DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

Konvexitás, elaszticitás

Tanulási cél

A másodrendű deriváltat vizsgálva milyen következtetéseket vonhatunk le a függvény konvexitására vonatkozóan. Elaszticitás fogalmának megismerése.

Motivációs példa

A közgazdászok gyakran használják a derivált helyett az elaszticitást. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy ha a termék árát megváltoztatjuk, akkor az hogy hat a termék iránti keresletre. Például, ha 1euroval növeljük a termék árát, akkor mennyivel változik meg a termék utáni kereslet. Azonban több szempont is létezik, amely szerint nem elegendő az árral szembeni érzékenységét a keresletnek ilyen módon mérni. Ugyanis 1 kg kenyér árának 1 euros növekedése nagyon jelentős, míg egy autó árának 1 euros növekedése jelentéktelen. Célszerűbb tehát arra a kérdésre keresni a választ, hogy ha a termék árát 1%-kal növeljük, akkor hány százalékkal változik a kereslet. Az így kapott számot a kereslet *árelaszticitásának* vagy *árrugalmasságának* nevezzük.

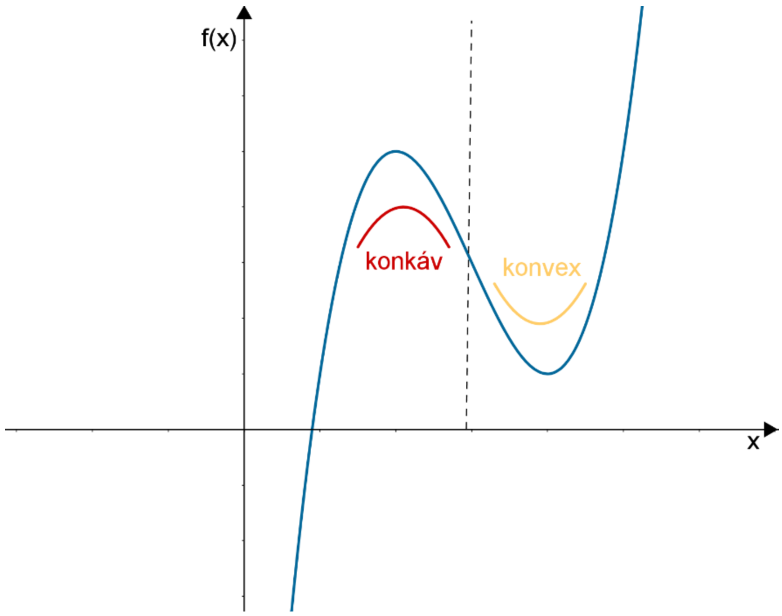
Egy termékből eladott mennyiséget az $f(x)=10+\frac{4000}{x}$.függvény adja meg, ahol x a termék ára. Hány százalékkal változik az eladott mennyiség, ha a termék 1000 Ft-os árát 2%-kal növelik?

Elméleti összefoglaló

<u>KONVEXITÁS</u>

Az elsőrendű derivált előjele meghatározza a függvény monotonitását. A másodrendű derivált előjeléből is következtetéseket vonhatunk le a függvény görbéjének alakjáról, ebben az esetben a függvény konvexitására vonatkozóan.

Definíció: Egy intervallumon értelmezett valós függvény ***konvex***, ha a függvénygörbe két pontját összekötő húr a függvénygörbe felett halad. Egy intervallumon értelmezett valós függvény ***konkáv***, ha a függvénygörbe két pontját összekötő húr a függvénygörbe alatt halad.



Tétel: Legyen az f függvény kétszer differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Az f függvény akkor és csak akkor konvex az $[a,b]$-n, ha $f''(x)>0$ az $]a,b[$ intervallumon, illetve az f függvény akkor és csak akkor konkáv az $[a,b]$-n, ha $f''(x)<0$ az $]a,b[$ intervallumon.

Definíció: Legyen az f függvény folytonos az $]a,b[$ intervallumon és $c\in]a,b[$. Ha f konvex $]a,c[$-n és konkáv $]c,b[$-n, vagy konkáv $]a,c[$-n és konvex $]c,b[$-n, akkor c inflexiós pontja az f függvénynek.

