nel is és p -vel is, hisz a véletlenszerűen bolyongó elektronok és lyukak annál nagyobb eséllyel találkoznak, minél több van belőlük térfogategységenként. Ezért a rekombinációk száma időegységenként $R = C \cdot np$ ahol C állandó.

Egyensúlyban a rekombinációk és párkeltések száma megegyezik, azaz $R = K$, tehát $Cnp = K$, azaz $np = K/C = \text{állandó}$.

Megállapíthatjuk, hogy egy adott félvezető anyagban egyensúlyi állapotban az np szorzat állandó. Ezt szokás a félvezetők **szorzatállandósági törvényének** nevezni.

12.1.5. Érintkezési jelenségek

Az eddigiekben mindig feltételeztük, hogy az anyagunk homogén, azaz mindenütt azonos típusú és azonos módon adalékolt. Most a különböző adalékoltaságú és típusú anyagrészek határán lezajló jelenségeket fogjuk tárgyalni.

A különböző anyagok összeérintésekor fontos szerepet játszó jelenségek a következők:

- Diffúziós áram.
Homogén anyagon belül a töltéshordozók koncentrációja mindenütt azonos, így diffúziós áram nem alakul ki. Különbőféle anyagok közt viszont már nagy különbségek lehetnek, így a diffúziós áram szerepe jelentős lesz az anyagok határfelülete közelében.
- Drift áram.
Az összeérintéskor lezajló jelenségek a két oldalt különböző feszültséget eredményezhetnek. Ez viszont drift áramot fog jelenteni.
- Rekombináció.
Az érintkezési felület különböző oldalairól egymással szemben haladó lyukak és vezetési elektronok rekombinálódni képesek, ami viszont csökkenti a vezetőképességet.

Az érintkezéskor elinduló jelenségek csakhamar beállítanak egy egyensúlyi állapotot a két oldal között. Amennyiben külső elektromos tér nincs jelen, az egyensúlyi állapot nyilván akkor következik be, amikor az eredő áramerősség a két oldal között 0, ami azt jelenti, hogy folyhat diffúziós- és drift áram is, csak ellentétes irányban és azonos nagysággal. A másik fontos jellemzője az egyensúlynak, hogy az átlagos Fermi-szintek kiegyenlítődnek. Ha ugyanis mondjuk a bal oldalon a Fermi-szint magasabb lenne, mint a jobb oldalon, akkor a bal oldalról elektronok vándorolnának a jobb oldalra, mivel ott alacsonyabb energiájú betöltetlen szinteket találnának. Az energiaszinteknek tehát mindkét oldalon azonos magasságig kell betöltődniük, ami a Fermi-szintek kiegyenlítődését jelenti.

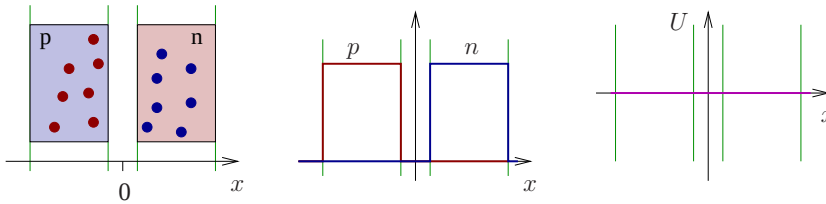
Alkalmazzuk ezeket a megfontolásokat különböző átmenetek esetére.

A p-n átmenet egyensúlyi állapota. Vegyünk képzeletben két, ellentétes jelleggel adalékolt félvezető anyagdarabot, és lassan érintsük össze őket.

Az érintés előtt a mindkét oldal semleges, azonos feszültségen van, az n-típusú oldalon p értéke elhanyagolható és viszont. A 12.7. ábra mutatja be ezt az állapotot: láthatjuk a két össze nem érő anyagdarabot, a p és n töltéshordozó-koncentrációkat és a két oldal feszültségét, ami az összeérintés előtt egyenlő.

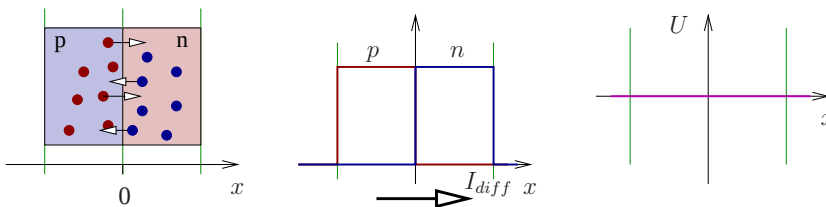
Az érintés után kialakuló folyamatok a következőképp fognak lezajlani:

1. A diffúziós áram elindul.
Mivel a p-típusú oldalon sok a vezetési lyuk (p értéke itt nagy), ezért a diffúziós áram a lyukaknak az n-típusú oldal felé vándorlását indítja meg. Ugyanez történik fordítva az elektronokkal is.



12.7. ábra. p- és n- típusú anyag összeérintés előtt.

Mivel az áramiránynak megállapodás szerint a pozitív töltések vándorlási irányát tekintjük, ezért a lyukak és a velük ellentétes irányba menő elektronok egyaránt a p-ről az n-oldal felé irányuló diffúziós áramot eredményeznek. (12.8. ábra.)



12.8. ábra. p- és n- típusú anyag közvetlen az összeérintés után.

2. A két oldal polarizálódik.

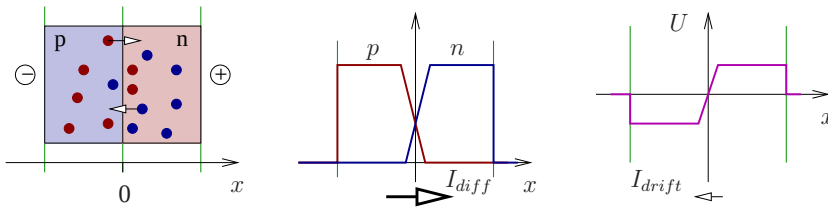
A meginduló diffúziós áram hatására a kezdetben semleges oldalak feltöltődnek: a p-típusú negatív, az n-típusú pozitív töltést szerez. Ez a két oldal közt feszültség-különbséget is eredményez.

3. Elindul a drift áram.

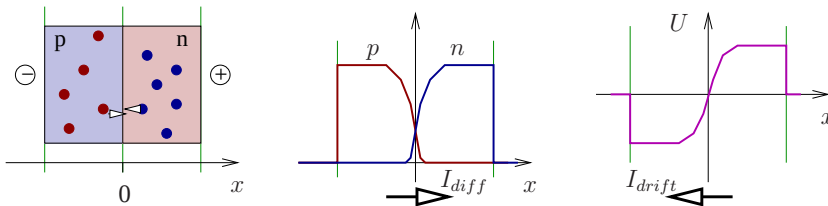
A két oldal közt fellépő feszültség-különbség elindítja a drift-áramot is. Mivel az n-oldalon pozitív töltések halmozódtak fel, ezért a drift áram innen fog a p-oldal felé folyni, azaz pontosan ellentétes irányú lesz a diffúziós árammal. (12.9. ábra.)

4. Beáll az egyensúly.

Amikor az egymással ellentétes irányban folyó diffúziós- és drift áramok nagysága kiegyenlítődik, egyensúlyi állapot áll be, melyben a két oldal közt feszültségekülönbség van, folyik a diffúziós- és drift áram is. (12.10. ábra.)



12.9. ábra. A polarizáció és a drift áram beindulása.

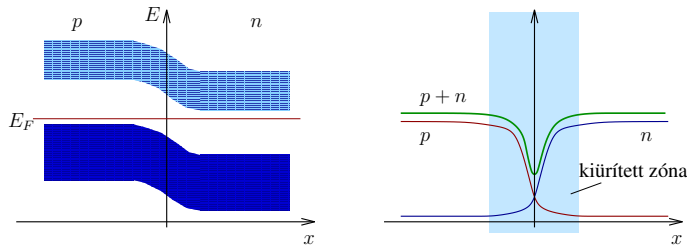


12.10. ábra. Az egyensúlyi állapot.

Az egyensúlyi állapotban a két oldal Fermi-szintjei kiegyenlítődnek. További fontos jellemzője az egyensúlynak az átmenet közelében kialakuló **kiürített zóna** megjelenése. A határ közelében ugyanis az egymással szemben menő elektronok és lyukak rekombinációja lecsökkenti a töltéshordozó-koncentrációt, és egy vékony (0,01 mm nagyságrendű) réteg gyakorlatilag szigetelővé válik. (12.11. ábra.)

Az előző ábrákon igyekeztünk a főbb folyamatokat feltüntetni. Az áttekinthetőség rovására ment volna a túlzott precizitás, így pl. a bal oldalon a sematikus rajzon csak a diffúziós áramnak megfelelő töltésmozgások nyilait jelöltük.

Fém-félvezető átmenet egyensúlyi állapota. Az előzőek alapján könnyen megérthetjük azt is, mi történik, ha fém és félvezető anyag érintkezik egymással.

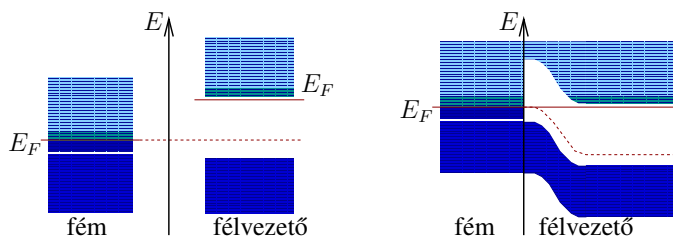


12.11. ábra. A p-n átmenet sávszerkezete és töltéshordozó-koncentrációja egyensúlyban.

Az előzőekhez hasonlóan az érintkezéskor meginduló diffúziós- majd a polarizáció miatt elinduló drift áram egyenlősége határozza meg az egyensúlyi állapotot. Az egyensúlyban a Fermi-szintek is kiegyenlítődsre törek-szenek. A fém és a félvezető Fermi-szintjének egymáshoz való viszonya függvényében ez többféle lehetőséget rejt magában, melyek mindegyike az eddig tanultak alapján könnyen felvázolható. Az, hogy melyik eset valósul meg, anyagfüggő. Minden fémre és félvezetőre megmondhatók ugyanis a Fermi-szint értékei, amiket az ilyen összehasonlításakor azonos szinthez kell viszonyítani.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor fém n-típusú félvezetővel érint-kezik. A Fermi-szintek viszonya kétféle lehet: a félvezetőé magasabb az összeérintés előtt vagy a fémé.

Amennyiben a félvezető Fermi-szintje van magasabban kezdetben, a Fermi-szintek kiegyenlítődsé oly módon megy végbe, ahogy azt a 12.12. ábra mutatja.

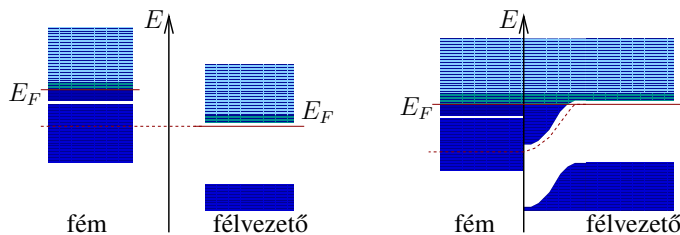


12.12. ábra. Fém és n-típusú félvezető sávszerkezete az összeérintés előtt és után, ha a fém kezdeti Fermi-szintje az alacsonyabb.

Látható, hogy ebben az esetben a kiegyenlítőds során a határ közelében

a félvezető oldalán olyan sávszerkezet jön létre, mely megakadályozza a kis energiájú vezetési elektronok átjutását, így gyakorlatilag szigetelő réteggént működik. Ez az átmenet sok szempontból hasonlít a p-n átmenetre.

A másik eset, hogy a fém kezdeti Fermi-szintje magasabb a félvezető-énél. Ennek sávszerkezetét a 12.13. ábra tartalmazza. Látható, hogy ez jelentősen különbözik az első esettől, mert a vezetési sáv folytonos marad, így a kis energiájú vezetési elektronok is átjuthatnak, azaz a kapcsolat nem szigetelő jellegű lesz. Az ilyen típusú kapcsolatot **galvanikus kapcsolatnak** nevezzük.



12.13. ábra. Fém és n-típusú félvezető sávszerkezete az összeérítés előtt és után, ha a fém kezdeti Fermi-szintje a magasabb.

Érdekességek. A félvezetőt is tartalmazó közeget határok számtalan érdekes és hasznos jelenség alapjait képezik.

A fém-félvezető határon kialakuló jelenségek adják meg a magyarázatot, miért nem lehet mondjuk egy p-n átmenetet áramforrásként használni. Ugyan a fentiek szerint egy ilyen átmenet két oldala közt 0,1–1 V nagyságrendű feszültség alakul ki, de mihelyt áramkört szeretnénk ezzel üzemeltetni, a p-n átmenet két oldalára csatlakozó fém huzal és a félvezetők közt lezajlik a Fermi-szintek kiegyenlítése, ami végül is az áramkör minden elemén megtörténik. Ez viszont azt jelenti, hogy az egyensúlyi állapotban nem fog áram folyni, mivel a fém-félvezető kontaktusnál épp elvész a p-n átmeneten kialakuló feszültség.

Az előző bekezdésben vázolt folyamatok számszerű elemzése azt mutatta, hogy a pontos kiegyenlítés csak akkor következik be, ha a p-n vagy a fém-félvezető átmenetek két oldala azonos hőmérsékletű. Különböző hőmérséklet esetén már megjelenhet feszültségkülönbség, azaz az átmenet kis teljesítményű áramforrásként, **termoelemként** fog üzemelni. Ez az áramforrás nem a semmiből veszi az energiáját, hanem a két oldal

közt hővezetéssel áramló hőáram egy részét alakítja át, egyfajta speciális hőerőgépként viselkedve, ami a termodinamika törvényeinek van alávetve.

Az ilyen termoelemekből technikai okokból nem vehető ki ipari méretekben számottevő teljesítmény, ezért felhasználási területük inkább a hőmérséklet-különbségek mérésével kapcsolatos, mert a kialakuló feszültség és a hőmérséklet-különbség között egyszerű kapcsolat van. (Kis hőmérséklet-különbség esetén lineárisnak tekinthető.)

A termoelem jelenség fordítottja is megtörténik a vizsgálatok szerint: külső áramforrásból áramot hajtva egy átmeneten a két oldal kissé eltérő hőmérsékletűre áll be. Ez a jelenség hőszivattyúk, hűtőgépek tervezését teszi lehetővé.

A gond itt is a teljesítménnyel van: költséges (de nem lehetetlen) ilyen elven hűtőgépet építeni. Ezért ezt a fajta hűtést csak akkor alkalmazzák, ha valamiért különösen fontosak az ilyen megoldás előnyei (pl. az, hogy az ilyen berendezésben nincs mozgó alkatrész), vagy ha csak viszonylag kis teljesítmény szállítása szükséges.

Ilyen elven alapulnak a számítógép alkatrészként beszerezhető Peltier-hűtők. Ezek p-n átmenet segítségével szivattyúzzák a hőt a számítógép processzoráról és juttatják el a hűtőfelületekhez, sokkal hatékonyabban, megbízhatóbban és csendesebben, mint az egyéb megoldások. A hátrányuk ezeknek a viszonylag magas áruk és az, hogy működtetésük sok energiát emészt fel.

Másik érdekessége a p-n átmeneteknek, hogy kis kapacitású kondenzátoroként is képesek viselkedni. A kiürített zóna két oldala ugyanis ellentétes polarításúra töltődik fel, ami ugyanaz a töltéselrendezés, mint a kondenzátoroké. Ez a kapacitás ráadásul változtatható, mivel a diódára adott feszültségtől függ a kiürített zóna vastagsága. Az ilyen üzemmódban használt diódákat **varicap diódának** nevezzük.

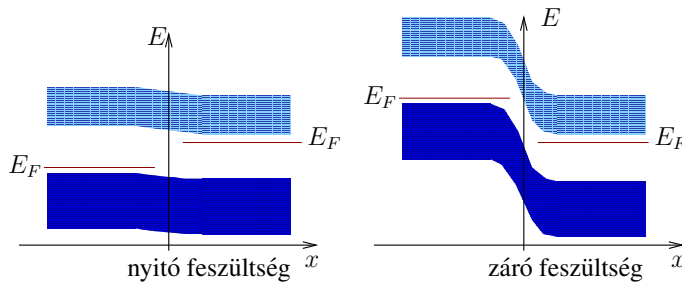
Bár a kialakuló kapacitás a legtöbb dióda esetén a pF (pikofarad) nagyságrendbe esik, ez a kis kapacitás is hasznos lehet. Ráadásul a félvezető dióda sokkal kisebb méretű, mint egy hagyományos kondenzátor, így a nagyfokú miniaturizációhoz is igen fontos alapelem a diódák kapacitásának kihasználása kondenzátorok alkalmazása helyett.

Felhasználva a félvezetők fizikájáról tanultakat, most már képesek vagyunk megérteni a mikroelektronika gyors fejlődését lehetővé tevő félvezető eszközök működési elveit.

12.2. A félvezető dióda

Láttuk, hogy a p-n átmenet és a fém-félvezető átmenet egyik fajtája olyan szerkezetet alakít ki, melyben a határ közelében egy nagy ellenállású réteg alakul ki és így nem tud az áram szabadon átfolyni az átmeneten. Ezek az átmenetek ráadásul nem szimmetrikusak a határfelületre (lásd a 12.11. és 12.12. ábrákat.)

Ez az aszimmetria fokozódik vagy csökken, ha egyik vagy másik polaritással külső feszültségforrás segítségével változtatjuk a két oldal feszültségét, ahogy azt a 12.14. ábra mutatja.



12.14. ábra. p-n átmenet sávszerkezetének torzulása különböző polaritású külső feszültség hatására.

Jól megfigyelhető, hogy az egyik irány esetén a vezetési sáv alja kisimul, így a töltéshordozók könnyen átjutnak az átmeneten, ezért ilyen esetben azt mondjuk, hogy a külső feszültség nyitó irányú. A másik esetben a lépcső növekszik, ezért a töltéshordozóknak egyre nehezebb átjutni az átmeneti részen.

A külső feszültség hatására csökken (nyitó feszültség) illetve növekszik (záró feszültség) a kiürített zóna vastagsága is, ami ugyanilyen aszimmetrikus viselkedést jelent.

A p-n átmenet tehát az egyik irányú külső feszültség esetén egyre kisebb ellenállást mutat („kinyit”), a másik irány esetén pedig egyre nagyobbat („lezár”). A folyamat részletes elméleti leírása igen összetett, mert a félvezető rétegre merőleges irányban figyelembe kell venni a töltéshordozók koncentrációjának, az elektromos térnek, diffúziós- és drift áramoknak változásait, a rekombinációs és párkeltési folyamatokat, a félvezető anyagok saját ellenállását, stb. Mindezek figyelembe vétele matematikailag is igen bonyolult számításokhoz vezet, mely meghaladná jegyzetünk kere-

teit. Ezért most bizonyítás nélkül, de a fizikai folyamatokra való utalással közöljük a számítások, majd a mérések eredményeit.

