2. Százalékszámítás és alkalmazásai

Tanulási cél: Százalékszámítás ismétlése, megismerni az ÁFA valamint az egyszerű és kamatos kamat számítási módszereit

Motivációs példa

Az újságban olvassuk, hogy a csirkehús ÁFA kulcsa csökken. Az eddigi 25%-ról 5%-ra mérséklődik. Mennyibe fog kerülni akkor egy kg csirkemell?
Melyik megtakarítási formára helyezzük el a pénzünket, melyik feltétellel járunk jobban?
A hétköznapi életben (szezonvégi leárazásoknál, az évvégi adóbevallásnál, egy termék vagy szolgáltatás után fizetendő adó kiszámításánál, amikor pénzt helyezünk el egy bankban, vagy amikor kölcsönt szeretnénk felvenni lakásvásárlásnál) ilyen és ehhez hasonló kérdések merülnek fel. Megoldásnál az egyik leggyakrabban előforduló matematikai módszert, a százalékszámítást alkalmazzuk. Ebben a fejezetben a százalékszámítás lépéseit ismételjük át, majd legegyszerűbb alkalmazásait nézzük meg.

Elméleti összefoglaló:

Matematikában gyakran előfordul, hogy arra vagyunk kíváncsiak, hogy az egyik mennyiség egy másik mennyiség hányszorosa, azaz mennyi az arányuk. Az arány értékének egyik legelterjedtebb megadási módja, ha az eredményt századokban adjuk meg.

Definíció: Az x és y arányán az $\frac{x}{y}$ hányadost értjük, amely megmutatja, hogy x hányszorosa y-nak, vagy másképp megfogalmazva x hanyadrésze y-nak.

Példa: 3 és 15 aránya $\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$; ami azt jelenti, hogy a 3 a 15-nek 0,2 -szerese, másképp megfogalmazva 20 század része.

Példa: 8 és 5 aránya $\frac{8}{5} = 1,6$; ami azt jelenti, hogy a 8 az 5-nek 1,6 szorosa vagy másképp 160 század része.

Definíció: Egy mennyiség 0,01 részét a mennyiség 1 százalékának (1%) nevezzük.
Egy mennyiség $\frac{p}{100}$ részét a mennyiség p %-ának nevezzük.

Százalékérték kiszámítása: Jelölje T_0 az alapot, T a százalékértéket és p a százaléklábat, akkor T_0-nak a p százaléka egyenlő:

$$T = T_0 \frac{p}{100}$$

Alap: Mindig az a mennyiség, aminek a valahány százalékát szeretnénk számolni.

Százalékláb: A százalékban megadott érték.

Százalékérték: Az alap valamely százalékkal módosított értéke.

Ha az alapot p százalékkal növeljük, akkor a számolás módja a következő:

$$T = T_0 + T_0 \frac{p}{100} = T_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Ha az alapot p százalékkal csökkentjük, akkor a számolás módja a következő:

$$T = T_0 - T_0 \frac{p}{100} = T_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozza meg 350-nek az 1%-át, 28%-át, majd 153%-át!

Megoldás: 350-nek az 1%-a, azaz az 0,01 része: $350 \cdot 0,01 = 3,5$
350-nek a 28%-a, azaz az 0,28 része: $350 \cdot 0,28 = 98$
350-nek a 153%-a, azaz az 1,53 része: $350 \cdot 1,53 = 535,5$

2. feladat: Határozza meg 5 000 Ft 15%-ának a 30%-át!

Megoldás: Két lépésben számoljunk. Először vegyük 5 000 Ft-nak a 15%-át.

$$5\ 000 \cdot 0,15 = 750\,\text{Ft}$$

Majd a kapott 750 Ft-nak a 30%-át.

$$750 \cdot 0,3 = 225\,\text{Ft}$$

Az eredmény 225Ft.
A számolást egyszerűbben is felírhatjuk: $5\ 000 \cdot 0,15 \cdot 0,3 = 225$Ft.

3. feladat: Egy láda alma teljes tömege 28 kg. Hány kg alma van a ládában, ha tudjuk, hogy a láda tömege a teljes tömeg 9%-a?

Megoldás: Ha a teljes tömeg 9%-át a láda tömege adja, akkor 28 kg 0,09 része a ládatömege, a maradék 0,91 része pedig az alma tömege. Így a 28kg 0,91 része:

$$28(1 - 0,09) = 28 \cdot 0,91 = 25,48\,\text{kg}$$

Tehát az alma tömege 25,48 kg.

4. feladat: Egy 12 000 Ft-os termék árát 25%-kal csökkentették. Mennyibe kerül most?

