

A mechanika alapjai

A pontszerű testek kinematikája

Horváth András
SZE, Fizika és Kémia Tsz.

2006. szeptember 29.



Bevezetés

- Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés



Bevezetés

● **Bevezetés**

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?



Bevezetés

● **Bevezetés**

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés



Bevezetés

• **Bevezetés**

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés



Bevezetés

• **Bevezetés**

A kinematika
alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés

A mechanika két fő ága:



Bevezetés

• **Bevezetés**

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés

A mechanika két fő ága:

Kinematika:



Bevezetés

• **Bevezetés**

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés

A mechanika két fő ága:

Kinematika: A tárgyak mozgásának leírása.



Bevezetés

• Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés

A mechanika két fő ága:

Kinematika: A tárgyak mozgásának leírása.
(„*Hogyan* mozognak a tárgyak?”)



Bevezetés

• Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés

A mechanika két fő ága:

Kinematika: A tárgyak mozgásának leírása.
(„*Hogyan* mozognak a tárgyak?”)

Dinamika:



Bevezetés

• Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés

A mechanika két fő ága:

Kinematika: A tárgyak mozgásának leírása.
(„*Hogyan* mozognak a tárgyak?”)

Dinamika: A mozgás okának vizsgálata.



Bevezetés

• Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

Bevezetés

Több alapfogalom ismerős lehet a középiskolából. Miért tanulunk erről mégis?

- ismétlés
- precízebb megértés

A mechanika két fő ága:

Kinematika: A tárgyak mozgásának leírása.
(„*Hogyan* mozognak a tárgyak?”)

Dinamika: A mozgás okának vizsgálata.
(„*Miért* mozognak a tárgyak?”)



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

A kinematika alapfogalmai



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- **bonyolult mozgások**
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

bonyolult mozgások

Egy valós test mozgásának leírása általában igen bonyolult.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

● bonyolult mozgások

- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor szemléltetése
- kinematikai alapfogalmak (ábra)
- kinematikai alapfogalmak (magyarázat)
- komponensenkénti számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

bonyolult mozgások

Egy valós test mozgásának leírása általában igen bonyolult.
Példa: egy járkáló ember kinematikája.



Sok fontos pont leírása adja meg a mozgást.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

● bonyolult mozgások

- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor szemléltetése
- kinematikai alapfogalmak (ábra)
- kinematikai alapfogalmak (magyarázat)
- komponensenkénti számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

bonyolult mozgások

Egy valós test mozgásának leírása általában igen bonyolult.
Példa: egy járkáló ember kinematikája.



Sok fontos pont leírása adja meg a mozgást.

⇒ Mindenképp *egy pont mozgásának leírásával* kell kezdeni.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

● bonyolult mozgások

- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor szemléltetése
- kinematikai alapfogalmak (ábra)
- kinematikai alapfogalmak (magyarázat)
- komponensenkénti számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

bonyolult mozgások

Egy valós test mozgásának leírása általában igen bonyolult.
Példa: egy járkáló ember kinematikája.



Sok fontos pont leírása adja meg a mozgást.

⇒ Mindenképp *egy pont mozgásának leírásával* kell kezdeni.

Sőt!



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- **bonyolult mozgások**
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor szemléltetése
- kinematikai alapfogalmak (ábra)
- kinematikai alapfogalmak (magyarázat)
- komponensenkénti számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

bonyolult mozgások

Egy valós test mozgásának leírása általában igen bonyolult.
Példa: egy járkáló ember kinematikája.



Sok fontos pont leírása adja meg a mozgást.

⇒ Mindenképp *egy pont mozgásának leírásával* kell kezdeni.

Sőt! A gyakorlatban sokszor a test részletei nem lényegesek, csak a test egy pontjának mozgása: ekkor az egész testet tekinthetjük pontszerűnek.



pontszerű testek

Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- **pontszerű testek**
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

Pontszerű testnek nevezünk egy testet, ha méretei a mozgás pályájának méreteihez képest elhanyagolhatók és belső folyamatai nem befolyásolják középpontjának mozgását.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- **pontszerű testek**
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

pontszerű testek

Pontszerű testnek nevezünk egy testet, ha méretei a mozgás pályájának méreteihez képest elhanyagolhatók és belső folyamatai nem befolyásolják középpontjának mozgását.

Természetesen tökéletesen pontszerű test (tömegpont) nincs, de sokszor jó közelítést jelent pontszerűvel közelíteni.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

vonatkoztatási pont

- Megadunk a térben egy pontot, amit **vonatkoztatási-** vagy **viszonyítási pont**nak nevezünk. (O pont)



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

vonatkoztatási pont

- Megadunk a térben egy pontot, amit **vonatkoztatási-** vagy **viszonyítási pont**nak nevezünk. (O pont)
- Megadjuk a vonatkoztatási pontból a tömegpontba mutató úgynevezett **helyvektort**. ($\underline{r}$ vektor)



Bevezetés

A kinematika alfogalmak

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alfogalmak (ábra)
- kinematikai
alfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

vonatkoztatási pont

- Megadunk a térben egy pontot, amit **vonatkoztatási-** vagy **viszonyítási pont**nak nevezünk. (O pont)
- Megadjuk a vonatkoztatási pontból a tömegpontba mutató úgynevezett **helyvektort**. ($\underline{r}$ vektor)

Ez egy időpontra vonatkozik.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

vonatkoztatási pont

- Megadunk a térben egy pontot, amit **vonatkoztatási-** vagy **viszonyítási pont**nak nevezünk. (O pont)
- Megadjuk a vonatkoztatási pontból a tömegpontba mutató úgynevezett **helyvektort**. ($\underline{r}$ vektor)

Ez egy időpontra vonatkozik.

Ha minden t időpontra megadjuk a test $\underline{r}(t)$ helyvektorát, akkor ezzel a tömegpont mozgását teljesen leírtuk.