12.2.1. Az ideális dióda

Amennyiben csak a drift- és diffúziós áramokat, a hőmozgás hatására történő párkeltést és rekombinációt vesszük figyelembe és a kiürített rétegen kívül teljesen elhanyagoljuk azokat, a **Shockley-féle ideális dióda karakterisztikát** kapjuk, mely megadja a p-n átmenetre kapcsolt U feszültség függvényében a rajt átfolyó I áramerősség egy közelítését:

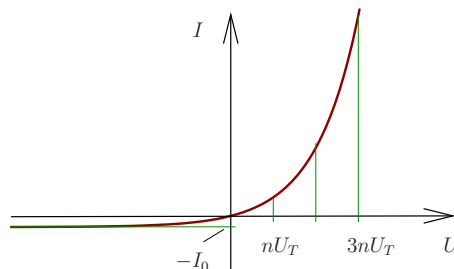
$$I = I_0 \left(e^{\frac{U}{nU_T}} - 1 \right). \quad (12.1)$$

Az $U_T = kT/q_e$ (k a Boltzmann-állandó, q_e az elemi töltés, T a hőmérséklet) értéket **termikus feszültségnek** nevezzük. I_0 a dióda **záróárama**, n pedig a dióda anyagától és gyártástechnológiájától függő 1 és 2 közötti érték, melynek szokásos elnevezése **emissziós együttható**.

Vizsgáljuk meg ezt az összefüggést. Könnyű belátni a következőket:

- $U = 0$ esetén $I = 0$, azaz ha nincs külső feszültség, áram sincs.
- $U \ll -nU_T$ esetén $I \approx I_0$, azaz nagy negatív (záró) feszültség esetén az áramerősség nagysága egy fix értékhez, a dióda záróáramához tart.
- $U \gg nU_T$ esetén $I \gg I_0$, azaz nyitóirányban már a termikus feszültség néhányszorosa a záróáramnál sokkal nagyobb értéket ad.

Ezeket a tulajdonságokat szemlélteti a 12.15. ábra.



12.15. ábra. Az ideális dióda áramerősség-feszültség karakterisztikája

A félvezető diódák esetén I_0 a nA nagyságrendjébe szokott esni, így záró irányban olyan kis áram folyik, mely többnyire elhanyagolható. (Ezért is nevezik „záró” iránynak.)

Nyitóirányban viszont I elvileg minden határon túl nő, ha U növekszik. Akármilyen kicsi is I_0 a karakterisztika $e^{U/(nU_T)}$ tagja sokkal nagyobbá válik 1-nél, így $I \gg I_0$ lesz, azaz ebben az irányban olyan mértékben átereszt a dióda az áramot, hogy az a mindennapi eszközökben is képes jelet vagy teljesítményt továbbadni.

A félvezető dióda imént leírt aszimmetrikus viselkedése adja egyik legfőbb alkalmazási körét: gyakorlatilag csak az egyik irányban engedi át az áramot, így képes egyenirányítóként működni.

12.1. példa: Mekkora a termikus feszültség értéke $T = 300$ K-en?

Megoldás: Egyszerű behelyettesítést kell csak tennünk:

$$U_T = \frac{kT}{q_e} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,0259 \text{ V} = 25,9 \text{ mV}.$$

Megfigyelve a kiszámítás menetét megállapíthatjuk, hogy ez számszerűen megegyezik kT eV-ban kifejezett értékével. Ez nem véletlen: a jegyzetünkben le nem írt levezetésben az elektronok hőmozgás miatti energiája fontos szerepet játszik.

12.2. példa: Egy ideális dióda emissziós együtthatója 2, hőmérséklete 300 K. Mekkora nyitófeszültség esetén lesz a rajta folyó áram erőssége a záróáram egymillió-szorosa?

Megoldás: (12.1)-t alkalmazva esetünkre:

$$10^6 I_0 = I_0 \left(e^{\frac{U}{nU_T}} - 1 \right),$$

ahol a feladat szövege szerint $n = 2$, az előző példa szerint $U_T = 0,0259$ V.

Innen a keresett U feszültség könnyen kifejezhető:

$$U = nU_T \cdot \ln(10^6 + 1) = U_T \cdot 27,6 = 0,716 \text{ V}.$$

Valóban megfigyelhető az, amit korábban írtunk: a termikus feszültség néhány-szorosa esetén a záróáram nagyságának sokszorosa lesz a nyitóáram, azaz pl. nA nagyságrendű záróáram esetén is a mA tartományába kerül a nyitó irányú áram már néhány tized volt nyitófeszültség esetén is.

A nyitó- és záróáramok több nagyságrenddel való eltérése miatt egy valódi dióda esetén nem is lehet jól, méretarányosan megrajzolni a 12.15. ábrát, ha mindenütt azonos skálázást használunk. Ha ugyanis az I -tengely skálázása mindenütt olyan, hogy az ábra terjedelmébe mA nagyságrendű áramok is beleférnek, akkor a záróirányú, nA nagyságrendű áramerősség láthatatlanul kicsi lesz, azaz a karakterisztika a vízszintes tengelyen fut. Ezért általában különböző skálát szokás használni a nyitó- és záró irányú áramokra.

12.3. példa: Egy ideálisnak tekinthető félvezető diódán 2 V zárófeszültség esetén 25 nA erősségű áram folyik át. Mekkora a dióda záróárama? Mekkora nyitófeszültség esetén fog rajta 1 mA erősségű áram folyni, ha emissziós tényezője 1, a dióda hőmérséklete 310 K?

Megoldás: A (12.1) egyenletből egyszerű átrendezéssel meghatározható a kérdett záróáram:

$$I_0 = \frac{I}{e^{\frac{U}{nU_T}} - 1},$$

ahol esetünkben $n = 1$, $U_T = kT/q_e = 0,0267$ V

A záróirányt úgy vehetjük figyelembe az ideális dióda karakterisztikáját megadó (12.1) egyenletben, hogy a feszültséget és az áramerősséget is negatív előjelűnek vesszük, azaz $U_1 = -2$ V és $I = -25$ nA. Így a záróirányban megadott összefüggések alapján:

$$I_0 = \frac{-25 \text{ nA}}{e^{-74,8} - 1} \approx 25 \text{ nA}.$$

A dióda záróárama tehát 25 nA. Nem meglepő, hogy ez sok tizedesjegyre meg egyezik a -2 V-on mért áramerősséggel, hisz az ideális dióda a termikus feszültségnél sokszor nagyobb zárófeszültségre teljesen lezár, ami az előző egyenleten úgy látszik, hogy a nevezőben e egy nagy negatív hatványra kerül, azaz a mellette levő -1 -hez képest elhanyagolhatóvá válik.

A nyitóirányú U_2 feszültséget keresve, mely esetén az áramerősség $I_2 = 0,001$ A ismét az ideális dióda karakterisztikájából indulhatunk ki:

$$I_2 = I_0 \left(e^{\frac{U_2}{nU_T}} - 1 \right),$$

ahonnet

$$U_2 = nU_T \ln \left(\frac{I_2}{I_0} + 1 \right).$$

A megadott adatokkal:

$$U_2 = 1 \cdot 0,0267 \ln(40\,000 + 1) = 0,283 \text{ V}.$$

Tehát 283 mV nyitófeszültségnél lesz 1 mA a nyitóáram.

Itt I_2/I_0 mellett volt az 1-es tag elhanyagolható. Ez annak a következménye, hogy ha a termikus feszültségnél néhányszor nagyobb a nyitófeszültség, akkor a (12.1) egyenlet jobb oldali zárójelében az exponenciális tag mellett a -1 -es elhanyagolhatóvá válik.

12.2.2. A valódi félvezető diódák

Az előzőekben felvázolt ideális dióda karakterisztika megengedi a félvezető diódák működésének alapvető megértését. Maga a Shockley-féle karakterisztika azonban csak közelítő számításokon alapul és a valódi diódák ettől kissé eltérő karakterisztikájúak.

Amennyiben a dióda feszültsége nem túl nagy, a valódi diódák jó közelítéssel ugyanúgy viselkednek, ahogy azt az ideális karakterisztika leírja. Azonban mind záró-, mind nyitó irányban jelentős eltéréseket kapunk, ha a feszültség növekszik.

Záróirányban az ideális és a valódi karakterisztikák közötti legnagyobb eltérés az, hogy egy bizonyos, az adott diódára jellemző U_Z feszültségnél a karakterisztika hirtelen „letörik”, azaz a dióda mégis átvezet. Ennek okát rövidesen tárgyaljuk a Zener-diódákról szóló részben.

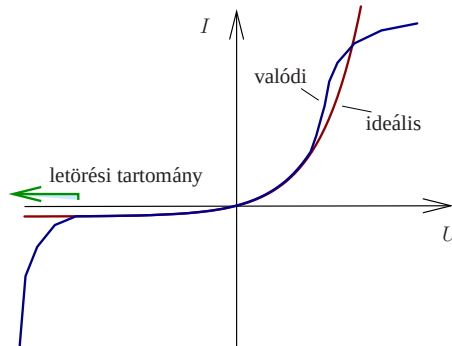
Nyitóirányban a valódi karakterisztika egy ideig együtt fut az ideállal, majd „közepes” nyitófeszültségnél annál meredekebben kezd emelkedni, végül nagy nyitófeszültségnél a meredekség rohamosan csökken. Utóbbi eltérés fő oka a félvezető anyag saját, Ohm-törvény szerinti és a félvezető-fém érintkezés kontakt ellenállása. A közepes feszültségeknél bekövetkező meredekség-növekedés okait csak a lezajló folyamatok pontosabb modellezése ismeretében tudnánk megtenni, így erről ebben a jegyzetben le kell mondanunk.

Vázlatosan (nem méretarányosan) mutatja ezeket az eltéréseket a 12.16. ábra.

Az, hogy a valódi diódák karakterisztikája pontosan milyen, függ a felhasznált anyagoktól és a gyártástechnológiától. Ennek megfelelően a gyakorlat különböző igényeinek megfelelően számtalan fajta dióda alakult ki. Néhány szempont, mely alapján össze szokás őket hasonlítani:

- **Nyitófeszültség.**

Habár a valódi dióda karakterisztikák is folytonosak, van egy viszonylag szűk feszültségtartomány, amikor a nyitóáram belekerül a legtöbb eszköz számára hasznos mA nagyságrendű tartományba. Azt a feszültséget, ahol ez bekövetkezik, szokás nyitófeszültségnek nevezni. Látszik, hogy ez nem egy precízen meghatározható fogalom, de túl



12.16. ábra. Az ideális és valódi dióda áramerősség-feszültség karakterisztikájának főbb eltérései

nagy bizonytalanság sincs benne, mert az ideális dióda karakterisztikája is igen meredeken emelkedik a nyitóirányban.

Si alapú diódáknál ennek értéke általában 0,6 V, Ge alapúaknál 0,3 V körül van, de létezik pl. olyan fém-félvezető dióda, melynek nyitófeszültsége 0,2 V körüli.

- **Maximális áramerősség.**
Sokszor fontos, mekkora áramerősséget bír ki egy dióda. A nagy áramerősség veszélye, hogy a diódán eső nagy teljesítmény túlfűti a diódát, ezért a hűtésről is gondoskodni kell ilyenkor, ami a p-n átmenet burkolatától is speciális kialakítást igényel.
- **Kapcsolási idő.**
Ahhoz, hogy egy dióda nyitóról záró állapotra (vagy fordítva) váltson, át kell rendeződnie a belső töltéseloszlásnak, hisz pl. változik a kiürített zóna vastagsága. Ehhez időre van szükség, és gyorsan változó jelek továbbításánál az a jó, ha ez minél kisebb.
- **Kapacitás.**
Korábban említettük, hogy a félvezető diódák a polarizáció és a kiürített zóna miatt kapacitással is rendelkeznek. Sokszor ennek figyelembe vétele is fontos a különféle alkalmazásoknál.

Ezeket, és sok egyéb más adatot a gyártók a diódákról megadják, mert bizonyos alkalmazásoknál fontosak lehetnek. A részletek már a speciális szakmai tárgyak körébe tartoznak, ezért itt csak a főbb jelenségekre és szempontokra hívtuk fel a figyelmet.

A következőkben röviden még két speciális diódatípust tárgyalunk, mert működésük során érdekes fizikai jelenségek is fellépnek.

12.2.3. A Zener-dióda

A Zener-diódákban az a speciális, hogy úgy alakítják ki őket, hogy letörési feszültségük a gyakorlat szempontjából hasznos tartományba (többnyire 3 és 20 V közé) essék és kibírják ezen a feszültségen a viszonylag nagy áramerősséggel való üzemelést, valamint az is cél a tervezésüknél, hogy a letörésnél a karakterisztika minél meredekebb legyen.

Azért hasznos egy diódát ebben a tartományban üzemeltetni, mert ekkor a rajt átfolyó áram erősségétől alig függ a feszültsége, így a róla levett feszültség alkalmas pl. arra, hogy egy berendezés tápfeszültsége legyen, azaz mondjuk stabilan 6 V-ot állítson elő.

Nézzük meg, milyen fizikai hatások is azok, melyek a Zener-dióda meredek karakterisztikájáért felelősek!

Az alagút-effektus. A kvantummechanikai részben tanultuk, hogy az elektronok hullámtulajdonsággal rendelkeznek, a hullámfüggvény abszolútérték négyzetének valószínűségi értelmezése lehetővé teszi, hogy az elektronok bizonyos valószínűséggel átjussanak a kiürített zónán és megjelenjenek az átmenet túloldalán.

Minél nagyobb a zárófeszültség, annál több elektron és annál nagyobb sebességgel „bombázza” a kiürített zóna szélét, így egyre több fog átjutni a túloldalra, illetve be magába a kiürített zónába, növelve a p-n átmenet vezetőképességét.

A lavina-hatás. A félvezetőkben párkeltést nemcsak hőmérsékleti gerjesztés okozhat, hanem egy nagy energiájú töltött részecske is. Növekvő zárófeszültség-értékeknél a diódában olyan erős elektromos tér alakul ki, mely a töltéshordozóknak annyi energiát képes átadni, hogy ők maguk lesznek képesek párkeltéssel újabb töltéshordozókat indukálni.

A zárófeszültség erősödésével a térerősség olyan nagy értéket is elérhet, amikor a létrejött elektron-lyuk párok az erős elektromos tér hatására hamarabb szednek össze annyi energiát, hogy ők is párkeltést hozzanak létre, mintsem ők maguk rekombinálnának. Ha ez bekövetkezik, a párkeltések lavinaszerűen újabb párkeltéseket eredményeznek, ami nagyságrendekkel növeli meg a töltéshordozó-koncentrációt, így a lezárt félvezető dióda mégis át fog vezetni.

A gyártás során a félvezető eszköz geometriájának és a két oldal adalékolásának változtatásával lehet befolyásolni, mikor is következzen be a letörés. Például erősebb adalékolás nagyobb töltéshordozó-koncentrációt jelent, ami kisebb feszültségeknél is már előmozdítja a lavina-hatás megjelenését.

12.2.4. A fénykibocsátó dióda (LED)

A fénykibocsátó diódák (elterjedt angol rövidítésből származó nevükön: a LED-ek)²⁷ annyiban különböznek a normál diódáktól, hogy a kiürített zónájukban létrejövő rekombinációk energiájának egy jelentős hányada nem hő, hanem fény formájában szabadul fel. Ez megfelelő, átlátszó burkolattal együtt a nyitó irányban üzemeltetett dióda fényforrásként való viselkedését eredményezi.

Az első ledek GaAs (gallium-arzenid) alapúak voltak és vörös színű fényt bocsátottak ki. Mára már igen sok fajtájuk kialakult, a tiltott sáv szélességének megfelelően az infravöröstől a teljes látható spektrumon keresztül a közeli ultraibolya tartományig mindenféle színű led található.

A ledek, összehasonlítva a hagyományos fényforrásokkal kisebb teljesítményűek, viszont kis teljesítménnyel és gyorsan vezérelhetők, ezért szokásos alkalmazási területük a jelzőfényként való felhasználás. (Például az elektromos gépek bekapcsolt állapotát jelzik, vagy egy számítógépes hálózati eszközön villogásukkal az adott csatorna adatforgalmáról adnak vizuális jelzést.)

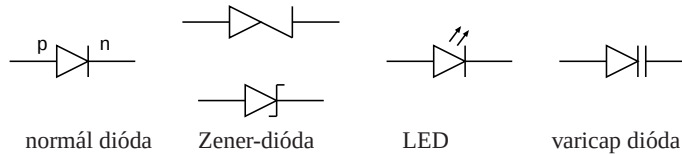
Az utóbbi években kezdenek a ledek fényforrásként is terjedni. Több, az átlagnál kicsit nagyobb teljesítményű led együttes működése már használható kerékpárok hátsó lámpájaként üzemelni. A nagy integráltságú áramkörök gyártási technológiája segítségével kis félvezető lapkák felületén ezrével alakíthatók ki ledek, melyek együttes fénye akár termek megvilágítására is alkalmas lehet. Ha a fejlesztők leküzdik a gyártással kapcsolatos nehézségeket, és többféle led keverésével az emberi szemnek megfelelő színösszetételű kombinációt tudnak előállítani, az ilyen fényforrások akár pár éven belül a hagyományosak erős vetélytársaivá válhatnak.

12.2.5. A félvezető dióda néhány egyszerű alkalmazása

A félvezető dióda az áramkörök gyakori eleme. A 12.17. ábra mutatja a szokásos jelét, valamint az előbb említett két változat (Zener-dióda és

²⁷LED = Light Emitting Diode

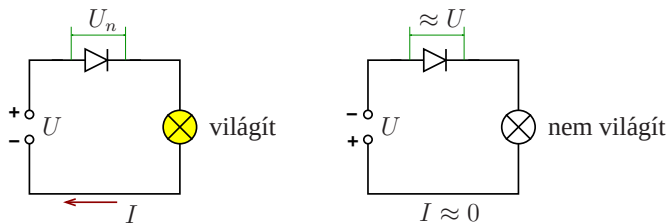
LED) jeleit. (A Zener-diódának két elfogadott jelölése is létezik.) Az ábrán jelöltük, hogy megállapodás szerint a háromszög (nyílfej) a p-típusú oldal.



12.17. ábra. A gyakoribb diódafajták szokásos jele.

A valóságban még több diódatípus van, melyeknek megvan a saját jele, de ezen az ábrán csak azok vannak megjelenítve, melyek szóba kerültek ebben a jegyzetben.