Megoldás: Ha a termék ára 25%-kal csökken, akkor ez azt jelenti, hogy a teljes ár 0,25 részét nem kell kifizetni, csak a maradék 0,75 részt. Így $12\ 000 \cdot (1 - 0,25) = 12\ 000 \cdot 0,75 = 9\ 000$ Ft.

Megjegyzés: Úgy is gondolkodhattunk volna, hogy $12\ 000 \cdot 0,25 = 3\ 000$Ft-ot elengednek, tehát a ruha csak 9 000 Ft-ba kerül.

5. feladat: Ha egy szolgáltatás ára tavaly még 7 000 Ft volt, idén pedig 8 500 Ft -ba kerül, akkor hány százalékkal nőt a szolgáltatás ára?

Megoldás: Nézzük meg, hogy az új ár hányszorosa a régi árnak, ehhez osszuk el az új árat a régivel:

$$\frac{8\ 500}{7\ 000} = 1,2143$$

Ez azt jelenti, hogy az új ár a régi ár 0,2143 részével több, ami 21,43%-os növekedést jelent.

6. feladat: Egy gép árát 20 %-kal csökkentették. Néhány nappal később a csökkentett árra még további 15 %-os engedményt adtak. Ha az eredeti ár 32 000 Ft volt, akkor mennyi lett a végső ár? Hány százalákos csökkenést eredményezett a kétszeri árváltozás?

Megoldás: Nézzük az első árcsökkentést. A gép árának csak 0,8 részét kell fizetni.

$$32\ 000 \cdot (1-0,2) = 32\ 000 \cdot 0,8 = 25\ 600 \text{ Ft}$$

Tehát az első csökkentés után 25 600 Ft-ot kell fizetni. Ezt az új árat kell csökkenteni 15%-kal.

$$25\ 600 \cdot (1-0,15) = 25\ 600 \cdot 0,85 = 21\ 760 \text{ Ft}$$

A második árcsökkentés utáni ár 21 760 Ft.

Vegyük észre, hogy a számolást egyszerűbben is felírhatjuk.

$$32\ 000 \cdot (1-0,2)(1-0,15) = 32\ 000 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 21\ 760 \text{ Ft}$$

A számolásból jól látszik, hogy a végösszeg a 32 000-nek a $0,8 \cdot 0,85 = 0,68$-szorosa, tehát az árcsökkenés 32%-os.

7. feladat: Egy bizonyos áru árát csökkentették 30%-kal, majd az így kapott árat emelték 25%-kal. Hány százaláka a kétszeri változással kapott új ár a régi árnak? Hány százalékos és milyen irányú a végső árváltozás?

Megoldás: Ha csökkentik az árat 30%-kal, akkor csak a régi ár 70%-át kell kifizetni. Az így kapott árat növeljük 25%-kal, azaz venni kell az új ár 125%-át.

$$T_0 \cdot (1-0,3)(1+0,25) = T_0 \cdot 0,7 \cdot 1,25 = T_0 \cdot 0,875$$

Tehát a végső ár az eredeti ár 0,875 része, azaz 87,5%-a, ami 12,5%-os árcsökkenésnek felel meg.

8. feladat: Egy termék árát először 15%-kal, majd pár héttel később újabb 10%-kal emelték. Ha a termék az emelések után 6 325 Ft-ba kerül, akkor mennyibe került eredetileg?

Megoldás: A keresett árat jelöljük T_0-lal és írjuk fel, hogy a két áremelés hatására T_0 hogyan változik.

$$T_0 \cdot (1+0,15)(1+0,1) = T_0 \cdot 1,15 \cdot 1,1 = T_0 \cdot 1,265 = 6\ 325$$

Kaptunk egy egyszerű egyenletet T_0-ra, amit megoldva kapjuk, hogy $T_0 = 5\ 000$ Ft.

Elméleti összefoglaló

Szolgáltatások és megvásárolható termékek árait szokás fogyasztói vagy *bruttó ár*nak nevezni, ami két részből tevődik össze. Egyrészt az alap vagy tiszta árból, amit szokás *nettó ár*nak nevezni, másrészt az ÁFA-ból (*Általános Forgalmi Adó*), ami a nettó ár valahány százalékát jelenti. Az ÁFA értéke az államilag szabályozott áfakulccsal adható meg. Az általános áfakulcs ma Magyarországon 27%. Bizonyos termékek esetén ettől eltérő értékek is előfordulnak.

Határozzuk meg először az ÁFA értékét, ha az áfakulcsot $p_{ÁFA}$-val jelöljük.

$$\text{ÁFA} = \text{Nettó ár} \cdot \frac{p_{ÁFA}}{100}$$

Ha $p_{ÁFA} = 27\%$, akkor $\text{ÁFA} = \text{Nettó ár} \cdot 0,27$.