helyvektor szemléltetése

Bevezetés

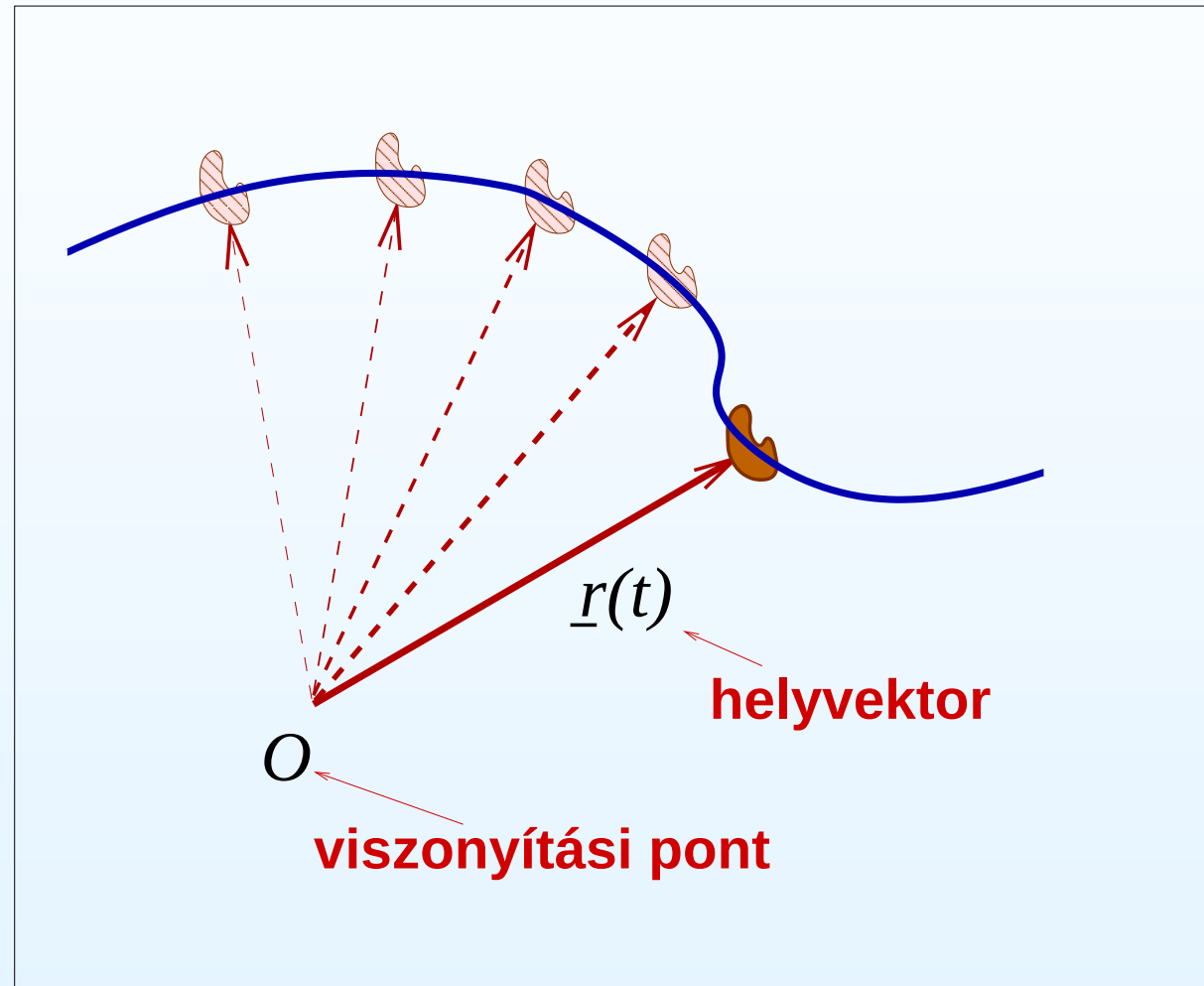
A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- **helyvektor
szemléltetése**
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat



Pontszerű test mozgása, viszonyítási pont



kinematikai alapfogalmak (ábra)

Bevezetés

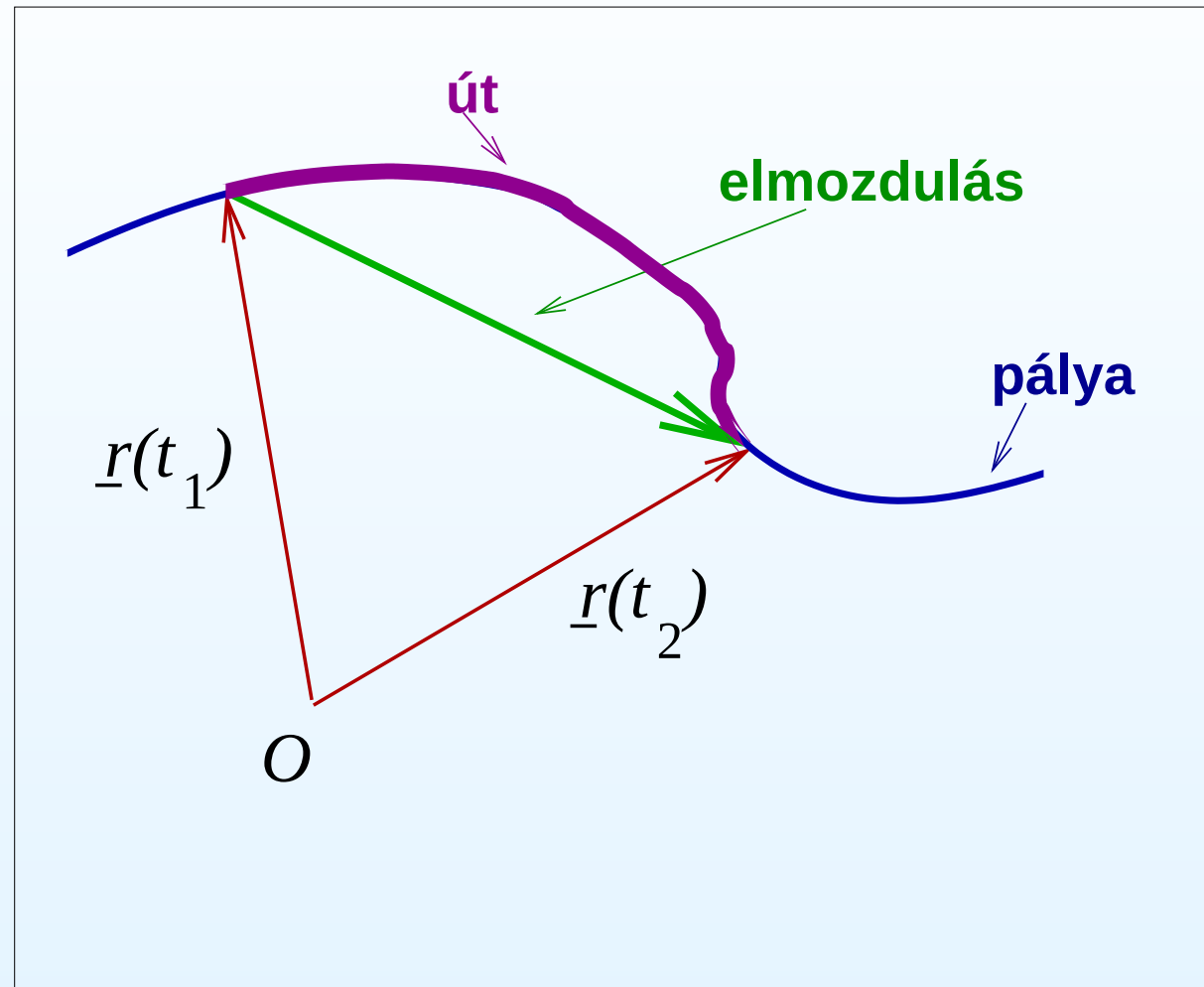
A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor szemléltetése
- kinematikai alapfogalmak (ábra)
- kinematikai alapfogalmak (magyarázat)
- komponensenkénti számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat



Kinematikai alapfogalmak



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- **kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)**
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

kinematikai alapfogalmak (magyarázat)

Elmozdulás: vektormennyiség

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)$$



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- **kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)**
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

kinematikai alapfogalmak (magyarázat)

Elmozdulás: vektormennyiség

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)$$

Út: skalár mennyiség

A befutott pályadarab hossza. Szemléletes, de matematikailag bonyolult!

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\underline{r}'(t)| dt$$



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- **kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)**
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

kinematikai alapfogalmak (magyarázat)

Elmozdulás: vektormennyiség

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)$$

Út: skalár mennyiség

A befutott pályadarab hossza. Szemléletes, de matematikailag bonyolult!

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\underline{r}'(t)| dt$$

Ez nem egyenes menti mozgások esetén általában összetett számolásokhoz vezet. (Az abszolútérték-jel miatt.)



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- **kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)**
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

...

Átlagsebesség: vektormennyiség

$$\underline{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\underline{\Delta r}}{\underline{\Delta t}}$$



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- **kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)**
- komponensenkénti
számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

...

Átlagsebesség: vektormennyiség

$$\underline{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

Átlagos sebességnagyság: skalár mennyiség

Az út és az idő hányadosa.

$$\frac{s(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

Nincs is külön jele, mert fizikailag nem hordoz gyakran használható információt.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor szemléltetése
- kinematikai alapfogalmak (ábra)
- **kinematikai alapfogalmak (magyarázat)**
- komponensenkénti számolás

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

...

