HALMAZOK

Tanulási cél

Halmazok megadása, halmazműveletek megismerése és alkalmazása, halmazok ábrázolása Venn diagramon.

Motivációs példa

Egy fogyasztó 80 000 pénzegység jövedelmet fordít két termék, *x* és *y* vásárlására. Az *x* termék egységára 1000 pénzegység, az *y* ára 2000 pénzegység. Hogyan változik a költségvetési egyenes és a költségvetési halmaz, ha a fogyasztó pénzjövedelme növekszik 25 százalékkal?

Elméleti összefoglaló

A halmaz a matematikában alapfogalom (nem definiáljuk).

Ha megpróbálnám a halmaz fogalmát körül írni, akkor azt mondanám, hogy bizonyos dolgok összessége. A halmazba tartozó dolgokat a halmaz elemeinek mondjuk. A halmazokat általában nagy betűkkel jelöljük.

NEVEZETES SZÁMHALMAZOK

A *természetes számok halmazát* az $1, 2, 3, 4, \ldots$ számok alkotják. A természetes számok halmazának jele: $\mathbb{N}$. A természetes számok halmazának végtelen sok eleme van.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Az *egész számok halmazát* a $\ldots$-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,... számok alkotják. Az egész számok halmazának jele: $\mathbb{Z}$. Az egész számok halmazának végtelen sok eleme van.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

A *racionális számok halmazát* olyan számok alkotják, amelyek felírhatók $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ és $b \neq 0$. Például: $4 = \frac{4}{1}; 2,47 = \frac{247}{100}; 2,\dot{3} = \frac{7}{3}$. A racionális számok halmazának jele: $\mathbb{Q}$. A racionális számok halmazának végtelen sok eleme van.

Az ir*racionális számok halmazát* a végtelen nem szakaszos tizedes törtek alkotják. Például: $3,505005000500005\ldots$ Látható, hogy mindig egyel több nullát írtunk az ötösök közé. Az így kapott szám biztosan végtelen nem szakaszos tizedes tört. Az irracionális számok halmazának jele: $\mathbb{Q}^*$. A irracionális számok halmazának végtelen sok eleme van.

A racionális és az irracionális számok együtt alkotják a *valós számok halmazát.* A valós számok halmazának jele: $\mathbb{R}$.

A halmazt a következő módon adhatjuk meg:

- felsoroljuk az elemeit két kapcsos zárójel közé írva

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{eper, alma, barack\}$

- az elemek tulajdonságainak megadásával

  $C = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \le x < 5\}$

  A C halmazt a $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ egész számok alkotják.

  $D = \{x \in \mathbb{N} : x \ge 8\}$

  A D halmazt a $8, 9, 10, 11, 12, ...$ természetes számok alkotják.

  $E = \{x \in \mathbb{N} : x < -2\}$

  Az E halmazt olyan természetes számok alkotnák, amelyek kisebbek, mint mínusz kettő. Ilyen természetes szám nincs.

Ha egy halmaznak véges sok eleme van, akkor azt véges halmaznak nevezzük. Ha végtelen sok eleme van, akkor végtelen halmaznak. Azt a halmazt, amelynek egyáltalán nincs eleme üres halmaznak nevezzük. Az üres halmaz jele: $\emptyset$ vagy $\{\ \}$.

A példaként megadott halmazok számossága:

A, B, C – véges halmazok
D – végtelen halmaz
E – üres halmaz

Ha egy elem a halmazhoz tartozik, azt $\in$ jellel jelöljük. Ha nem tartozik a halmazhoz, azt $\notin$ jellel jelöljük.

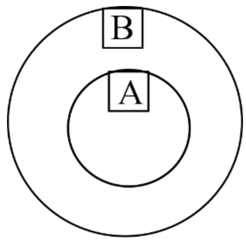
$8 \in A$ (8 eleme az A halmaznak)
$9 \notin C$ (9 nem eleme a C halmaznak)

Fontos megjegyezni, hogy egy halmazban az elemek sorrendje nem számít.
Két halmaz egyenlő, ha elemeik azonosak. Eszerint az $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{a, c, b\}$.