Az ÁFA ismeretében most már írjuk fel az ÁFA-val növelt összeget.

$$\text{Bruttó ár} = \text{Nettó ár} + \text{ÁFA} = \text{Nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{p_{\text{ÁFA}}}{100}\right)$$

Az egyenletet átrendezve a nettó ár kifejezhető a bruttó árral.

$$\text{Nettó ár} = \frac{\text{Bruttó ár}}{1 + \frac{p_{\text{ÁFA}}}{100}}$$

Ha az áfakulcs éppen 27%, akkor

$$\text{Bruttó ár} = \text{Nettó ár} \cdot 1,27$$

$$\text{Nettó ár} = \frac{1}{1,27} \cdot \text{Bruttó ár} = 0,7874 \cdot \text{Bruttó ár}$$

Az ÁFA kifejezhető a bruttó árral is.

$$\text{ÁFA} = \text{Bruttó ár} - \text{Nettó ár} = \text{Bruttó ár}\left(1 - \frac{1}{1,27}\right) = \text{Bruttó ár} \cdot 0,2126$$

Ügyeljünk az áfakulcs megváltozásánál a megfogalmazásra. Későbbiekben látni fogjuk, ha az áfakulcs például 3%-ról 4%-ra változik, azt nem lehet úgy mondani, hogy a változás egy 1%-os. (3-nak az 1%-a 0,03, így ha 3% értéke 1%-kal nő akkor 3,03% lesz.) Helyette a helyes megfogalmazás az, hogy a 3%-os áfakulcs 1 *százalékpont*tal nő, tehát 4% lesz.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Egy termék nettó ára 15 000 Ft. 27%-os ÁFA kulccsal számolva mennyi lesz a termék után fizetendő ÁFA és mennyi a bruttó ára?

Megoldás: 27%-os áfakulccsal számolva a fizetendő adó:

$$\text{ÁFA} = 15\ 000 \cdot 0,27 = 4\ 050 \text{ Ft}$$

A termék bruttó ára pedig:

$\text{Bruttó ár} = 15000 \cdot 1,27 = 19050 \text{ Ft}$

2. feladat: Egy termék bruttó ára 50 000 Ft. 27%-os áfakulccsal számolva mennyi ÁFA-t tartalmaz a termék ára, és mennyi a nettó ára?

Megoldás: Először határozzuk meg a nettó árat, majd a bruttó és nettó ár különbségével az ÁFA kifejezhető.

$$\text{Nettó ár} = 50\ \ 000 \cdot \frac{1}{1,27} = 50\ 000 \cdot 0,7874 = 39\ \ 370 \text{ Ft}$$

$$\text{ÁFA} = 50\ 000 - 39\ \ 370 = 10\ \ 630 \text{ Ft}$$

A bruttó ár és áfakulcs ismeretében a fizetendő ÁFA közvetlenül is kifejezhető:

$$\text{ÁFA} = 50\ 000\left(1 - \frac{1}{1,27}\right) = 50\ 000 \cdot 0,2126 = 10\ \ 630 \text{ Ft}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a számolás azt jelenti, hogy a bruttó ár 21,26% az ÁFA.
Általában $1 - \frac{1}{p_{ÁFA}}$ megadja, hogy a bruttó ár hány százaléka az ÁFA.

3. feladat: Egy termék áfakulcsa 20% és 5 000 Ft ÁFA-t fizetünk utána. Mennyi a termék nettó illetve bruttó ára?

Megoldás: Tudjuk, hogy a keresett nettó ár 20%-a éppen 5 000 Ft.

$$5\ \ 000 = \text{Nettó ár} \cdot 0,2$$

Fejezzük ki az egyenletből a nettó árat.

$$\text{Nettó ár} = \frac{5\ \ 000}{0,2} = 25\ 000 \text{ Ft}.$$

Bruttó ár=Nettó ár+ÁFA=30 000 Ft

4. feladat: Egy termék áfakulcsa 25%. A bruttó ár hány százaléka a befizetendő ÁFA?

Megoldás: Írjuk fel az ÁFA és a bruttó ár arányát.

$$\frac{\text{ÁFA}}{\text{Bruttó ár}} = \frac{\text{Nettó ár} \cdot 0,25}{\text{Nettó ár} \cdot 1,25} = \frac{0,25}{1,25} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Tehát az ÁFA a bruttó ár 0,2 része, azaz a 20%-a.

