

## KONVEXITÁS, ELASZTICITÁS

1. **B** Az  $f(x)$  függvény értelmezési tartománya  $D_f = R$ . Hol konkáv az  $f(x)$  függvény, ha második deriváltja  $f''(x) = (x + 6)^5(4x - 12)^8(x + 2)$ ?

**Megoldás**

$f''(x)$  zérushelyei:  $-6; -2; 3$

$D_f$	$] - \infty; -6[$	$x = -6$	$] - 6; -2[$	$x = -2$	$] - 2; 3[$	$x = 3$	$]3; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	0	+	0	+
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv	inflexiós pont	konvex	nincs inflexiós pont	konvex

A függvény konkáv a  $] - 6; -2[$  intervallumon.

2. **B** Az  $f(x)$  függvény értelmezési tartománya  $D_f = R$ . Hol konvex az  $f(x)$  függvény, ha második deriváltja  $f''(x) = (2x + 3)^2(7 - x)^3 e^{-3x}$ ?

**Megoldás**

$f''(x)$  zérushelyei:  $-\frac{3}{2}; 7$

$D_f$	$] - \infty; -\frac{3}{2}[$	$x = -\frac{3}{2}$	$] - \frac{3}{2}; 7[$	$x = 7$	$]7; \infty[$
$f''(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	konvex	nincs inflexiós pont	konvex	inflexiós pont	konkáv

A függvény konvex a  $] - \infty; 7[$  intervallumon.

3. **B** Az  $f(x)$  függvény értelmezési tartománya  $D_f = R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ . Hol konvex az  $f(x)$  függvény, ha második deriváltja  $f''(x) = \frac{(10 - x)}{(4x + 2)^6}$ ?

**Megoldás**

$f''(x)$  zérushelyei:  $10$

$D_f$	$] - \infty; -\frac{1}{2}[$	$x = -\frac{1}{2}$	$] - \frac{1}{2}; 10[$	$x = 10$	$]10; \infty[$
$f''(x)$	+	nincs ért.	+	0	-
$f(x)$	konvex	nincs ért.	konvex	inflexiós pont	konkáv

A függvény konvex a  $] - \infty; -\frac{1}{2}[ \cup ] - \frac{1}{2}; 10[$  intervallumon.

4. **B** Az  $f(x)$  függvény értelmezési tartománya  $D_f = R$ . Hol van inflexiós pontja(pontjai) az  $f(x)$  függvénynek, ha második deriváltja  $f''(x) = (x - 7)^6 \cdot (e^x - 1)$ ?

**Megoldás**

$f''(x)$  zérushelyei:  $0; 7$

$D(f)$	$] - \infty; 0[$	$x = 0$	$]0; 7[$	$x = 7$	$]7; \infty[$
$f''(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex	nincs inflexiós pont	konvex

A függvénynek az  $x = 0$  pontban van inflexiós pontja.

5. **B** Az  $f(x)$  függvény értelmezési tartománya  $D_f = R$ . Hol konkáv az  $f(x)$  függvény, ha második deriváltja  $f''(x) = \left(3^x - \frac{1}{3}\right)(x+4)^3$ ?

**Megoldás**

$f''(x)$  zérushelyei:  $-4; -1$

$D_f$	$] - \infty; -4[$	$x = -4$	$] - 4; -1[$	$x = -1$	$] - 1; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv	inflexiós pont	konvex

A függvény konkáv a  $] - 4; -1[$  intervallumon.

6. **B** Az  $f(x)$  függvény értelmezési tartománya  $D_f = R$ . Hol van inflexiós pontja (pontjai) az  $f(x)$  függvénynek, ha második deriváltja  $f''(x) = (3 - 2x)^5 \cdot (e^x - 1)$ ?

**Megoldás**

A függvénynek az  $x = 0$  és  $x = 1, 5$  pontokban van inflexiós pontja.