Tétel: Legyen az f függvény a c hely környezetében kétszer differenciálható. Ha a c pontban az f függvénynek ***inflexiós pontj***a van, akkor $f''(\mathrm{c})=0$.

Fontos megjegyezni, hogy a tétel megfordítása nem igaz. Abból, hogy az $f''(\mathrm{c})=0$, még nem következik, hogy c inflexiós pont.

Tétel: Ha az f függvény kétszer differenciálható c-ben és $f''(\mathrm{c})=0$, továbbá $]a,c[$-n $f''(x)>0$ és $]c,b[$-n $f''(x)<0$, vagy $]a,c[$-n $f''(x)<0$ és $]c,b[$-n $f''(x)>0$, azaz az $f''(x)$ függvény c-ben előjelet vált, akkor c inflexiós pontja az f függvénynek.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk majd a függvényeket konvexitás és inflexiós pont szempontjából.

1. Megvizsgáljuk, mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.

2. Kétszer deriváljuk a függvényt.

3. Megoldjuk az $f''(x)=0$ egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol inflexiós pont lehet.

4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a másodrendű derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s az adott részeken megvizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba behelyettesítünk.

5. Az értelmezési tartomány egyes részein a másodrendű derivált előjeléből következtetünk a konvexitásra.

Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk le az adatokat.

Az inflexiós pontnak van egy szemléletes jelentése is. Ha függvény az inflexiós pontja előtt és után is növekvő, akkor ez az a pont, ahol a növekedés mértéke csökkeni kezd. Ha a függvény csökkenve halad át az inflexiós pontján, akkor abban a pontban a csökkenés mértéke kezd lelassulni.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat

Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}$. Hol konvex az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x)=(x-2)(x+7)^3$?

Megoldás

Amikor egy függvényt olyan szempontból vizsgálunk, hogy hol konvex, illetve hol konkáv, akkor ugyanúgy járhatunk el, mint a növekedés és csökkenés vizsgálatánál. Ilyenkor azonban a második derivált előjelével kell foglalkoznunk. Ahol ugyanis pozitív egy függvény második deriváltja, ott konvex a függvény, ahol pedig negatív a második derivált, ott konkáv a függvény. Először meghatározzuk a második derivált zérushelyeit, azaz megoldjuk az $f''(x)=0$ egyenletet.

$$(x-2)(x+7)^3=0$$

Egy szorzat akkor egyenlő nullával, ha valamelyik tényezője nulla, így a szorzat két egyenletre bontható.

$$x-2=0 \qquad \text{vagy} \qquad (x+7)^3=0$$

Ezen egyenletek megoldásai: $x=2$ és $x=-7$.

Most hasonló táblázatot készítenünk, mint amikor növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából vizsgáltunk függvényt. Annyi csak a változás, hogy a második sorban nem az első, hanem a második derivált előjelét tüntetjük majd fel. Természetesen az értelmezési tartományt most a második derivált zérushelyei bontják részekre, hiszen ezeken a helyeken változhat meg a második derivált előjele. Ha egyelőre csak az első sort töltjük ki, akkor táblázatunk az alábbi lesz.

x	$]-\infty;-7[$	-7	$]-7;2[$	2	$]2;\infty[$
$f''(x)$					
$f(x)$					

Ezután vizsgáljuk meg a második derivált előjelét az értelmezési tartomány egyes részein. Ezt végrehajthatjuk úgy, hogy mindegyik intervallumból kiválasztottunk egy számot, és azt behelyettesítjük a $f''(x)$ függvénybe. Mivel azonban a második derivált egy szorzat, így megtehetjük azt is, hogy külön vizsgáljuk az egyes tényezők előjelét, és ebből következtetünk a szorzat előjelére.