5. feladat: Ha egy termék ÁFA-ja a bruttó ár 16%-a, akkor mekkora a termék áfakulcsa?

Megoldás: Az áfakulcs azt mutatja meg, hogy a befizetett adó hány százaléka a nettó árnak. Tudjuk, hogy a bruttó ár 10%-a ÁFA, akkor a 90%-a pedig a nettó ár. Írjuk fel az ÁFA és nettó ár arányát.

$$\frac{\text{ÁFA}}{\text{Nettó ár}} = \frac{0,16 \cdot \text{Bruttó ár}}{0,84 \cdot \text{Bruttó ár}} = \frac{16}{84} = 0,1905$$

Tehát az áfakulcs 19,05%.

6. feladat: Egy termék áfakulcsa 27%-ról 20%-ra csökken. Hány százalékos lesz az árcsökkenés, ha a termék nettó ára nem változik?

Megoldás: Azt szeretnénk megtudni, hogy az új bruttó ár hány százaléka a régi bruttó árnak. Fejezzük ki a régi és új bruttó árat a változatlan nettó árral:

$$\text{régi Bruttó ár} = \text{Nettó ár} \cdot 1{,}27$$
$$\text{új Bruttó ár} = \text{Nettó ár} \cdot 1{,}2$$

A kérdéses arány számításához osszuk el az új bruttó árat a régivel.

$$\frac{\text{új Bruttó ár}}{\text{régi Bruttó ár}} = \frac{\text{Nettó ár} \cdot 1{,}2}{\text{Nettó ár} \cdot 1{,}27} = \frac{1{,}2}{1{,}27} = 0{,}945$$

Mivel az új bruttó ár a régi 0,945 része, azaz a régi ár 0,055 részével csökkent, ezért az árcsökkenés 5,5%-os. Tehát az áfakulcs 7 százalékpontos csökkenése az termék árának 5,5%-os csökkenését eredményezte.

7. feladat: Egy termék 15%-os áfakulcsa 25%-ra változik. Hány százalékkal nő a termék bruttó ára, ha a nettó ár nem változik?

Megoldás: Először írjuk fel a régi és új bruttó árakat az ismert áfakulcsokkal.

$$\text{régi Bruttó ár} = \text{Nettó ár} \cdot 1{,}15$$
$$\text{új Bruttó ár} = \text{Nettó ár} \cdot 1{,}25$$

Írjuk fel az új és a régi bruttó ár arányát.

$$\frac{\text{új Bruttó ár}}{\text{régi Bruttó ár}} = \frac{\text{Nettó ár} \cdot 1{,}25}{\text{Nettó ár} \cdot 1{,}15} = \frac{1{,}25}{1{,}15} = 1{,}0870$$

A kapott érték azt jelenti, hogy a régi bruttó ár 0,0870 részével nőtt, ezért a termék bruttó ára 8,70%-kal nőtt. Tehát az áfakulcs 15%-ról 10 százalékponttal nő, akkor a termék ára 8,70%-kal emelkedik.

8. feladat: Egy termék áfakulcsa 27%-ról 20%-ra csökkent. Közben a termék nettó ára 4%-kal nőtt. Hogyan változott a termék új ára a régihez viszonyítva?

Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan most is az új és a régi bruttó ár arányát szeretnénk meghatározni, de most figyelembe kell venni, hogy közben a nettó ár is változott.

$$\text{régi Bruttó ár} = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}27$$
$$\text{új Nettó ár} = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}04$$
$$\text{új Bruttó ár} = \text{új Nettó ár} \cdot 1{,}2 = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}2$$

A kérdéses arány számításához most is osszuk el az új bruttó árat a régivel.

$$\frac{\text{új Bruttó ár}}{\text{régi Bruttó ár}}=\frac{\text{Nettó ár}\cdot 1,04\cdot 1,2}{\text{Nettó ár}\cdot 1,27}=\frac{1,04\cdot 1,2}{1,27}=0,9827$$

Mivel az új bruttó ár a régi 0,9827 része, azaz a régi ár 0,0173 részével csökkent, ezért az árcsökkenés 1,73%-os. Tehát az áfakulcs 7 százalékpontos csökkenése és a nettó ár 4%-os növekedése a termék árának 1,73%-os csökkenését eredményezte.

Elméleti összefoglaló

Ha egy pénzintézetbe betesszük a pénzünket, akkor a pénz használatáért a bank fizet nekünk, amit szokás *kamat*nak nevezni. A kamat mértékét a betett összeg, a *tőke* (jele legyen T_0) valamely százalékában határozzák meg. Ezt a százalékértéket *kamatláb*nak hívjuk, és jelöljük R-rel. A kamatláb mindig egy megadott időintervallumra, úgynevezett *kamatperiódus*ra vonatkozik.