A legegyszerűbb alkalmazása a félvezető diódának az, hogy számottevő mértékben csak egy irányban engedi át magán az áramot. (Ez persze csak közelítés, a pontos viselkedést a dióda karakterisztikája adja meg, de már tudjuk, hogy nem tévedünk sokat, ha egy normál diódáról ezt állítjuk.)

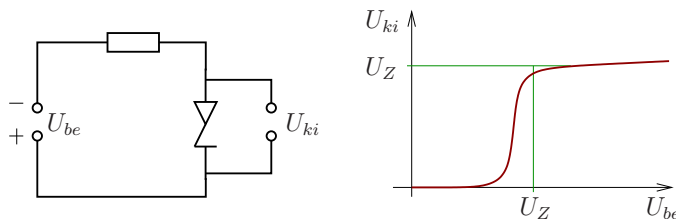


12.18. ábra. A dióda legegyszerűbb alkalmazása.

A 12.18. ábrán egy nem túl hasznos alkalmazást mutatunk be. Amennyiben a telep pozitív pólusa a p-oldalra csatlakozik, nyitóirányú bekötést kapunk és ha a telep U feszültsége meghaladja a dióda U_n nyitófeszültségét, akkor a dióda teljesen kinyit és rajta csak U_n feszültség esik, a többi a fogyasztón, ami az ábránkon egy egyszerű lámpa. (Mint fentebb írtuk, U_n 0,2 és 0,7 V közt változik a leggyakoribb diódafajták esetén.) Fordított polaritás esetén viszont a diód lezár, így lényegében nem enged át magán áramot, ezért a lámpa nem világít.

A dióda ezen egyenirányító hatását pl. váltóáram egyenárammá való alakításánál használják. Az olyan berendezésekben, mint pl. egy akkumulátor-töltő vagy egy laptop tápegysége a hálózati váltófeszültség egyenirányításában a diódák játsszák a fő szerepet. Természetesen ott az egyenirányításon kívül simításra, stabilizálásra is szükség van, de ennek tárgyalása a speciális szakmai tárgyak területe.

A 12.19. ábra a Zener-dióda egyszerű bekötését mutatja, valamint azt, hogy ez az egyszerű kapcsolás közelítőleg úgy működik, hogy ha a bemenet a diódára jellemző U_Z Zener-feszültségnél nagyobb (tetszőleges) feszültségértéket kap, akkor jó közelítéssel U_Z feszültség jelenik meg a kimenetén. Ez igen hasznos, ha stabil feszültséget kell előállítanunk, mert egy berendezés mondjuk 6 V egyenárammal működik.



12.19. ábra. A Zener-dióda egyszerű alkalmazása.

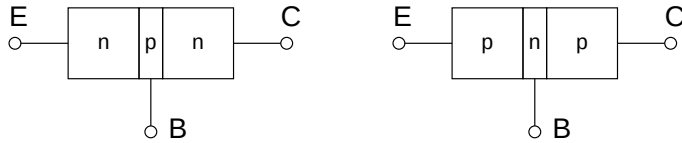
12.3. A tranzisztor

Láttuk, hogy a félvezető dióda sok feladatra alkalmas eszköz, számtalan helyen alkalmazzák. Ebben a fejezetben egy olyan áramköri elem fizikájával foglalkozunk, mely még ennél is sokkal fontosabb, és amely az utóbbi fél évszázad elektronikai fejlődésének talán a legfontosabb alapeleme: a tranzisztorral.

12.3.1. A bipoláris tranzisztor

A hagyományos, úgynevezett **bipoláris tranzisztor** vagy **rétegtranzisztor** elvi felépítése nagyon egyszerű: 3, váltakozva adalékolt félvezető anyag egymáson, mindegyikre külön kivezetést kötve. Természetesen ebből kétféle elrendezés lehetséges: n-p-n vagy p-n-p sorrendben követhetik egymást a rétegek. Ezt mutatja be a 12.20. ábra.

A középső réteg szokásos elnevezése: **bázis**, az egyik szélsőé **emitter**, a másiké **kollektor**. A nemzetközi gyakorlatnak megfelelően a kivezetése-



12.20. ábra. A tranzisztor elvi felépítése.

ket az angol kezdőbetűvel jelöljük, ami az első két esetben megegyezik a magyarral (B és E), csak a kollektor esetén tér el. (C = collector.)

Az elvi ábrán nem látszik, de a valóságban az emitter és a kollektor nem egyforma geometriájú és adalékoltságú. Az ezzel kapcsolatos részletekre azonban csak a működés ismeretében tudunk kitérni.

Ezt a három kivezetéssel rendelkező eszközt számtalan dologra lehet alkalmazni. A következőkben csak a leggyakoribb alkalmazásának fizikai alapjairól szólnunk.

A tranzisztor működésének megértéséhez vegyük először észre, hogy a bázis-emitter és bázis-kollektor párosok –ha külön-külön nézzük őket– egy-egy diódát alkotnak. A tranzisztor leggyakoribb alkalmazása során olyan külső feszültségre kapcsoljuk kivezetéseit, hogy a bázis-kollektor (B-C) dióda zárva legyen. Ekkor a bázis és kollektor között elég nagy U_{BC} feszültség eshet és ha semmi másból nem állna a tranzisztor, akkor a B-C diódán keresztül igen csekély áram, egy félvezető dióda záróárama folyna.

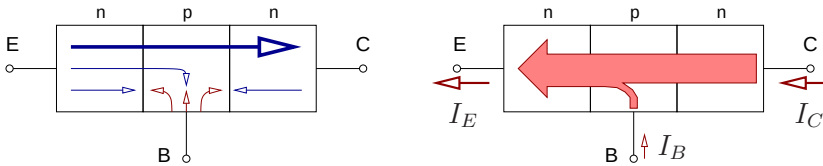
Az emitter és a bázis közé kapcsoljunk nyitó irányú feszültséget. Ekkor a bázis és emitter közti U_{EB} feszültség egy dióda nyitófeszültsége lesz, ami típustól függően 0,2–0,7 V érték lehet.

A tranzisztor működésének lényege, hogy a B-C és E-B diódák nem függetlenek egymástól, mert egyik rétegük közös. Ha ezt a közös bázisréteget elég vékonyra készítjük, akkor a nyitó E-B diódában áramló töltéshordozók nagy része a kollektorba jut. Ezzel viszont megemelkedik a töltéshordozó-koncentráció a kollektorban, ezért a B-C záró dióda záróáram értéke megnövekszik.

Az E-B dióda nyitottságának szabályozásával tehát befolyásolni tudjuk a B-C diódára eső feszültséget. Ez azért válik jelentőssé, mert az E-B dióda kis feszültségváltozásra nagy áramerősség-változással reagál a diódák karakterisztikájáról tanultak szerint, és ez jelentősen befolyásolja a

B-C feszültséget. Ily módon kis feszültségváltozások felerősíthetők, azaz a tranzisztor alapja lehet egyszerű erősítő áramköröknek.

Hogy jobban megértsük ezeket a folyamatokat, válasszunk egy npn típusú tranzisztort és használjuk a 12.21. ábra jelöléseit. (A pnp-tranzisztornál ugyanez elmondható, ha a polaritásokat és a töltéshordozók típusát megcseréljük.)



12.21. ábra. A főbb áramok egy tranzisztor belsejében

Tekintsük először az ábra bal oldalát. Ezen a töltéshordozók fő áramlása van feltüntetve, kékkel az elektronoké, pirossal a lyukaké. Az E-B dióda nyitóirányú feszültsége miatt erős áram indul meg az emitterből, mely elektronokból áll, mivel esetünkben az emitter n-típusú. A bázisréteg vékonysága miatt ennek csak kis része fog rekombinálódni a bázisból szembe jövő lyukakkal magán a bázisrétegen vagy a bázis-emitter átmeneti zónában. Az emitterből kiáramló elektronok nagy része a kollektorba jut. Ezzel szemben csak egy gyenge áram folyik, ami a B-C záródióda árama. Ez az áram a megfelelő részeken lyukakból illetve elektronokból áll, és az átmenet környékén történik meg a váltás a kétféle áram között.

Természetesen ez csak egyszerűsítése a folyamatoknak. Például az áramok konvertálódása lyukból elektronáramra nem egy ponton, hanem térben szétosztva történik: vannak pl. lyukak, melyek kissé behatolnak az emitterbe és csak ott rekombinálnak. Meggondolásainkat ez nem befolyásolja.

Ez a kép érthetővé teszi az „emitter” és „kollektor” elnevezéseket. Az emitter, azaz „kibocsátó” töltéseket bocsát ki magából, melyek nagy részt a „kollektor”, azaz „gyűjtő” begyűjt.

A 12.21. ábra jobb oldala összesíti az áramokat annak megfelelően, hogy megállapodás szerint áramiránynak a pozitív töltések áramlását tekintjük. A tranzisztor belsejében történő részletekkel nem foglalkozva csak a három kivezetésen folyó áramerősségek érdekelnek minket. A töltésmegmaradás

miatt könnyen igazolható, hogy

$$I_E = I_C + I_B. \quad (12.2)$$

Egy jó tranzisztornál az emitterből kiinduló töltések nagy része megérkezik a kollektorba, azaz $I_E \approx I_C$. A tranzisztor jóságának jellemzésére szokás bevezetni az

$$\alpha = \frac{I_C}{I_E} \quad (12.3)$$

mennyiséget, melynek neve: **nagyjelű áramerősítési tényező**. Ennek értéke 0,98 és 0,995 közt szokott változni.

Számoljuk ki a kollektoráram és a bázisáram erősségének arányát! (12.3) szerint $I_E = I_C/\alpha$, amit beírva a (12.2) egyenletbe:

$$\frac{I_C}{\alpha} = I_C + I_B,$$

ahonnan egyszerű átrendezéssel:

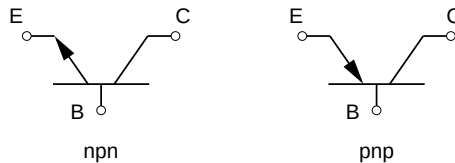
$$\frac{I_C}{I_B} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Figyelembe véve, hogy $\alpha \approx 1$, $I_C/I_B \gg 1$ lesz, azaz a kollektoráram sokkal nagyobb, mint a bázisáram. Ez mutatja azt, hogy a tranzisztor képes jelek erősítésére. A

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

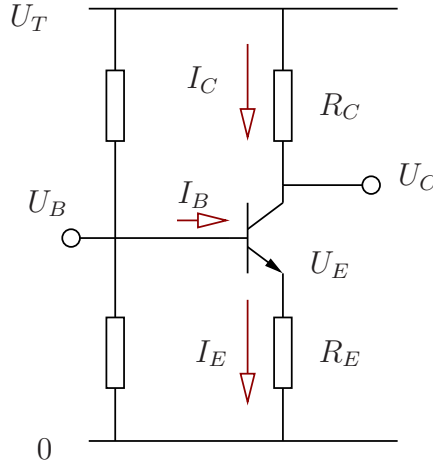
tényező neve: **kisjelű áramerősítési tényező**.

A tranzisztor egyszerű alkalmazása A tranzisztor szokásos áramköri jeleit a 12.22. ábrán láthatjuk.



12.22. ábra. A tranzisztor szokásos áramköri jele.

A tranzisztor számtalan alkalmazása közül az egyik leggyakoribbat, egy egyszerű erősítő kapcsolást mutat a 12.23. ábra.



12.23. ábra. Egyszerű tranzisztoros erősítő kapcsolás

Ezen a kapcsoláson egy fix U_T tápfeszültség működteti az áramkört és a bázistól balra lévő ellenállások értéke úgy van beállítva, hogy a B-E dióda nyitva legyen. Állapítsuk meg közelítőleg, hogyan függ az U_C kollektorfeszültség az U_B bázisfeszültségtől!

A bázis és emitter közti feszültség egy dióda nyitófeszültsége, ami egy adott félvezető alapanyag esetén közel állandó. (Pl. szilícium alapanyag esetén kb. $U_n = 0,6\text{--}0,7\text{ V}$.) Ezért $U_E \approx U_B - U_n$. Ez viszont azt jelenti, hogy az emitteráram:

$$I_E = \frac{U_E}{R_E} \approx \frac{U_B - U_n}{R_E}.$$

(12.3) szerint

$$I_C = \alpha I_E \approx \alpha \frac{U_B - U_n}{R_E}.$$

A keresett U_C kollektorfeszültség viszont annyival kisebb a tápfeszültségnél, amekkora feszültség az R_C nagyságú kollektor-ellenálláson esik, azaz:

$$U_C = U_T - I_C R_C \approx U_T - \frac{R_C}{R_E} \alpha (U_B - U_n).$$

A kollektorfeszültség tehát közel lineárisan függ a bázisfeszültségtől. Ha U_n -et állandónak vesszük, akkor U_C megváltozása:

$$\Delta U_C \approx -\alpha \frac{R_C}{R_E} \Delta U_B.$$

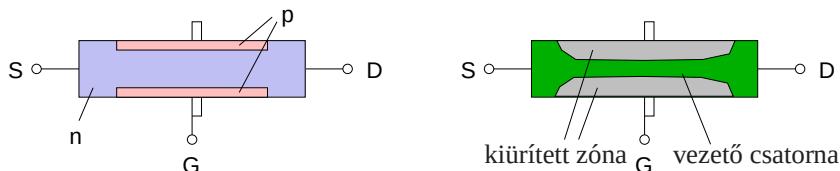
Innen látható, hogy ez az egyszerű kapcsolás felerősíti a bázis kis feszültségváltozásait, ha $\alpha R_C > R_E$. Ezért a bázisra kötött kivezetés szolgál az erősítő bemenetével, a kollektorra kötött pedig kimenetével.

Az előzőekben bemutatott számítás több elhanyagolást tartalmazott, de az erősítés elvét bemutatta. A gyakorlatban pl. U_n nem állandó volta és hőmérsékletfüggése miatt úgy szokás beállítani, hogy egy ilyen kapcsolás csak 2–3-szorosat erősítsen a jelen és több egymás utáni fokozat fokozatosan erősít, ha sokszoros erősítésre van szükség. Ez és sok egyéb technikai probléma azonban már nem tartozik jegyzetünk tárgyába.

12.3.2. A térvezérlésű tranzisztor

Az előzőekben tárgyalt bipoláris tranzisztorhoz hasonló működést többféle félvezető eszköz is nyújt. Egy fontos csoportja ezeknek a **térvezérlésű tranzisztorok** családja, melyet az angol rövidítés alapján sokszor csak **FET-nek** neveznek.

A FET alapötletét mutatja a 12.24. ábra.



12.24. ábra. A térvezérlésű tranzisztor alapötlete

A bipoláris tranzisztorhoz hasonlóan ez az ábra is inkább szemléltetés, a valóságban a tényleges geometria ettől eltérő. Erről a következő fejezetben szólnunk.

A térvezérlésű tranzisztor működése a következő elven alapszik: egy jó vezetőképességűre adalékolt félvezető darabban két pólus közt áram folyik. Ezek szokásos elnevezései: forrás (S, source), illetve nyelő (D, drain). Ezt az áramot az által szabályozzuk, hogy a félvezető rúd közepe táján oldalt ellentétes adalékoltaságú réteget vagy rétegeket alakítunk ki, melynek kivezetését kapunak (G, gate) nevezzük. A kapura adott feszültséggel

szabályozni tudjuk az ellentétes adalékoltságú részek határán kialakuló kiürített zóna vastagságát, így ezen keresztül a vezetésre képes rész méretét, így végül is a forrás és nyelő kivezetések közti ellenállást.

Mindez szoros rokonságban van a bipoláris tranzisztor működésével: ott is a középső kivezetés segítségével tudjuk a két szélsőn átfolyó áram erősségét szabályozni. Ennek megfelelően az elnevezések is hasonlóak: a forrás az emitternek, a nyelő a kollektornak, a kapu a bázisnak felel meg. A hasonlóság miatt például a 12.23. ábrán vázolt erősítő tervezérlésű tranzisztorral is képes működni.

A fő különbség a bipoláris és a tervezérlésű tranzisztor között a vezérlés jellegében van: a bipoláris esetében a bázison keresztül mindenképp folyik áram, míg a tervezérlésű tranzisztor esetében a kapun keresztül nem kell áramnak folynia, mert a vezérlés az elektromos téren, a kapu feszültségén keresztül történik. Ez a tervezérlésű tranzisztorok egy nagyon hasznos tulajdonsága: a vezérlés így kisebb teljesítménnyel lehetséges, vagy ami lényegében ugyanazt jelenti: a bemenő ellenállása egy tervezérlésű tranzisztorral működő erősítőnek sokkal nagyobb, mint ha bipoláris tranzisztorral használnánk, azaz a jelforrásra kisebb az erősítő visszahatása.

A gyakorlatban természetesen némi áram folyik a kapun keresztül is, amit lehet csökkenteni azzal, hogy a kapu nem érintkezik közvetlenül a félvezető anyaggal, hanem egy vékony fém-oxid réteg választja el őket. Az ilyen elven működő tranzisztort az angol nyelvű rövidítés alapján MOSFET-nek szokás nevezni. Ezek bemenő ellenállása akár a $10^9 \Omega$ -ot is elérheti.

12.4. A félvezető eszközök gyártásáról

A következőkben röviden áttekintjük azokat a főbb alapötleteket, melyek a félvezető eszközök gyártását lehetővé teszik. Jegyzetünk jellegéből adódóan nem a technológiai részletekre, hanem a használt fizikai hatásokra koncentrálunk.

12.4.1. Tisztítás

Fentebb elmondtuk, hogy a tiszta félvezetők gyakorlatilag szigetelőként viselkednek, mert a nagyságrendileg 1 eV szélességű tiltott sávot szobahőmérsékleten csak kevés elektron tudja átugrani. Minden 3 vagy 5 vegyértékű adalék atom viszont új töltéshordozót visz a az anyagba, így már milliómod résznyi adalék atom is jelentősen befolyásolja a félvezető anyagok vezetőképességét.

Ezért minden félvezető eszköz gyártása azzal kezdődik, hogy egy igen nagy tisztaságú alapot kell előállítani, melyben mondjuk 10^{10} Si-atomra jut egy szennyező, azaz nem Si-atom. Ilyen tisztaságot hagyományos eljárásokkal nem lehet elérni, ezért speciális technológiák alkalmazása szükséges.

A félvezető anyagok eleinte zavarba hozták a kutatókat, mert a kémiai tisztítás minőségétől függően a Si elektromos vezetőképessége a mérések során több nagyságrendet változott, sőt előfordult, hogy ugyanannak a Si-tömbnek különböző részei különböző vezetőképességet mutattak. Természetesen a fémek vezetőképessége is függ a szennyezettségük mértékétől, de ott ez a függés enyhe: ezreléknyi szennyezés ugyanilyen nagyságrendű bizonytalanságot okoz az elektromos tulajdonságokban, a félvezetők esetén az okozott változások viszont sokkal erősebbek.