A halmazokat, azok egymás közti viszonyait, műveleteit Venn-diagramok segítségével tudjuk szemléltetni.

Az A halmazt a B halmaz *részhalmazának* nevezzük, ha az A halmaz minden eleme B halmaznak is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$.

$A \subseteq B$ ábrázolása Venn-diagrammal

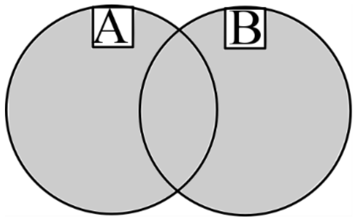


1. ábra

HALMAZMŰVELETEK

Az A és B halmaz *uniójának* nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek elemei az A vagy a B halmaznak. Jelölés: $A \cup B$.

$A \cup B$ ábrázolása Venn-diagrammal

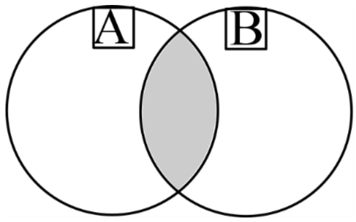


2. ábra

$A \cup A = A$. Bármely halmaz önmagával vett uniója önmaga.
$A \cup \emptyset = A$. Bármely halmaz üres halmazzal vett uniója önmaga.
$A \cup B = B \cup A$. Kommutatív (felcserélhető) tulajdonság.
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$. Asszociatív (csoportosítható) tulajdonság.

Az A és B halmaz *metszetének* nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek elemei az A és a B halmaznak. Jelölés: $A \cap B$.

$A \cap B$ ábrázolása Venn-diagrammal



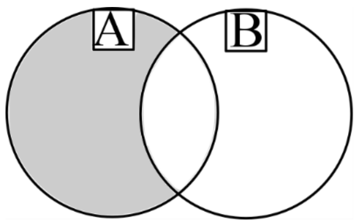
3. ábra

$A \cap A = A$. Bármely halmaz önmagával vett metszete önmaga.
$A \cap \emptyset = \emptyset$. Bármely halmaz üres halmazzal vett metszete üres halmaz.
$A \cap B = B \cap A$. Kommutatív (felcserélhető) tulajdonság.
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$. Asszociatív (csoportosítható) tulajdonság.

Halmazok uniójára és metszetére teljesül a disztributív tulajdonság.
Az unió disztributivitása a metszetre nézve: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
A metszet disztributivitása az unióra nézve: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Az A és B halmaz *különbségét* az A halmaznak azok az elemei alkotják, amelyek nem elemei a B halmaznak. Jelölés: $A \setminus B$.

$A \setminus B$ ábrázolása Venn-diagrammal



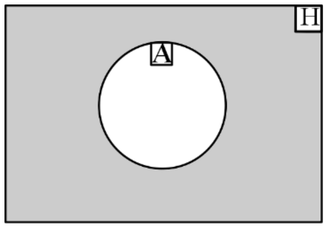
4. ábra

$A \setminus A = \emptyset$. Bármely halmazból önmagát kivonva üres halmazt kapunk.
$A \setminus \emptyset = A$. Bármely halmazból az üres halmazt kivonva önmagát kapjuk.
$A \setminus B \neq B \setminus A$. A kivonás nem kommutatív (felcserélhető) tulajdonság.
A kivonás nem asszociatív (csoportosítható) tulajdonság.

Ha az A halmaz részhalmaza H halmaznak, akkor az A halmaz H halmazra vonatkozó *komplementerhalmazát* (kiegészítő halmazát) a H halmaz azon elemei alkotják, amelyek nincsenek benne az A halmazban. Jelölés: $\overline{A}$. A H halmazt alaphalmaznak nevezzük.

Tehát: $\overline{A} = H \setminus A$

$\overline{A}$ ábrázolása Venn-diagrammal



5. ábra

Tetszőleges A és B halmazra igazak az alábbi összefüggések: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (De Morgan azonosságok)

Kidolgozott feladatok:

1. feladat

Legyen $A = \{1,2,3,4,10,11,12,16\}$, $B = \{1,3,5,6,7,11,12\}$ és $C = \{1,2,5,8,9,12,15\}$. Határozza meg a $(A \cap B) \setminus C$ halmazt!