Átlagsebesség: vektormennyiség

$$\underline{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

Átlagos sebességnagyság: skalár mennyiség

Az út és az idő hányadosa.

$$\frac{s(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

Nincs is külön jele, mert fizikailag nem hordoz gyakran használható információt.

A fogalmak pontos használata kötelező!!!

Köznapi értelemben sokszor keverednek ezek, de ezt fizikában nem szabad.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- **komponensenkénti
számolás**

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

komponensenkénti számolás

Sokszor nehéz vektorokkal számolni.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- **komponensenkénti
számolás**

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

komponensenkénti számolás

Sokszor nehéz vektorokkal számolni.

Ezért a gyakorlatban többnyire felvesszünk egy koordináta-rendszert, melynek origója a viszonyítási pont és a vektorok komponenseivel, koordinátaival számolunk:

$$\underline{r}(t) \quad \text{helyett} \quad (x(t), y(t), z(t))$$



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor
szemléltetése
- kinematikai
alapfogalmak (ábra)
- kinematikai
alapfogalmak
(magyarázat)
- **komponensenkénti
számolás**

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

komponensenkénti számolás

Sokszor nehéz vektorokkal számolni.

Ezért a gyakorlatban többnyire felvesszünk egy koordináta-rendszert, melynek origója a viszonyítási pont és a vektorok komponenseivel, koordinátaival számolunk:

$$\underline{r}(t) \quad \text{helyett} \quad (x(t), y(t), z(t))$$

A koordináták ismeretében a vektor minden tulajdonsága ismert.
Pl. a vektor hossza (abszolút értéke):

$$|\underline{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

- bonyolult mozgások
- pontszerű testek
- vonatkoztatási pont
- helyvektor szemléltetése
- kinematikai alapfogalmak (ábra)
- kinematikai alapfogalmak (magyarázat)
- **komponensenkénti számolás**

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

komponensenkénti számolás

Sokszor nehéz vektorokkal számolni.

Ezért a gyakorlatban többnyire felvesszünk egy koordináta-rendszert, melynek origója a viszonyítási pont és a vektorok komponenseivel, koordinátaival számolunk:

$$\underline{r}(t) \quad \text{helyett} \quad (x(t), y(t), z(t))$$

A koordináták ismeretében a vektor minden tulajdonsága ismert.
Pl. a vektor hossza (abszolút értéke):

$$|\underline{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Megjegyzés: Bizonyos esetekben nem derékszögű koordináta-rendszer használata a célszerű, de ilyenekkel mi nem fogunk találkozni.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

- alapötlet
- egy egyszerű példa
- matematikai
eszközök
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

A pillanatnyi sebesség



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

● alapötlet

- egy egyszerű példa
- matematikai
eszközök
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

alapötlet

Az átlagsebesség ($\Delta \underline{r} / \Delta t$) jelentése: *átlagosan* mekkora az elmozdulás egységnyi idő alatt.

De hogy értelmezhető a *pillanatnyi* sebesség?



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

● alapötlet

- egy egyszerű példa
- matematikai
eszközök
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

alapötlet

Az átlagsebesség ($\Delta \underline{r} / \Delta t$) jelentése: *átlagosan* mekkora az elmozdulás egységnyi idő alatt.

De hogy értelmezhető a *pillanatnyi* sebesség?

Nem írhatunk $\Delta t = 0$ -t az átlagsebesség formulájába, mert 0 lenne a nevezőben.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

- **alapötlet**

- egy egyszerű példa

- matematikai
eszközök

- egy kis történeti kitérő

- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

alapötlet

Az átlagsebesség ($\Delta \underline{r} / \Delta t$) jelentése: *átlagosan* mekkora az elmozdulás egységnyi idő alatt.

De hogy értelmezhető a *pillanatnyi* sebesség?

Nem írhatunk $\Delta t = 0$ -t az átlagsebesség formulájába, mert 0 lenne a nevezőben.

Azonban ha egyre kisebb és kisebb Δt értékre számoljuk ki az átlagsebesség értékét, az egy jól meghatározott értéket közelít meg egyre jobban.

Első, közelítő meghatározás:

Pillanatnyi sebesség alatt egy olyan rövid idő átlagsebességét értjük, mely alatt a mozgás nem változik meg lényegesen.

egy egyszerű példa

Mozogjon egy test az x tengely mentén: $x(t) = 5 \cdot \sin(3 \cdot t)$

(SI-egységekben)

Mekkora a pillanatnyi sebessége $t = 0,2$ -kor?

Recept: számoljuk ki az átlagsebességet t és $t + \Delta t$ között, majd nézzük meg, mi történik egyre kisebb Δt -re:

$$\bar{v}(t, t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{5 \sin(3(t + \Delta t)) - 5 \sin(t)}{\Delta t}$$

Esetünkben $t = 0,2$, így:

$$\bar{v}(0,2, 0,2 + \Delta t) = \frac{5}{\Delta t} (\sin(0,6 + 3\Delta t) - \sin 0,6)$$

Itt már csak Δt ismeretlen.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

- alapötlet
- egy egyszerű példa
- matematikai
eszközök
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

... folytatás

Számoljuk ki $\bar{v}$ -t egyre csökkenő Δt mellett:

Figyelem! A $\sin$ függvény argumentumában nem volt fokjel, ezért radiánban kell számolni!

Δt	$\bar{v}$
0,1	10,93
0,01	12,25
0,001	12,37
0,0001	12,38
0,00001	12,38

Megfigyelhető, hogy az értékek egy meghatározott számhoz közelítenek, nem 0-hoz vagy végtelenhez. Ez a szám a pillanatnyi sebesség értéke.

A test tehát 12,38 m/s sebességgel mozog a kérdéselt időpontban.
(2 tizedesjegy pontosságig.)



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

- alapötlet
- egy egyszerű példa
- **matematikai
eszközök**
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

matematikai eszközök

Pontosabb meghatározás a matematikai ismeretek segítségével:



Bevezetés

A kinematika alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

- alapötlet
- egy egyszerű példa
- **matematikai
eszközök**
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

matematikai eszközök

Pontosabb meghatározás a matematikai ismeretek segítségével:
Felismerhetjük, hogy:

- **Az átlagsebesség a hely-idő függvény differenciahányadosa.**

$$\underline{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$



Bevezetés

A kinematika alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

- alapötlet
- egy egyszerű példa
- **matematikai
eszközök**
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

matematikai eszközök

Pontosabb meghatározás a matematikai ismeretek segítségével:
Felismerhetjük, hogy:

- **Az átlagsebesség a hely-idő függvény differenciáhányadosa.**

$$\underline{v}(t_1, t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

- **A pillanatnyi sebesség a hely-idő függvény
differenciáhányadosa.**

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{r}'$$



Bevezetés

A kinematika alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

- alapötlet
- egy egyszerű példa
- **matematikai
eszközök**
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

matematikai eszközök

Pontosabb meghatározás a matematikai ismeretek segítségével:
Felismerhetjük, hogy:

- **Az átlagsebesség a hely-idő függvény differenciahányadosa.**

$$\underline{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

- **A pillanatnyi sebesség a hely-idő függvény
differenciáhányadosa.**

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{r}'$$

(Ne ijedjünk meg: ez ugyanaz a deriválás, amit matematikából tanultunk. Kis eltérés: $\underline{t}$ a változó és vektort deriválunk, ami egyszerűen mindegyik komponensének deriválását jelenti.)