Ráadásul nemcsak a félvezető alapanyag tisztasága a fontos, hanem az is, hogy igen szabályos legyen a kristályrácsuk, azaz a rácshibák száma nagyon alacsony legyen. Minden rácshiba ugyanis egy bizonyos környezetben torzíja a félvezető sávszerkezetét, ami rontja, vagy akár teljesen tönkre teszi azokat a hatásokat, melyek a félvezető eszközök működését lehetővé teszik.

A nagyon nagy tisztaságú és igen alacsony számú rácshibával rendelkező anyagokat **egykristályoknak** nevezzük.

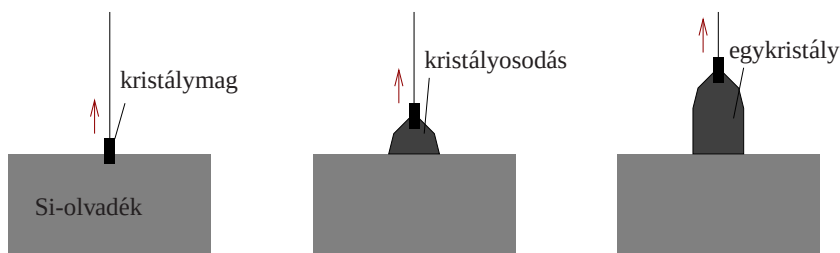
A félvezető egykristályok előállításának módszerei azon alapulnak, hogy az olvadt állapotból fokozatosan hűlő és szilárduló anyag képes a lehető legalacsonyabb energiájú állapot megtalálására, ami épp a szabályos egykristály állapotot jelenti. Tehát egy szilárd-olvadék határon a szilárd rész növekedésekor az olvadékból legnagyobb eséllyel a kristályhoz tartozó atom képes a neki megfelelő rácshelyre beülni, az egyéb atomok nagyobb valószínűséggel maradnak a folyékony részben.

A folyamat hatékonyságát jelentősen befolyásolják a hőmérséklet térbeli- és időbeli változási sebességét leíró paraméterek. Gyors hűlés esetén például a szennyező atomok nagyobb valószínűséggel épülnek be a kristályba, mert –kicsit pongyolán, de szemléletesen szólva– a szilárd felület közelében a hőmozgásnak nincs elég ideje „kísérletezni”, melyik atom beépülése jár a legerősebb kötéssel.

Olvadékból való kristályosítás. A félvezetők tisztításának első lépése egy kémiaiag megtisztított alapanyag olvadékából való kristályosítása.

Felfedezőjéről ezt az eljárást néha **Czochralski-eljárásnak** is nevezik.

Ennek lényege, hogy a viszonylag tiszta olvadékba egy kis félvezető kristály darabkát lógnak, majd azt fokozatosan emelik, így a kis kristálymagon rétegenként növekedve egy oszlop képződik, mely az előzőekben elmondottak szerint nagyobb tisztaságú, mint maga a folyadék. (12.25. ábra) A kialakuló oszlop minősége a hőmérséklet térbeli eloszlásától, a kihúzás sebességétől és a berendezést kitöltő gáz minőségétől függ. A megfelelő minőség biztosítása mindezen paraméterek pontos kontrolljával érhető el, de a részletek túlnyúlnak jegyzetünk keretein.



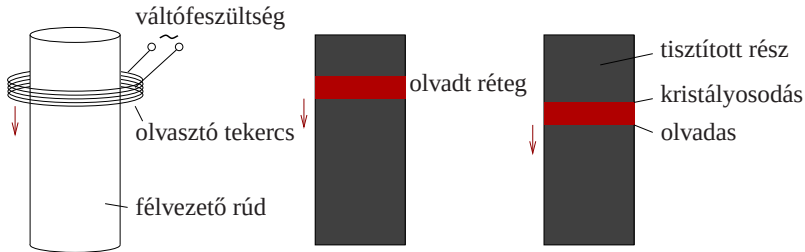
12.25. ábra. Az olvadékból való kristályosítás vázlata

Az olvadékból tehát kis sebességgel egy 20–40 cm átmérőjű oszlopot „húznak ki”, mely sokkal tisztább, mint amit a hagyományos kémiai módszerekkel el lehet érni, de sokszor a tisztaság további fokozására van szükség. Erre szolgál a következő eljárás.

Zónás olvasztás. A **zónás olvasztás** során az előzőekben kapott, viszonylag nagy tisztaságú rúd anyagát rétegenként megolvasztják és az olvadt réteget a rúd hosszirányában fokozatosan mozgatják. Az újra szilárduló rész az előzőek szerint megfelelő körülmények között nagyobb tisztaságú és kevesebb rácshibával rendelkező lesz, mint az eredeti rúd és a még bennmaradt szennyezéseket a lassan mozgó olvadt zóna „kisepri” a rúd végére.

Azt, hogy csak egy réteg olvadjon, úgy érik el, hogy a rudat elektromos tekercssel veszik körül, melybe nagyfrekvenciás váltóáramot vezetnek. Ennek gyorsan változó mágneses tere áramot indukál a tekercs által körbefogott részekben, és az áram hőhatása olvasztja meg a rúd anyagát. (Lásd 12.26. ábra.)

A zónás olvasztást ugyanazon a rúdon egymás után sokszor meg lehet ismételni, fokozatosan, a kívánt mértékig javítva ennek minőségét.



12.26. ábra. A zónás olvasztás vázlata

12.4.2. Adalékolás

Az előzőekben ismertetett módon előállított tiszta félvezető csak előfeltétele a félvezető eszközök gyártásának. Láttuk, hogy a félvezető diódák, tranzisztorok előállításához megfelelő, pontosan meghatározott mértékű adalékolás, azaz 5 vagy 3 vegyértékű atomok bejuttatása szükséges.

Egy egész tömb egyfajta adalékkal ellátható pl. a zónás olvasztás módszerével: a már megtisztított rúd egyik végére adalék anyagot rakva a zónás olvasztás megfelelő sebességű végigfuttatásával az adalék anyag lényegében egyenletesen „szétkenhető” a rúdban.

Szükség van azonban helyi adalékolásra is, azaz arra, hogy bizonyos adalék anyag csak meghatározott területekre jusson el. Ezt a félvezető anyag felülete közelében könnyű megtenni úgy, hogy a felületre egy maszkot raknak, mely ott lyukas, ahová az adalék anyagot el kell juttatni, majd rágőzölögtetik az adalék anyagot a felületre. A maszkot elvéve csak a kívánt felületrészek lesznek adalékolva. Pontosán meghatározott ideig kissé megolvasztva a félvezető anyag felületét az adalék atomok a hőmozgás következtében kissé beljebb tudnak jutni a mélyebb részekbe, így a felület közeli vékony rétegben kialakítva a megfelelő adalékoltságu tartományokat.

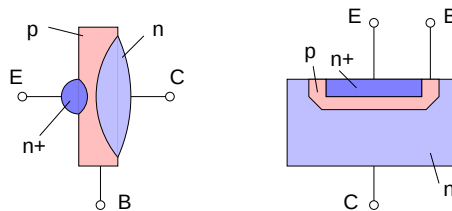
Ebből a gyártási módból látszik, hogy a valódi félvezető eszközöknek a tényleges geometriai kialakítása a félvezető eszközök elvi felépítéséről szóló korábbi ábráktól eltérő.

Például egy félvezető diódát csak a kezdetekben készítettek úgy, hogy egy n-típusú alaplapha egy p-típusú tűt szúrtak²⁸, azaz ténylegesen két különböző adalékoltságu anyagot érintettek össze. Ennél sokkal jobb megoldás mondjuk egy n-típusú alaplapha egyik oldalára p-típusú adalékot juttatni

²⁸Ebből ered a dióda áramköri jele.

és hevítéssel kissé beljebb juttatni ezeket úgy, hogy nagyobb koncentrációjú p-adalékolással az a rész n-ből p-típusúvá váljon. Az így létrejött anyagban egy tömbben valósul meg a p-n átmenet, ami kisebb méreteket, könnyebb gyárthatóságot és a mechanikai hatásokkal szembeni nagyobb stabilitást jelent, mint a tűs megoldás.

Hasonlóképp a bipoláris tranzisztorok geometriája sem olyan egyszerű, 3 rétegű szendvicsre hasonlító, mint a fenti elvi vázlatok mutatják, hanem pl. olyanok, amilyent a 12.27. ábrán láthatunk.



12.27. ábra. Bipoláris tranzisztor valós geometriájának két változata

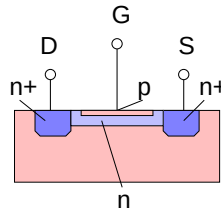
Ezen az ábrán „n+”-szal azt jelöltük, hogy az emitter erősebben adalékol, mint a kollektor, hisz az emitterből töltéshordozóknak kell kilépni, melyek nagy része a kollektorba jut. Szintén a hatékonyságot növeli az, hogy a valós tranzisztorokban a geometria olyan, hogy az emitterből kilépő töltéshordozók nagy része a kollektorba jusson, azaz a kollektornak nagy felületűnek kell lennie. Látható tehát, hogy bár a korábbi vázlatokon az emitter és a kollektor szimmetrikus, egy valódi tranzisztornál szerepük nem cserélhető meg. (Megcserélés esetén valahogyan működik a tranzisztor, de összehasonlíthatatlanul rosszabb hatásfokkal, mint normál bekötés esetén.)

A tervezérlésű tranzisztorok esetén viszont a valódi kialakítás is szimmetrikus, ahogy azt egy esetben a 12.28. ábra mutatja.

Az ábrán látható, hogy az S és D kivezetések közti n-típusú rétegen keresztül folyhat áram, de ezt szabályozni tudjuk az által, hogy a G kivezetésre feszültséget adva a p- ill. n-szenyezettségu részek közti kiürített réteg vastagságát szabályozzuk.

12.4.3. Fotolitográfia

Az utóbbi fél évszázad viharos mikroelektronikai fejlődésének egyik legfontosabb alapja az, hogy a félvezető eszközöket képesek vagyunk úgy



12.28. ábra. Térvezérlésű tranzisztor kialakításának egy lehetséges módja

gyártani, hogy néhány tucat munkafázissal milliószám készüljenek egymással pontosan összekötött áramkörti elemek, lehetővé téve ezzel a mai mikroprocesszorok és más nagy bonyolultságú elemek gyártását. Erre a mai gyakorlatban tömegtermelés szintjén a **fotolitográfia** módszere a szokásos módszer, melynek alapötletét ismertetjük ebben az alfejezetben.

A fotolitográfia alapötlete, hogy az összes áramkörti elemet egy félvezető egykristály lapka („ostya”) felszínén alakítjuk ki. A tervezők tehát megtervezik az áramkört egészen részletesen, majd a kész, teljes tervből kiválasztják azokat a részeket, melyeket mondjuk n-, vagy p- típusúra kell adalékolni, esetleg fém vezeték szükséges oda, és a különböző fajtájú részekről egy-egy mintát készítenek. Lesz tehát olyan minta, mely csak azokat a részeket tartalmazza, melyekre kis koncentrációjú n-típusú adalékot kell juttatni, egy másik az erősen n-típusú részeket tartalmazza, stb. A fotolitográfia során ezeknek a mintáknak megfelelő helyekre juttatják el a megfelelő adalék anyagot a következő, fényképezéshez hasonló módon.

A lapka felszínére egy speciális anyagból (általában valamilyen polimerből) készült, egyenletes vastagságú réteget juttatnak. A nagy méretekben megrajzolt terv különböző típushoz tartozó mintáinak egyikét erős kicsinyítésben rávetítik erre a rétegre, melynek anyaga olyan, hogy a megvilágításra használt fény hatására kémiai szerkezete megváltozik (hasonlóan, mint a fényképezésben használt filmeké) és az így megváltozott, exponált részek egy kémiai anyag segítségével eltávolíthatók. Ezzel a lapka felszínén egy maszk alakul ki: az általunk kiválasztott részeket fedi a védőréteg, a többit nem. Az aktuális mintától függően ekkor megfelelő típusú és mennyiségű adalék anyag rágőzölögtetése vagy megfelelő anyaggal enyhe maratás következik, ami csak a szabadon hagyott részeket érinti. Ha egy adott típusú művelet elkészült, a védőréteget eltávolítják, és másik maszkot felvéve egy másik adalékolást vagy maratást végeznek el. Ilyen munkafázisok sorozatával tetszőleges minta kialakítható a lapka felszínén. Rövid ideig tartó

melegítéssel a rávitt adalék atomok kissé a felszín alá vihetők.

Egy modern, nagy integráltságú áramkörü lapka esetén ezt a művelet-sort pár tucatszor meg kell ismételni, hogy kialakuljon a kívánt áramkör.

Az előzőek csak a gyártási folyamat fő gondolatait tartalmazzák. A gyakorlatban rengeteg problémát kell kiküszöbölni a szennyezés-mentesítéstől kezdve az egymás utáni maszkok megfelelő pozicionálásáig, a pontos melegítési idő és hőmérséklet kiválasztásáig. Ezek tárgyalása meghaladja tantárgyunk kereteit, az azonban látszik, hogy mik a fő hatások, melyek szerepet kapnak és ebből ezen gyártási technika fizikai korlátaira is következtetni tudunk.

A miniatürizáció egyik korlátja ebben az esetben az exponálási fázisban használt fény hullámhossza. Az optikáról szóló részben láttuk, hogy a fény nagyságrendileg a saját hullámhosszának nagyságrendjébe eső méretű területre fókuszálható. A látható fénynek viszont legalább 380 nm a hullámhossza, így látható fényt használva 200 nm körül van a legkisebb kialakítható áramkörü elem mérete. Ezért ma (2006-ban) fény helyett 200 nm-nél is kisebb hullámhosszúságú ultraibolya sugarakat használnak a csúcstechnológiás integrált áramkörü lapok gyártásában, melyeken így 100 nm-nél is kisebb méretű alkatrészeket lehet kialakítani.

2006. augusztusában a 65 nm-es gyártási technológia jelenti az ipari csúcsteljesítményt, és a nagyobb gyártók már sikeresen demonstrálták laboratóriumi körülmények közt a 45 nm-es minimális mérettel jellemezhető gyártási technológiát.

Nem tudni pontosan hol húzódnak a fotolitográfia elvi határai. Úgy tűnik, a 10 nm-es méretskála a jelenlegi technika tökéletesítésével, megfelelő anyagok választásával, kisebb hullámhosszúságú ultraibolya sugárzás használatával, a gyártási paraméterek optimalizálásával elérhető. Az 1 nm-es tartomány viszont már a kristályrácsok rácstávolságának skálája, tehát mondjuk egy 1 nm szélességű, Si-lapka felszínén húzódó sávba keresztirányban a kristályszerkezettől függően 3–10 atom fér el. A hagyományos fotolitográfiai eljárás esetén a levetített alkatrészek helye nincs összehangolva a rácsszerkezettel, így a véletlenül múlna, hogy egy 1 nm szélességű vezeték egy adott helyen keresztirányban hány atomot is tartalmaz. Ebben a tartományban tehát úgy tűnik, a fotolitográfia nem a megfelelő eszköz.

Az biztos, hogy már a jelenlegi méretskálán is jelentkezik az anyag kvantum viselkedésének hatása, pl. az alagúteffektus miatt, ami az áramkörü elemek esetén az áram enyhe „szivárgásában” mutatkozik meg. Rész-

ben az ilyen fizikai problémák, részben a gyártás költségével kapcsolatos megfontolások miatt a nagy integrált áramkör gyártók mindegyike egyéb utakat is próbálgat laboratóriumaiban, melyek esetleg felváltják majd a fotolitográfiai jellegű módszereket. Ilyen pl. a 9.9.2. fejezetben említett pásztázó alagútmikroszkóp is, melynek segítségével egyesével lehet atomokat elhelyezni egy lapka felszínén. A technikai nehézségek egyelőre nem teszik lehetővé, hogy bonyolult műveletek végzésére szolgáló áramkörökkel egyenértékű struktúrák legyenek így kialakíthatók. (Például a kicsi méretek miatt kis rezgések is megzavarhatják az eszközt úgy, hogy a tű nem talál vissza a félbehagyott munkához.)

Azt azonban meg kell jegyezni, hogy az akár pásztázó alagútmikroszkóppal, akár más módszerekkel atomi szinten létrehozott struktúrák már nem kezelhetők a hagyományos áramköri fogalmakkal. Ezekben közvetlen az elektronok kvantummechanikai állapotai lesznek azok, melyek a jeleket hordozzák, és ez egészen más elveken működő berendezéseket jelent. Az elvileg lehetséges hatalmas számítási sebességek miatt aktívan kutatják a kvantumállapotok manipulálásán alapuló „logikai áramkörök” elméleti és gyakorlati területeit. Ezek megoldása az mikroelektronika területén robbanásszerű új eredményekre vezethet.

12.5. Kérdések és feladatok

12.5.1. Elméleti kérdések

1. Hány vegyértékűek a félvezető anyagok?
2. Miért viselkednek szobahőmérsékleten szigetelőként a tiszta félvezetők?
3. Mi történik, ha egy 5 vegyértékű atom kerül egy Si-kristályba?
4. Miért és nagyságrendileg mekkora energiával van kötve egy donor elektron a donor atomhoz?
5. Milyen hőmérsékleten tartózkodik a donor elektronok nagy része a donor szinteken? Milyen ilyenkor a félvezető anyag vezetőképessége?
6. Hogyan hoz létre szabad töltéshordozót egy 3 vegyértékű adalék atom egy félvezető rácsban?
7. Valóban léteznek pozitív töltéshordozók egy p-típusú félvezetőben?
8. Miért célszerű a „lyuk” fogalmát bevezetni a félvezető-fizikában?
9. Rajzolja fel egy n-típusú félvezető sáv szerkezeti diagramját! Nevezze

meg a főbb energiaszinteket és -sávokat!