Ha a $]-\infty;-7[$ intervallumból választunk egy számot, akkor nyilván $x-2<0$, azaz a derivált első tényezője negatív. Ekkor $x+7<0$ szintén teljesül, amiből $(x+7)^3<0$ is következik, tehát a második tényező is negatív. Két negatív szám szorzata pedig pozitív, azaz $x\in\,]-\infty;-7[$ esetén pozitív a második derivált, s ebből következően itt konvex a függvény.

Hasonlóan, ha $]-7;2[$ intervallumból választunk egy tetszőleges számot, akkor $x-2<0$ és $x+7>0$, amiből $(x+7)^3>0$. Vagyis a szorzat egyik tényezője negatív, másik tényezője pedig pozitív, tehát ekkor negatív a második derivált. Ez azt jelenti, ezen az intervallumon konkáv a függvény.

Végül ha $]2;\infty[$ intervallumból választunk egy számot, akkor $x-2>0$ és $x+7>0$, amiből $(x+7)^3>0$. Tehát mindkét tényező pozitív, s így a második derivált is pozitív. Ennek következtében ezen az intervallumon konvex a függvény.

Mivel a második derivált mindkét zérushelyében $(x=-7, x=2)$ megváltozik a második derivált előjele, így mindkét helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Ezek alapján már kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$]-\infty;-7[$	-7	$]-7;2[$	2	$]2;\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex $\cup$	inflexiós pont	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$

Legvégül adjunk választ a feladat kérdésére. Amint a táblázatból látható, a függvény konvex az $]-\infty;-7[$ és $]2;\infty[$ intervallumokon. Ugyanezt úgy is írhatjuk, hogy a függvény a $]-\infty;-7[\,\cup\,]2;\infty[$ halmazon konvex.

2. feladat

Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-0,5\}$. Hol konkáv az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x) = \frac{(10-x)}{(4x+2)^6}$?

Megoldás

Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{(10-x)}{(4x+2)^6} = 0$$

Tört csak úgy lehet zérus, ha a számlálója zérus, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$10 - x = 0$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $x = 10$.

Mivel egy függvény előjele ott is változhat, ahol a függvény nincs értelmezve az értelmezési tartományt a szakadási helyek is részekre bontják. Tehát az értelmezési tartományt egyrészt a második derivált zérushelye, másrészt az értelmezési tartományban levő szakadási hely osztja részekre.
Ha elkezdjük kitölteni a szokásos táblázatot, akkor most a következőt kapjuk.

x	$]-\infty;-0,5[$	$-0,5$	$]-0,5;10[$	10	$]10;\infty[$
$f''(x)$		X			
$f(x)$		X			

Vizsgáljuk ezután az egyes részeken a második derivált előjelét. Most olyan törtünk van, melynek nevezője minden $x \neq -\frac{1}{2}$ esetén pozitív, így csak a számlálót kell vizsgálnunk.

A $]-\infty;-0,5[$ intervallumom $10 - x > 0$ és a nevező pozitív. Két pozitív szám hányadosa pedig pozitív, azaz $x \in]-\infty;-0,5[$ esetén pozitív a második derivált, s ebből következően itt konvex a függvény.
A $]-0,5;10[$ intervallumom $10 - x > 0$ és a nevező is pozitív. Két pozitív szám hányadosa pedig pozitív, azaz ezen az intervallunom szintén pozitív a második derivált, s ebből következően itt is konvex a függvény.

Végül ha a $]10;\infty[$ intervallumból választunk egy számot, akkor $10 - x < 0$ és a nevező pozitív. Ebben az esetben a hányados negatív. Ez azt jelenti, ezen az intervallumon konkáv a függvény.

x	$]-\infty;-0,5[$	$-0,5$	$]-0,5;10[$	10	$]10;\infty[$
$f''(x)$	+	X	+	0	–

$f(x)$	konvex $\cup$	X	konvex $\cup$	inflexiós pont	konkáv $\cap$

A táblázatból kiolvasható, hogy a függvény a $]10;\infty[$ intervallumon konkáv.

3. feladat

Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. Hol van inflexiós pontja az $f(x)$ függvénynek, ha második deriváltja $f''(x) = (x-7)^6 \cdot (e^x - 1)$?