7. **B, V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontját (pontjait)!

$$f(x) = x^5 - 30x^3 + 2$$

**Megoldás**

$$D_f = R$$

A függvénynek az  $x = -3, x = 0$  és  $x = 3$  pontokban van inflexiós pontja.

8. **B, V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontját (pontjait)! Hol konvex és hol konkáv a függvény?

$$f(x) = 4x^3 + x \ln x$$

**Megoldás**

$$D_f = ]0; \infty[$$

Nincs inflexiós pontja a függvénynek.

A függvény a  $]0; \infty[$  intervallumon konvex.

9. **B, V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontját (pontjait)! Hol konvex es hol konkáv a függvény?

$$f(x) = \frac{3}{2}x^3 + x - x \ln x$$

**Megoldás**

$$D_f = ]0; \infty[$$

$D_f$	$]0; \frac{1}{3}[$	$x = \frac{1}{3}$	$] \frac{1}{3}; \infty[$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

A függvénynek az  $x = \frac{1}{3}$  pontban van inflexiós pontja.

A függvény konkáv a  $]0; \frac{1}{3}[$  intervallumon és konvex az  $] \frac{1}{3}; \infty[$  intervallumon.

10. **B, V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontját (pontjait)! Hol konvex es hol konkáv a függvény?

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 5)$$

**Megoldás**

$$D_f = \mathbb{R}$$

A függvénynek az  $x = -3$  és  $x = 1$  pontokban van inflexiós pontja.

A függvény konkáv a  $] -\infty; -3[ \cup ]1; \infty[$  intervallumon és konvex az  $] -3; 1[$  intervallumon.

11. **B, V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontjának (pontjainak) függvényértékét!

$$f(x) = e^x (x - 1)$$

**Megoldás**

$$D_f = \mathbb{R}, -\frac{2}{e}$$

12. **V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = e^{x^3}$$

**Megoldás**

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2$$

$$f''(x) = e^{x^3} \cdot 9x^4 + e^{x^3} \cdot 6x = e^{x^3}(9x^4 + 6x)$$

$$f''(x) \text{ zérushelyei: } 0; \sqrt[3]{-\frac{2}{3}} \approx -0,87$$

$D_f$	$] -\infty; \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}[$	$\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$	$]\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv	inflexiós pont	konvex

$$f(0) = 1; f\left(\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}\right) = e^{-\frac{2}{3}}$$

13. **V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = 4x^2 + \frac{2}{x}$$

**Megoldás**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = 8x - \frac{2}{x^2}$$

$$f''(x) = 8 + \frac{4}{x^3}$$

$$f''(x) \text{ zérushelyei: } \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \approx -0,79$$

$D_f$	$] -\infty; \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}[$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$	$]\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	nincs ért.	+
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv	nincs ért.	konvex

$$f\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

14. **V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

**Megoldás**

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-x^2+2x-1)}{e^{2x}} = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+2)e^x - (-x^2+2x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-2x+2+x^2-2x+1)}{e^{2x}} = \frac{x^2-4x+3}{e^x}$$

$$f''(x) \text{ zérushelyei: } 1; 3$$

$D_f$	$] -\infty; 1[$	1	$]1; 3[$	3	$]3; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv	inflexiós pont	konvex

$$f(1) = \frac{2}{e}; f(3) = \frac{10}{e^3}$$

15. **V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = x^2 + 2x - x \ln x$$

**Megoldás**

$$D_f = ]0; \infty[$$

$$f'(x) = 2x + 2 - (\ln x + x \frac{1}{x}) = 2x + 2 - \ln x - 1$$

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) \text{ zérushelyei: } \frac{1}{2}$$

$D_f$	$]0; \frac{1}{2}[$	$\frac{1}{2}$	$] \frac{1}{2}; \infty[$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,597$$

16. **V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$$

**Megoldás**

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}(2x+2) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f''(x) \text{ zérushelyei: } -2; 0$$