10. Rajzolja fel egy p-típusú félvezető sávszerkezeti diagramját! Nevezze meg a főbb energiaszinteket és -sávokat!
11. Milyen körülmények közt keletkezik egy vezetõben diffúziós áram?
12. Mi történik, ha egy vezetési elektron és egy lyuk találkozik egy félvezető belsejében?
13. Mit értünk félvezetõk esetén párkeltés alatt?
14. Egy eredetileg azonos feszültségen levõ p- és n-típusú félvezetõ darabot összeérintünk. Milyen jellegû és milyen irányú áram indul meg az összeérintés pillanatában?
15. Egy p-n átmenet melyik oldala lesz pozitív töltésû egyensúlyi állapotban? Miért?
16. Mit mondhatunk a diffúziós- és a drift áramokról egy p-n átmenet egyensúlyi állapotában?
17. Miért alakul ki a kiürített zóna egy p-n átmenet esetében?
18. Mit mondhatunk a Fermi-szintekrõl egy p-n átmenet egyensúlyi állapotában?
19. Mi a feltétele annak, hogy egy fém és egy n-típusú félvezetõ összeérintésekor az átmenet galvanikus legyen?
20. A tanultak szerint egy p-n átmenet két oldala között feszültségkülönbség alakul ki. Miért nem használhatjuk ezt áramforrásként?
21. Miért van kapacitása egy p-n átmenetnek?
22. Rajzolja fel egy p-n átmeneten alapuló félvezetõ dióda sávszerkezeti ábráját külsõ nyitófeszültség és zárófeszültség esetében!
23. Írja fel az ideális dióda áramerõsség-feszültség karakterisztikáját megadó összefüggést! A formulában szereplõ betûknek adja meg röviden a magyarázatát!
24. Milyen nagyságrendû egy tipikus félvezetõ dióda záróárama?
25. Miért mondjuk, hogy egy félvezetõ dióda csak egyik irányban engedi át az áramot?
26. Nagyságrendileg mekkora nyitófeszültség esik egy tipikus félvezetõ diódán átlagos körülmények között?
27. Mi okozza azt a jelenséget, hogy igen nagy nyitófeszültség esetén a

valódi diódákon kisebb áramerősség folyik, mint az az ideális karakterisztikából következne?

28. Hogyan tér el egy valódi dióda karakterisztikája az ideálistól záróirányban? Hogyan nevezzük azokat a diódákat, melyek ezt a jelenséget kihasználják?
29. Magyarázza el a lavina-hatás lényegét záróirányú félvezető diódák esetében!
30. Miért nem bocsát ki minden félvezető dióda fényt? (A burkolat árnyékolásán kívül.)
31. Rajzolja fel egy félvezető dióda áramköri jelét és jelölje be a nyitó áramirányt!
32. Mi a tipikus alkalmazási területe a Zener-diódáknak?
33. Mi a bipoláris tranzisztor kivezetéseinek szokásos elnevezése?
34. Hogyan befolyásolja a bázis-emitter nyitódioda azt, mi történik a kollektorban?
35. Miért fontos, hogy egy tranzisztorban a bázisréteg igen vékony legyen?
36. Mit mondhatunk egy tipikus felhasználás esetén a bázisáram, emitteráram és kollektoráram viszonyáról?
37. Magyarázza el tömören, hogyan képes elektromos jeleket erősíteni egy bipoláris tranzisztor!
38. Rajzolja fel egy npn típusú tranzisztor áramköri jelét, jelölve, melyik kimenetnek mi a neve!
39. Rajzolja fel egy egyszerű tranzisztoros erősítő kapcsolási rajzát!
40. Mi a tervezérlésű tranzisztor működésének alapgondolata?
41. Hasonlítsa össze egy bipoláris és egy tervezérlésű tranzisztor normál körülmények közti, középső kivezetésén mérhető áramának erősségét!
42. Miért fontos a félvezető eszközök gyártásánál, hogy milliomodrésznél is kisebb szennyezettségű alapanyagból induljanak ki?
43. Ismertesse röviden az olvadékból való kristályosítás módszerét!
44. Ismertesse röviden a zónás olvasztás módszerét!
45. Hogyan juttatják egy tiszta félvezető anyag felszíne alá az adalék atomokat?

46. Miért nem két ellentétes adalékoltságú félvezető összeérintésével készítik a valódi félvezető diódákat?
47. Egy valódi bipoláris tranzistor esetében milyen különbségek vannak az emitter- és a kollektor kialakítása között?
48. Jól működne-e egy áramkör, ha egy benne szereplő bipoláris tranzistor emitterét és kollektorát felcserélnénk?
49. Jól működne-e egy áramkör, ha egy benne szereplő tervezérlésű tranzistor source és drain kivezetését felcserélnénk?
50. Ismertesse röviden a nagy integráltságú áramkörök fotolitográfiai előállításának főbb lépéseit!
51. Miért használnak ultraibolya sugarakat a modern mikroprocesszorok gyártásának exponálási fázisában?
52. Mit jelent az, hogy egy modern mikroprocesszor mondjuk 65 nm csíkszélességgel készül?
53. Miért nem lehet fotolitográfiai módszerrel 1 nm csíkszélességgel áramköröket gyártani?

12.5.2. Gyakorló feladatok

A témakörben csak néhány igen egyszerű számolási példát vettünk, ezért azokon kívül külön kidolgozott feladatokat itt nem közlünk.

1. Egy ideálisnak tekinthető félvezető dióda emissziós együtthatója 1, és rajta 0,5 V nyitófeszültség esetén 40 mA erősségű áram folyik át, ha hőmérséklete 300 K. Mennyire változik meg a rajta átfolyó áram erőssége, ha a rá eső feszültség állandó, de hőmérséklete 5 K-nel megemelkedik?
2. Egy ideálisnak tekinthető félvezető dióda emissziós együtthatója 2, és a záróáramánál sokkal nagyobb nagyságú nyitóáram folyik át rajta. Hány voltal változik meg nyitófeszültsége, ha a rajta átfolyó áram erőssége az eredeti érték kétszeresére változik?

Ajánlott irodalom:

- Szalay Béla: Fizika II., Műszaki Kiadó, 1982.

Felhasznált irodalom:

- Simonyi Károly: Elektronfizika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

13. Mézerek és lézerek

A kvantumelektronika precíz elméleti keretei között megmutatható, hogy az indukált emisszió során keletkező fotonok túlnyomó többsége minden fizikai tulajdonságában megegyezik a folyamatot kiváltó fotonnal. Azt mondjuk az ilyen fotonokra, hogy **koherensek**. A koherens fotonok következő fizikai jellemzői azonosak:

- frekvencia
- polarizáció
- kezdőfázis
- terjedési irány

A spontán emisszióval keletkező fotonok esetében a fizikai tulajdonságok a frekvencia kivételével eltérőek, tehát *nem koherensek* ezek a fotonok.

Ahhoz, hogy akár spontán módon, akár indukált emisszióval foton keletkezhesen az szükséges, hogy megtörténjen az elektron nagyobb energiájú energiaszintről (E_m) történő átmenete az alacsonyabb energiájú energiaszintre (E_n). Ehhez viszont az kell, hogy az elektron a nagyobb energiájú állapotban legyen. Erősítés csak akkor jöhet létre, ha többször történik emisszió, mint abszorpció.

Adott hőmérsékleten az alacsonyabb energiájú állapotokban több elektron van, mint a magasabb energiájúakban. Az erősítés érdekében ezt a természetes állapotot meg kell fordítani. Elérendő tehát, hogy

$$N_m > N_n,$$

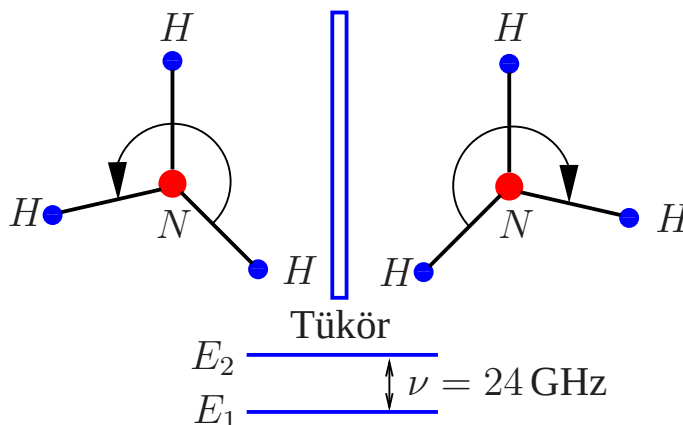
ahol N_m -a betöltési szám az E_m energiaszinten, N_n -a betöltési szám az E_n energiaszinten.

Ezt az állapotot nevezzük **inverz betöltöttségű** állapotnak, vagy **populációinverzió**nak. Mivel külső beavatkozás nélkül az anyagban nem jöhet létre a populációinverzió, ezért olyan külső energiát kell közölnünk az anyaggal, amely abszorpciója által az alacsonyabb energetikai állapotban lévő elektronok a nagyobb energiájú energetikai állapotba tudnak jutni. Ezt az energiaközlési folyamatot **pumpálásnak**, vagy **szivattyúzásnak** nevezzük. A későbbiekben, majd látni fogjuk, hogy az egyes erősítők esetében hogyan is valósul meg a populációinverzió.

Az első kvantumerősítők a mikrohullámú tartományban működtek, ezért ezeket **mézereknek** nevezzük. A név egy angol mozaikszó: Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation. (MASER)

13.1. Mézerek és alkalmazásai

Itt a legelterjedtebb mézer, az **ammóniamézer** működési elvével ismerkedünk meg. Az ammóniamolekulában található három hidrogénatom asszimmetrikusan helyezkedik el a térben a nitrogénatom körül. Tehát az egyes $N - H$ kötések által bezárt szögek nem egyenlők. Ennek az a következménye, hogy a nitrogénatom körül minden ammóniamolekula esetében definiálható az asszimetrikus $N - H$ kötések alapján egy körüljárási irány.

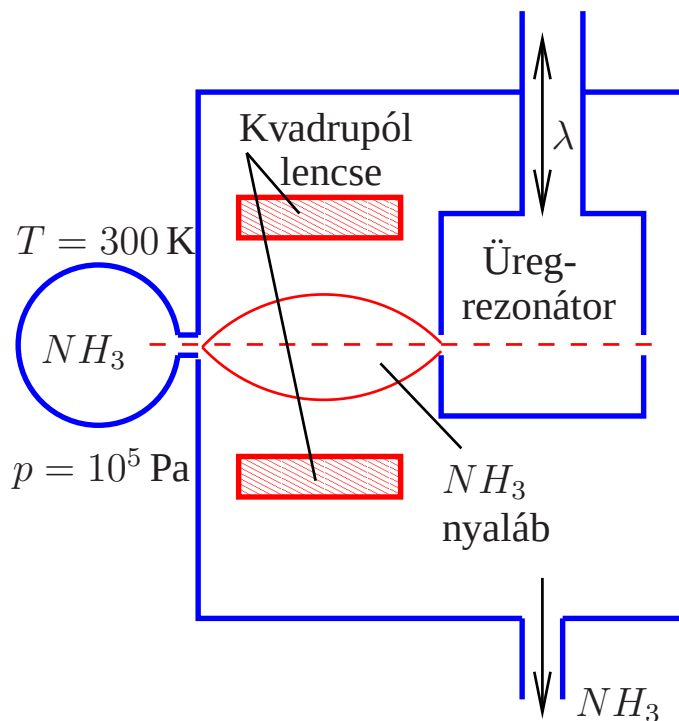


13.1. ábra. Az ammóniamolekula asszimmetriája

Az 13.1 ábrából látható, hogy két körüljárási irány határozható meg ilyen módon, és ezek egymás tükörképei. A kvantummechanika alapján ezen asszimmetria miatt az ammóniamolekula elektronjainak energiaszintjei két szintre hasadnak. Az egyes energiaszintek közötti energiakülönbségnek 24 GHz frekvenciájú átmenet felel meg. Ha az elektron az ammóniamolekulában a nagyobb energiájú állapotban tartózkodik, akkor a molekula elektromos dipólusnyomatéka más, mint akkor, ha az elektron a kisebb energiájú állapotban van.

Az ammóniamézer technikai megvalósításának sémáját a 13.2 ábrán látjuk. Az ammóniatartályban az ammónia elpárolog. Az ammóniagőz, amelyben megtalálhatóak a különböző dipólusmomentumú molekulák, inhomogén elektromos térbe kerül, amit a kvadrupóllencse hoz létre. Ebben az inhomogén elektromos mezőben a különböző típusú molekulák szétválnak. Azokat, amelyekben az elektron a nagyobb energiájú állapotban tartózkodik a mező összegyűjti egy üregrezonátor belsejébe, míg a többi molekulát szétszórja. Így az üregrezonátor belsejében létrejön a populáció-

inverzió. Ha ezek után az üregrezonátor bemenetére vezetjük az erősítendő jelet, akkor a koherens erősítés megtörténik, a kimeneten megjelenik egy kellőképpen felerősített 24 GHz frekvenciájú jel.



13.2. ábra. Az ammóniamézer

Az ammóniamézer egyik figyelemreméltó tulajdonsága, hogy a felerősített jel frekvenciájának ingadozása csak 2,4 Hz. Ez 10^{-10} relatív hibát jelent. Ha az ammóniamézert, mint **atomórát** használjuk, akkor annak elvi relatív pontossága 10^{-10} lesz.

13.1. példa: Határozza meg hány év alatt késik, vagy siet elvben egy ammóniamézer 1 másodpercet?

Megoldás: Tehát az a kérdés, hány év eltelté után lesz az atomóra által mért idő abszolút hibája 1 s. A relatív hiba definíciója alapján a válasz 10^{10} s eltelté után, ami 317 évet jelent. ²⁹

²⁹ Az ilyen pontosságú órák segítségével sikerült először közvetlenül megmérni, hogy a Föld egyre lassabban forog a tengelye körül.

A lézerek további felhasználási területe az asztrofizika. A kozmoszból érkező igen gyenge mikrohullámok felerősítésére használják itt a lézereket. Nyilván ebben az esetben változtatható frekvenciájú lézerekre van szükség.

Az energiaszintek felhasadását külső mágneses tér segítségével idézik elő megfelelő molekulák esetében. A külső mágneses tér indukciójának változtatásával a szintek felhasadásának mértéke is változik, így a lézer hangolható lesz.

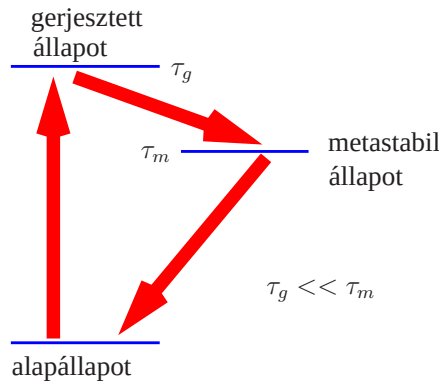
13.2. Lézerek és alkalmazásai

Az eddig leírtak alapján felmerül a kérdés szerkeszthető-e olyan kvantum-erősítő, amelyik a látható fényt képes koherens módon felerősíteni? Tudjuk, hogy az ilyen berendezések megszerkesztéséhez a következő feltételek kell, hogy feltétlenül teljesüljenek:

- külső energia betáplálásával biztosítani kell az inverz populációt, illetve
- a látható fény frekvenciatartományában is biztosítani kell a stimulált átmenetek túlsúlyát, mivel természetes körülmények között ebben a tartományban a spontán emisszió a valószínűbb.

A szivattyúzás a lézerek esetében az atomok **metastabil állapotainak** köszönhetően oldható meg. Egy atom elektronjának gerjesztett állapotát metastabilnak nevezzük, ha ebből az állapotból az alapállapotba csak viszonylag hosszú átlagos idő eltelte után kerülhet vissza. Az ilyen átmeneteket valamely kiválasztási szabály tiltja. Ezen állapotok átlagos élettartama többszörösen felülmúlja az egyszerű gerjesztett állapotok átlagos élettartamát, ami 10^{-8} s nagyságrendű. Nem ritkák a néhány ms átlagos élettartamú metastabil állapotok sem.

A 13.3 ábra alapján megérthetjük, milyen módon segítenek a metastabil állapotok az inverz populáció kialakításában. Tekintsük egy olyan mikrorendszer energiaszintjeit, amelyben legalább egy nívó metastabil. Gerjesszük az elektront alapállapotából egy olyan energiaszintre, amelyről kb. 10^{-8} s átlagos idő eltelte után átugrik a metastabil állapotba. A metastabil állapot átlagos élettartamának idejére az anyagban megvalósul az inverz populáció.



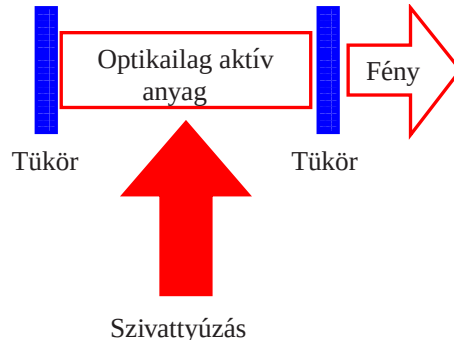
13.3. ábra. A metastabil állapot

A metastabil állapotok ms nagyságrendű átlagos élettartama az elektromágneses folyamatokra jellemző $10^{-8} - 10^{-12}$ s időtartamhoz viszonyítva, mintegy százezerszer hosszabb. Tehát az elektromágneses folyamatok szempontjából ez nagyon hosszú idő. Elegendő ahhoz, hogy egy foton stimulált emissziót válthasson ki.

A spektrális intenzitás anyagon belüli növekedését **optikai rezonátorok** segítségével érhetjük el.

A lézerek tehát olyan berendezések, amelyekben megfelelő optikailag aktív anyag van elhelyezve két tükör között. Az egyik tükör visszaverő képessége 100% a másiké kisebb mint 100%, ezért ezen az optikailag aktív anyagban keletkező sugárzás egy része átjut. Ezt a kijutó sugárzást nevezzük **lézerfénynek**.

A lézerfény keletkezésének folyamatát a következő módon képzelhetjük el. Az optikailag aktív anyagban a metastabil állapotnak köszönhetően inverz populációt hozunk létre. Egy véletlenszerű, megfelelő energiájú foton hatására a metastabil szinten tartózkodó elektron alapállapotba ugrik, miközben a stimulált folyamatot kiváltó fotonnal minden tulajdonságban megegyező fotont sugároz ki. Ilyen módon az anyag belsejében nő a koherens fotonok száma. Ezek a fotonok az optikai rezonátor tükrerein visszaverődnek és tovább növelik a spektrális intenzitást. A lézer optikai tengelyével nem párhuzamos mozgásirányú fotonok kiszóródnak az optikai rezonátorból, így az egyik tükrön áteresztett koherens lézerfény az



13.4. ábra. A lézerek elvi felépítése

optikai tengellyel párhuzamosan halad. A fentebb elmondottakból az optikailag aktív anyagnak a fényt csak nagyon kicsit elnyelőnek és átlátszónak kell lennie. Az optikai rezonátor tükreinek nagyon pontos megmunkálásúknak kell lenniük.

Az optikai rezonátor tükrei között oda-vissza verődő elektromágneses állóhullám alakul ki, tehát teljesülnie kell, hogy:

$$m \cdot \frac{\lambda_a}{2} = L,$$

ahol L -az optikailag aktív közeg hossza, λ_a -a lézerfénynek az optikai közegen belüli hullámhossza, m -pozitív egész szám.