Megoldás

Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet. Egy függvénynek ugyanis ott lehet inflexiós pontja, ahol a második deriváltja 0.

$$(x-7)^6 \cdot (e^x - 1) = 0$$

Mivel a derivált szorzat, ezt egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$$(x-7)^6 = 0 \text{ vagy } e^x - 1 = 0$$

Az első egyenlet megoldása nyilván $x = 7$. A második egyenletet rendezzük át.

$$e^x - 1 = 0$$
$$e^x = 1$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát.

$$\ln(e^x) = \ln 1$$

Mivel a bal oldalon egy függvény és az inverze áll egy összetételben, így ott valójában egyszerűen x szerepel.

$$x = \ln 1 = 0$$

A második egyenlet megoldása így $x = 0$.

Két zérushelye van tehát a második deriváltnak, az $x = 0$ és az $x = 7$.

Ezek után a táblázat első sora kitölthető.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;7[$	7	$]7;\infty[$
$f''(x)$					
$f(x)$					

Vizsgáljuk ezután a második derivált előjelét. Mivel a derivált olyan szorzat, aminek első tényezője nem vesz fel negatív értéket, hiszen páros kitevőjű hatvány, így csak a második tényező előjelével kell foglalkoznunk.

A $]-\infty;0[$ intervallumon $e^x<1$, ezért $e^x-1<0$. Ekkor tehát negatív a második derivált, s itt konkáv a függvény.

A $]0;7[$ intervallumon $e^x>1$, ezért $e^x-1>0$. Így itt pozitív a második derivált, tehát konvex a függvény.

A $]7;\infty[$ intervallumon $e^x>1$, ezért $e^x-1>0$. Így itt is pozitív a második derivált, tehát itt is konvex a függvény.

Amint látható, a második derivált zérushelyei közül az $x=0$ helyen előjelet vált a második derivált, így itt inflexiós pontja van a függvénynek. Viszont az $x=7$ helyen a második derivált nem vált előjelet, így itt nincs inflexiós pont.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;7[$	7	$]7;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	nincs inflexiós pont	konvex $\cup$

A függvénynek tehát az $x=0$ helyen van inflexiós pontja.

4. feladat

Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós pont(ok)hoz tartozó függvényértéket!

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$$

Megoldás

Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell vizsgálnunk. Mivel nevező nem lehet zérus, így ki kell kötnünk, hogy a kitevőben $x\neq 0$, azaz $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Állítsuk elő a függvény második deriváltját, mert a konvexitás vizsgálatához erre lesz szükségünk.
Először az első derivált függvényt határozzuk meg. Az első derivált előállításakor összetett függvényt deriválunk. A külső függvény az e^x, a belső függvény pedig az $\frac{1}{x}$, azaz x^{-1}.

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-x^{-2}\right)=-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

A második deriválás során a szorzatra vonatkozó szabályt használjuk.

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-x^{-2}\right)\cdot\left(-x^{-2}\right)+e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(2x^{-3}\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot x^{-4}+2e^{\frac{1}{x}}\cdot x^{-3}=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^4}+2e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}$$

Ilyenkor célszerű kiemelni, amit csak lehet.

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right)$$

Miután a második deriváltat sikerült egyszerűbb alakra hozni, oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet.

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right)=0$$

Az első tényező nem lehet egyenlő nullával, hiszen az exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel. A második tényező szintén nem lehet nulla. Ennek következtében elég csak a harmadik tényezőt vizsgálnunk.

$$\frac{1}{x}+2=0$$

Mivel $x\neq 0$, ezért az egyenlet a következő alakra hozható.

$$1+2x=0$$

Ennek megoldása pedig $x=-0,5$.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, kitöltve az első sort. Az értelmezési tartományt egyrészt a második derivált zérushelye, másrészt az értelmezési tartományban levő szakadási hely osztja részekre.

x	$]-\infty;-0,5[$	$-0,5$	$]-0,5;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$				X	
$f(x)$				X	