Egy kamatperiódus elteltével a felvehető összeget $T=T_0\left(1+\frac{R}{100}\right)$ összefüggés alapján számoljuk, ahol T a felvehető végösszeg.
Általában az intézetek éves kamatlábat adnak meg, függetlenül attól, hogy mennyi időre kötjük le a pénzünket. Így adódhat, hogy a pénzünket nem egy, hanem több kamatperiódusra is leköthetjük. Ekkor a kamatszámításnak kétféle módját szokás alkalmazni. A két számolási mód abban tér el, hogy a tőkét hogyan növetjük a kamattal.

Az első számolási módot *egyszerű vagy lineáris kamatozás*nak nevezzük. Ilyenkor a kamatperiódus végén jóváírják a kamatot, majd a következő periódusban újra az eredeti alap után számolják a kamatot. Tehát a kamat nem kamatozik. (Felfogható úgy is, hogy az összes kamatperiódus után egyben írják jóvá a kamatot.) A számolás módja pedig:

$$\text{Kamat}=T_0\cdot\frac{R}{100}\cdot \text{t} \quad\text{és}\quad T=T_0\cdot\left(1+\frac{R}{100}\cdot \text{t}\right),$$

ahol t a futamidő években megadva. Ezt a számolási módot akkor használják leggyakrabban, amikor nem telik el egy teljes kamatperiódusnyi idő. Ilyenkor az egy kamatperiódusra eső kamatnak csak az időarányos részét fizetik ki. Ez azt jelenti, hogy t értéke lehet nem egész szám is.
Nézzünk erre néhány példát! Vegyük azt az alapesetet, amikor a kamatláb egy évre vonatkozik.

Ha a pénzünket 3 illetve 5 évre tesszük a bankba, akkor a t értéke 3 illetve 5.

Egy hónapos lekötés, futamidő esetén teljes kamatperiódusra eső kamatnak csak $\frac{1}{12}$ részét kapjuk meg, t értéke tehát $\frac{1}{12}$.

15 hónapos lekötés, futamidő esetén az egy hónapra eső kamat 15-szörösét kapjuk, ekkor $t=\frac{15}{12}$.

50 napos lekötés, futamidő esetén az egy napra eső kamat 50-szörösét kapjuk meg, tehát $t=\frac{50}{360}$.

A másik esetben minden kamatperiódus végén hozzáírják a kamatot a tőkéhez (*tőkésítik*), és a kamattal növelt összeg fog tovább kamatozni. Tehát itt a kamat is kamatozik. Ezt az esetet *kamatos kamat*nak nevezzük és a felvehető összeget a $T = T_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ összefüggés alapján számolunk, ahol n a kamatperiódusok száma.
Kamatos kamatnál is az a gyakorlat, hogy éves kamatlábat adnak meg. De a tőkésítés gyakrabban, például havonta vagy negyedévente is történhet. A tőkésítési periódusra eső kamatlábat ekkor az éves kamatláb időarányos részeként kapjuk, és utána már a szokásos kamatos kamattal számolunk.
Nézzünk néhány példát! Ha az éves kamatláb 6%, és havonta tőkésítenek, akkor a havi kamatláb a 6%-nak az $\frac{1}{12}$ része, azaz 0,5%. Negyedéves tőkésítésnél a negyedéves kamatláb 6%-nak a negyede, azaz 1,5%.
Ha az évközi tőkésítések számát növeljük, akkor a felvehető összeg is növekedni fog. Bebizonyítható, hogy a felvehető összeg nem fog minden határon túl növekedni.

Kidolgozott feladatok

1. **feladat:** 150 000 Ft elhelyezünk egy bankban évi 5%-os kamatlábbal számolva. 3 év múlva mekkora összeget vehetünk fel egyszerű, majd kamatos kamattal számolva?

Megoldás: Számoljunk egyszerű kamattal. A kamat nem kamatozik, minden évben a 150 000 Ft 5%-át fogják jóváírni. A kamatláb $R = 5\%$, kamatperiódusok száma $n = 3$. Helyettesítsünk be a megadott képletbe.

$$T = T_0\left(1+\frac{R}{100}\cdot n\right) = 150\ 000\left(1+\frac{5}{100}\cdot 3\right) = 172\ 500\,\text{Ft}$$

Kamatos kamattal számolva a kamat is kamatozik. Itt is $R = 5\%$ és $n = 3$. Helyettesítsünk be a megadott képletbe.

$$T = T_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^n = 150\ 000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 = 173\ 643{,}75\,\text{Ft}$$

Jól látható, hogy kamatos kamattal több pénzt tudunk felvenni lejáratkor.