A fenti egyenlet alapján számoljuk ki az optikai rezonátor tükrei között kialakuló állóhullám frekvenciáját is, mivel az megegyezik a vákuumban is mérhető értékkel.

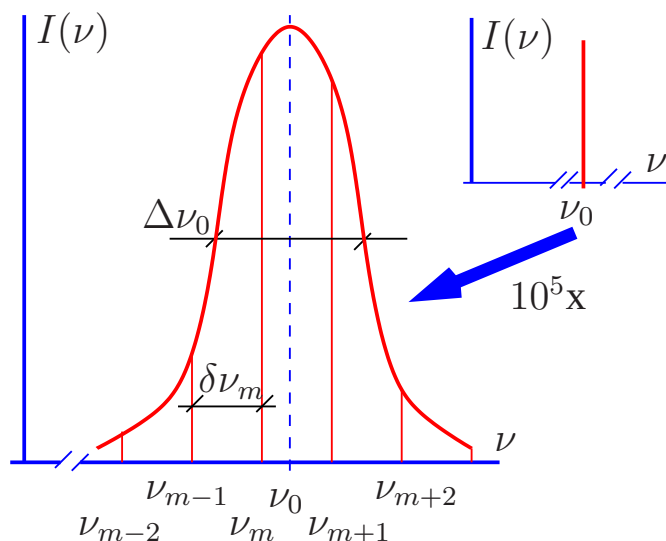
$$\nu_m = m \cdot \frac{c}{2nL},$$

ahol c -a fény vákuumbeli fázissebessége, n -a lézer optikailag aktív anyagának abszolút törésmutatója.

Az előbbieken meghatározott frekvenciák az optikai rezonátor sajátfrekvenciáit adják meg. Csak az ilyen frekvenciájú elektromágneses hullámok erősítésére alkalmas az optikai rezonátor. Nem biztos azonban, hogy a fenti frekvenciafeltételnek az aktív anyagban végbemenő indukált átmenetek frekvenciája is eleget tesz. Szerencsére ezeknek az átmeneteknek az átlagos élettartama olyan, hogy a kisugárzott elektromágneses sugárzás frekvenciasáv szélességének köszönhetően vannak benne olyan fotonok, amelyekre a frekvenciafeltétel bizonyos m értékekkel teljesül.

A $\Delta\nu_o$ sávszélességet a természetes vonalszélesség valamint a Doppler – féle kiszélesedés együttesen határozzák meg. Ezen folyamatok részletes tárgyalása nem célja jelen jegyzetünknek.

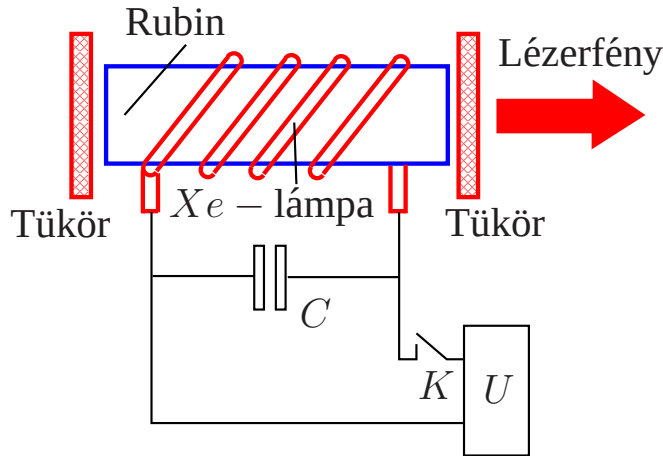
Tehát az optikai rezonátor több frekvenciát is erősíteni képes. Nyilván a legintenzívebben a ν_o frekvenciához legközelebbi frekvenciájú sugárzás jelentkezik. (lásd. a 13.5. ábrát.)



13.5. ábra. A lézer működési frekvenciája és az optikai rezonátor saját-frekvenciái közötti kapcsolat (ν_o -a lézerátmenetnek megfelelő frekvencia, $\Delta\nu_o$ -a ν_o frekvenciájú spektrumvonal sávszélessége, ν_{m-i} -az optikai rezonátor sajátfrekvenciái)

13.2.1. Lézerek típusai

A rubinlézer Az első működőképes lézert 1960-ban szerkesztette T. H. Maimann. Optikailag aktív közegként rubinkristály szolgált. A rubin olyan Al_2O_3 -kristály, amelyben egyes Al^{3+} -ionok rácsbeli helyét Cr^{3+} -ionok foglalják el. A lézer felépítése a 13.6. ábrán látható.

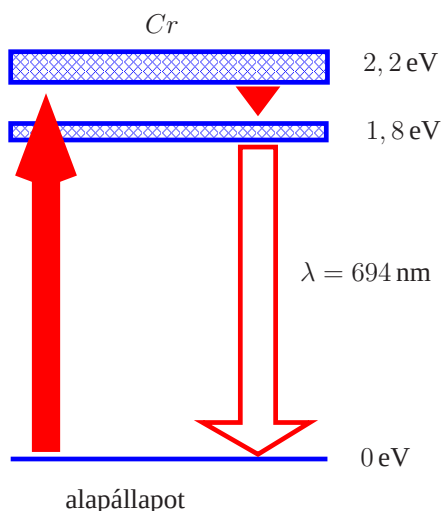


13.6. ábra. A rubinlézer (C , U , K -a villanólámpa működéséhez szükséges áramköri elemek)

Az inverz populáció létrehozásához szükséges külső pumpálási energiát egy Xe-villanólámpa biztosítja. (optikai pumpa) Ezen lámpa felvillanásai gerjesztik a Cr^{3+} -ionok 2,2 eV energiájú állapotait. Közvetlenül ezen gerjesztett állapot alatt található az 1,8 eV energiájú metastabil állapot. A metastabil állapotból az alapállapotba történő átmeneten „dolgozik” a stimulált emisszió, tehát ezen átmenetben keletkező 694 nm hullámhosszúságú fotonok a lézerfény kvantumai. (lásd a 13.7. ábrát.)

A rubinkristályban elhelyezkedő ionok nívói a sávmélet szerint nem keskeny energianívók, mint az különálló atomok esetében várható, hanem valamilyen szélességű sávok. Ezért a keletkező lézerfény sem lesz annyira monokromatikus, mint más egyedülálló atomokat felhasználó lézerek esetében.

A Xe-lámpa impulzusszerű működéséből következik, hogy a rubinlézer által kisugárzott lézerfény rövid ideig tartó fényimpulzusokból áll. Sikerült már építeni olyan rubinlézert is, amelyik 500 MW teljesítményű 200 ns ideig tartó felvillanásokat állított elő. Az ilyen lézer fényét egyetlen pontba fókuszálva ebben a pontban akár néhányszor tízezer Kelvin hőmérsékletű plazma is kialakulhat. Ez a hőmérséklet nagyobb, mint a Nap felszíni hőmérséklete.



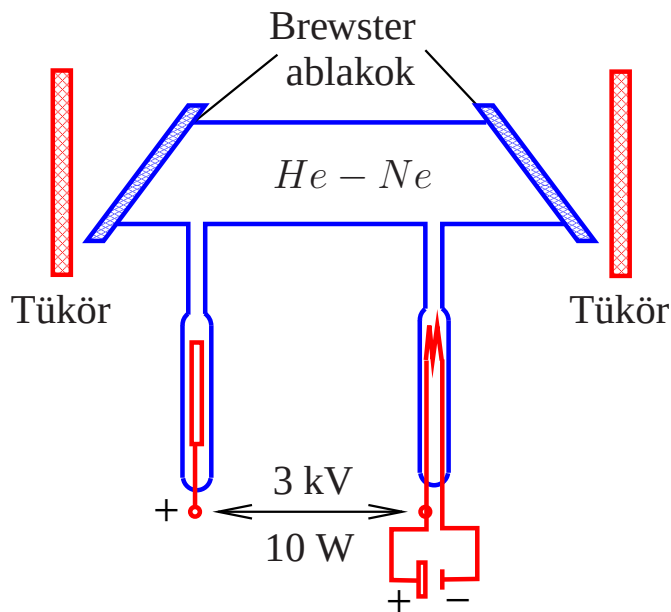
13.7. ábra. A Cr^{3+} -ion nívószerkezete

A hélium-neon lézer Ha a rubinlézer esetében említett sávok problémáját ki akarjuk küszöbölni, olyan lézert kell szerkeszteni, amelyikben az aktív anyag különálló atomok halmaza. Tehát gázlézereket kell építeni. Ezek közül talán a legelterjedtebb a He-Ne lézer. Az ilyen lézerek elvi felépítésének sémája látható a 13.8. ábrán.

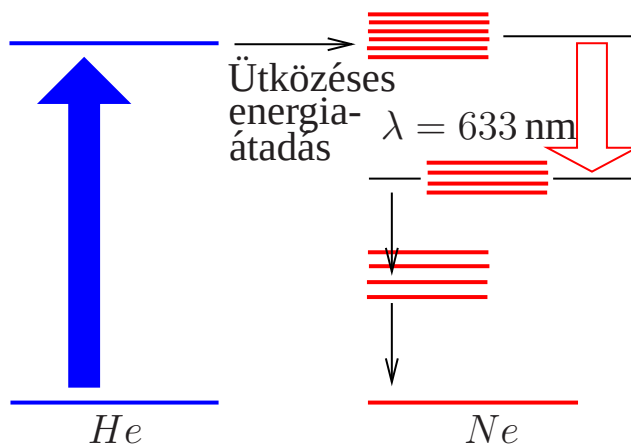
A lézerfény fotonjai a Ne atomok két gerjesztett állapota közötti átmeneteken keletkeznek. Az inverz populáció létrehozásában játszik szerepet a hélium. A He és Ne keverékében gázkisülést idézünk elő. Ennek hatására a He atomjaiban az alapállapotú elektronok első gerjesztett állapotukba kerülnek. A gerjesztett állapotban levő He atomok ütköznek a Ne atomjaival miközben energiájukat átadják a Ne atomoknak gerjesztve ezáltal metastabil állapotait. (Lásd a 13.9. ábrát.)

Az optikai rezonátor tükrői között többszörösen visszaverődő elektromágneses hullám polarizációs síkját a kisülési cső végét lezáró Brewster-ablakok állítják be.

Igaz, hogy a He-Ne lézer kisebb teljesítmény leadására képes, mint a rubinlézer, de az általa kisugárzott lézerfény sokkal monokromatikusabb



13.8. ábra. A He-Ne lézer felépítése

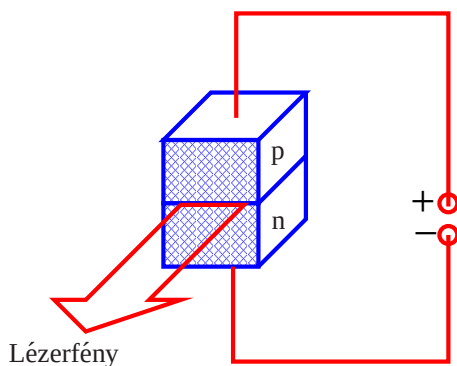


13.9. ábra. A He és Ne nívószerkezete

és kevésbé széttartó³⁰, valamint koherenciahossza is nagyobb.

A félvezetőlézerek Már a lézertechnika fejlődésének elején felvetődött annak a gondolata, hogy a félvezetőkben a vezetési sávból közvetlenül a vegyértéksávba jutó elektront indukált foton kisugárzására kényszerítve, lézerfény állítható elő. A megfelelő feltételek pl. egy p-n átmenetben teljesülnek, ugyanis a p-n átmenetekben az elektron-lyuk rekombináció során a felesleges energia foton formájában is kisugárzódhat.

Fontos, hogy a foton kisugárzásán kívül általában gyakoribbak más energialeadási módok, mint például a félvezetők kristályrácsrezgéseinek gerjesztése. Ez a folyamat a leggyakoribb a Ge vagy Si alapanyagú félvezetőkben, ezért az ilyen alapanyagú p-n átmenetek nem működhetnek lézerként. Félvezetőlézerek előállításának leggyakoribb alapanyaga a Ga-As. Az ilyen alapanyagú félvezetőkben az elektron-lyuk rekombináció rácsrezgések gerjesztése nélkül történik.

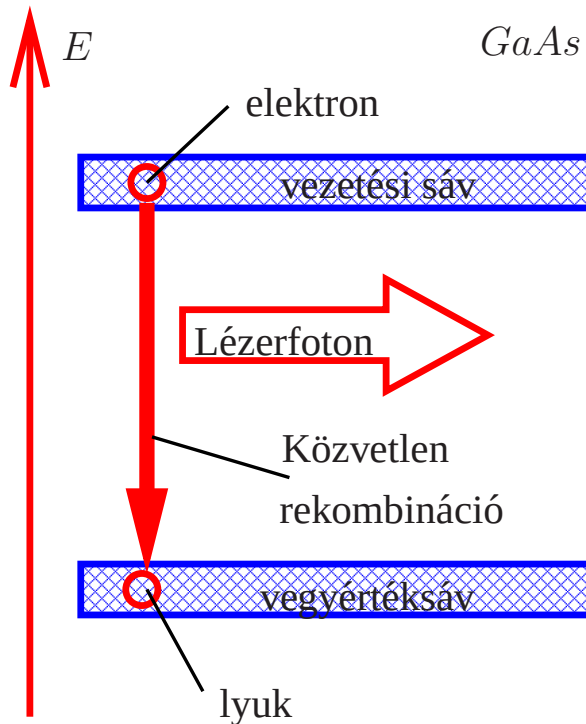


13.10. ábra. A félvezetőlézer

Az inverz populáció a vezetési sávban található elektronok számán keresztül befolyásolható, ez pedig a p-n átmeneten átfolyó áramerősséggel nő. A rekombináció során keletkező foton számára a p-n átmenet síkjára merőleges, a félvezető dióda oldallapjait képező csiszolt felületek megfelelő optikai rezonátort képeznek. (Lásd. a 13.10. ábrát.)

A félvezetőlézerekben a lézerfény a p-n átmenet síkjában kerül kibocsátásra. Mivel az elektron és lyuk energiaszintjei a sávokon belül bármilyen értéket felvehet, ezért az ilyen lézerek fénye kevésbé monokromatikus, és eléggé nagy széttartású. (Lásd. a 13.11. ábrát.)

³⁰ A He-Ne lézerekre jellemző nyalábszéttartás $\Theta \approx 10^{-3}$ rad.



13.11. ábra. A GaAs-átmenet nívói

A félvezetőlézerek óriási előnye viszont, hogy kisméretűek. A száloptikával kombinálva egyszer megfelelő optikai információtovábbítást tehetnek majd lehetővé sokkal nagyobb távolságokra, mint ma.

13.2.2. A lézerfény tulajdonságai

Röviden foglaljuk össze, melyek azok a tulajdonságok, amelyek megkülönböztetik a lézerek fényét a hagyományos fényforrások fényétől.

Legfontosabb eltérés, hogy míg a spontán emisszióval generált fényhullámok koherenciahossza legjobb esetben is csak néhány méter, addig a lézerfény koherenciahossza meghaladhatja a száz métert is.

A lézerek másik szembevető tulajdonsága a fénnyaláb nagyfokú párhuzamossága. Igaz ugyan, hogy a lézerből való kilépéskor az ablakon történő elhajlás rontja a széttartást, de még így is elérhető a $\Theta \approx 10^{-5}$ rad érték. Egy ilyen lézer fénye a Hold felszínén mindössze 3 km átmérőjű felületet

világít meg.

További eltérés a hagyományos fényforrások fényéhez képest, hogy a lézerfény frekvenciájának maximális ingadozása ≈ 1 Hz-re is lecsökkenthető (folytonos üzemű lézerek esetében), míg a hagyományos fényforrások esetében ez az érték 10^8 Hz.

Végül meg kell említeni azt a tulajdonságot, ami a nem szakemberek körében talán a leginkább ismert a lézerfényről, a nagy spektrális intenzitást. Rubinlézer esetében értéke a Nap felszínén ugyanolyan hullámhosszon mért érték ötmilliószerosa is lehet.

13.2.3. Általános alkalmazási területek

A lézerek felhasználásának talán legismertebb területe ma már az, amikor mutatóeszközként használjuk ezeket. Mivel a lézerfény kis nyalábszétartással rendelkezik, így viszonylag nagy távolság befutása után is kis méretű foltot figyelhetünk meg egy felfogóernyőn. Tehát itt a lézerfény nagyfokú párhuzamosságát használjuk ki.

Ugyanezt a tulajdonságot használják fel geodéták vagy térképészek akkor amikor teodolitaikban félvezető lézerek fényének segítségével jelölnek ki irányokat, de hadászati iránykijelöléskor is ezt használják fel.

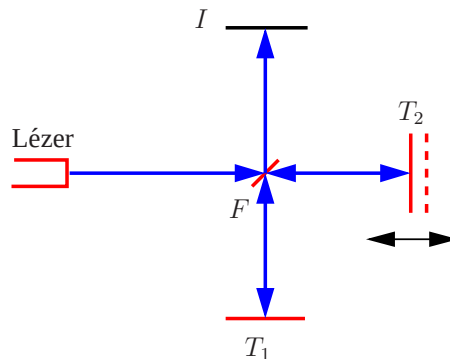
Egyre gyakrabban használják a lézereket a gyógyászatban is. Ki ne hallott volna lézeres szemműtétekről, amelyekkel olyan betegségek is gyógyíthatóvá váltak mára, amelyek gyógyítására nem is lehetett gondolni lézerek nélkül. Említsünk itt ezek közül egy példát. A szemben található csarnokvízben előfordul, hogy gázbuborék keletkezik és ennek nyomása a beteg gyakori fejfájását okozza, ami a további gázkiválás következtében elviselhetetlenségig fokozódik. Lézeres műtéttel ezen ma már segíteni lehet. Ha a buborékhoz a szemgolyó azon felületéről indulva, amely nem vesz részt a látásban, mikrocsonkát égetünk, akkor a gázzárvány távozni tud a szemgolyóból, így a fejfájás megszűnik. Ebben az esetben a lézerfény nagy intenzitású sűrűségét használják ki.

A lézerek nagy intenzitása anyagmegmunkálásra is alkalmas. Egyik ilyen alkalmazás alkatrészek, vagy egész berendezések felületi lézeres kezelése festés előtt. Biztosan sokan hallottak már vágóeszközök lézerrel történő élesítéséről is.

13.2.4. Interferometria

Mivel a lézerek fénye koherens, azaz a lézerfény fázisa jól meghatározott, kiválóan alkalmasak arra, hogy interferométerekben használjuk fel ezeket.

Tekintsük a 13.12 ábrán látható elrendezést.