Megoldás

Először meghatározzuk az $A \cap B$ halmazt. Mivel a metszetben azok az elemek vannak, amelyek mindkét halmazban benne vannak, ezért $A \cap B = \{1,3,11,12\}$. A kivonást úgy végezzük el, hogy az $A \cap B$ halmaz elemei közül elhagyjuk azokat, amelyek a C halmaznak is elemei, vagyis az 1 és 12 elemeket. Így $(A \cap B) \setminus C = \{3,11\}$.

2. feladat

Legyen $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^3 - 25x = 0\}$ és $B = \{x \in \mathbb{N} : |2x - 11| \leq 4\}$. Határozza meg a $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ és B\A halmazokat!

Először meghatározzuk az A halmaz elemeit. Az egyenletet az egész számok halmazán oldjuk meg.

$x^3 - 25x = 0$

$x(x^2 - 25) = 0$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$ vagy $x = \pm 5$. Tehát $A = \{-5, 0, 5\}$.

Meghatározzuk a B halmaz elemeit. Olyan természetes számokat keresünk, amelyekre

$|2x - 11| \le 4$. Ez pontosan akkor teljesül, ha:

$-4 \le 2x - 11 \le 4$ hozzáadunk 11-et

$7 \le 2x \le 15$ elosztjuk 2-vel

$3{,}5 \le x \le 7{,}5$

Tehát $B = \{4, 5, 6, 7\}$.

Az $A \cup B$ halmazba azok az elemek tartoznak, amelyek legalább az egyik halmazba beletartoznak, így $A \cup B = \{-5, 0, 4, 5, 6, 7\}$.

Az $A \cap B$ halmazba azok az elemek tartoznak, amelyek mind a kettő halmazba beletartoznak, így $A \cap B = \{5\}$.

Az $A \setminus B$ halmazba az A halmaz azon elemei tartoznak, amelyek nincsenek a B halmazban, tehát $A \setminus B = \{-5, 0\}$.

A $B \setminus A$ halmazba a B halmaz azon elemei tartoznak, amelyek nincsenek az A halmazban, tehát $B \setminus A = \{4, 6, 7\}$.

3. feladat

Legyen $A = \left\{ x \in \mathbb{N} : \frac{2x-8}{5} \le 2 \right\}$, $B = \{ x \in \mathbb{Z} : |x - 9| = 5 \}$ és $C = \{ x \in \mathbb{Z} : 7 - 3x < -8 \}$.
Határozza meg a $(A \setminus C) \cup B$ halmazt!

Megoldás

Először meghatározzuk az A halmaz elemeit. Az egyenlőtlenséget a természetes számok halmazán oldjuk meg.

$\frac{2x-8}{5} \le 2$

$2x - 8 \le 10$

$2x \le 18$

$x \le 9$

Tehát $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Most meghatározzuk a B halmaz elemeit. Olyan egész számokat keresünk, amelyekre $|x-9|=5$. Ez éppen akkor teljesül, ha:

$x-9=-5$ vagy $x-9=5$
$x=4$ vagy $x=14$

Vagyis $B=\{4,14\}$.

A C halmaz elemeit olyan egész számok alkotják, amelyek teljesítik a $7-3x<-8$ egyenlőtlenséget.

$$7-3x<-8$$
$$-3x<-15$$
$$x>5$$

A $C=\{6,7,8,9,10,.....\}$ halmaznak végtelen sok eleme van.

Az $A\setminus C$ halmazt azok az elemek alkotják amelyek az A halmazba beletartoznak, de a C halmazba nem. $A\setminus C=\{1,2,3,4,5\}$

Az $(A\setminus C)\cup B$ halmazba azok az elemek tartoznak, amelyek elemei $A\setminus C$ halmaznak vagy a B halmaznak. Így kapjuk, hogy $(A\setminus C)\cup B=\{1,2,3,4,5,14\}$.