2. **feladat:** 2 000 000 Ft-ot egy bankban elhelyezünk. Évi 5%-os kamatlábbal és egyszerű kamatozással számolva mennyi pénzt vehetünk fel 3 hónap múlva?

Megoldás: Ebben az esetben nem a teljes kamatperiódusra, hanem csak 3 hónapra hagyjunk a pénzünket a bankba, így a teljes kamat időarányos részét kapjuk csak meg.
Mivel a 3 hónap a teljes év negyede, csak a teljes éves kamat negyedét, azaz 0,25 részét kapjuk meg. Ebben az esetben tehát $n = 0{,}25$.

$$T = T_0\left(1+\frac{R}{100}\cdot n\right) = 2\ 000\ 000\left(1+\frac{5}{100}\cdot 0{,}25\right) = 2\ 025\ 000\,\text{Ft}$$

3. feladat: 4 évre 1 500 000 Ft-ot elhelyezünk egy bankban. Kamatos kamattal és havi tőkésítéssel számolva mekkora összeget vehetünk fel, ha az éves kamatláb 3%?

Megoldás: Kamatperiódus egy év, de havonta tőkésítünk, akkor a tőkésítések száma a 4 év alatt $n = 12 \cdot 4$ és a tőkésítési periódusra eső kamatláb pedig $R_{\text{havi}} = 3 \cdot \frac{1}{12} = 0,25\%$.

$$T = T_0 \left(1 + \frac{R_{\text{havi}}}{100}\right)^n = 1\,500\,000 \left(1 + \frac{0,25}{100}\right)^{48} = 1\,690\,992,032 \text{ Ft}$$

Tehát a felvehető összeg 1 690 992,032 Ft.

4. feladat: 100 napra elhelyezünk egy bankba 600 000 Ft-ot. Egyszerű kamattal számolva 2 000 Ft kamatot kapunk. Mekkora az éves kamatláb?

Megoldás: A betett és lejáratkor felvehető összeget ismerjük. Keressük a kamatlábat, R -t. Helyettesítsünk be a kamat képletébe.

$$2\,000 = 600\,000 \cdot \frac{R}{100} \cdot \frac{100}{360}$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $R = 1,2\%$.

5. feladat: 500 000 Ft-ot elhelyezünk egy bankban 5 évre. Az első két évben a kamatláb 3%, majd a további 3 évben csak 1,5%. Mekkora összeget vehetünk fel 5 év múlva?

Megoldás: A szöveg külön nem jelöli, akkor kamatos kamatot kell számolni. A változó kamatlábbal írjuk fel az évvégi tőkésített összeget:

Az első év végén a tőkésített összeg: $500\,000 \cdot 1,03$

Második év végén a tőkésített összeg: $500\,000 \cdot 1,03^2$

Harmadik év végén: $500\,000 \cdot 1,03^2 \cdot 1,05$

Ötödik év végén: $500\,000 \cdot 1,03^2 \cdot 1,05^3 = 554\,680,09\text{Ft}$

6. feladat: Mennyi ideig tartsuk a pénzünket a bankban, ha kamatos kamattal számolva a betett összeg dupláját szeretnénk visszakapni? Az éves kamatláb 10% és a bank csak egész évekre fizet kamatot.

Megoldás: A betett összeg T_0 , akkor a felvehető összeg ennek a duplája, azaz $2T_0$. Keressük n -t, az évek számát. Helyettesítsünk be a kamatos kamat képletébe.

$$2T_0 = T_0 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^n \quad \rightarrow \quad 2 = 1,1^n \quad \rightarrow \quad \log_2 2 = n \log_2 1,1$$

Az egyenletet oldjuk meg n -re.

$$n=\frac{\log_2 2}{\log_2 1{,}1}=\frac{1}{\log_2 1{,}1}=7{,}27$$

A duplázás ideje 7,27 év, de a valóságban a pénzünket legalább 8 évig kell a bankban tartani, viszont így a kétszeres összegnél többet vehetünk fel.

7. **feladat:**Egy ingatlan eladásából nagyobb összeghez jutottunk. A pénz egy részéből egyetlen gyerekünk, aki most 12 éves, jövőjét kívánjuk megalapozni. A jelenleg elérhető legmagasabb éves kamatláb 4%. Mekkora összeget helyezzünk el a bankban most, hogy gyerekünk 26 éves korában 10 000 000 Ft-ot vehessen fel?