13.12. ábra. Michelson-interferométer kis távolságok mérésére

A lézer fényét egy F nyalábosztó osztja kétfelé. Az egyik nyaláb a T_1 tükörről verődik vissza, míg a másik a T_2 tükörről. A visszavert nyalábok az I síkban interferálnak egymással. Ha úgy rendezzük el a berendezést, hogy a két nyaláb az interferenciáig ugyanakkora utat fusson be, akkor erősítést kapunk az interferencia síkjában.

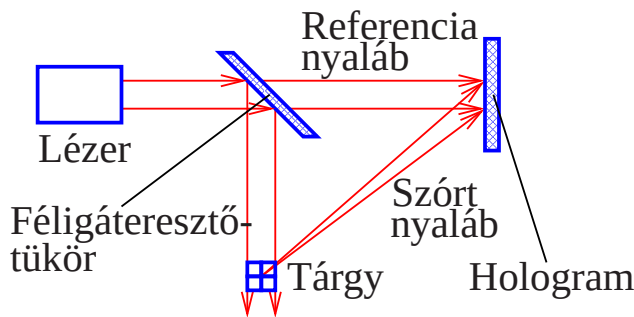
Engedjük meg, a T_2 tükör kismértékű elmozdulását. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a T_2 tükör a használt lézerfény hullámhosszának negyedével mozdult el és ezáltal a fényút az egyik nyaláb számára fél hullámhossznyival meghosszabbodott. Ekkor az interferenciamezőben kioltást tapasztalunk.

Mi történik akkor, ha a T_2 tükör folytonos mozgást végez? Ha a mozgás ideje alatt rögzítjük az interferenciamezőben tapasztalható intenzitásviszonyokat, akkor egymás után erősítési maximumokat és kioltási minimumokat figyelhetünk meg. Az előbbi gondolatmenet alapján, amikor erősítési maximum után kioltási minimum következik, akkor a T_2 tükör éppen negyed hullámhossznyit mozdult el. Ha egy folytonos mozgás során N -szer tapasztaljuk a maximumok minimumra való változását, akkor a T_2 tükör elmozdulása $N \frac{\lambda}{4}$.

A Michelson-interferométert tehát használhatjuk a T_2 tükör elmozdulásainak meghatározására. Mivel a legkisebb távolság, amit így mérni tudunk a használt lézer hullámhosszának negyede - ami körülbelül 100-200 nm között van - egészen kicsi elmozdulások mérésére is alkalmas a berendezés.

13.2.5. Holográfia

A múlt század ötvenes éveiben Gábor Dénes egy új fényképezési eljárást javasolt, amely lehetővé tette tárgyak háromdimenziós „fényképeinek” előállítását. Míg a hagyományos fénykép esetében a fényképezőlemezen csak a fényképezett tárgyról érkező fény intenzitását rögzítjük, addig a háromdimenziós fényképen, vagy **hologramon** a tárgyról érkező fényhullámokról minden információ tárolódik, azaz az intenzitáson kívül a fázisinformáció is. Tehát a hologram alapján, megfelelő eljárással, rekonstruálhatók a tárgyról érkező fényhullámok, vagyis a tárgy háromdimenziós képe.

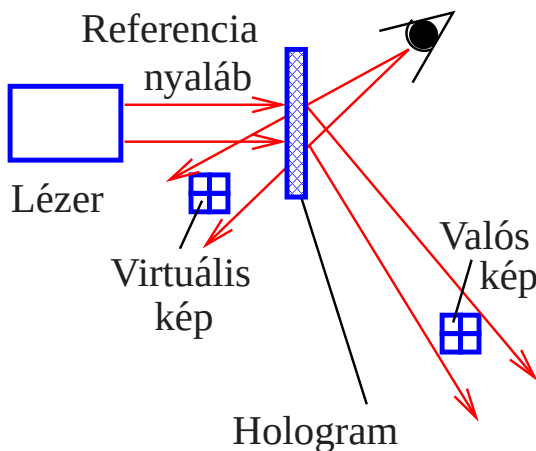


13.13. ábra. Hologram előállításának módja

Gábor Dénes hologramot előállító eljárását a 13.13 ábra szemlélteti. Lényege abban áll, hogy egy lézer fényét kétfelé osztja. Az egyik nyaláb (ún. **referencia nyaláb**) közvetlenül egy nagyon finom felbontású fényképezőlemezt jut, míg a másik nyaláb (ún. **szórt nyaláb**) útjába helyezzük el a fényképezendő tárgyat. A szórt nyaláb egy része a tárgyon való szóródás után eléri a fényképezőlemezt és interferál a referencia nyalábbal. Tehát a fényképezőlemezen egy interferenciakép intenzitásviszonyai tárolódnak. Mivel az interferenciakép nemcsak az intenzitástól függ, hanem a referencianyaláb és szórt nyaláb közötti fázisinformációtól is, a hologramon így a tárgyról érkező szórt nyalábról a teljes optikai információ rendelkezésre áll.

Ha egy ilyen hologramot jobban szemügyre veszünk, akkor azt látjuk, hogy rajta körülbelül a használt lézerfény hullámhosszával megegyező méretű világosabb és sötétebb foltok láthatóak. Felfoghatjuk ezt úgy is mint

egy olyan, nem periodikus, optikai rácsot, melynek struktúrája pontosan a tárgyról érkező szórt fény intenzitás- és fázisviszonyaitól függ.



13.14. ábra. Szórt nyaláb visszaállítása hologram alapján

Gábor Dénes kimutatta, hogy egy hologram alapján visszaállítható a tárgyon szóródott fénnyaláb akkor, ha a hologramot megvilágítjuk egy olyan fénnyalábbal, amely megegyezik a hologram előállításakor használt referencianyalábbal. Ennek a rekonstrukciónak a módját szemlélteti a 13.14 ábra. Kimutatható, hogy a referencianyaláb a hologramon pontosan úgy hajlik el, hogy az elhajlás következtében kialakult fényhullámok megegyeznek a szórt nyalábbal. Ez azt jelenti, hogy az elhajolt nyaláb egy megfigyelő szemébe jutva, pontosan ugyanúgy viselkedik, mintha a megfigyelő magát a tárgyon szóródott nyalábot nézné, azaz a megfigyelő a tárgy háromdimenziós képét látja. A pontos matematikai analízis azt mutatja, hogy két kép keletkezik a rekonstrukció során. Egy virtuális és egy valódi kép. A valódi kép ernyőn felfogható, vagy akár le is fényképezhető.

Mivel a hologram minden egyes pontjának intenzitása a teljes szórt nyalábbal kapcsolatos, így elvben a hologram egyetlen pontjának alapján visszaállítható lenne a szórt nyaláb. A valóságban a fény hullámtermészetéből adódóan, a diffrakció miatt, ez nincs teljesen így. Az viszont igaz, hogy a hologram egy viszonylag kis darabkája alapján már végrehajtható a rekonstrukció. Ez egy újabb előny a hagyományos fényképpel szemben.

Amikor Gábor Dénes eljárását kidolgozta még nem léteztek lézerek, így nem is készíthetett hologramot. Viszont leírta, hogy milyen tulajdon-

ságokkal kell rendelkeznie annak a fényforrásnak, amelyik segítségével hologram készíthető. Amikor az első lézereket elkészítették világossá vált, hogy megfelelnek a Gábor Dénes által leírtaknak, így velük már lehet hologramot készíteni.

A holográfia napjainkban egyre nagyobb teret hódít magának. Itt egy műszaki alkalmazásra térünk csak ki. Készítsük el egy alkatrész hologramját még az előtt, hogy az alkatrészt mechanikai feszültségnek tennénk ki. Az alkatrészről ezután készítsünk akkor is hologramot, amikor terhelés alatt van. A terhelés következtében az alkatrész deformálódik, feszültségek ébrednek benne. Mivel a hologram egy fényképezőlemezen tárolt intenzitásinformáció, bevihető egy számítógép memóriájába ez az információ. A terhelés előtti és utáni hologramok különbsége az alkatrész deformációjáról hordoz információt. Ezzel az eljárással hullámhossz felbontású háromdimenziós kép készíthető az alkatrész deformációjáról.

13.3. Kérdések

13.3.1. Elméleti kérdések

1. Mit jelent a populációinverzió?
2. Miért kell a populációinverciónak fennállni, ha indukált emisszió alapján működő sugárzót szeretnénk létrehozni?
3. Mit értünk indukált emisszió alatt?
4. Mit mondhatunk az indukált emisszióval keletkező fotonokról?
5. A fénykibocsátás mely módjának valószínűsége független a spektrális intenzitássűrűségtől?
6. Mely két feltétel együttes teljesülése szükséges ahhoz, hogy a indukált emisszió alapján működő sugárzót tudjunk üzemeltetni?
7. Normál körülmények között miért nem valósul meg a populációinverzió egy anyagban huzamosabb ideig?
8. Az ammóniamézer mely része szolgál annak biztosítására, hogy az indukált átmenetek legyenek túlsúlyban?
9. Miért használhatóak pontos órák készítésére a mézerek?
10. Miért van szükség optikai rezonátorra a lézerekben?
11. A rubinlézerbéli energiaszintek közül három játszik lényeges szerepet a lézerfény kibocsátásában. Melyik ezek közül a legrövidebb élettarta-

mű?

12. Lehetséges-e, hogy egy lézer infravörös tartományban működjön?
13. Létrehozható-e olyan lézer, melynek nyalábja tökéletesen párhuzamos? Miért?
14. Miért nem tudunk hologramot készíteni élő állatról?
15. Nagyságrendileg mekkora elmozdulásokat lehet egy interferométerrel kimutatni?

Ajánlott irodalom:

- Budó Ágoston, Mátrai Tibor: Kísérleti fizika III., Tankönyvkiadó
- R. Breuer: SH-atlasz Fizika, Springer-Verlag, 1993

Felhasznált irodalom:

- Budó Ágoston, Mátrai Tibor: Kísérleti fizika III., Tankönyvkiadó
- R. Breuer: SH-atlasz Fizika, Springer-Verlag, 1993

14. Függelék

Jegyzetünk függelékében olyan témákról adunk rövid összefoglalót, melyek a fizika bármely területén felbukkanhatnak. A rész jellegéből adódóan itt részletes magyarázatokat és levezetéseket nem adunk.

14.1. A mértékegységekről

14.1.1. A mértékegység-rendszer

A mérési és számolási adatok összevethetősége érdekében egységes mértékegységrendszert használunk a fizikában. A jelenleg használatos rendszernek, az **SI-nek** 7 alap mértékegysége van, melyet a 15. táblázat foglal össze.

név	jel	mit mér
másodperc (szekundum)	s	idő
méter	m	távolság
kilogramm	kg	tömeg
amper	A	áramerősség
kelvin	K	hőmérséklet
mól	mol	anyagmennyiség
kandela (candela)	cd	fényerősség

15. táblázat. Az SI-rendszer alapegységei

Ezekből az alapegységekből származtatható az összes többi egység is. A származtatás alapja az, hogy egy fizikai mennyiséget a mérőszám és a mértékegység szorzataként foghatunk fel, azaz pl. „ $h = 5\text{ m}$ ” azt jelenti, hogy a h távolság az „5”-ös szám (mérőszám) és a „m”, azaz méter mértékegység szorzata. Ebből a szorzat jellegéből következik, hogy pl. a sebességet nem külön mértékegységgel mérjük, hanem a távolság és idő mértékegységének hányadosával, azaz „m/s”-mal, hisz egyenes vonalú egyenletes mozgásnál a sebesség az elmozdulás és az idő hányadosa.

Hasonlóképp származtatható az összes fizikai mennyiség mértékegysége ebből a 7 alapegységből, de az áttekinthetőség kedvéért a gyakran használt fizikai mennyiségek egységeire külön rövidítést vezettek be. Ilyen például a newton, ami az erő mértékegysége, és az $F = ma$ összefüggés alapján könnyű belátni, hogy $1\text{ N} = 1\text{ kg m/s}^2$.

14.1.2. A mértékegységek írásmódja

A hivatalos jelölés szerint a mértékegységek jelét egyenes betűvel írjuk, megkülönböztetendő a fizikai mennyiségek jelölésére szolgáló, dőlt betűs szimbólumoktól. Ez alapján dönthető el pl., hogy egy formulában az m -betű a méter vagy egy test tömegének jele. „5 m” tehát „5 métert” jelent, „5 m ” pedig egy test m tömegének 5-szörösét.

Természetesen még így is előfordulhat, hogy ugyanazt a betűt több dologra is felhasználjuk, hisz a latin ABC betűinek száma igen korlátozott, de legalább a mértékegységek és a mennyiségek jeleit segít megkülönböztetni, ha ezt észben tartjuk a jegyzet olvasásakor.

Az emberről elnevezett alap- vagy származtatott egységek betűjelét nagy kezdőbetűvel írjuk, pl. „N” (newton), „Pa” (pascal), „A” (amper), de ha nevüket teljesen kiírjuk, kis kezdőbetűt kell használnunk, mint az előbbi három példában, hisz ekkor már nem a személy nevéről van szó, hanem egy róla elnevezett egységről.

14.1.3. A megengedett előtagok (prefixumok)

Az áttekinthetőség kedvéért megengedett, hogy 10 egész kitevős hatványainak megfelelő előtagot, más szóval prefixumot, illesszünk a mértékegységek elé, az adott probléma esetén kényelmes mérőszámok elérése érdekében. A leggyakoribb előtagok, mint pl. a „milli-”, „kilo-” nyilván ismerősek a korábbi tanulmányokból.

szorzó	név	jel	szorzó	név	jel
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	mikro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hekto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deka	da	10^{-24}	yocto	y

16. táblázat. Az SI-rendszerben engedett előtagok.

A táblázat előtagjai közül viszonylag ritkán használjuk az első és utolsó 3 sort. A nem 3-mal osztható kitevőjűeket, azaz a hekto-, deka-, deci- és

centi- előtagokat pedig inkább csak a hétköznapi élet bizonyos területén szokás alkalmazni. Itt néhány, történeti okokból fennmaradt hagyományt is figyelembe kell venni: például a tömeg alapegysége a „kilogramm”, ami eleve előtaggal rendelkezik, ezért ezt további előtagokkal nem szokás ellátni, hanem a régi egységet, a grammot szokták alapul venni a „milligramm”, „mikrogramm”, stb. egységek megalkotásakor. Ezek azonban értelemszerűek, így gondosan használva az előtagokat, nem kerülhetünk ellentmondásba.

Kevésbé a fizikai számítások, mint inkább a hétköznapi életben is fontos szerepet játszó informatikai eszközök kapacitásának jelzésekor szokás használni az „informatikai előtagokat”. A legtöbb informatikai eszköz ugyanis belül 2-es számrendszert használ, és ebben kifejezve a fenti előtagok nem kerek szorzók. Azonban $2^{10} = 1024 \approx 1000$, ezért az informatikában „kibyte” alatt nem 1000 byte-ot, hanem 1024-et értenek. Hogy ez ne okozzon gondot, néhány éve a hivatalos jelölés (ami még sajnos nem terjedt el egészen) az, hogy a 2 alapú prefixumokat meg kell különböztetni a velük csaknem azonos 10 alapúaktól egy „i” betűvel, azaz pl. 1 kiB = 2^{10} B, de 1 kB = 10^3 B. Az eltérés itt nem tűnik túl lényegesnek (mintegy 2%-os), de a nagyobb kitevők esetén egyre lényegesebbé válik, pl. a 10 alapú és a 2 alapú „gigabyte” közötti eltérés már meghaladja a 7%-ot. A teljes egyértelműség kedvéért a 2 alapú előtagoknak még a neve is különbözik a szabvány szerint a 10 alapútól, így ha teljesen precízek akarunk lenni, az 1024 byte-ot nem nevezhetjük kilobyte-nak, hanem „kibibyte”-nak, hasonlóképp 2^{20} = Mi neve „mebi”, 2^{30} = Gi neve „gibi”, stb.

Ezt azonban a gyakorlat már nem szokta alkalmazni, ezért az informatikai mennyiségek előtagjai körében még mindig nagy rendetlenség uralkodik. Pedig annak függvényében, hogy mondjuk egy „100 gigabyte-os” merevlemez esetén melyik „giga” (illetve „gibi”) előtagról van szó, 7%-nyi különbség van a tényleges kapacitás között.

14.1.4. A mértékegységek használata számítások során

A számítások során külön figyelmet kell fordítani a mértékegységekre is. Egyrészt a helyes fizikai összefüggésekben összeadni, kivonni vagy összehasonlítani csak azonos mértékegységű mennyiségeket szabad. Így ha pl. egy számítás során olyan összefüggést kapunk, hogy „ $m_1 = 3l/m_2$ ”, ahol l távolságot, m_1 és m_2 tömeget jelölnek, akkor tudhatjuk, hogy valamit

elrontottunk, hisz a bal oldal mértékegysége kg, a jobb oldalé m/kg, így ez biztosan rossz, érdemes tehát visszalépni a számítások menetében hibát keresve.

Fontos az is, hogy a bemenő adatokat váltsuk át SI-egységekre, ha csak nem kifejezetten tudjuk, hogy egy felhasznált összefüggés nem SI-egységekre vonatkozik. (Ilyen eset jegyzetünkben nem fordul elő.) Ha megbizonyosodtunk róla, hogy minden bemenő adatot átváltottunk SI-egységekre, alkalmazva a megfelelő előtagok szorzóit is, akkor a számítások során elhagyhatjuk a mértékegységeket és csak a mérőszámokkal számolhatunk, mert ha érvényes összefüggéseket használunk, akkor a végeredmény is SI-ben lesz. A végeredmény megadásánál azonban mindenképp adjuk meg a mértékegységet is, és ha kell, csak ezután váltsuk át szemléletesebb egységbe vagy alkalmazzunk olyan előtagot, ami a mérőszámot kényelmesebb nagyságrendbe hozza.

14.2. Főbb fizikai állandók

Az alábbiakban megadjuk a fontosabb fizikai állandók szokásos jelét és értéküket.

Felhasználásuknál vigyázzunk arra, hogy általában felesleges az itt megadott pontosságot használni, hisz a mi számításainkban általában 2–3 tizedesjegy pontosságúak a bemenő adatok, itt pedig igyekeztünk olyan pontossággal megadni az értékeket, amennyire pontosan a tudomány jelen állása szerint megadhatók.

Az pedig még fontosabb, hogy szokásos jelüket ne keverjük egymással és más fizikai mennyiségek jelével. Egy összefüggés használatánál ne keressük pusztán a betűjelek egyezését, hanem értsük meg, miről is van szó az adott problémában. Például a hangsebességet (ami nem univerzális állandó) is szokás c -vel jelölni, ugyanúgy, mint a fénysebességet, vagy távolságokat, magasságokat szokás h -val jelölni, ugyanúgy, mint a Planck-állandót. Gépies betű-behelyettesítéssel ezeket összekeverve teljesen értelmetlen eredményeket kaphatunk.