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

- alapötlet
- egy egyszerű példa
- matematikai
eszközök
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

egy kis történeti kitérő

A mechanika alapfogalmai tehát csak a differenciálszámítás segítségével érthetők meg. Ennek megfelelően ezek kifejlődése egymással párhuzamosan történt.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

- alapötlet
- egy egyszerű példa
- matematikai
eszközök
- **egy kis történeti kitérő**
- szemléltetés
grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

egy kis történeti kitérő

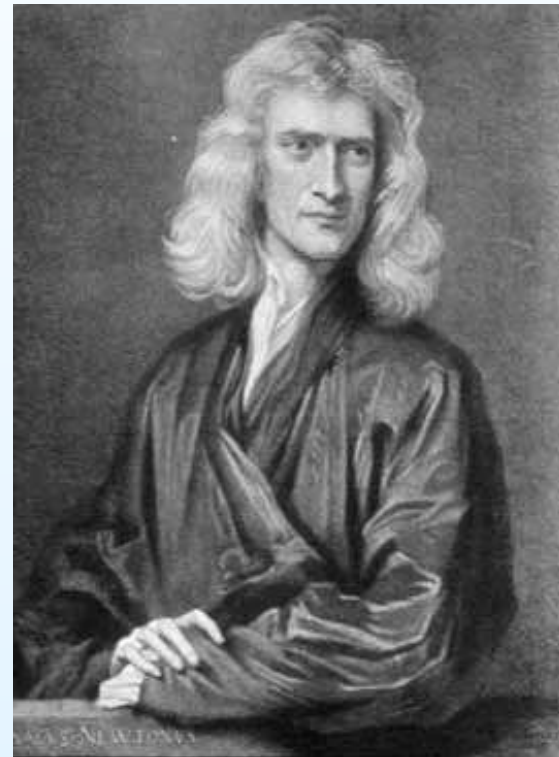
A mechanika alapfogalmai tehát csak a differenciálszámítás segítségével érthetők meg. Ennek megfelelően ezek kifejlődése egymással párhuzamosan történt.

Egyik jelentős tudós:

Sir Isaac Newton (1643–1727)

Többek között a differenciál- és integrálszámítás egyik fő megalapozója és a modern mechanika megalapozója.

A kapcsolat nem véletlen: differenciál- és integrálszámítás nélkül nem lehet megérteni a mechanikát. (És szinte semmilyen természeti folyamatot sem.)





Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

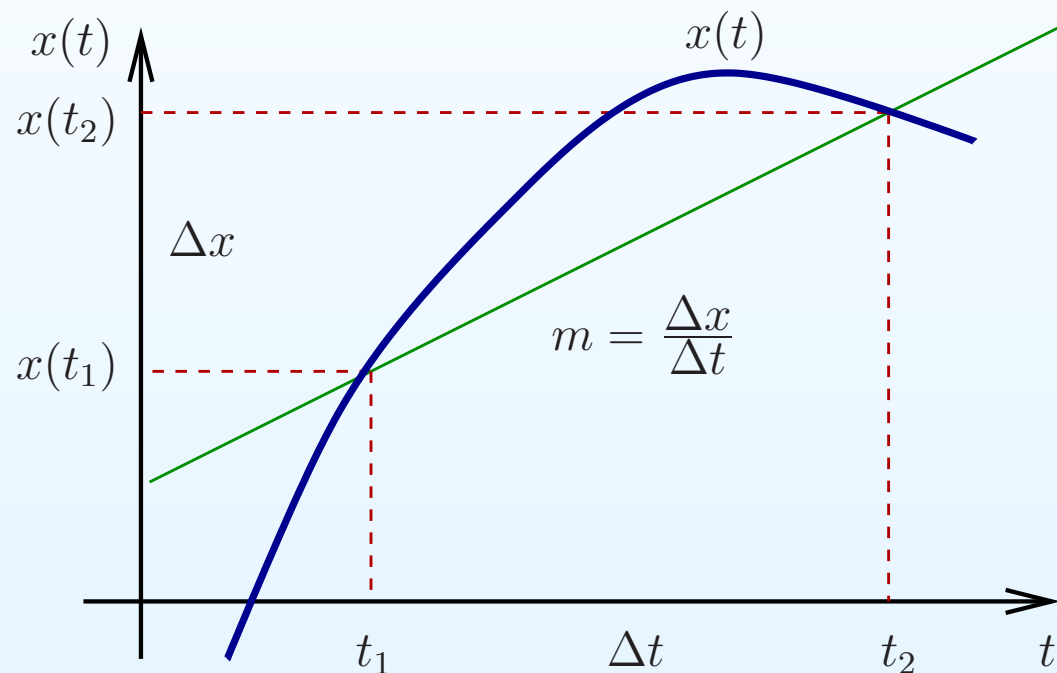
- alapötlet
- egy egyszerű példa
- matematikai eszközök
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

szemléltetés grafikonon

Egyenes menti mozgás (vagy egy mozgás egy komponense) jól szemléltethető grafikonon, és az alapfogalmak is jól megfigyelhetők itt:





Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

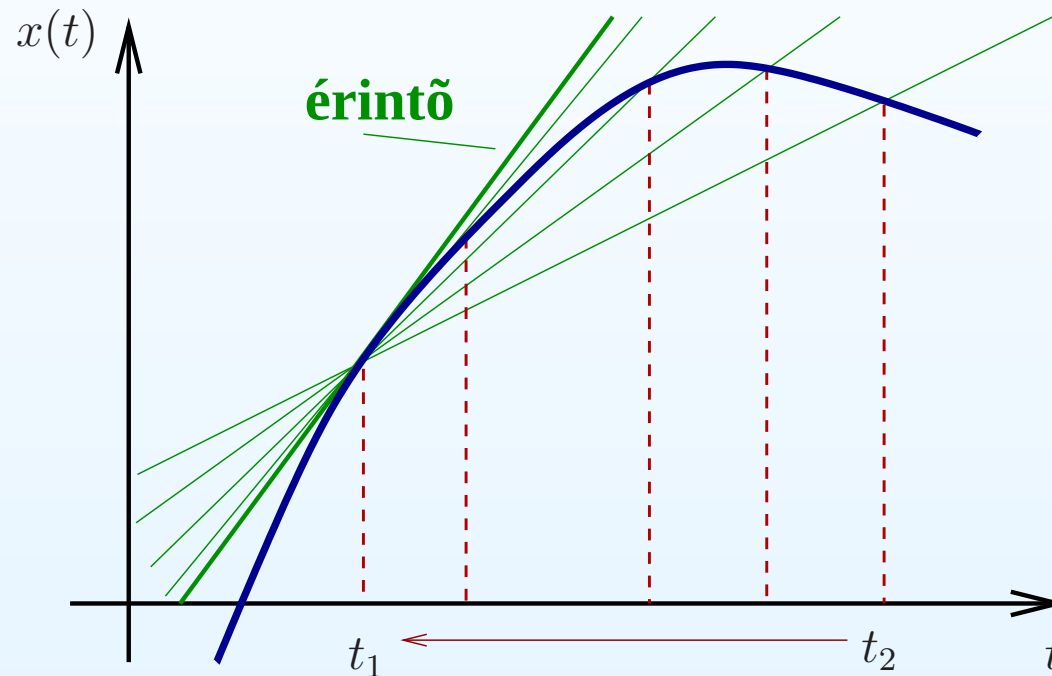
- alapötlet
- egy egyszerű példa
- matematikai eszközök
- egy kis történeti kitérő
- szemléltetés grafikonon

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

... folytatás

Amennyiben t_2 egyre jobban megközelíti t_1 -et, azaz Δt a 0-t, a szelők egyre inkább a grafikon érintőjéhez simulnak:



A hely-idő grafikonhoz húzott szelő meredeksége tehát az átlagsebességet, az érintő meredeksége a pillanatnyi sebességet adja meg.