4. feladat

Legyen $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-x-12\leq 0\}$ és $B=\{x\in\mathbb{R}: |2x+3|>7\}$. Határozza meg a $A\cup B, A\cap B, A\setminus B$ és B\A halmazokat!

Megoldás

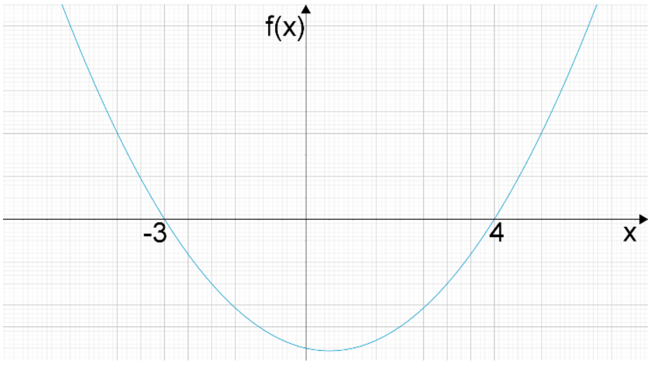
Először meghatározzuk az A halmaz elemeit. A másodfokú egyenlőtlenséget a valós számok halmazán oldjuk meg.

$$x^2-x-12\leq 0$$

Nézzük az $f(x)=x^2-x-12$ függvényt és határozzuk meg a zérushelyeit az $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ képlet segítségével.

$x_{1,2}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}$, vagyis a függvény zérushelyei a -3 és a 4.

Ábrázoljuk a függvényt.



6. ábra

Az egyenlőtlenség megoldásai azok a valós számok, ahol a függvényérték kisebb mint nulla (a függvény x tengely alatti része) vagy nulla. Az ábrából látható, hogy $A=[-3,4]$.

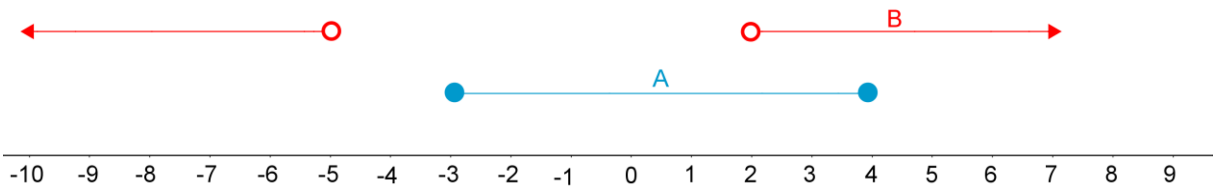
Meghatározzuk a B halmaz elemeit. Olyan valós számokat keresünk, amelyekre

$|2x+3|>7$

Ez éppen akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} 2x+3&<-7 &\quad \text{vagy} \quad 2x+3&>7 \\ 2x&<-10 &\quad \text{vagy} \quad 2x&>4 \\ x&<-5 &\quad \text{vagy} \quad x&>2 \end{aligned}$$

Tehát $B=]-\infty,-5[\cup]2,\infty[$.



7. ábra

Az $A\cup B$ halmazba azok az elemek tartoznak, amelyek vagy az A vagy a B halmazba beletartoznak, így $A\cup B=]-\infty,-5[\cup[-3,\infty[$.

Az $A\cap B$ halmazba azok az elemek tartoznak, amelyek mind a kettő halmazba beletartoznak, így $A\cap B=]2,4]$.

Az $A\setminus B$ halmazba az A halmaz azon elemei tartoznak, amelyek nincsenek a B halmazban, tehát $A\setminus B=[-3,2]$.

A $B \setminus A$ halmazba a B halmaz azon elemei tartoznak, amelyek nincsenek az A halmazban, tehát $B \setminus A =]-\infty, -5[\cup]4, \infty[$.

5. feladat

Határozza meg az $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : -x^2 - x + 20 > 0 \right\}$ halmaz valós számok halmazára vonatkozó komplementerhalmazát!