Megoldás: Ha a szöveg külön nem hangsúlyozza, akkor kamatos kamattal kell számolni. Most 14 évre szeretnénk a pénzünket betenni egy bankba, az éves kamatláb $R=4\%$, évente tőkésítünk és a felvehető összeg 10 000 000 Ft. Helyettesítsünk be a képletbe.

$$10\ 000\ 000=T_0\left(1+\frac{4}{100}\right)^{14}$$

A megoldás $T_0=5\ 774\ 750{,}83\,\text{Ft}$

8. **feladat:** 5 évre elhelyezünk 600 000 Ft-ot 6%-os éves kamatlábra egy bankba. Mennyi pénz lesz a számlánkon, ha a bank
   a. negyedévente tőkésít?
   b. havonta tőkésít?
   c. naponta tőkésít?

Megoldás: Negyedéves tőkésítéssel számolva:

$$T=600\ 000\left(1+\frac{\frac{6}{4}}{100}\right)^{4\cdot 5}=600\ 000\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^{20}=808\ 113\text{Ft}$$

Havonta tőkésítve:

$$T=600\ 000\left(1+\frac{\frac{6}{12}}{100}\right)^{12\cdot 5}=600\ 000\left(1+\frac{0{,}5}{100}\right)^{60}=809\ 310{,}092\ \text{Ft}$$

Naponta tőkésítve:

$$T=600\ 000\left(1+\frac{\frac{6}{360}}{100}\right)^{365\cdot 5}=600\ 000\left(1+\frac{0{,}0167}{100}\right)^{1825}=813\ 276{,}36\ \text{Ft}$$

Figyeljük meg, ha a tőkésítések számát növeljük, akkor a felvehető összeg egyre több lesz. Ez az összeg azonban nem fog végtelenségig növekedni. A növekedésnek jól meghatározható felső határa van.

9. **feladat:** 6%-os éves kamatlábbal számolva mekkora éves kamatlábat realizálhatunk, ha a bank

a. negyedévente tőkésít?
b. havonta tőkésít?
c. naponta tőkésít?

Megoldás: Vizsgáljuk a negyedévenkénti tőkésítés esetét. Írjuk fel először, ha T_0 összeget egy év alatt négyszer tőkésítjünk, akkor hogyan változik, ha $R_{negyed} = \frac{6}{4} = 1,5\%$:

$$T_0\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^4$$

Mi történik, ha ugyanezen összeget R kamatlábbal csak évente egyszer tőkésítjünk?

$$T_0\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

Azt kell megnéznünk, hogy milyen R esetén kapjuk ugyanazt a végösszeget.

$$T_0\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^4 = T_0\left(1+\frac{R}{100}\right) \quad \to \quad \left(1+\frac{1,5}{100}\right)^4 = 1+\frac{R}{100}$$

$$R = 100\left(\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^4 - 1\right)$$

A számolás eredménye $R = 6{,}1364\%$.

Havonkénti tőkésítés esetén hasonlóan járunk el és az alábbi egyenlethez jutunk:

$$T_0\left(1+\frac{\frac{6}{12}}{100}\right)^{12} = T_0\left(1+\frac{R}{100}\right) \quad \to \quad \left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{12} = 1+\frac{R}{100}$$

$R = 6{,}1678\%$.

Naponkénti tőkésítés esetén hasonlóan járunk el és az alábbi egyenlethez jutunk:

$$T_0\left(1+\frac{\frac{6}{360}}{100}\right)^{365} = T_0\left(1+\frac{R}{100}\right) \quad \to \quad \left(1+\frac{6}{100\cdot 360}\right)^{365} = 1+\frac{R}{100}$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $R = 6{,}2716\%$.

Jól látható, hogy ha növelem a tőkésítések számát, akkor egyre nagyobb éves kamatláb realizálódik.

További kidolgozott feladatok

1. **feladat:** Egy termék áfakulcsa kezdetben 15%. A nettó ár 5%-os emelése közben az áfakulcs is változott. Mekkora az új áfakulcs, ha a bruttó ár 10%-kal emelkedett?