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- típushibák

A fordított irányú
kapcsolat

A gyorsulás



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- típushibák

A fordított irányú
kapcsolat

a gyorsulás fogalma

Az előzőekhez hasonlóan:

Átlagos gyorsulás:

$$\underline{\bar{a}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- típushibák

A fordított irányú
kapcsolat

a gyorsulás fogalma

Az előzőekhez hasonlóan:

Átlagos gyorsulás:

$$\underline{\bar{a}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v}'$$



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- típushibák

A fordított irányú
kapcsolat

a gyorsulás fogalma

Az előzőekhez hasonlóan:

Átlagos gyorsulás:

$$\underline{\bar{a}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v}'$$

Mivel a sebesség a hely idő szerinti deriváltja, a gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltja, ezért a gyorsulás a helyből kétszeri deriválással kapható.



Bevezetés

A kinematika
alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- típushibák

A fordított irányú
kapcsolat

a gyorsulás fogalma

Az előzőekhez hasonlóan:

Átlagos gyorsulás:

$$\underline{\bar{a}}(t_1, t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v}'$$

Mivel a sebesség a hely idő szerinti deriváltja, a gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltja, ezért a gyorsulás a helyből kétszeri deriválással kapható.

Ezért azt mondjuk, hogy a gyorsulás a hely idő szerinti második deriváltja, és a következő jelöléssel fejezzük ki:

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \underline{r}''$$



Bevezetés

A kinematika alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- **alkalmazás a fizikára**
- típushibák

A fordított irányú kapcsolat

alkalmazás a fizikára

Nem lesznek bonyolultabbak a dolgok, csak a jelölések mások, azaz nem feltétlen x lesz a változó jele.



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- **alkalmazás a fizikára**
- típushibák

A fordított irányú
kapcsolat

alkalmazás a fizikára

Nem lesznek bonyolultabbak a dolgok, csak a jelölések mások, azaz nem feltétlen x lesz a változó jele.

Egy test hely-idő függvénye:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Adja meg a sebességét és a gyorsulását!



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- **alkalmazás a fizikára**
- típushibák

A fordított irányú kapcsolat

alkalmazás a fizikára

Nem lesznek bonyolultabbak a dolgok, csak a jelölések mások, azaz nem feltétlen x lesz a változó jele.

Egy test hely-idő függvénye:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Adja meg a sebességét és a gyorsulását!

Megoldás: A sebesség a hely idő szerinti deriváltja:

$$v(t) = (x(t))' = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}2t + v_0 + 0 = at + v_0$$

A gyorsulás pedig a sebesség deriváltja:

$$a(t) = (v(t))' = a + 0 = a$$

Ez tehát az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- **alkalmazás a fizikára**
- típushibák

A fordított irányú kapcsolat

...

Egy test hely-idő függvénye: $x(t) = 5 \sin(3t)$. Adja meg a sebesség-idő függvényt! Mekkora lesz sebessége $t = 0,2$ s-kor?



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- típushibák

A fordított irányú kapcsolat

...

Egy test hely-idő függvénye: $x(t) = 5 \sin(3t)$. Adja meg a sebesség-idő függvényt! Mekkora lesz sebessége $t = 0,2$ s-kor?

Megoldás:

$$\begin{aligned} v(t) &= (x(t))' = 5(\sin(3t))' = 5 \cos(3t)(3t)' = \\ &= 5 \cos(3t) \cdot 3 = 15 \cos(3t) \end{aligned}$$

A kért időpontban:

$$v(0,2) = 15 \cos(0,6) = 12,380 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nahát! Ezt számoltuk ki korábban! Csak így sokkal gyorsabb és nemcsak egy időpontra kaptuk meg az eredményt.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- **alkalmazás a fizikára**
- típushibák

A fordított irányú kapcsolat



Egy xy -síkban mozgó test koordinátái az idő függvényében:

$$x(t) = 6t \quad y(t) = 5 - 3t - 5t^2$$

Adja meg sebességének nagyságát az idő függvényében!



Bevezetés

A kinematika alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- típushibák

A fordított irányú kapcsolat

...

Egy xy -síkban mozgó test koordinátái az idő függvényében:

$$x(t) = 6t \quad y(t) = 5 - 3t - 5t^2$$

Adja meg sebességének nagyságát az idő függvényében!

Megoldás: Külön-külön ki kell számolni a sebesség komponenseit:

$$v_x(t) = (x(t))' = (6t)' = 6$$

$$v_y(t) = (y(t))' = (5 - 3t - 5t^2)' = 0 - 3 - 10t$$

A Pithagorasz-tétel szerint:

$$\begin{aligned} |\underline{v}(t)| &= \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{6^2 + (-3 - 10t)^2} = \\ &= \sqrt{100t^2 + 60t + 45} \end{aligned}$$



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- **típushibák**

A fordított irányú
kapcsolat

típushibák

FIGYELEM!



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- **típushibák**

A fordított irányú
kapcsolat

típushibák

FIGYELEM!

Hallgatók tipikus hibái: mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- **típushibák**

A fordított irányú
kapcsolat

típushibák

FIGYELEM!

Hallgatók tipikus hibái: mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.

Pl. egy tipikus **rossz mondóka**: „A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$ ”



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- **típushibák**

A fordított irányú
kapcsolat

típushibák

FIGYELEM!

Hallgatók tipikus hibái: mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.

Pl. egy tipikus **rossz mondóka**: „A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$ ”

Egy csak és kizárólag az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgásra igaz! általános alkalmazása téves!



Bevezetés

A kinematika
alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- **típushibák**

A fordított irányú
kapcsolat

típushibák

FIGYELEM!

Hallgatók tipikus hibái: mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.

Pl. egy tipikus **rossz mondóka**: „A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$ ”

Egy csak és kizárólag az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgásra igaz! általános alkalmazása téves!

Ugyanez pepitában: „A gyorsulás a sebesség és az idő hányadosa: $a = v/t$ ”



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

- a gyorsulás fogalma
- alkalmazás a fizikára
- **típushibák**

A fordított irányú
kapcsolat

típushibák

FIGYELEM!

Hallgatók tipikus hibái: mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.

Pl. egy tipikus **rossz mondóka**: „A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$ ”

Egy csak és kizárólag az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgásra igaz! általános alkalmazása téves!

Ugyanez pepitában: „A gyorsulás a sebesség és az idő hányadosa: $a = v/t$ ”

Ne is vesztegessük rá a szót: **felejtsük el!**



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- példák
- ... ugyanez
integrálással

A fordított irányú kapcsolat



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

● a fordított irány

● ... matematikailag

● ... szemléletes
jelentés

● ... az előjelek

● példák

● ... ugyanez
integrálással

a fordított irány

Tudjuk már, hogy kell a hely-idő függvényből kiszámolni a sebesség-idő függvényt.

Vajon visszakapható-e a hely a sebesség-idő függvény ismeretében?



Bevezetés

A kinematika alfogalmi

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

● a fordított irány

● ... matematikailag

● ... szemléletes

jelentés

● ... az előjelek

● példák

● ... ugyanez

integrálással

a fordított irány

Tudjuk már, hogy kell a hely-idő függvényből kiszámolni a sebesség-idő függvényt.

Vajon visszakapható-e a hely a sebesség-idő függvény ismeretében?

Nyilvánvalóan: **nem**.

Hisz ha nem tudjuk, honnan indult a test, pusztán sebességének ismerete nem adja meg, hova érkezett. (Pl.: egy autó az M1-esen 20 percig egyenletesen 90 km/h-val megy. Hol van most? Ez nem megválaszolható, ha nem tudjuk, honnan indult.)



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

● a fordított irány

● ... matematikailag

● ... szemléletes

jelentés

● ... az előjelek

● példák

● ... ugyanez

integrálással

a fordított irány

Tudjuk már, hogy kell a hely-idő függvényből kiszámolni a sebesség-idő függvényt.

Vajon visszakapható-e a hely a sebesség-idő függvény ismeretében?

Nyilvánvalóan: **nem**.