Megoldás

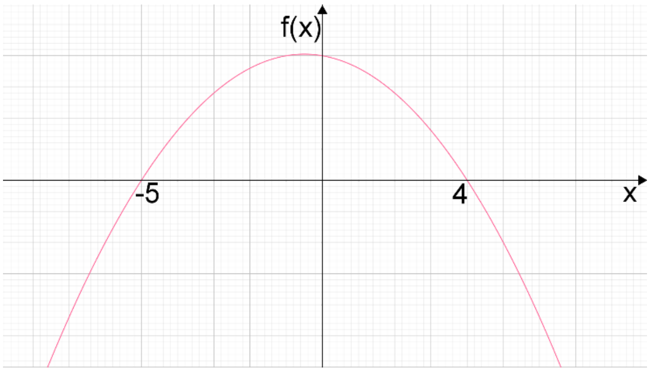
Először határozzuk meg az A halmazt, amit olyan valós számok alkotnak, amelyekre teljesül az $-x^2 - x + 20 > 0$ egyenlőtlenség.

Vegyük az $f(x) = -x^2 - x + 20$ függvényt és határozzuk meg a zérushelyeit.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 20}}{2 \cdot (-1)}$$

A függvény zérushelyei -5 és 4.

Ábrázoljuk a függvényt.

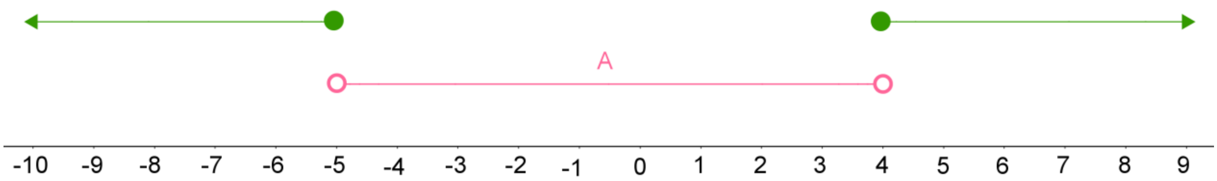


8. ábra

Az egyenlőtlenség megoldásai azok a valós számok, ahol a függvényérték nagyobb mint nulla (a függvény x tengely feletti része). Az ábrából látható, hogy $A =]-5, 4[$.

Az A halmaz valós számok halmazára vonatkozó komplementerhalmaza $\overline{A} = R \setminus A$. Tehát azokat a valós számokat keressük, amelyek nincsenek benne az A halmazban.

$\overline{A} =]-\infty, \infty[\setminus]-5, 4[=]-\infty, -5] \cup [4, \infty[$



9. ábra

6. feladat

Legyen $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x-4\leq 0\}$ és $B=\left\{x\in\mathbb{R}: 8-\frac{5x+7}{2}\leq -3\right\}$. Határozza meg az $A\cup B$ halmaz valós számok halmazára vonatkozó komplementerhalmazát!

Megoldás

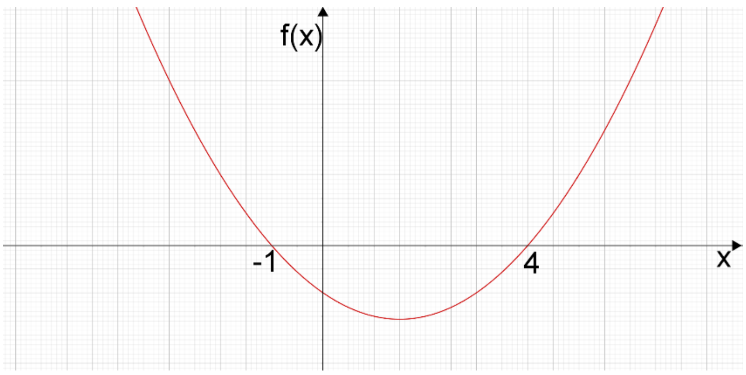
Először határozzuk meg az A halmazt, amit olyan valós számok alkotnak, amelyekre teljesül az $x^2-3x-4<0$ egyenlőtlenség.

Vegyük az $f(x)=x^2-3x-4$ függvényt és határozzuk meg a zérushelyeit.

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

A függvény zérushelyei -1 és 4.