Alapvető állandók:

- fénysebesség: $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$
- Planck-állandó: $h = 6,62607 \cdot 10^{-34}\text{ Js}$
- Newton-féle gravitációs állandó: $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$
- elemi töltés: $e = 1,602\,176 \cdot 10^{-19}\text{ As}$

- a vákuum dielektromos állandója: $\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2\text{s}^4/(\text{kg m}^3)$
- a vákuum mágneses permeabilitása: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg m}/(\text{A}^2\text{s}^2)$
- Avogadro-szám: $N_A = 6,02214 \cdot 10^{23}$
- Boltzmann-állandó: $k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
- univerzális gázállandó: $R = 8,3145 \text{ J}/(\text{mol K})$
- Stefan-Boltzmann állandó: $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ kg}/(\text{K}^4\text{s}^3)$

A mindennapi élethez köthető állandók: (ezek egy része megállapodás szerinti, a természet csak közelítőleg jelöli ki értéküket)

- gravitációs gyorsulás a Föld felszínén: $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$
- átlagos légköri nyomás: $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$
- a celsius és kelvin-skála közti különbség: $0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$.

Elemi részek adatai:

- elektron: $q_e = -e = -1,602\,176 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- proton: $q_p = +e = 1,602\,176 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $m_p = 1,672622 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
- neutron: $q_n = 0$, $m_n = 1,674927 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

14.3. Differenciálszámítás alapfokon

Ez a kis fejezet azoknak szól, akik nem tanultak még deriválni. Ez a helyzet akkor, amikor a hallgatók a mintatanterv szerint a fizika tárggyal egy félévben tanulják azt az alapozó matematika kurzust, melyben a deriválás is tárgyalásra kerül. Bizonyos fizikai fogalmak megértéséhez azonban szükség van a deriválás fogalmára, és annak egyszerű esetekben történő elvégzésére. Ezért itt bizonyítás nélkül közöljük az alapösszefüggéseket és néhány egyszerű példán keresztül mutatjuk meg használatukat. Ha a kedves Olvasó ezt kiegészítésként olvassa a mechanika alapjairól szóló részhez, a matematikai kurzus elvégzése nélkül is képes lesz a mi tárgyunkban előforduló példákat megoldani. A vizsga idejére pedig matematikából is tanulni fogja a téma mélyebb, bizonyításokat is tartalmazó tárgyalását.

Célszerű az alapösszefüggések áttanulmányozása után részletesen megérteni az egyszerű példákat, majd azokat önállóan újra kiszámolni. Ezek emelkedő nehézségi sorrendben helyezkednek el, ezért ne haladjunk tovább bennük, ha egy példát nem tudunk magunk is kiszámolni. Hely

hiányában nem tudunk magyarázatot fűzni a számításokhoz, de a gyakorlatok, a jegyzet törzsrészében elmondottak alapján az egyre nehezedő feladatok minden lépése kis utángondolással érthető lesz.

Ez természetesen nem jelent egy teljes képzést differenciálszámításból, de arra jó, hogy a bevezető fizika kurzusokban szükséges mértékig megtanulja a deriválás műveletének technikáját.

14.3.1. Alapösszefüggések

Az alábbiakban a szokásos jelölések szerint x azt a változót jelenti, ami szerint a deriválás történik, a és n állandók, f és g függvények, e a természetes alapú logaritmus alapszáma. ($e \approx 2,718$)

Először ezzel a rögzített jelöléssel érdemes az egyszerű eseteket végigszámolni, de a jegyzetben –ragaszkodva a fizikában szokásos jelölésekhez– más változó lehet az, ami szerint a differenciálhányadost képeznünk kell, mint pl. az idő (t). Ez azonban nem jelenthet gondot, ha a következőket megérti.

Alapderiváltak:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(\ln x)' = 1/x$
5. $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$

Deriválási szabályok:

1. $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5.
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$
6. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

14.3.2. Egyszerű példák

A továbbiakban A, B, β tetszőleges állandók.

Hatványfüggvények deriváltja:

$$(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$

$$(x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Konstanssal szorzás deriváltja:

$$(5 \sin x)' = 5(\sin x)' = 5 \cos x$$

$$(B \cdot \ln x)' = B(\ln x)' = B \frac{1}{x} = \frac{B}{x}$$

Összeg deriváltja:

$$(x^2 + x^4)' = (x^2)' + (x^4)' = 2x + 4x^3$$

Polinom deriváltja:

$$(3x^3 - 2x + 7)' = (3x^3)' - (2x)' + (7)' = 3 \cdot 3x^2 - 2 + 0 = 9x^2 - 2$$

$$(Ax^4 - 7Bx^3 + 1)' = A \cdot 4x^3 - 7B \cdot 3x^2 + 0 = 4Ax^3 - 21Bx^2$$

Szorzatfüggvény deriváltja:

$$(x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$$

Hányados deriváltja:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)'x - x' \sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \\
 &= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

Összetett függvény deriváltja:

$$(\cos(5x))' = -\sin(5x) \cdot (5x)' = -5 \sin(5x)$$

$$(e^{-\beta x})' = e^{-\beta x} \cdot (-\beta x)' = -\beta e^{-\beta x}$$

$$(\ln(x^2 - 3))' = \frac{1}{x^2 - 3} \cdot (x^2 - 3)' = \frac{2x}{x^2 - 3}$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{1-x^2})' &= ((1-x^2)^{1/2})' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-1/2} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \\
 &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

Tárgymutató

- α -sugarak 595
 α -sugárzás 644
 β -sugárzás 645
 γ -bomlás 647
- abszolút fekete test 516, 585
abszolút törésmutató 302
abszorpciós tényező (hang) 257
adiabatikus állapotváltozás 236
akceptor atom 726
akceptorszintek 727
aktivitás 649
akusztikus impedancia 244
akut sugárártalom 653
alagút-effektus 613
alagúteffektus 645
ALARA-elv 666
állapotfüggvény 607
állóhullám 200
állóhullámok hullámegyenlete 203
általános tömegvonzás törvénye 51
ammóniamézer 765
amorf anyag 710
amplitúdó 135
antineutrínó 646
antirészecske 646
anyagok fáradása 124
arányossági határ 123
átáramlott teljesítmény 192
átlagos abszorpciós együttható 261
átlagos gyorsulás 23
átlagos szabad úthossz (hang) 272
átlagsebesség 17
atommag 596
atomóra 766
- bázis 746
- belső sugárterhelés 658
bipoláris tranzisztor 746
Boltzmann-állandó 517
bomlási törvény 648
Brewster-szög 306
- CD-lemez 342
centrális erő 42
centripetális gyorsulás 28
Compton-hullámhossz 594
Compton effektus 591
Coulomb-törvény 51, 364
Czochralski-eljárás 754
- csavarás 116
cseppmodell 641
csillapítási tényező 145
csillapítatlan körfrekvencia 145
csillapított rezgés 145
csoportsebesség 208
csúszási súrlódási erő 55
- de Broglie-féle hullám 595
decibel-skála 228
deformáció 108
delokalizált kötés 699
determinisztikus sugárhatások 653
differenciahányados 18
differenciálhányados 18
diffrakció 204
diffúziós áram 729
dinamika 31
dipólnyomaték 370
diszkrét energianívó 599
diszkrét energiaszint 610
diszperzió 209
disszociációs energia 694

- donor atom 724
- donor elektron 724
- donorszintek 727

- effetív dózis 656
- egyenérték dózis 655
- egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás 26
- egyenes vonalú egyenletes mozgás 26
- egyenletes körmozgás 26
- egyenlő hangosságú görbék 231
- egyidejűség 556
- egykristály 753
- egy nukleonra jutó kötési energia 640
- Einstein, Albert 59
- Einstein-féle posztulátumok 551
- elektromos dipólus 369
- elektronburok 597
- elektronmikroszkóp 626
- elemi cella 709
- elmozdulás 16
- elnyelt dózis 655
- eltérítési érzékenység 396
- emissziós együttható 738
- emitter 746
- energiaáram 192
- energiakvantum 587
- energiaminimum-elve 605
- energiasáv 715
- energiasűrűség 243
- Eötvös Lóránd 171
- erő 32
- erőcsavar 87
- erőfüggvény 32
- erőkar 41
- erőpár 83, 86
- erőrendszer 87
- erősítés 197
- erős kölcsönhatás 638
- éter 548
- Eyring-Norris utózenngési formula 274

- Faraday indukciós törvénye 412
- fékezési sugárzás 625
- felbontóképesség 331, 348
- felezési idő 649
- felületi sűrűség 279
- félvezető detektorok 654
- félvezetők 718
- fémek 718
- fény 298
- fény diszperziója 303
- fénysebesség 302
- fénysugár 301
- ferde hajítás 29
- Fermat-elv 316
- Fermi-szint 716
- fermion 621
- FET 751
- Fick-törvény (egydimenziós) 489
- filmdetektorok 655
- fizikai inga 99
- fizikai mennyiségek kvantálása 599
- fizikai optika 298
- fluxus 366
- fókuszpont 321
- fókuszszík 344
- fókusz távolság 321, 323
- főkvantumszám 621
- földrengés 253
- folyási határ 124
- fon-érték 230
- forogatónyomaték 40, 85, 94
- forgóvektoros ábrázolás 159
- fotolitográfia 757
- foton 590
- Franck-Hertz kísérlet 604

- frekvencia 137
- Galilei-távcső 347
- Galilei-transzformáció 544
- galvanikus kapcsolat 735
- Gauss-tétel 368
- gázionizációs detektorok 654
- genetikus sugárhatás 653
- geometriai optika 301, 316
- gerjesztés 622
- gerjesztett állapot 605
- gerjesztett rezgés 151
- gömbhullám 193
- gömbtükör 327
- gyenge kölcsönhatás 646
- hajítás 29
- hajlítási hullám 252
- hajlítási rezgés 171
- hang 222
- hangelnyelési tényező, levegő 268
- hangintenzitás 227
- hangnyomásszint 228
- hangsebesség 222
- harmonikus rezgés 133
- hatás-ellenhatás 33
- hégmodell 642
- helyvektor 15
- hipertermia 652
- hőáram 486
- hőáram-sűrűség 486
- hőáram-sűrűség vektor 487
- hőáramlás 484
- hőátadási tényező 496
- hőellenállás 494
- hőérzet 501
- hologram 778
- hőmérsékleti sugárzás 585
- Hooke-törvény 108, 110
- hősugárzás 484, 516
- hővezetés 483
- hővezetési tényező 489
- hullám 181
- hullámcsomag 208
- hullámegyenlet 185, 238
- hullámfüggvény 606
- hullámhossz 185
- hullámmozgás 181
- hullámoptika 301
- hullámszám 186
- hullámterjedés 183
- hullámvektor 195
- időállandó (teremakusztika) 274
- idődilatáció 556
- időhálózat 553
- időszerű intervallum 564
- impulzusmomentum 38, 92
- indirekt sugárhatás 651
- indoklás elve a sugárvédelemben 665
- indukált áram 411
- indukált emisszió 622
- indukciófluxus 412
- inerciarendszer 32, 543
- infrahang 223
- ingamozgás 169
- instabil egyensúly 132
- integrál 20
- intenzitás 192
- interferencia 195
- intervallumnégyzet 562
- inverz betöltöttség 764
- ionizáló sugárzások 651
- iránykvantálás 620
- izotóp 639
- izotróp 108
- kapacitás 374

- karakterisztikus röntgensugárzás 625
- kényszererő 54
- kényszerrezgés 151
- Kepler-távcső 345
- képméret 323
- kezdőfázis 135
- kicserélődési energia 694
- kilépési munka 589
- kinematika 14
- kioltás 197
- Kirchhoff-törvény 521
- kisjelű áramerősítési tényező 749
- kiürített zóna 733
- klasszikus fizika 585
- koherenciahossz 304
- koherens 764
- koherens foton 623
- koincidencia-frekvencia 285
- kollektor 746
- kompatibilis mennyiségek 618
- kompresszibilitás 112, 248
- kompresszió 112
- konzervatív erő 50
- koordináta-rendszer 15
- koordináta-transzformációk 544
- koordinátahálózat 553
- körfrekvencia 135
- körmozgás 26
- kötéshossz 694
- kötési energia 639
- kozmikus sugárzás 659
- kristály 709
- kritikus tömeg 673
- krónikus sugárártalom 653
- külső sugárterhelés 658
- küszöbintenzitás 227
- kvantált mennyiség 603
- kvantumhipotézis 587
- kvantummechanika 606
- kvantumszám 599
- láncreakció 674
- lassítóközeg 673
- lassú neutron 671
- látszólagos kép 317
- Lawson-kritérium 681
- lebegés 163
- lehajlás 119
- lendület 36
- lézeres fúzió 682
- lézerefény 768
- lineáris abszorpciós tényező 263
- lineáris energiaátadási tényező (LET) 652
- Lissajous-görbék 165
- lokális idő 564
- lökéshullám 247
- longitudinális hullám 182, 251
- Lorentz-kontrakció 558
- Lorentz-törvény 382
- Lorentz-transzformáció 549
- lyuk 725
- Mach-kúp 215
- magerők 638
- magfúzió 669
- maghasadás 669
- mágikus számok 642
- mag kötési energiája 640
- mágneses kvantumszám 621
- magnetooptikai lemez 342
- magpotenciál 642
- makrovilág 585
- másodlagos kötések 706
- Maxwell-egyenletek 548
- mechanikai energiamegmaradás 50
- mechanikai feszültség 110
- mechanikai törvények 548

- mellékkvantumszám 619, 621
merev test 77
metastabil állapot 767
mézerek 764
Michelson-féle interferométer 549
Michelson-Morley-kísérlet 549
mikrovilág 585
moderátor 673
MOSFET 752
mozgási energia 46, 391
mozgási hossz 558
mozgási időtartam 555
Mpemba-effektus 511
munka 43
munkatétel 46

n-típusú adalékolás 726
nagyítás 324, 346
nagyító 333
nagyjelű áramerősítési tényező 749
négydimenziós tér-idő 561
négyesvektor 562
neutrális réteg 120
neutron 638
nevezetes sugármenetek 322
Newton-féle lehűlési törvény 504
Newton, Isaac 31
Newton-törvények 31
Newton I. törvénye 32
Newton II. törvénye 32
Newton III. törvénye 33
Newton IV. törvénye 33
normálási feltétel 607
nukleon 638
nukleonszám 639
nuklid 639

nyírás 114
nyírási feszültség 115
nyírási modulus 115

nyitófeszültség 741
nyugalmi energia 573
nyugalmi hossz 558
nyugalmi időtartam 555
nyugalmi tömeg 567

objektív 343
ókulár 345
optikai rács 312
optikai rezonátor 768
optimálás elve asugárvédelemben 666
órák szinkronizálása 553
oxigén-effektus 652

p-típusú adalékolás 727
pálya 17
pályaperdület 75
párkeltés 730
pásztázó alagútmikroszkóp 629
Pauli-elv 621
perdület 38
perdületmegmaradás 75
perdülettétel 40
periodikus hullám 185
periódusidő 136
pillanatnyi gyorsulás 23
pillanatnyi sebesség 18
Planck-állandó 517
Planck állandó 589
plazma 681
Poisson-szám 111, 249
polarizációs szűrő 306
pontoszerű test 14
populációinverzió 764
potenciál 48
pozitron 646
proton 638
protonszám 639
pumpálás 764

- Rayleigh-hullám 251
referencianyaláb 778
reflektált hullám 190
reflexiós tényező 521
reflexiós tényező (hang) 256
rekombináció 730
relativisztikus mechanika 552
relativitási elve 543
relatív megnyúlás 110
rétegtranzisztor 746
rezgőkör 172, 416
rezgőmozgás 132
rezonancia 153
rezonancia-körfrekvencia 153
rezonanciagörbe 153
röntgensugárzás 623
rotáció 78
rotációs kvantumszám 702
rugalmas deformáció 108
rugalmassági határ 123

sajátfrekvencia 145, 201
sajátidő 564
sajátperdület 75
Schrödinger-egyenlet 607
sebesség-transzformáció 561
Shockley-féle karakterisztika 738
SI 782
skalár 17
Snellius-Descartes törvény 302
son-skála 231
speciális relativitáselmélet 551
specifikus fajhőhánydos 236
spektrális intenzitás 517, 586
spektrum 586
spin 620
spin kvantumszám 621
spontán emisszió 622
stabil egyensúly 132
stacionárius hővezetés 489

Stefan-Boltzmann-állandó 519
Stefan-Boltzmann törvény 519, 587
Steiner-tétele 98
sugárvédelem 665
sugárvédelem hármasszorzatára alapelve 665
sugárzási súlytényező 655
súlypont 88
súrlódási erő 54

szabadsági fok 79
szakítószilárdság 124
szaporítóreaktor 676
szcintillációs detektorok 655
szigetelők 718
szilárd test, hullám 249
szivattyúzás 764
szögsebesség 26
szögsebesség-vektor 78
szomatikus sugárhatás 653
szonár 225
szórt nyaláb 778
szorzatállandóság törvénye 730
szteradián 528
sztochasztikus sugárhatások 654
szuperpozíció 195
szuperszonikus hangforrás 214
szürke test 521

tágulási hullám 250
támadásvonal 80
tapadási súrlódás 55
tárgyméret 323
tárgytávolság 323
tehetetlenségi nyomaték 96
teljesítmény 46
teljes visszaverődés 259
termikus feszültség 738
termoelem 735
termolumineszcens detektorok 654
térshörmérséklet 528

térvezérlésű tranzisztor 751
testhang 222
Thomson-féle atommodell 595
tiltott sáv 715
tisztánlátás távolsága 334
TOKAMAK 680
töltésfüggetlenség 638
tömeg 32
tömeghiány 574, 639
tömegközéppont 73, 90
tömegpont 14
tömegspektroszkópia 639
tömegvonzás 51
törésmutató 302
torzió 116
torziómodulusz 115
torziós inga 98, 171
torziós rezgés 170
transzmittált hullámszás 190
transzverzális hullám 182, 251
tranzisztor 746

ultrahang 223
üregsugárzó 585
út 17
utózenngési idő 274
üvegház-gázok 530

valódi kép 317
van der Waals kölcsönhatás 708
varicap dióda 736
vegyértéksáv 715
vékony fal közelítés 278
vezetési sáv 715
vibrációs frekvencia 701
vibrációs kvantumszám 700
világvonal 563
virtuális kép 317
viszonyítási pont 15
visszaverési tényező 521

vonatkoztatási pont 15
vonatkoztatási rendszer 16, 543

Wien-féle eltolódási törvény 518,
586

Young-modulusz 110

záróáram 738
zárt rendszer 36
zérusponi energia 701
zónás olvasztás 754