Vizsgáljuk ezután a második derivált előjelét a különböző részeken. Vegyük figyelembe, hogy az $e^{\frac{1}{x}}$ csak pozitív értékeket vehet fel.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$]-\infty;-0,5[$	$-0,5$	$]-0,5;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	X	$+$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	X	konvex $\cup$

Ezután már csak az inflexiós ponthoz tartozó függvényértéket kell meghatároznunk. Ehhez helyettesítsük be a függvénybe az $x=-0,5$ értéket.

$$f(-0,5)=e^{\frac{1}{-0,5}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

5. feladat

Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós pont(ok)hoz tartozó függvényértéket!

$$f(x)=x^3+x\ln x$$

Megoldás

Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell vizsgálnunk. A logaritmus argumentuma kizárólag pozitív valós számok szerepelhetnek, tehát a kikötés $x>0$, azaz $D_f=\left]0;\infty\right[$.

Először az első derivált függvényt határozzuk meg. Az összeg második tagja egy szorzat (itt a szorzatra vonatkozó szabályt alkalmazzuk).

$$f'(x)=3x^2+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=3x^2+\ln x+1$$

A második derivált előállítása:

$$f''(x)=6x+\frac{1}{x}$$

Oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet.

$$6x+\frac{1}{x}=0$$

Mivel az értelmezési tartományból tudjuk, hogy x csak pozitív szám lehet, ezért az egyenlet a következő alakra hozható:

$$6x^2+1=0$$

Ennek az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása. Ugyanis x most csak pozitív szám lehet, akkor x^2 és $6x^2+1$ is csak pozitív lehet. Ez pedig azt jelenti, hogy az $f\left(x\right)$ függvénynek nincs inflexiós pontja. A $\left]0;\infty\right[$ intervallumon $6x^2+1>0$, tehát a függvény ezen az intervallumon konvex.

6. feladat

Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós pont(ok)hoz tartozó függvényértéket!

$$f(x)=\ln(x^2+2x+2)$$

Megoldás

Először az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy a logaritmus argumentuma kizárólag pozitív valós számok szerepelhetnek, tehát a kikötés $x^2+2x+2>0$. Ez az egyenlőtlenség bármely valós számra fennáll, mivel a polinomnak nincs zérushelye (diszkrimináns negatív). Tehát a függvény minden valós számra értelmezhető, $D_f=\mathbb{R}$.

Először az elsőrendű deriváltat számoljuk ki. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva kapjuk, hogy

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}\cdot(2x+2)=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

A másodrendű derivált kiszámolásánál a hányadosszabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$f''(x)=\frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$$

Alkalmazva, hogy a tört csak úgy lehet nulla, ha a számlálója nulla, így a következő egyszerűbb egyenletet kapjuk.

$$-2x^2-4x=0$$

$f''(x)$ zérushelyei: $-2;0$

Készítsük el a táblázatot, majd vizsgáljuk ezután az egyes részeken a második derivált előjelét. Most olyan törtünk van, melynek nevezője minden x esetén pozitív, így csak a számlálót kell vizsgálnunk.

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	inflexiós pont	konkáv $\cap$

Még az inflexiós pontokhoz tartozó függvényértékeket kell meghatároznunk.

$f(-2)=\ln 2=0,693$

$f(0)=\ln 2=0,693$

Elméleti összefoglaló

ELASZTICITÁS

A közgazdászok gyakran használják a derivált helyett az elaszticitást.

Arra a kérdésre keressük a választ, hogy ha a termék árát megváltoztatjuk az hogy hat a termék iránti keresletre. Például, ha 1euroval növeljük a termék árát, akkor mennyivel változik meg a termék utáni kereslet. Azonban több szempont is létezik, amely szerint nem elegendő az árral szembeni érzékenységét a keresletnek ilyen módon mérni. Ugyanis 1 kg kenyér árának 1 euros növekedése nagyon jelentős, míg egy autó árának 1 euros növekedése jelentéktelen. Célszerűbb tehát arra a kérdésre keresni a választ, hogy ha a termék árát 1%-kal növeljük, akkor hány százalékkal változik a kereslet. Az így kapott számot a kereslet *árelaszticitásának* vagy *árrugalmasságának* nevezzük.