Ábrázoljuk a függvényt.



10. ábra

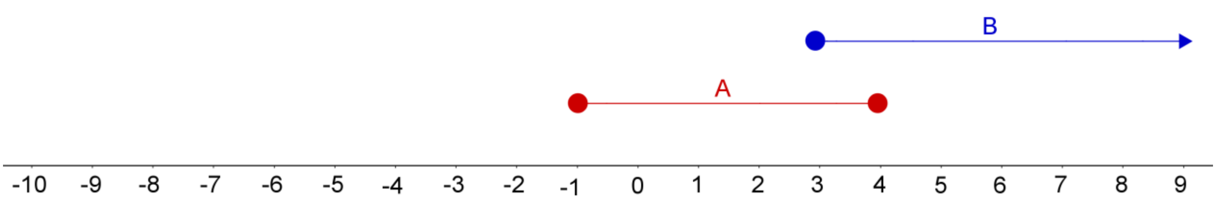
Az egyenlőtlenség megoldásai azok a valós számok, ahol a függvényérték kisebb mint nulla (a függvény x tengely alatti része), vagy nulla. Az ábrából látható, hogy $A=[-1,4]$.

Most határozzuk meg a B halmazt, amely olyan valós számokból áll, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$8-\frac{5x+7}{2}\le -3$$
$$16-5x-7\le -6$$
$$-5x+9\le -6$$
$$-5x\le -15$$
$$x\ge 3$$

Tehát $B=[3,\infty[$.

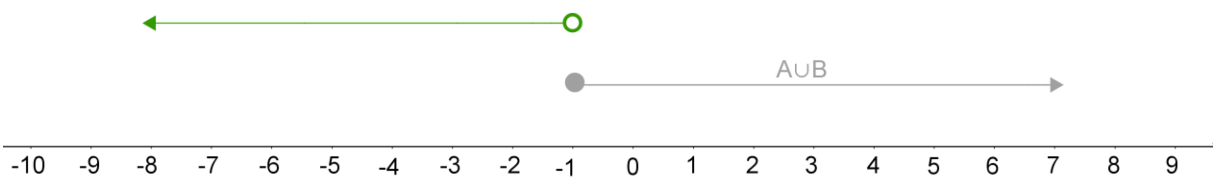
A $A\cup B$ halmazba azok a valós számok tartoznak, amelyek vagy az A halmaznak vagy a B halmaznak elemei. $A\cup B=[-1,\infty[$



11. ábra

Az $A\cup B$ halmaz valós számok halmazára vonatkozó komplementerhalmaza $\overline{A\cup B}=R\setminus(A\cup B)$. Tehát azokat a valós számokat keressük, amelyek nincsenek benne az $A\cup B$ halmazban.

$\overline{A\cup B}=]-\infty,\infty[\setminus[-1,\infty[=]-\infty,-1[$



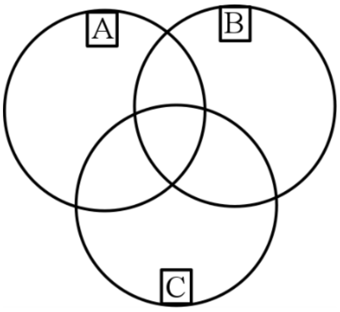
12. ábra

7. feladat

Legyenek A,B,C tetszőleges halmazok. Ábrázolja Venn-diagramon a $(B\setminus C)\cup(A\cap B\cap C)$ halmazt!

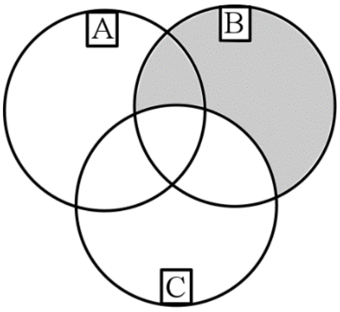
Megoldás

Ha semmilyen információnk nincs a halmazokról, akkor azt kell feltételezni, hogy mindhárom halmazna k vannak olyan elemei, amelyek a másik két halmazban nincsenek benne, továbbá bármely két halmaz metszetének vannak olyan elemei, amelyek a harmadik halmazhoz nem tartoznak hozzá és végül a három halmaz metszete sem üres. Ezért a következő ábrából indulunk ki.