Hisz ha nem tudjuk, honnan indult a test, pusztán sebességének ismerete nem adja meg, hova érkezett. (Pl.: egy autó az M1-esen 20 percig egyenletesen 90 km/h-val megy. Hol van most? Ez nem megválaszolható, ha nem tudjuk, honnan indult.)

Matematikailag: a deriválást nem tudjuk fordítva csinálni, mivel végtelen sok hely-idő függvény deriváltja lehet ugyanaz a sebesség-idő függvény. Ennek oka: tetszőleges konstans függvény deriváltja 0.

$$\text{Pl.: } (5t + 3)' = (5t)' = (5t + \pi^2)' = \dots = 5$$

Ami megmondható, az a hely megváltozása, azaz az elmozdulás.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- példák
- ... ugyanez
integrálással

... matematikailag

Ha a sebesség a hely-idő függvény deriváltja, akkor a sebesség-idő függvényből integrálással lehet megkapni a hely megváltozását:

$$\Delta \underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(t) dt$$



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- példák
- ... ugyanez
integrálással

... matematikailag

Ha a sebesség a hely-idő függvény deriváltja, akkor a sebesség-idő függvényből integrálással lehet megkapni a hely megváltozását:

$$\Delta \underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(t) dt$$

Maga a hely-idő függvény nem kapható meg, legalábbis egy integrációs állandó erejéig bizonytalan lesz:

$$\underline{r}(t) = \int \underline{v}(t) dt + C$$

Fizikailag ez annak felel meg, hogy ha egy test sebességét ismerjük, meg tudjuk mondani, mennyit mozdult el adott idő alatt, de ha nem tudjuk, honnan indult, azt sem tudjuk, hova jutott el.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- példák
- ... ugyanez
integrálással

... matematikailag

Ha a sebesség a hely-idő függvény deriváltja, akkor a sebesség-idő függvényből integrálással lehet megkapni a hely megváltozását:

$$\Delta \underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(t) dt$$

Maga a hely-idő függvény nem kapható meg, legalábbis egy integrációs állandó erejéig bizonytalan lesz:

$$\underline{r}(t) = \int \underline{v}(t) dt + C$$

Fizikailag ez annak felel meg, hogy ha egy test sebességét ismerjük, meg tudjuk mondani, mennyit mozdult el adott idő alatt, de ha nem tudjuk, honnan indult, azt sem tudjuk, hova jutott el.

Másképpen:

$$\underline{r}(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(t) dt + \underline{r}(t_1)$$



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

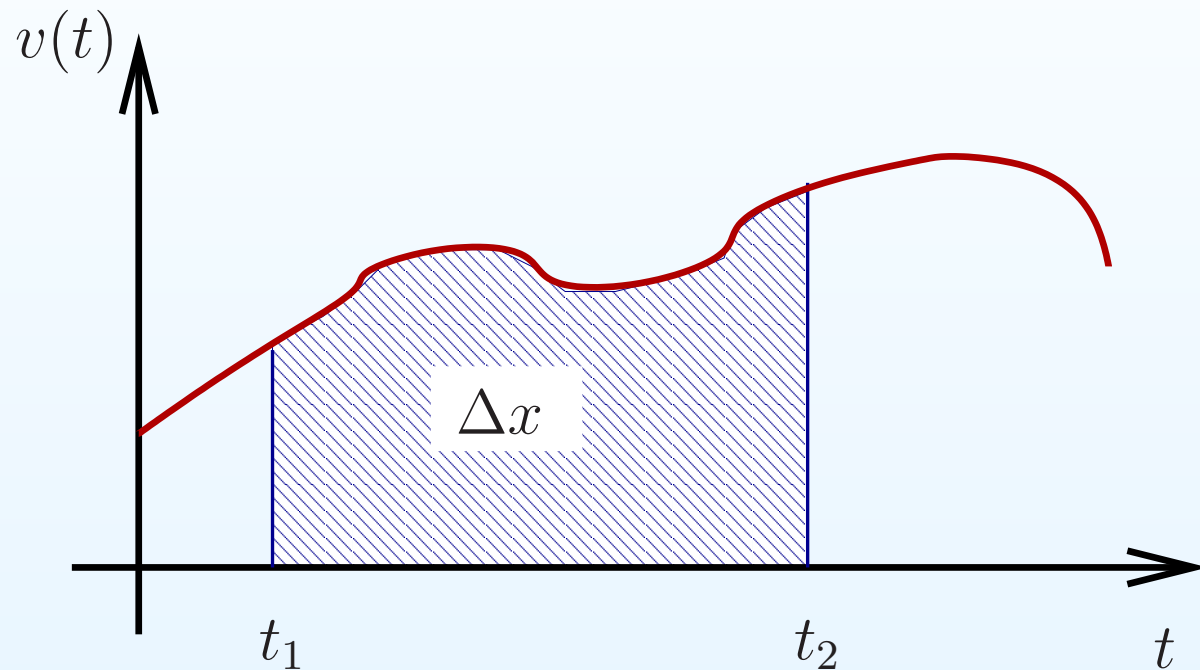
A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- példák
- ... ugyanez
integrálással

... szemléletes jelentés



Tehát egyenes menti mozgásnál a sebesség-idő függvény grafikonja alatti terület adja meg az elmozdulást.



... szemléletes jelentés

Bevezetés

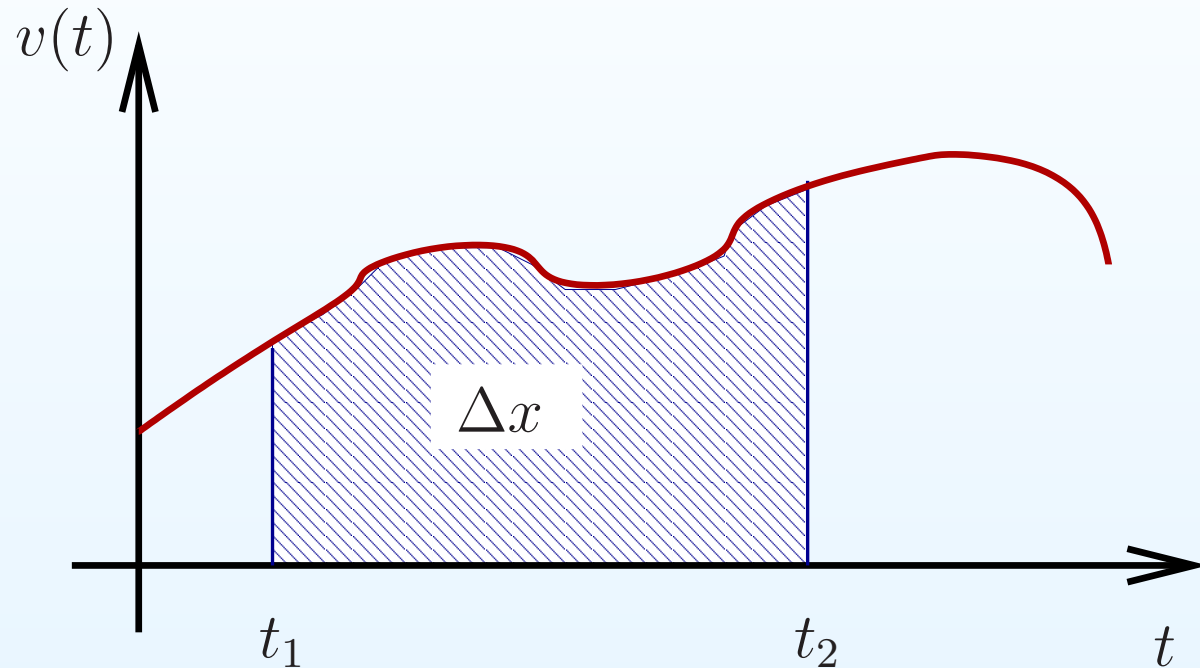
A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... **szemléletes
jelentés**
- ... az előjelek
- példák
- ... ugyanez
integrálással



Tehát egyenes menti mozgásnál a sebesség-idő függvény grafikonja alatti terület adja meg az elmozdulást.