Az elaszticitás megmutatja, hogy a független változó (x) értékét 1%-kal növelve, hány százalékkal változik a függő változó $(f(x))$.

Az elaszticitást a következő módon tudjuk definiálni:

$$E(x)=\frac{x}{f(x)}\cdot f'(x)$$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat

Határozza meg az $f(x)=\frac{3}{x^3}$ függvény elaszticitását!

Megoldás

Első lépésként határozzuk meg az $f'(x)$ függvényt.

$$f'(x)=3\cdot(-3)\cdot x^{-4}=-\frac{9}{x^4}$$

$$E(x)=\frac{x}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{x}{\frac{3}{x^3}}\cdot\left(-\frac{9}{x^4}\right)=\frac{x^4}{3}\cdot\left(-\frac{9}{x^4}\right)=-3$$

2. feladat

Egy termék iránti keresletet az x ártól függően az $f(x)=\frac{100}{x+8}$ függvény adja meg. Hány százalékkal változik a kereslet, ha a termék 200 Ft-os árát 1%-kal emelik?

Megoldás

Első lépésként határozzuk meg az $f'(x)$ függvényt.

$$f'(x) = -\frac{100}{(x+8)^2}$$

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{\frac{100}{x+8}} \cdot \left(-\frac{100}{(x+8)^2}\right) = \frac{x(x+8)}{100} \cdot \left(-\frac{100}{(x+8)^2}\right) = -\frac{x}{x+8}$$

Az elaszticitás azt mutatja meg, hogy ha a termék árát 1% -kal növeljük, akkor hány százalékkal változik a kereslet. Most a termék ára 200 Ft, tehát

$$E(200) = -\frac{200}{200+8} = -0,9615 \approx -0,96$$

A kereslet tehát 0,96 százalékkal csökken.

3. feladat

Egy termék iránti keresletet az x ártól függően az $f(x) = \frac{100}{x+8}$ függvény adja meg. Hány százalékkal változik a kereslet, ha a termék 200 Ft-os árát 4%-kal csökkentik?

Megoldás

Az előző feladat eredményeit felhasználva tudjuk, hogy $E(200) = -0,96$.

Az elaszticitás az 1%-kos növeléshez tartozó változást írja le, a 4 százalékkal való csökkentést az elaszticitás (−4)-szerese adja.

$$(-4) \cdot E(200) = (-4) \cdot (-0,96) = 3,84$$

Ha a termék ára 4 százalékkal csökken, akkor a kereslet 3,84 százalékkal nő.

4. feladat

Egy termékből eladott mennyiséget az $f(x) = 10 + \frac{4000}{x}$ függvény adja meg, ahol x a termék ára. Hány százalékkal változik az eladott mennyiség, ha a termék 1000 Ft-os árát 2%-kal növelik?

Megoldás

Az elaszticitás segítségével tudjuk meghatározni, hogy hány százalékkal változik az eladott mennyiség, ha a termék 1000 Ft-os árát 2%-kal növelik.

Első lépésként határozzuk meg az $f'(x)$ függvényt.

$$f'(x) = -\frac{4000}{x^2}$$

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{10+\frac{4000}{x}} \cdot \left(-\frac{4000}{x^2}\right) = \frac{x^2}{10x+4000} \cdot \left(-\frac{4000}{x^2}\right) = -\frac{4000}{10x+4000}$$

A termék ára 1000 Ft, tehát

$$E(1000) = -\frac{4000}{10 \cdot 1000 + 4000} = -0,2857 \approx -0,29$$

Az elaszticitás az 1%-kos növeléshez tartozó változást írja le, akkor a 2 százalékkal való növekedést az elaszticitás 2-szerese adja.

$$2 \cdot E(1000) = 2 \cdot (-0,29) = -0,58$$

Ha a termék ára 2 százalékkal nő, akkor a kereslet 0,58 százalékkal csökken.