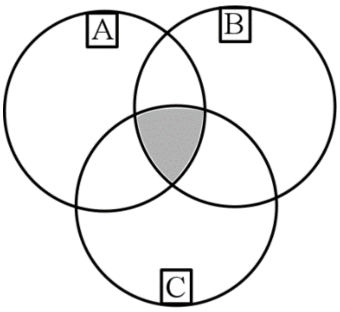
13. ábra

Ábrázoljuk először a $B \setminus C$ halmazt. Ide a B halmaznak azok az elemei tartoznak, amelyek nem elemei az A halmaznak.



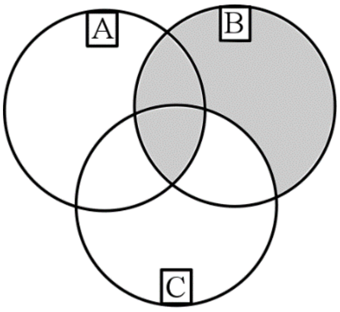
14. ábra

Ábrázoljuk a $A \cap B \cap C$ halmazt. Ide azok az elemek tartoznak, amelyek maid a három halmaznak elemei.



15. ábra

Végül ennek a két halmaznak az unióját kell venni. Tehát az $(B \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$ halmaz:



16. ábra

8. feladat

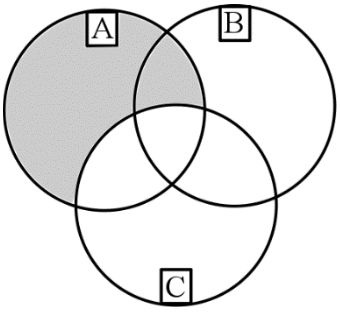
Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok. Igazolja Venn-diagram segítségével a következő egyenlőséget!

$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$$

Megoldás

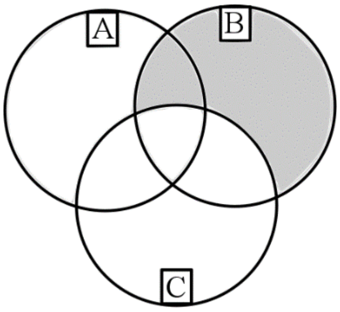
Ábrázoljuk az $A \setminus C$ és $B \setminus C$ halmazokat.

$A \setminus C$



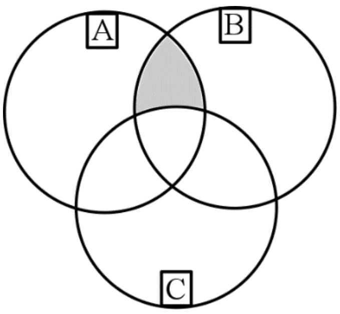
17.ábra

$B \setminus C$



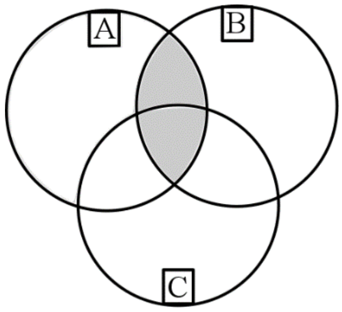
18. ábra

Az egyenlőség bal oldala az $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ halmaz.



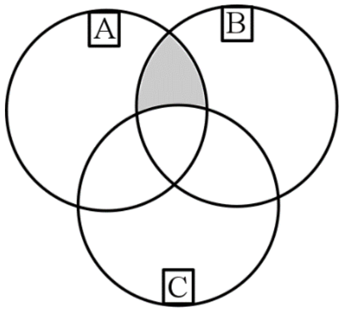
19. ábra

Ábrázoljuk az $A \cap B$ halmazt.



20. ábra

Az egyenlőség jobb oldala a $(A \cap B) \setminus C$ halmaz.



21. ábra

Mivel az egyenlet bal és jobb oldala megegyezik, ezért az egyenlőség teljesül.