De vigyázzunk az előjelekre!



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

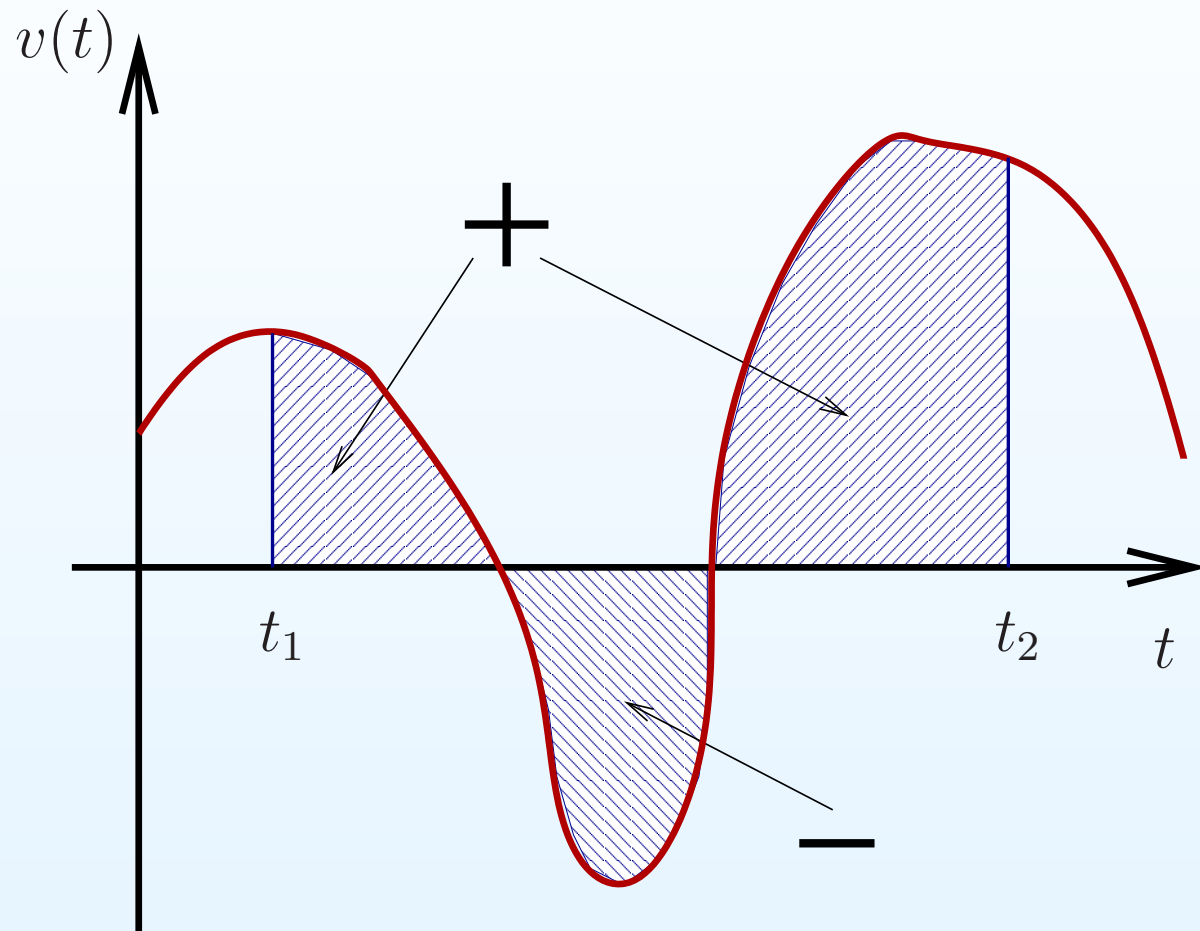
A fordított irányú
kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés

• ... az előjelek

- példák
- ... ugyanez
integrálással

... az előjelek



A sebesség-idő függvény grafikonja alatti területek ábra szerinti előjeles összege az elmozdulást adja meg.



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

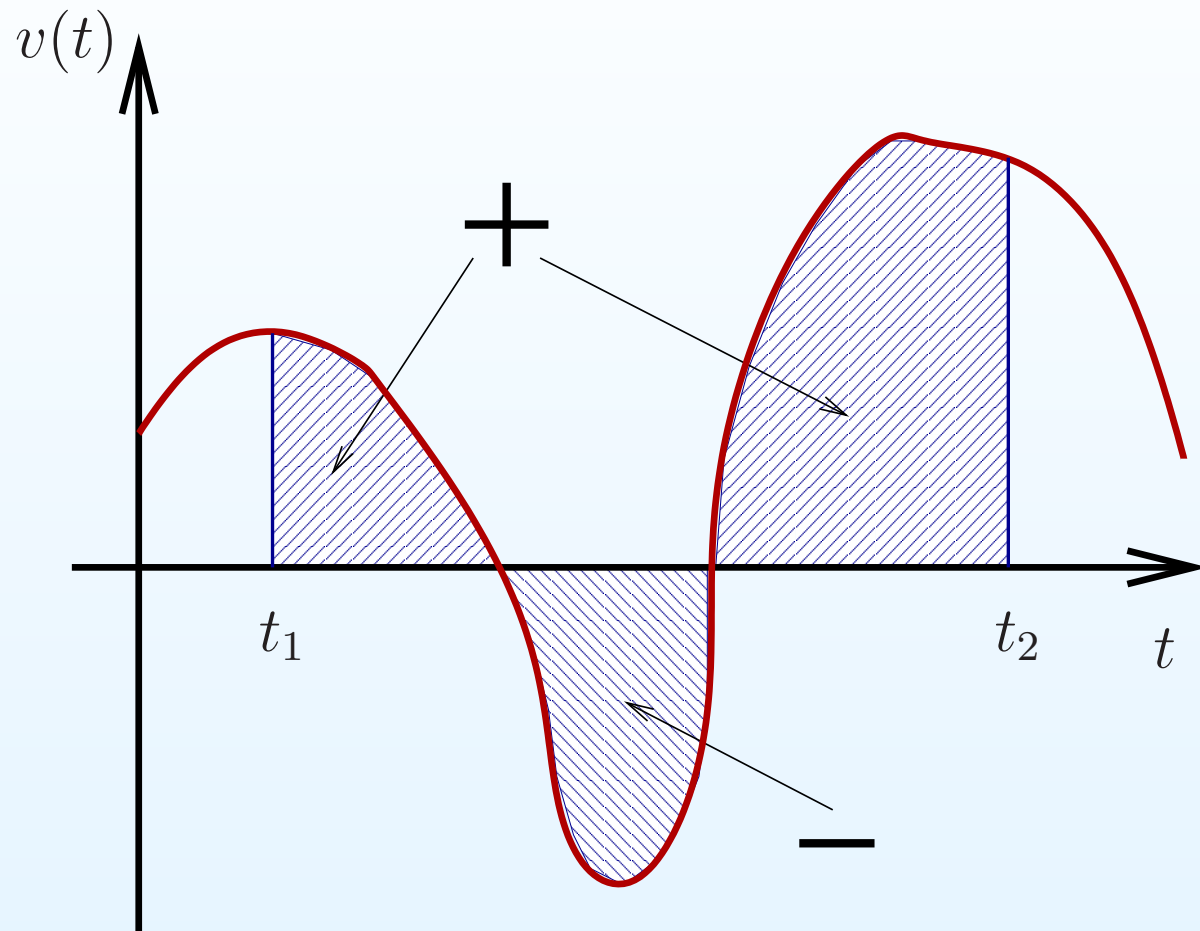
A fordított irányú
kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés

• ... az előjelek

- példák
- ... ugyanez
integrálással

... az előjelek



A sebesség-idő függvény grafikonja alatti területek ábra szerinti előjeles összege az elmozdulást adja meg.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés

• ... az előjelek

- példák
- ... ugyanez
integrálással

megjegyzések

Ha a kezdőhelyzet ismert, akkor a végső hely kiszámolhatóvá válik az elmozdulásból.