$D_f$	$] - \infty; -2[$	-2	$] - 2; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex	inflexiós pont	konkáv

$$f(-2) = \ln 2 = 0,693; f(0) = \ln 2$$

17. **V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

**Megoldás**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1) x^{-2} = 2x e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = (2x - 1) e^{\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{x}} + (2x - 1) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(2 - \frac{2x-1}{x^2}\right)$$

Az  $f''(x) = 0$ , ha  $2 - \frac{2x-1}{x^2} = 0$ , de ennek az egyenletnek nincs megoldása, így az  $f(x)$  függvénynek nincs inflexiós pontja.

$D_f$	$] - \infty; 0[$	$x = 0$	$]0; \infty[$
$f''(x)$	+	nincs ért.	+
$f(x)$	konvex	nincs ért.	konvex

18. **V** Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = e^x \cdot (x^2 - 5x + 6)$$

**Megoldás**

$$D_f = R$$

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 5x + 6) + e^x \cdot (2x - 5) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1)$$

$$f''(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1) + e^x \cdot (2x - 3) = e^x \cdot (x^2 - x - 2)$$

$$f''(x) \text{ zérushelyei: } -1; 2$$

$D_f$	$] - \infty; -1[$	$x = -1$	$] - 1; 2[$	$x = 2$	$]2; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv	inflexiós pont	konvex

$$f(-1) = \frac{12}{e}; f(2) = 0$$

19. **B** Határozza meg az  $f(x) = \frac{3}{x^3}$  függvény elaszticitását!

**Megoldás:**  $-3$

20. **B** Határozza meg az  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény elaszticitását!

**Megoldás:**  $0, 5$

21. **B** Egy termék iránti keresletet az  $x$  ártól függően az  $f(x) = \frac{100}{x+8}$  függvény adja meg. Hány százalékkal változik a kereslet, ha a termék 200 Ft-os árát 1%-kal emelik?

**Megoldás**

A kereslet tehát 0,96 százalékkal csökken.

22. **B,V** Az  $f(x)$  függvény egy termék iránti keresletet adja meg,  $x$  pedig a termék egységárát forintban. Állítsa elő az elaszticitás függvényt, ha  $f(x) = \frac{5}{(x-3)^2}$ !

**Megoldás**

$$E(x) = -\frac{2x}{x-3}$$

23. **B,V** Az  $f(x)$  függvény egy termék iránti keresletet adja meg,  $x$  pedig a termék egységárát forintban. Ha  $f(x) = e^{-0,04x+12}$ , akkor mit jelent  $E(50)$ ?

**Megoldás**

Ha termék 50 forintos egységárát 1%-kal növeljük, akkor a kereslet 2 százalékkal csökken.

24. **V** Egy termékből eladott mennyiséget az  $f(x) = 10 + \frac{4000}{x}$  függvény adja meg, ahol  $x$  a termék ára. Hány százalékkal változik az eladott mennyiség, ha a termék 1000 Ft-os árát 2%-kal növelik?

**Megoldás**

Ha a termék ára 2 százalékkal nő, akkor a kereslet 0,58 százalékkal csökken.

25. **V** Egy termék iránti keresletet az  $x$  ártól függően az  $f(x) = \frac{100}{x+8}$  függvény adja meg. Hány százalékkal változik a kereslet, ha a termék 200 Ft-os árát 4%-kal csökkentik?

**Megoldás**

Ha a termék ára 4 százalékkal csökken, akkor a kereslet 3,84 százalékkal nő.

26. **V** Egy termék iránti keresletet az  $x$  ártól függően az  $f(x) = 8000x^{-1,5}$  függvény adja meg. Hány százalékkal változik a kereslet, ha a termék 4 euros árát 3%-kal növelik?

**Megoldás**

Ha a termék ára 3 százalékkal nő, akkor a kereslet 4,5 százalékkal csökken.