Megoldás: Most az új és régi bruttó ár arányát ismerjuk. Tudjuk, hogy a a régi ár 10%-kal nőtt, akkor ez azt jelenti, hogy az új bruttó ár a régi 1,1 része.

$$\frac{\text{új Bruttó ár}}{\text{régi Bruttó ár}} = 1{,}1$$

A számunkra ismeretlen új áfakulcs legyen $x\%$. Ismerjük a nettó ár változását, így írjuk fel az új és régi bruttó ár arányát az ismeretlen áfakulccsal. Írjuk fel először a régi és új bruttó árat.

$$\text{régi Bruttó ár} = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}15$$
$$\text{új Nettó ár} = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}05$$
$$\text{új Bruttó ár} = \text{új Nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}05 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

Helyettesítsünk be a két mennyiség arányára kapott kifejezésbe.

$$\frac{\text{új Bruttó ár}}{\text{régi Bruttó ár}} = \frac{\text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}05 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{\text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}15} = \frac{1{,}05 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{1{,}15} = 1{,}1$$

Kaptunk egy egyenletet x-re, amit oldjunk meg.

$$\frac{1{,}05 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{1{,}15} = 1{,}1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{100} = \frac{1{,}1 \cdot 1{,}15}{1{,}05} - 1$$

Az egyenletet megoldva $x = 20{,}48$. Tehát az új áfakulcs 20,48%.

2. **feladat:** Egy termék áfakulcsa kezdetben 18% volt. A nettó ár 6%-kal emelkedett.
   Hogyan és hány százalékponttal változzon az áfakulcs értéke, ha azt szeretnénk, hogy a termék bruttó ára ne változzon?

Megoldás: Mivel a termék ára nem változik, ez azt jelenti, hogy a régi és új bruttó ár ugyanannyi, azaz az arányuk 1.

$$\frac{\text{új Bruttó ár}}{\text{régi Bruttó ár}} = 1$$

Írjuk fel ezt az arányt az ismeretlen $x\%$-os áfakulccsal.

$$\text{régi Bruttó ár} = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}18$$
$$\text{új nettó ár} = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}06$$
$$\text{új Bruttó ár} = \text{új Nettó ár} \cdot \left(1+\frac{x}{100}\right) = \text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}06 \cdot \left(1+\frac{x}{100}\right)$$

Helyettesítsünk be.

$$\frac{\text{új Bruttó ár}}{\text{régi Bruttó ár}} = \frac{\text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}06 \cdot \left(1+\frac{x}{100}\right)}{\text{régi Nettó ár} \cdot 1{,}18} = \frac{1{,}06 \cdot \left(1+\frac{x}{100}\right)}{1{,}18} = 1$$

Az egyenletet megoldva $x = 11{,}32$. Tehát az új áfakulcs 11,32%, azaz régi áfakulcs 6,68 százalékponttal kell, hogy csökkenjen.

3. feladat: Egy telket szeretnénk eladni. Az érdeklődők közül négyen tesznek érdemi ajánlatot.

- A vevő ajánlata: most fizet 2 000 000 Ft-t.
- B vevő ajánlata: most fizet 1 000 000 Ft-ot, s egy év múlva 1 200 000 Ft-ot.
- C vevő ajánlata: most fizet 600 000 Ft-ot, majd évenként még háromszor 600 000 Ft-ot.
- D vevő ajánlata: most fizet 500 000 Ft, majd kétévente, tehát kétszer 1 000 000 Ft-ot.

Melyik a legkedvezőbb ajánlat, ha az éves kamatláb 15%?

Megoldás: Az ajánlatok összehasonlítását az nehezíti meg, hogy a kifizetések nem azonos időpontban történnek. Ilyenkor azonos időpontra kamatoljuk a különböző összegeket, és így hasonlítjük össze őket. A két leggyakrabban használt számítási mód, amikor a feladatban szereplő legkésőbbi időpontra kamatolunk, illetve amikor a legkorábbi időpontra, azaz diszkontálunk. Számoljunk most a legutolsó időponttal, ez a vétel után 4 év lesz. Ekkor fizeti be az utolsó részletet a legkésőbb fizető D vevő. Határozzuk meg a különböző vevőktől kapott pénzösszegek ezen időpontbeli értékét.

A vevő:

$$T_A = 2\ 000\ 000 \cdot 1{,}15^4 = 3\ 498\ 012{,}5\,\text{Ft}$$

B vevő:

$$T_B = 1\ 000\ 000 \cdot 1{,}15^4 + 1\ 200\ 000 \cdot 1{,}15^3 = 3\ 574\ 056{,}25\,\text{Ft}$$

C vevő:

$$T_C = 600\ 000 \cdot 1{,}15^4 + 600\ 000 \cdot 1{,}15^3 + 600\ 000 \cdot 1{,}15^2 + 600\ 000 \cdot 1{,}15 = 3\ 355\ 428{,}75\,\text{Ft}$$

D vevő:

$$T_C = 500\ 000 \cdot 1{,}15^4 + 1\ 000\ 000 \cdot 1{,}15^2 + 1\ 000\ 000 = 3\ 197\ 003{,}125\ \text{Ft}$$

Az ajánlatokat így összehasonlítva látható, hogy a B vevő ajánlata a legkedvezőbb, ezt célszerű választani.