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés

- ... az előjelek

- példák
- ... ugyanez
integrálással

megjegyzések

Ha a kezdőhelyzet ismert, akkor a végső hely kiszámolhatóvá válik az elmozdulásból.

Ez természetesen egy komponensre vonatkozik.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- példák
- ... ugyanez
integrálással

megjegyzések

Ha a kezdőhelyzet ismert, akkor a végső hely kiszámolhatóvá válik az elmozdulásból.

Ez természetesen egy komponensre vonatkozik.

Hasonló a kapcsolat a gyorsulás-idő függvény és a sebességváltozás között is: **A gyorsulás-idő függvény grafikonja alatti területek előjeles összege a sebesség változását adja meg.**



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- **példák**
- ... ugyanez
integrálással

példák

*Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő:
 $a(t) = 3 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$ -kor 5 m/s sebességgel
mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 3$ -kor?*



példák

Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

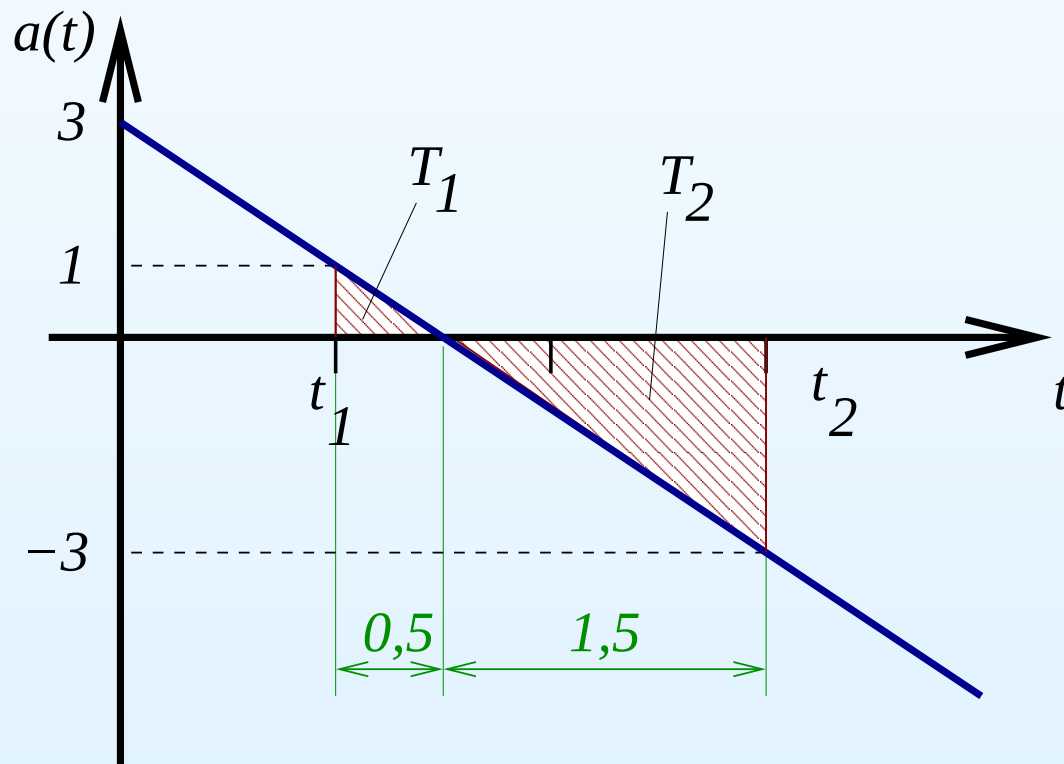
A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- **példák**
- ... ugyanez
integrálással

Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő:
 $a(t) = 3 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$ -kor 5 m/s sebességgel
mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 3$ -kor?

Megoldás: Készítsünk grafikont!





Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- **példák**
- ... ugyanez
integrálással

...

A grafikon alatti terület két háromszögre bomlik:

- $t_1 = 1$ és $t_0 = 1,5$ között egy 1 magasságú háromszög a t tengely felett.



Bevezetés

A kinematika
alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú
kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- **példák**
- ... ugyanez
integrálással

...

A grafikon alatti terület két háromszögre bomlik:

- $t_1 = 1$ és $t_0 = 1,5$ között egy 1 magasságú háromszög a t tengely felett.
- $t_0 = 1,5$ és $t_3 = 3$ között egy 3 magasságú háromszög a t tengely alatt.



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- **példák**
- ... ugyanez
integrálással

...

A grafikon alatti terület két háromszögre bomlik:

- $t_1 = 1$ és $t_0 = 1,5$ között egy 1 magasságú háromszög a t tengely felett.
- $t_0 = 1,5$ és $t_3 = 3$ között egy 3 magasságú háromszög a t tengely alatt.

Ezek területei közül az elsőt pozitív, a másodikat negatív előjellel kell figyelembe venni. Így a sebességváltozás:

$$\Delta v = T_1 - T_2 = \frac{0,5 \cdot 1}{2} - \frac{1,5 \cdot 3}{2} = -2$$



Bevezetés

A kinematika alapfogalmai

A pillanatnyi sebesség

A gyorsulás

A fordított irányú kapcsolat

- a fordított irány
- ... matematikailag
- ... szemléletes
jelentés
- ... az előjelek
- **példák**
- ... ugyanez
integrálással

...

A grafikon alatti terület két háromszögre bomlik:

- $t_1 = 1$ és $t_0 = 1,5$ között egy 1 magasságú háromszög a t tengely felett.
- $t_0 = 1,5$ és $t_3 = 3$ között egy 3 magasságú háromszög a t tengely alatt.

Ezek területei közül az első pozitív, a másodikat negatív előjellel kell figyelembe venni. Így a sebességváltozás:

$$\Delta v = T_1 - T_2 = \frac{0,5 \cdot 1}{2} - \frac{1,5 \cdot 3}{2} = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5$ m/s, ezért nyilván:

$$v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3 \text{ m/s.}$$

... ugyanez integrálással

A korábbiakból tudjuk, hogy:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

... ugyanez integrálással

A korábbiakból tudjuk, hogy:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

Esetünkben ez:

$$\Delta v = \int_1^3 (3 - 2t) dt = \left[3t - t^2 \right]_1^3 = 3 \cdot 3 - 3^2 - (3 \cdot 1 - 1^2) = -2$$

... ugyanez integrálással

A korábbiakból tudjuk, hogy:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

Esetünkben ez:

$$\Delta v = \int_1^3 (3 - 2t) dt = \left[3t - t^2 \right]_1^3 = 3 \cdot 3 - 3^2 - (3 \cdot 1 - 1^2) = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5 \text{ m/s}$, ezért nyilván: $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3 \text{ m/s}$.

... ugyanez integrálással

A korábbiakból tudjuk, hogy:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

Esetünkben ez:

$$\Delta v = \int_1^3 (3 - 2t) dt = \left[3t - t^2 \right]_1^3 = 3 \cdot 3 - 3^2 - (3 \cdot 1 - 1^2) = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5 \text{ m/s}$, ezért nyilván: $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3 \text{ m/s}$.

Ez gépies, gyors és általánosabban használható módszer.